UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

PROCEDIMIENTOS SECUENCIALES GENERALIZADOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

María del Mar Fenoy Muñoz

Bajo la dirección de la Doctora:

Pilar Ibarrola Muñoz

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-1794-2

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

PROCEDIMIENTOS SECUENCIALES GENERALIZADOS

MARÍA DEL MAR FENOY MUÑOZ

Memoria para optar al grado
de Doctor en Ciencias Matemáticas,
realizada bajo la dirección de la
Dra. Dª Pilar Ibarrola Muñoz

Madrid, 26 de septiembre de 2001

Dª PILAR IBARROLA MUÑOZ, CATEDRÁTICA DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

CERTIFICA:

Que la presente memoria de título:

PROCEDIMIENTOS SECUENCIALES GENERALIZADOS

Ha sido realizada bajo mi dirección por Dª. María del Mar Fenoy Muñoz, licenciada en Ciencias Matemáticas, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Madrid a 26 de septiembre de 2001.

A mi familia

Este trabajo ha sido dirigido por Dª Pilar Ibarrola Muñoz, a la cual quiero expresar mi agradecimiento, por su inestimable ayuda, por sus ideas y por el apoyo que me ha prestado durante todo este tiempo, tanto en el ámbito científico, como a nivel personal.

Un agradecimiento a mis compañeros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Matemáticas, por facilitarme un poco más esta tarea.

Y finalmente quisiera agradecer a todos mis seres queridos el afecto, el apoyo y la paciencia que me han prestado siempre de manera incondicional.

Prefacio

El origen del trabajo es la memoria titulada "Optimal Sequentially Planned Decision Procedures" debida a Norbert Schmitz, publicada en 1993. Los resultados de esta memoria de los cuales hemos hecho uso están recogidos en el primer capítulo.

Sobre el modelo introducido por Schmitz, hemos ido obteniendo resultados tanto de tipo probabilístico, que hemos recogido bajo el título Análisis Estocástico, como de tipo estadístico que se concretan en un estudio de la suficiencia y la invariancia para dicho modelo.

En la presente memoria se estudian diferentes aspectos de los problemas de decisión secuencialmente planificados asociados a un problema de decisión secuencial general. Los problemas de decisión secuencialmente planificados son problemas secuenciales en los que en cada etapa no sólo se decide si parar o seguir con el muestreo, sino en este último caso qué número de observaciones tomar en la siguiente etapa; el tamaño de la siguiente submuestra dependerá de la información obtenida hasta ese instante.
Se va a tratar de un problema de decisión dinánima, cuyo espacio de tiempos A, va a estar constituido por sucesiones de números naturales.

En el primer capítulo, de carácter introductorio, se plantean los problemas de decisión secuencialmente planificados, se muestran algunos ejemplos para ilustrarlos, y se define el problema de muestreo óptimo: secuencia de tamaños muestrales, que indica en cada coordenada el tamaño muestral a tomar en la correspondiente etapa. Para la mejor comprensión de los siguientes capítulos se exponen los algoritmos que permiten encontrar el plan de muestreo óptimo para un determinado problema de decisión secuencialmente planificado en dos situaciones, cuando el conjunto de posibles secuencias muestrales es finito y en el caso general.
También se incluyen condiciones necesarias para la existencia del plan de muestreo óptimo.

En el segundo capítulo dedicado al análisis estocástico, se estudia el problema de parada opcional para una sucesión de planes de muestreo $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de forma que entre τ_n y τ_{n+1} se verifica una relación de orden parcial $\preceq$ que permite identificar en este caso a τ_n como predecesor de τ_{n+1}.
Con este objetivo, empiezo por realizar un análisis de las propiedades de los planes de muestreo; defino para ello las σ-álgebras asociadas a los mismos y estudio sus características. Asimismo, defino por su utilidad en análisis posteriores a partir de un plan de muestreo dado:

- la secuencia muestral con a lo sumo k etapas.
- la secuencia muestral con a lo sumo j observaciones.
- se comprueba que son planes de muestreo y se estudian sus propiedades.

Estos planes de muestreo se corresponden en este tipo de problemas, con la aproximación usual de un tiempo de parada T por $T_n = \text{mín}\{T, n\}$; en nuestro caso podemos aproximar un plan de muestreo de dos formas distintas.

Se obtiene un resultado fundamental en este capítulo que es la verificación del teorema de la proyección opcional.

Se definen y se estudian a continuación las propiedades de las martingalas, submartingalas y supermartingalas para las familias $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ con índices en el espacio de tiempos considerado.

Una primera solución al problema de parada opcional se consigue en el caso de que la sucesión de planes de muestreo sean sucesores directos.
Ahora bien para poder resolver el problema de parada opcional en el caso general, es necesario recurrir a las definiciones de planes de muestreo alcanzables, fuertemente alcanzables y finitamente alcanzables, definidos por Washburn y Willsky [30] basados en funciones que bajo determinadas condiciones permiten pasar de un plan de muestreo a otro plan de muestreo sucesor del anterior, y que aplicamos en el contexto de los problemas secuencialmente planificados.
Se prueba el teorema de parada opcional para el caso de planes de muestreo finitamente alcanzables y para planes de muestreo alcanzables; se demuestra finalmente que dos planes de muestreo cualesquiera con la única condición de que uno preceda al otro son alcanzables entre sí.

Finalmente se estudia el teorema de parada opcional bajo integrabilidad uniforme, para ello se adaptan los conceptos de integrabilidad uniforme para el tipo de sucesiones estocásticas que estamos tratando, y de último elemento de una martingala o submartingala, y se obtienen resultados interesantes en este sentido.

En los capítulos tercero y cuarto se ha tratado de generalizar al caso considerado, resultados clásicos sobre suficiencia e invariancia de la teoría de la decisión secuencial.
La principal novedad de la generalización que se propone aparte del espacio de tiempos considerado es construir los resultados a partir de familias no isotónicas de σ-álgebras suficientes o invariantes respectivamente.
En el tercer capítulo se introduce el concepto de suficiencia en el modelo considerado y se obtiene que los procedimientos de decisión secuencialmente planificados basados en una familia de σ-álgebras suficientes transitivas forman una clase esencialmente completa.
Como las familias de σ-álgebras suficientes en general no son isotónicas, ello nos lleva a definir los planes de muestreo respecto a una familia de sub-σ-álgebras no isotónica. Otro concepto que se introduce en este sentido es el de familia de sub-σ-álgebra transitiva respecto de otra familia de sub-σ-álgebras. Se resuelve el teorema de la proyección opcional para familias de σ-álgebras no isotónicas; y se llega al resultado planteado.

En el cuarto capítulo se definen los problemas de decisión secuencialmente planificados invariantes bajo un grupo de transformaciones; se muestran propiedas básicas de los mismos.
Una vez planteados los procedimientos de decisión secuencialmente planificados invariantes, nuestro objetivo es encontrar el procedimiento de decisión secuencialmente planificado invariante óptimo, que minimice la función de riesgo asociada al problema.

El inconveniente se presenta porque la familia de sub-σ-álgebras invariantes no tiene por qué ser isotónica, por lo que basándonos en los conceptos definidos en el capítulo anterior, buscamos el plan óptimo dentro del conjunto de planes de muestreo respecto de una familia de sub-σ-álgebras no isotónicas.

Se soluciona el problema de muestreo óptimo invariante primero en el caso finito, y a continuación el caso de horizonte infinito y número máximo de etapas m. Se obtiene en ambos casos que el plan de muestreo óptimo es invariante y es plan de muestreo respecto de la familia no isotónica de sub-σ-álgebras. Se trata finalmente el caso general, obteniéndose el plan de muestreo óptimo invariante, pero que no es plan de muestreo respecto de la familia no isotónica.

Y en la última sección de este capítulo se dan condiciones acerca de la función de pérdida para aproximar la solución del problema general a través de los problemas truncados en m etapas; proporcionándose dos aproximaciones.
Si el valor del problema general se puede aproximar por los valores de los problemas truncados, se tiene que el plan de muestreo óptimo es invariante y es plan de muestreo respecto a la familia no isotónica.

Indice

Capítulo 1

Procedimientos de Decisión Secuencialmente Planificados

Los procedimientos de decisión secuencialmente planificados, surgen con la idea de desarrollar una teoría generalizada de la decisión secuencial de manera que conserve las ventajas de los procedimientos secuenciales, evitando sus inconvenientes.

Los procedimientos secuenciales tienen entre otros objetivos: evitar el sobremuestreo y por tanto reducir los costes muestrales, asi como resolver problemas que no pueden llevarse a cabo mediante procedimientos que utilizan muestras de tamaño fijo. Además las observaciones no son tomadas todas a la vez, sino por etapas, en cada una de las cuales la toma de decisiones está basada en la información disponible hasta ese instante.

Y como inconvenientes, podemos observar entre otros los siguientes: el tiempo de parada asociado al procedimiento secuencial minimiza el número esperado de observaciones, pero no los costes muestrales, y en muchas ocasiones es más caro evaluar k muestras de tamaño uno, que una de tamaño k. Otra objeción a los procedimientos secuenciales, sería que en algunas investigaciones científicas las observaciones necesitan un tiempo de desarrollo, por lo que no parece lógico ir obteniendo las observaciones una a una.
Una desventaja más, viene causada por la idea de que tamaños muestrales pequeños pueden ser el resultado de "outliers".

Estas observaciones plantean el investigar grupos de items cuyos tamaños muestrales dependan de la información disponible en cada instante, lo que nos lleva a los Procedimientos Secuencialmente Planificados. Estos consisten en generalizar la teoría de la Decisión Secuencial, investigando grupos de observaciones muestrales de tamaño variable. El tamaño de los grupos dependerá de la información obtenida hasta ese instante.

En este primer capítulo definiremos los Procedimientos de Decisión Secuencialmente Planificados planteados por Schmitz [25] basados en el concepto de "variables de control" debido a Haggstrom [9], y posteriormente trataremos el problema de muestreo óptimo [25], en el caso finito y en el caso general; consistente en encontrar un plan de muestreo que minimice o maximice el valor del problema. Se incluye la solución detallada del problema de muestreo óptimo que puede ser clarificadora para capítulos posteriores en que se hará referencia a la misma.

Todos estos conceptos serán imprescindibles para el posterior desarrollo sobre análisis estocástico, invariancia y suficiencia de los procedimientos de decisión secuencialmente planificados, que llevaremos a cabo en la presente memoria.

1.1 Procedimientos Secuencialmente Planificados

Empezaremos por introducir el espacio de los tiempos de nuestro problema:

Definición 1.1.1 *1. $M \subset \mathbb{N}$ denotamos:*

$$A_M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M^j \cup \{()\}$$
$$A_M^* = M^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, ...) : a_i \in M, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

2. Si $a = (a_1, ..., a_j), b = (b_1, ..., b_k) \in A_M$ definimos $a \preceq b$, si $j \leq k$ y $a_i = b_i$, $i = 1, ..., j$.

3. Si $a = (a_1, ..., a_j) \in A_M$, $b = (b_1, b_2, ...) \in A_M^*$, definimos $a \preceq b$ si $a_i = b_i$, $i = 1, ..., j$,

4. Si $a = (a_1, a_2, ...), b = (b_1, b_2, ...) \in A_M^*$ definimos $a \preceq b$ si $a_i = b_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
En particular $() \preceq a$, $\forall a \in A_M \cup A_M^*$.

Observación 1

1. El conjunto M describe el tamaño de las posibles submuestras; $()$, significa no tomar observaciones. Algunos ejemplos:
   - $M = \{1, ..., m\}$, el tamaño de cada una de las submuestras es menor o igual a m.
   - $M = \mathbb{N}$, no se impone ninguna restricción acerca de los tamaños de las submuestras.
2. A_M (o A), contiene todas las posibles secuencias finitas de tamaños muestrales. Obviamente es numerable.

Por ejemplo: $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, significa que comenzamos con una submuestra de tamaño a_1, continuamos con otra de tamaño a_2,...
Llamaremos a los elementos de $A \cup A^*$ *secuencias muestrales.*

3. Dado $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, definimos:

   - $h : A \longrightarrow \mathbb{N}$, con $h(a) = j$, si $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, $h(()) = 0$, proporciona el número de submuestras de la secuencia a.
   - $g : A \longrightarrow \mathbb{N}$, con $g(a) = \sum_{i=1}^{j} a_i$, si $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, $g(()) = 0$, proporciona el tamaño muestral total de la secuencia a.
   - Así,

   $$\begin{aligned} A_k &= \{a \in A : h(a) = k\} \\ A^k &= \{a \in A : g(a) = k\} \end{aligned}$$

   que son respectivamente el conjunto de todas las secuencias muestrales con k-submuestras, y el conjunto de todas las secuencias muestrales de tamaño muestral k.

4. La relación $\preceq$ es un orden parcial sobre $A \cup A^*$.
   $a \preceq b$ significa que la secuencia b es una continuación de a.

5. Diremos que $b \in A$ es un sucesor directo de $a \in A$, si $a \prec b$, y no existe $c \in A$ tal que $a \prec c \prec b$.
   Así por ejemplo dado $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, $ak = (a_1, ..., a_j, k)$, $k \in M$ son los sucesores directos de a.
   Para $a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \npreceq a_2 \npreceq a_1$, podemos obtener $b_1, b_2 \in A \cup A^*$ con $a_1 \preceq b_1$, y $a_2 \preceq b_2$, tales que $b_1 \npreceq b_2 \npreceq b_1$, es decir, $(A, \preceq)$ es un árbol.

Describimos a continuación los procedimientos secuenciales donde los tamaños de las sucesivas submuestras se determinan de forma secuencial.

Definición 1.1.2 *Un problema general de decisión secuencial es una upla*

$$((\mathcal{X}, \mathcal{B}), \Theta, (P_\theta)_{\theta\in\Theta}, \mathcal{A}, (\mathcal{B}_a)_{a\in A}, (D, \mathcal{D}), (L_a)_{a\in\mathcal{A}}, c)$$

- $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es un espacio medible.
- Θ es el espacio paramétrico.
- $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ es una familia de distribuciones sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

- $\mathcal{A} \subset A = \cup_{j=1}^{\infty} M^j \cup \{()\}$, conjunto de las sucesiones muestrales admisibles finitas, que juega el papel de espacio de los tiempos.
- $(B_a)_{a \in A}$, familia isotónica de sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$, es decir, $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_b \subset \mathcal{B}$, $\forall a, b, \in A$, con $a \prec b$.
- $(D, \mathcal{D})$ espacio medible, llamado espacio de acciones.
- $(L_a)_{a \in \mathcal{A}}$ familia de funciones de pérdida

$$L_a : \Theta \times D \times \mathcal{X} \longrightarrow [0, +\infty]$$

donde $\forall \theta \in \Theta$, y $\forall d \in D$, L_a es $\mathcal{B}_a$-medible.

- $c : \Theta \times \mathcal{A} \times \mathcal{X} \longrightarrow [0, +\infty)$ función de coste, donde $\forall \theta \in \Theta$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $c(\theta, \cdot, x)$ es monótona no decreciente en a.

Definición 1.1.3 *Un procedimiento de decisión secuencialmente planificado (para un problema de decisión general P) es un par (τ, φ) consistente en:*

1. *Una función $\tau : \mathcal{X} \longrightarrow A \cup A^*$, tal que $\{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$, y $\{\tau \succeq (a_1, ..., a_j, k)\} \in \mathcal{B}_a$ $\forall a = (a_1, ..., a_j) \in A$, $\forall k \in M$. Llamamos a τ plan secuencial de muestreo no aleatorizado.*
2. *$\varphi = (\varphi_a)_{a \in A}$ familia de funciones de decisión terminal aleatorizadas respecto a $\mathcal{B}_a$, y φ es el procedimiento de decisión terminal.*

Observación 2

1. Si $M = \{1\}$, y $\mathcal{A} = A$, es decir, después de cada observación simple, se toma una nueva decisión, nos lleva a la definición dada en los procedimientos secuenciales habituales.
2. $\mathcal{B}_a$ representa la información obtenida de la sucesión muestral a, ó información disponible en el instante a.
3. La hipótesis de la $\mathcal{B}_a$-medibilidad del plan de muestreo τ, significa que la decisión de parar con la sucesión muestral o decidir el tamaño muestral de la siguiente submuestra, depende únicamente de la información obtenida hasta ese momento. Una interpretación análoga tiene la $\mathcal{B}_a$-medibilidad de las funciones de decisión terminal φ_a.
4. El conjunto $\mathcal{A}$ permite recoger restricciones del tipo

$$\mathcal{A} = \{a \in A : h(a) \leq k\} \quad \mathcal{A} = \{a \in A : g(a) \leq k\}$$

5. En relación con la definición de $\mathcal{A}$, extendemos la familia de funciones de pérdida de forma que $L_a \equiv \infty$, $\forall a \notin \mathcal{A}$.

6. Nos interesarán a efecto prácticos planes de muestreo con la propiedad
$$P_{\theta\in\Theta}(\tau \in \mathcal{A}) = 1$$
$\forall\theta \in \Theta$, es decir que paren c.s. con sucesiones muestrales admisibles.

7. Si con frecuencia se admite la siguiente estructura de la función de coste c, $c(\theta, n, x)$ representa el coste de la submuestra de tamaño n, si P_θ es la distribución de probabilidad asociada, y se ha observado x; se supone que una secuencia $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, conlleva un coste
$$C(\theta, a, x) = \sum_{i=1}^{j} c(\theta, a_i, x)$$
con $C(\theta, \emptyset, x) = 0$, si θ es el valor verdadero del parámetro.

Así definidos, los Procedimientos de Decisión Secuencialmente Planificados son fácilmente aplicables. En primer lugar seleccionamos una muestra inicial de tamaño a_1 de forma determinística, pues $\mathcal{B}_\emptyset = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ (no hay información inicial). Con frecuencia será $\mathcal{B}_a = \sigma(X_1, \cdots, X_{g(a)})$ en cuyo caso, de las observaciones $x_1, ..., x_{g(a_1)}$, decidimos de acuerdo al plan τ, parar o elegir una submuestra de tamaño a_2; donde a_2 es una variable aleatoria puesto que está determinada a partir de $\mathcal{B}_{a_1}$ como función de $X_1, ..., X_{g(a_1)}$.
Si se para se toma φ_{a_1}. Sino la decisión se toma en función de $x_1, ..., x_{g(a_1)}, ..., x_{g(a_1)+g(a_2)}$ y de nuevo esta es parar o muestrear de nuevo. Y así sucesivamente.

1.2 Ejemplos

1. Los procedimientos secuenciales (N, φ) clásicos son un caso particular de los procedimientos secuencialmente planificados donde $M = \{1\}$, y $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

2. El procedimiento de Stein [28] se puede ajustar a estos modelos. Este procedimiento consiste en considerar $X_1, X_2, \cdots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas $N(\mu, \sigma^2)$, siendo μ, σ^2 desconocidos. Para $l > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ tratamos de construir un intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$, con longitud $2l$. Como probó Dantzig [4] no existe intervalo de confianza para una muestra de tamaño fijo con estas propiedades. Pero se puede resolver el problema según el siguiente resultado bietápico dado por Stein [28]:

   Teorema 1.2.1 *Sea $n_1 \geq 2$, se toma una muestra inicial de tamaño n_1 y se define*
   $$N = \max\{n_1, [S_{n_1}^2 t_{n_1-1;\alpha/2}^2 / l^2]\}$$

siendo $\overline{X}_{(n)}$ *la media muestral y* S_n^2 *la varianza muestral para una muestra de tamaño* n*. Entonces, tomada una segunda muestra, hasta tener un total de* N *observaciones,*

$$[\overline{X}_{(N)} - l, \overline{X}_{(N)} + l]$$

es un intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ *para* μ*.*

Veamos como se puede ajustar el procedimiento de Stein a los modelos de decisión secuencialmente planificados:

Tomamos una muestra inicial de tamaño fijo n_1, utilizando

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}), \Theta, (P_\theta)_{\theta \in \Theta}, (D, \mathcal{D}), \alpha, n_1$$

$$Y = [S_{n_1}^2 \cdot t_{n_1-1,\alpha/2}^2 / l^2] \text{ y } M = \mathbb{N}$$

Podemos describir el procedimiento de Stein a través de una procedimiento secuencialmente planificado mediante

$$\tau = \begin{cases} (n_1) & Y \leq n_1 \\ (n_1, Y - n_1) & Y > n_1 \end{cases}$$

$$\varphi_a(x) = (\overline{x}_{(g(a))} - l, \overline{x}_{(g(a))} + l)$$

Así el coste asociado es

$$c_0 + cn_1 + (c_0 + c(Y - n_1))I_{\{Y > n_1\}})$$

mientras que en un muestreo uno a uno, el coste sería

$$(c_0 + c)n_1 + ((c_0 + c)(Y - n_1)I_{\{Y > n_1\}})$$

obviamente mayor que el anterior.

3. El procedimiento de inspección doble de Dodge y Romig [5], consistente en:
   (a) Observar una primera muestra de n_1 piezas.
   (b) Si el número de piezas defectuosas encontradas no excede de c_1, número máximo de piezas defectuosas permitidas para la primera muestra, se acepta el lote.
   (c) Si el número de piezas defectuosas encontradas en la primera muestra excede c_2, número máximo de observaciones defectuosas permitidas para la primera y segunda muestra, se inspeccionan todas las piezas restantes.
   (d) Si el número de piezas defectuosas encontradas en la primera muestra excede c_1, pero no excede c_2, se inspecciona una segunda muestra de n_2 piezas.

(e) Si el número de piezas defectuosas en la primera y segunda muestra no excede c_2, se acepta el lote.

(f) Si el número total de piezas defectuosas en la primera y segunda muestra excede c_2, se inspeccionan todas las piezas restantes.

se puede ajustar a los procedimientos secuencialmente planificados. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B}), \Theta, (P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ $D = \{\text{aceptar, inspección total}\}$ $\mathcal{D} = \mathcal{P}(D)$, $M = \{1, ..., n\}$, $n_1, n_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$, con $c_1 < c_2$.

El plan de muestreo secuencial

$$\tau = \begin{cases} n_1 & \sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq c_1 \\ (n_1, n - n_1) & \sum_{i=1}^{n_1} X_i > c_2 \\ (n_1, n_2) & c_1 < \sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq c_2, \quad \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i \leq c_2 \\ (n_1, n_2, n - n_1 - n_2) & c_1 < \sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq c_2, \quad c_2 \leq \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i \end{cases}$$

Y el procedimiento de decisión secuencial no aleatorizado

$$\varphi_a(x_1, ..., x_{g(a)}) = \begin{cases} \text{aceptar} & \sum_{i=1}^{g(a)} x_i \leq c_2 \\ \text{inspección total} & \sum_{i=1}^{g(a)} x_i > c_2 \end{cases}$$

que en efecto describe el procedimiento de doble inspección.

Definimos a continuación los planes de muestreo aleatorizados necesarios para reducciones por suficiencia, transitividad e invariancia.

1.3 Planes de Muestreo Aleatorizados

Definición 1.3.1 *Sea un problema de decisión secuencial general*

$$P = ((\mathcal{X}, \mathcal{B}), \Theta, (P_\theta)_{\theta\in\Theta}, \mathcal{A}, (\mathcal{B}_a)_{a\in A}, (D, \mathcal{D}), (L_a)_{a\in\mathcal{A}}, c)$$

1. *Un plan de muestreo secuencial aleatorizado* $\beta = (\beta_a)_{a\in A}$ *es una familia de probabilidades de transición de* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_a)$ *en* $(M_0, \mathcal{P}(M_0))$*, con* $\beta_a : \mathcal{X} \times \mathcal{P}(M_0) \longrightarrow [0, 1]$*, donde* $M_0 = M \cup \{0\}$*.*

2. *Para un plan de muestreo secuencial aleatorizado* $\beta = (\beta_a)_{a\in A}$ *y* $a = (a_1, ..., a_n) \in A$*,* $n \in \mathbb{N}$*, sea*
$$b_a^\beta(x, k) = \beta_a(x, k) \prod_{i=0}^{n-1} \beta_{(a_1,...,a_i)}(x, a_{i+1})$$
$\forall x \in \mathcal{X}$*,* $k \in M_0$ *y* $b_{()}^\beta = \beta_{()}$ *siendo* () *sin observaciones.*

3. *Un plan de muestreo secuencial aleatorizado* $\beta = (\beta_a)_{a\in A}$ *diremos que tiene la propiedad terminal si*
$$\sum_{a\in\mathcal{A}} b_a^\beta(\cdot, 0) = 1 \quad P_\theta - c.s. \quad \forall\theta \in \Theta$$

4. *Un plan de muestreo aleatorizado secuencialmente planificado es un par (β, φ) consistente en un plan de muestreo secuencial aleatorizado β y una regla de decisión terminal φ.*

Observación 3

1. $\beta_a(x,\cdot)$ para $x \in \mathcal{X}$ y $a = (a_1, ..., a_n)$ da la probabilidad condicionada de todas las posibles continuaciones del experimento (representadas en M_0) si los tamaños previos son $a_1, ..., a_n$.

2. La $\mathcal{B}_a$-medibilidad de $\beta_a(\cdot, k)$ garantiza que sólo la información disponible hasta ese momento ($a = (a_1, ..., a_n)$) es utilizada para determinar la distribución de probabilidad sobre M_0.

3. $b_a^\beta(x, k)$ describen para $x \in \mathcal{X}$, $a \in A$, $k \in M$ la probabilidad de que la secuencia a pertenezca al sub-árbol $\{e \in A : e \succeq ak\}$. Y $b_a^\beta(\cdot, 0)$ determina la probabilidad de que muestreando según β la secuencia $a \in A$ se realice.

4. La propiedad de terminación, significa que el muestreo terminará en un número finito de etapas a través de secuencias muestrales admisibles.

5. El plan de muestreo secuencial aleatorizado β generaliza el plan de muestreo no aleatorizado τ. Así, podemos identificar τ, a través de β dado por

$$\beta_a(x,\cdot) = \begin{cases} \epsilon_j & \exists j \in M \text{ tal que } \tau(x) \succeq aj \\ \epsilon_0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

   (indicando ϵ_j una masa 1 en j)

$$\{\beta_a(\cdot, k) = \alpha\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \alpha \in (0,1) \\ \{\tau \succeq ak\} & \alpha = 1 \\ \{\tau \succeq ak\}^c & \alpha = 0 \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

   luego $\beta = (\beta_a)_{a \in A}$ es una plan de muestreo secuencial bien definido.
   Además $b_a^\beta(\cdot, 0) = I_{\{\tau = a\}}$, $\forall a \in A$, luego la condición $P_\theta(\tau \in \mathcal{A}) = 1$ es equivalente a $\sum_{a \in \mathcal{A}} b_a^\beta(\cdot, 0) = 1$, P_θ-c.s. por lo que la propiedad de terminación coincide en ambos casos.

1.4 Plan de Muestreo Óptimo

La presente sección está dividida en tres partes: en la primera daremos una definición del problema de muestreo óptimo, en la segunda se obtiene un algoritmo para la búsqueda del plan de muestreo óptimo τ^*; y en la última se da la estructura de τ^*, y las condiciones bajo las cuales existirá dicho plan de muestreo óptimo.

1.4.1 Problema de Muestreo Óptimo

En los procedimientos de decisión secuencial clásicos, a la hora de buscar un procedimiento de decisión óptimo, podemos tratar de encontrar un tiempo de parada N para una regla de decisión terminal φ^* fija. Este problema nos lo resuelve la teoría de parada óptima (ver [2]).

Teniendo en cuenta que los procedimientos de decisión secuencialmente planificados, vienen definidos por un par (τ, φ), donde τ es un plan secuencial de muestreo y φ una regla de decisión terminal, podemos pensar, elegida φ^*, en desarrollar la correspondiente teoría acerca de muestreo óptimo, generalización del problema de parada óptima.

A diferencia de los problemas de parada óptima, en los problemas de muestreo secuencial no solamente debemos decidir si parar o no en un determinado instante, sino qué tamaño muestral tomar en el caso de que la decisión sea continuar.
Para ello definimos a continuación:

Definición 1.4.1 *Un problema de muestreo óptimo es una upla*

$$((\mathcal{X}, \mathcal{B}, P), \mathcal{A}, (\mathcal{B}_a)_{a\in A}, (Z_a)_{a\in\mathcal{A}})$$

- $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ espacio de probabilidad.
- $\mathcal{A} \subset A = \bigcup_{j=1}^{\infty} M^j \cup \{()\}$, con $M \subset \mathbb{N}$, secuencias muestrales finitas admisibles.
- $(\mathcal{B}_a)_{a\in A}$ familia isotónica de sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$.
- $(Z_a)_{a\in\mathcal{A}}$ con $Z_a : (\mathcal{X}, \mathcal{B}_a) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ funciones $\mathcal{B}_a/\mathcal{B}$-medibles.

Observación 4 *1. $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$, espacio de probabilidad con P conocida.*

2. *Z_a es el pago asociado a la secuencia muestral $a \in \mathcal{A}$, definimos $Z_a = -\infty$ si $a \in (A \cup A^*) - \mathcal{A}$.*

3. *Consideraremos planes de muestreo τ no aleatorizados. No es una restricción substancial, puesto que es posible describir los planes de muestreo secuenciales extendiendo el espacio $\mathcal{X}$ y las σ-álgebras $\mathcal{B}_a$ de forma apropiada, ver Siegmund [27].*

4. *Para cada plan secuencial de muestreo τ definimos*

$$Z_\tau = \begin{cases} Z_a & \{\tau = a\} \text{ si } a \in \mathcal{A} \\ -\infty & \text{otro caso} \end{cases}$$

que proporciona la correspondiente ganancia. Como $\mathcal{A}$ es numerable Z_τ es una función $\mathcal{B}/\overline{\mathcal{B}}$ medible.

Al ser los problemas de parada óptima un caso particular de los problemas de muestreo óptimo para $M = 1$ tenemos una gran variedad de ejemplos.

Ejemplo:

$\dfrac{S_n}{n}$ modificado.

Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que

$$P(X_1 = 1) = 1/2 = P(X_1 = -1)$$

En cada instante de decisión se debe determinar el número de jugadas (tamaño de la muestra) en esa etapa. Si paramos el juego después de j-decisiones, que dan lugar a k observaciones individuales X_i, el resultado es valorado a través de la función de ganancia

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{j}$$

Podemos considerar tres variantes del juego

i) Sin restricciones sobre el número de decisiones a tomar, y sobre el número de observaciones en cada etapa.

ii) Supongamos que podemos elegir a los sumo $m \in \mathbb{N}$ observaciones en cada etapa, pero no tenemos restricciones en el número de decisiones a tomar.

iii) El número total de observaciones a tomar es menor o igual que $m \in \mathbb{N}$.

Formulamos a continuación estos juegos como problemas de muestreo óptimo.

- $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P) = (\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}), Q^{\mathbb{N}})$, donde $Q(-1) = Q(1) = 1/2$, y $X_i = \Pi_i$ (proyección sobre la i-ésima componente).

- i) $M = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = A$.
  ii) $M = \{1, ..., m\}$, $\mathcal{A} = A$.
  iii) $M = \{1, ..., m\}$, $\mathcal{A} = \{a \in A : g(a) \leq m\}$.

- $\mathcal{B}_a = \sigma(X_1, ..., X_{g(a)})$, $a \in A$, para una secuencia muestral a, la σ-álgebra $\mathcal{B}_a$ contiene la información de los resultados de las $g(a)$ observaciones individuales.

- $Z_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{g(a)} X_i}{h(a)}$, $a \in \mathcal{A}$, $a \neq ()$, $Z_{()} = 0$.

□

Definición 1.4.2 *Sea* $((\mathcal{X},\mathcal{B},P),\mathcal{A},(\mathcal{B}_a)_{a\in A},(Z_a)_{a\in\mathcal{A}})$ *un problema de muestreo óptimo.*

1. $\widehat{T}=\{\tau:\tau$ *plan de muestreo secuencial tal que* $\exists EZ_\tau\}$ *conjunto de los planes de muestreo admisibles.*

2. $v=\sup_{\tau\in\widehat{T}} EZ_\tau$ *valor del problema.*

3. *Diremos que un plan* $\tau^*\in\widehat{T}$ *es óptimo si* $v=EZ_{\tau^*}$.

Denotamos por

$$T=\{\tau\in\widehat{T}:EZ_\tau^-<+\infty\}$$

$$T_a=\{\tau\in T:\tau\succeq a\}\quad a\in A$$

$$T_a^+=\{\tau\in T:\tau\succ a\}\quad a\in A$$

1.4.2 Plan de Muestreo Óptimo con Horizonte Finito

Serán los planes de muestreo, tales que el tamaño muestral total está acotado por $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ es finito, es decir, $\mathcal{A}\subset\{a\in A:g(a)\leq m\}$.

De acuerdo a la idea básica de la programación dinámica, a través del método de inducción hacia atrás (método *backward*), obtendremos un plan de muestreo óptimo, para el correspondiente problema de muestreo óptimo.
Previamente definimos,

$$\tilde{\mathcal{A}}=\{\tilde{a}\in A:\exists a\in\mathcal{A},\tilde{a}\preceq a\}$$

el mínimo árbol de A, que contiene a $\mathcal{A}$, con $\emptyset\in\tilde{\mathcal{A}}$ como mínimo elemento. $\tilde{\mathcal{A}}$ es finito, por serlo $\mathcal{A}$.
Sea $\forall a\in\tilde{\mathcal{A}}$,

$$\tilde{M}_a=\{j\in M:aj\in\tilde{\mathcal{A}}\}$$

y para $a=(a_1,...,a_k)\in A$, y $1\leq i\leq k$

$$a^i=(a_1,...,a_i)$$

las primeras i-submuestras.

Teorema 1.4.1 *Sea* $((\mathcal{X},\mathcal{B},P),\mathcal{A},(\mathcal{B}_a)_{a\in A},(Z_a)_{a\in\mathcal{A}})$ *un problema de muestreo óptimo con* $\mathcal{A}$ *finito. Definimos para* $a=(a_1,...,a_k)\in\tilde{\mathcal{A}}$

$$U_a=\begin{cases} Z_a & si\ \tilde{M}_a=\emptyset\\ \max\{Z_a,\max_{j\in\tilde{M}_a}E(U_{aj}/\mathcal{B}_a)\} & si\ \tilde{M}_a\neq\emptyset\end{cases}$$

$$\widehat{B}(aj) = \{x : j = \min\{l \in \tilde{M}_a : E(U_{al}/\mathcal{B}_a) = \max_{i \in \tilde{M}_a} E(U_{ai}/\mathcal{B}_a)\}\}$$

para $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $j \in \tilde{M}_a$.
Y

$$\tau_a^*(x) = \begin{cases} a & si\ U_a(x) = Z_a(x) \\ b = (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_j) & si\ para\ b^i \quad U_{b^i}(x) > Z_{b^i}(x), x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \\ & k \leq i < k+j, U_b(x) = Z_b(x) \end{cases}$$

Entonces $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, *se tiene:*

1. $\tau_a^* \in T_a$.

2. $E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{B}_a) = U_a$ *P-c.s.*

3. $U_a \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)$ *P-c.s.* $\forall \tau$ *tal que* τ *es un plan de muestreo* $\tau \succeq a$.

4. $EZ_{\tau_a^*} = \sup_{\tau \in T_a} EZ_\tau$, *en particular* $v = EZ_{\tau_{()}^*}$.

Demostración:

1. $\tau_{a^*} \in T_a$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$. Probaremos que τ_a^* es un plan de muestreo, que $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$ es $P(\tau_a^* \in \mathcal{A}) = 1$, y finalmente $EZ_{\tau_a^*}^- < +\infty$.

   - τ_a^* es un plan de muestreo.
     Si $\tilde{M}_a = \emptyset$, $U_a(x) = Z_a(x)$ y Z_a es una función $\mathcal{B}_a$-medible,

     $$\{\tau_a^* = a\} = \{x : \tau_a^*(x) = a\} = \{x : U_a(x) = Z_a(x)\} \in \mathcal{B}_a$$

     Y además $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $j \in \tilde{M}_a$, $\widehat{B}(aj) \in \mathcal{B}_a$

     $$\{\tau_a^* = b\} \in \mathcal{B}_b, \quad \forall b \in \tilde{\mathcal{A}}$$

     $$\{\tau_a^* \succeq bj\} \in \mathcal{B}_b$$

   - $Z_a = -\infty$ si $a \in \tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$, entonces por la construcción de τ_a^* es

     $$P(\tau_a^* \in \mathcal{A}) = 1, \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

   - De la propia definición de τ_a^* es $\tau_a^* \succeq a$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$
   - $\tau_a^* \succeq a$ está contenido en el conjunto $\{b \in \mathcal{A} : b \succeq a\}$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$. Como $b \in \mathcal{A}$ no es posible que $Z_b = -\infty$, entonces es $Z_b^- < \infty$, de donde se deduce que $EZ_b^- < \infty$. Como además $\mathcal{A}$ es finito $\sum_{b \in \mathcal{A}: b \succeq a} EZ_b^- < +\infty$, y entonces

     $$EZ_{\tau_a^*}^- \leq \sum_{b \in \mathcal{A}: b \succeq a} EZ_b^- < \infty$$

Por lo tanto $\tau_a^* \in T_a$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$ como queríamos probar.

2. y 3. Probaremos estos apartados por inducción hacia atrás. Para cada $a \in \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\tilde{M}_a = \emptyset$, como $U_a = Z_a$ es $\tau_a^* = a$, y entonces $Z_{\tau_a^*} = Z_a$, por lo tanto

$$E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{B}_a) = E(Z_a/\mathcal{B}_a)$$

como Z_a es $\mathcal{B}_a$-medible y para $\tau \succeq a$ como $\tilde{M}_a = \emptyset$ entonces

$$E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{B}_a) = E(Z_a/\mathcal{B}_a) = Z_a = U_a = E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)$$

este resultado se tiene en particular para $a \in \mathcal{A}$ tales que $g(a) = m = \max_{b \in \tilde{\mathcal{A}}} g(b)$. Consideremos ahora $i = \{1, ..., m\}$, y supongamos que 2. y 3. se tiene para cada $a \in \tilde{\mathcal{A}}^j = \{a \in \tilde{\mathcal{A}} : g(a) = j\}$ con $i \leq j \leq m$. Sea $a \in \tilde{\mathcal{A}}^{i-1}$, y $\tau \succeq a$ un plan de muestreo. Para cada $k \in \tilde{M}_a$ sea

$$\widehat{\tau}_k = \begin{cases} \tau & \{\tau \succeq ak\} \\ ak & \text{otro caso} \end{cases}$$

que define un plan de muestreo $\widehat{\tau}_k \succeq ak$.
Sea $C \in \mathcal{B}_a$

$$\begin{aligned}
\int_C Z_\tau dP &= \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_\tau dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} Z_\tau dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} Z_\tau dP \\
&=_{(1)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} Z_{\widehat{\tau}_k} dP \\
&=_{(2)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{B}_a) dP \\
&=_{(3)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E[E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a)] \\
&\leq_{(4)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) dP \\
&\leq \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a dP + \int_{C\cap\{\tau\succ a\}} \max_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) dP \\
&\leq \int_{C\cap\{\tau=a\}} \max\{Z_a, \max_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)\} dP + \int_{C\cap\{\tau\succ a\}} \max\{Z_a, \max_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)\} dP \\
&= \int_C \max\{Z_a, \max_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)\} dP \\
&= \int_C U_a dP
\end{aligned}$$

(1), sobre $\{\tau \succeq ak\}$ es $\tau = \widehat{\tau}_k$.
(2), como $C \cap \{\tau \succeq ak\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall k \in \tilde{M}_a$.

(3), $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_{ak}$, $\forall k \in \tilde{M}_a$.
(4), por hipótesis de inducción.

Entonces es $\forall C \in \mathcal{B}_a$, y $\tau \succeq a$

$$\int_C Z_\tau dP \leq \int_C U_a dP$$

Y

$$\int_C E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)dP \leq \int_C U_a dP$$

para todo $C \in \mathcal{B}_a$ y $\tau \succeq a$.
Luego

$$U_a \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \text{ c.s. } \forall \tau \succeq a$$

$a \in \tilde{\mathcal{A}}^{i-1}$. Por inducción hacia atrás, queda probado el resultado 3, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$.
Probamos a continuación 2.
Previamente definimos

$$\widehat{\tau}_k = \begin{cases} \tau_a^* & \{\tau_a^* \succeq ak\} \\ ak & \text{otro caso} \end{cases}$$

Siendo $\widehat{\tau}_k \succeq ak$, plan de muestreo.
Sea $C \in \mathcal{B}_a$

$$\begin{aligned}
\int_C Z_{\tau_a^*} dP &= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_{\tau_a^*} dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_a^*} dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\widehat{\tau}_k} dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{B}_a) dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a) dP \\
&=_{(1)} \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) dP \\
&=_{(2)} \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} U_a dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} U_a dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} U_a dP + \int_{C\cap\{\tau_a^*\succ a\}} U_a dP = \int_C U_a dP
\end{aligned}$$

(1), hipótesis de inducción.
(2), si $\{\tau_a^* \succeq ak\}$, entonces $\max_{j\in\tilde{M}_a} E(U_{aj}/\mathcal{B}_a) = E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) = U_a$.
Si $\{\tau_a^* = a\}$, $Z_a = U_a$.
Por tanto $\forall C \in \mathcal{B}_a$

$$\int_C Z_{\tau_a^*} dP = \int_C U_a dP$$

Entonces es $\int_C E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_a)dP = \int_C U_a dP$. Luego

$$E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{B}_a) = U_a \text{ c.s.}$$

El resultado es cierto para $a \in \tilde{\mathcal{A}}^{i-1}$ por inducción hacia atrás se tiene $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$.

4. Tomando esperanzas en las expresiones anteriores 2. y 3. se tiene

$$E[E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{B}_a)] = E(U_a) \geq E[E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)] \quad \forall \tau \succeq a$$

Entonces $E(Z_{\tau_a^*}) = E(U_a) \geq E(Z_\tau)$, $\forall \tau \in T_a$, y $\tau_a^* \in T_a$.
Entonces

$$\sup_{\tau \in T_a} E(Z_\tau) = E(Z_{\tau_a^*})$$

Ahora como caso particular tenemos $\tau_{()}^* \in T_{()} = T$ $(\emptyset \in \tilde{\mathcal{A}})$. Entonces

$$E(Z_{\tau_{()}^*}) \geq E(Z_\tau), \quad \forall \tau \in T$$

$$v = \sup_{\tau \in T} E(Z_\tau) = E(Z_{\tau_{()}^*})$$

□

Observación 5

1. $\widehat{B}(aj)$ es el conjunto de muestras para el que la secuencia muestral aj es la de menor tamaño que continúa a a, y hace máxima la esperanza condicionada de U_{aj} por $\mathcal{B}_a$.

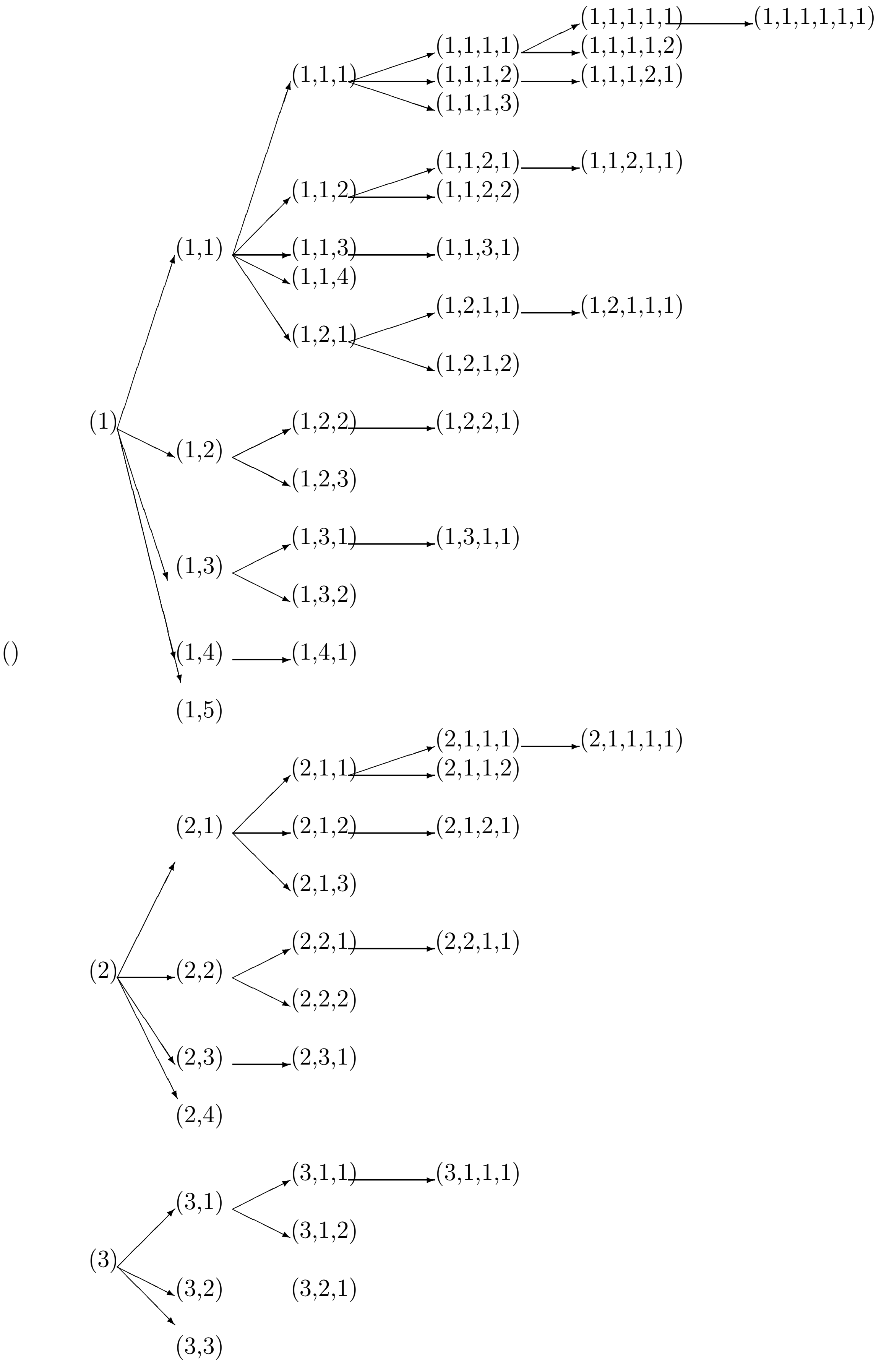
2. La idea básica de la construcción de τ_a^* es comenzar con una secuencia muestral fija $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, y continuar con $b \in \tilde{\mathcal{A}}$, si $U_b(x) > Z_b(x)$ de forma óptima tomando el tamaño de la siguiente submuestra de acuerdo a $x \in \widehat{B}(bk)$, parando el muestreo cuando $U_b(x) = Z_b(x)$ (es decir cuando la ganancia esperada bajo $\mathcal{B}_a$ es máxima).

3. La definición $Z_b(x) = -\infty$, $\forall b \in \tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ tiene como consecuencia la toma de observaciones con secuencias muestrales admisibles $a \in \mathcal{A}$.

4. $EZ_{\tau_a^*} = \sup_{\tau \in T_a} EZ_\tau$, en particular $v = EZ_{\tau_{()}^*}$ da en principio una solución completa al problema de muestreo óptimo con horizonte finito: $\tau_{()}^* \in T_{()} = T$ es un plan de muestreo secuencial óptimo.

Ejemplo: $\dfrac{S_n}{n}$-modificado.

Para $m = 6$, es decir $g(a) \leq 6$, tenemos por lo tanto $|\mathcal{A}| = 64$ secuencias muestrales admisibles como se observa en el siguiente gráfico


()
(1)
(1,1)
(1,1,1)
(1,1,1,1)
(1,1,1,1,1)
(1,1,1,1,1,1)
(1,1,1,1,2)
(1,1,1,2)
(1,1,1,2,1)
(1,1,1,3)
(1,1,2)
(1,1,2,1)
(1,1,2,1,1)
(1,1,2,2)
(1,1,3)
(1,1,3,1)
(1,1,4)
(1,2,1)
(1,2,1,1)
(1,2,1,1,1)
(1,2,1,2)
(1,2)
(1,2,2)
(1,2,2,1)
(1,2,3)
(1,3)
(1,3,1)
(1,3,1,1)
(1,3,2)
(1,4)
(1,4,1)
(1,5)
(2)
(2,1)
(2,1,1)
(2,1,1,1)
(2,1,1,1,1)
(2,1,1,2)
(2,1,2)
(2,1,2,1)
(2,1,3)
(2,2)
(2,2,1)
(2,2,1,1)
(2,2,2)
(2,3)
(2,3,1)
(2,4)
(3)
(3,1)
(3,1,1)
(3,1,1,1)
(3,1,2)
(3,2)
(3,2,1)
(3,3)

$$\begin{tikzcd}
 & & (4,1) \arrow[r] & (4,1,1) \\
 & (4) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & (4,2) & \\
() & (5) \arrow[r] & (5,1) & \\
 & (6) & &
\end{tikzcd}$$

Siguiendo el teorema anterior, el correspondiente plan de muestreo óptimo τ^* se obtendría procediendo de la siguiente forma. Realizaremos únicamente algunos cálculos como muestra

1. Si $a = (6)$, entonces
$$\sum_{i=1}^{6} X_i = (-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6)$$
$\tilde{M}_a = \emptyset$ luego $Z_a = U_a$ y paramos $E(Z_a) = E(\sum_{i=1}^{6} X_i) = E(U_a) = 0$

2. Si $a = (5, 1)$, entonces
$$\sum_{i=1}^{6} X_i = (-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6)$$
$h(a) = 2$
$$Z_a = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$$
$\tilde{M}_a = \emptyset$ luego $Z_a = U_a$ y paramos $E(Z_a) = E(U_a) = 0$

3. $a = (5)$, entonces
$$\sum_{i=1}^{5} X_i = (-5, -3, -1, 1, 3, 5)$$
$h(a) = 1$
$$Z_a = (-5, -3, -1, 1, 3, 5)$$
U_a tomará diferentes valores dependiendo del valor de $\sum X_i$

   (a) $\sum_{i=1}^{5} X_i = -5$, $Z_a = -5 \Longrightarrow E(U_{(5,1)}/\sum X_i = -5) = -3 \cdot 1/2 - 2 \cdot 1/2 = -5/2$.
   Luego $U_{(5)} = -5/2$, continuamos con el muestreo.

   (b) $\sum_{i=1}^{5} X_i = -3$, $Z_a = -3 \Longrightarrow E(U_{(5,1)}/\sum X_i = -3) = -2 \cdot 1/2 - 1 \cdot 1/2 = -3/2$.
   Luego $U_{(5)} = -3/2$, continuamos con el muestreo.

   (c) $\sum_{i=1}^{5} X_i = -1$, $Z_a = -1 \Longrightarrow E(U_{(5,1)}/\sum X_i = -1) = -1/2$.
   Luego $U_{(5)} = -1/2$, continuamos con el muestreo.

(d) $\sum_{i=1}^{5} X_i = 1,\ Z_a = 1 \Longrightarrow E(U_{(5,1)}/\sum X_i = 1) = 1/2.$
Luego $U_{(5)} = 1$, paramos.

(e) $\sum_{i=1}^{5} X_i = 3,\ Z_a = 3 \Longrightarrow E(U_{(5,1)}/\sum X_i = 3) = 3/2.$
Luego $U_{(5)} = 3$, paramos.

(f) $\sum_{i=1}^{5} X_i = 5,\ Z_a = 5 \Longrightarrow E(U_{(5,1)}/\sum X_i = 5) = 5/2.$
Luego $U_{(5)} = 5$, paramos.

Es decir

$$a = (5) = \begin{cases} \text{parar} & \text{si } \sum_{i=1}^{5} X_i > 0 \\ \text{continuar} & \text{si } \sum_{i=1}^{5} X_i < 0 \end{cases}$$

4. Pasamos al sub-árbol correspondiente a $a = (3)$, procediendo de forma análoga a la anterior se llega:

(a) $a = (3, 1, 1)$ es $\sum_{i=1}^{5} X_i = (-5, -3, -1, 1, 3, 5)$ y se tiene

$$a = (3,1,1) = \begin{cases} \text{parar} & \text{si } \sum_{i=1}^{5} X_i > 0 \\ \text{continuar} & \text{si } \sum_{i=1}^{5} X_i < 0 \end{cases}$$

(b) $a = (3, 1)$ es $\sum_{i=1}^{4} X_i = (-4, -2, 0, 2, 4)$ y se tiene

$$a = (3,1) = \begin{cases} \text{parar} & \text{si } \sum_{i=1}^{4} X_i > 0 \\ \text{continuar} & \text{si } \sum_{i=1}^{4} X_i < 0 \end{cases}$$

(c) $a = (3)$ es $\sum_{i=1}^{3} X_i = (-3, -1, 1, 3)$ y se tiene

$$a = (3) = \begin{cases} \text{parar} & \text{si } \sum_{i=1}^{3} X_i > 0 \\ \text{continuar} & \text{si } \sum_{i=1}^{3} X_i < 0 \end{cases}$$

Obtenemos por lo tanto

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} X_i = -3 \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} X_i = -2 \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} X_i = -1 & \text{continuar} \\ \sum_{i=1}^{5} X_i = -3 & \text{continuar} \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{4} X_i = -4 \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} X_i = -3 & \text{continuar} \\ \sum_{i=1}^{5} X_i = -4 & \text{continuar} \end{cases} \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{3} X_i = -1 \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} X_i = \ 0 \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} X_i = 1 & \text{parar} \\ \sum_{i=1}^{5} X_i = -1 & \text{continuar} \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{4} X_i = -2 \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} X_i = -1 & \text{continuar} \\ \sum_{i=1}^{5} X_i = -3 & \text{continuar} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Por lo que llegamos al plan de muestreo óptimo siguiente

$$\tau^*_{()}(x_1, ..., x_6) = \begin{cases} (3) & \text{si } \sum_{i=1}^{3} x_i > 0 \\ (3,1,1) & \text{si } \sum_{i=1}^{3} x_i = -1, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 \\ (3,1,1,1) & \text{otro caso} \end{cases}$$

Es decir comenzamos el muestreo con una muestra inicial de tamaño 3, si $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$ ó 3 paramos el muestreo, sino continuamos el mismo. En el caso de que $\sum_{i=1}^{5} x_i = 1$ (posible solamente si $\sum_{i=1}^{3} x_i = -1$) paramos el muestreo, en caso contrario continuamos muestreando hasta una muestra de tamaño máximo igual a 6.

1.4.3 Existencia de Planes de Muestreo Óptimo para el caso general $\mathcal{A}$

Nuestro objetivo es probar bajo algunas condiciones, la existencia y estructura de los planes de muestreo óptimos para conjuntos arbitrarios de secuencias muestrales.

El problema surge al no tener un último elemento en la sucesión de secuencias muestrales para comenzar el proceso definido mediante el teorema anterior.

Del teorema anterior se tenía, que para horizonte finito dado $a = (a_1, ..., a_k) \in \tilde{\mathcal{A}}$ finito, con la definición dada para U_a resultaba,

$$U_a \geq E(Z_\tau/B_a) \text{ c.s.}, \quad \forall \tau \succeq a$$

de donde se deduce

$$U_a = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/B_a) \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ finito}$$

por lo que para cada $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, U_a es una función $\mathcal{B}_a/\mathcal{B}$- medible única c.s.

En el caso actual el procedimiento es el inverso, veremos que definida

$$U_a = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

se cumple para este caso

$$U_a = \max\{Z_a, \sup_{k \in \tilde{M}_a} E(U_{ak}/B_a)\}$$

y daremos condiciones que nos permitirán encontrar planes de muestreo óptimos para el caso que nos ocupa.

Al igual que en la teoría de parada óptima, supongamos que la secuencia estocástica $(Z_a)_{a \in \mathcal{A}}$ verifica:

$$E(\sup_{a \in \mathcal{A}} Z_a^+) < +\infty$$

Para tratar de solventar el problema previamente expuesto, definiremos

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{a} \in A : \exists a \in \mathcal{A}, \quad \tilde{a} \preceq a\}$$

el mínimo sub-árbol de A cuyo elemento mínimo es () y que contiene a $\mathcal{A}$.

$$\tilde{M}_a = \{j \in M : aj \in \tilde{\mathcal{A}}\} \quad a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

el conjunto de sucesores directos de a.

Demostraremos primero la integrabilidad de

$$U_a = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \quad a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

viendo que

$$E(U_a) \leq E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+) < +\infty$$

En efecto,

$$Z_\tau \leq \sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+, \quad \tau \succeq a, \quad a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+/\mathcal{B}_a), \quad \forall \tau \succeq a, \quad a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+/\mathcal{B}_a)$$

$$U_a \leq E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+/\mathcal{B}_a)$$

$$E(U_a) \leq E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+) < \infty$$

Obtengamos ahora para U_a una representación similar a la que definía a esta función en el caso finito, en efecto:

Lema 1 *(Ecuación de Bellman). Para todo $a \in \tilde{\mathcal{A}}$ se tiene*

$$U_a = \text{máx}\{Z_a, \sup_{k \in \tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)\}, \ \textit{c.s.}$$

Demostración:
probaremos la relación anterior en los siguientes pasos:

1. $U_a = \text{máx}\{Z_a, \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_a^+} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\}$ c.s.
2. $\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_{ak}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) = E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)$ c.s. $\forall k \in \tilde{M}_a$ (si $\tilde{M}_a \neq \emptyset$).
3. $\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in T_a^+} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) = \sup_{k \in \tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)$ c.s.

1. Si para $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, es $\tilde{M}_a = \emptyset$ 1. se da de forma obvia. Supongamos $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{M}_a \neq \emptyset$. Sea $\tau \equiv a$ constante, sabemos

$$\begin{cases} U_a \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) = Z_a \text{ c.s.} & a \in \mathcal{A} \\ U_a \geq -\infty = Z_a \text{ c.s.} & a \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Como $T_a^+ \subset T_a$, se sigue

$$U_a = \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \geq \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_a^+} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a),\ \text{ c.s.}$$

$$U_a \geq \{Z_a, \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_a^+} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\},\ \text{ c.s.}$$

Sea ahora $\tau \in T_a$, definimos

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} \tau & \{\tau \succ a\} \\ b & \{\tau = a\} \end{cases}$$

con b secuencia muestral admisible que sucede a a (es decir, $b \succeq a$). Así obtenemos que $\tilde{\tau} \in T_a^+$.

$$\begin{aligned} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) &= E(I_{\{\tau=a\}}Z_\tau + I_{\{\tau\succ a\}}Z_\tau/\mathcal{B}_a) \\ &= E(Z_a I_{\{\tau=a\}}/\mathcal{B}_a) + E(Z_{\tilde{\tau}} I_{\{\tau\succ a\}}/\mathcal{B}_a) \\ &\leq I_{\{\tau=a\}}Z_a + I_{\{\tau\succ a\}} \operatorname*{ess\ sup}_{\widehat{\tau} \in T_a^+} E(Z_{\widehat{\tau}}/\mathcal{B}_a) \\ &\leq \text{máx}\{Z_a, \operatorname*{ess\ sup}_{\widehat{\tau} \in T_a^+} E(Z_{\widehat{\tau}}/\mathcal{B}_a)\},\ \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Es decir

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq \text{máx}\{Z_a, \operatorname*{ess\ sup}_{\widehat{\tau} \in T_a^+} E(Z_{\widehat{\tau}}/\mathcal{B}_a)\} \text{ c.s. } \forall \tau \in T_a$$

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq \text{máx}\{Z_a, \operatorname*{ess\ sup}_{\widehat{\tau} \in T_a^+} E(Z_{\widehat{\tau}}/\mathcal{B}_a)\} \text{ c.s.}$$

$$U_a \leq \text{máx}\{Z_a, \operatorname*{ess\ sup}_{\widehat{\tau} \in T_a^+} E(Z_{\widehat{\tau}}/\mathcal{B}_a)\} \text{ c.s.}$$

Así, de las dos desigualdades obtenemos la igualdad.

2. $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $k \in \tilde{M}_a$. Como $U_{ak} = \text{ess sup}_{\tau \in T_{ak}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_{ak})$, es $U_{ak} \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_{ak})$ c.s. $\forall \tau \succeq ak$. Entonces,

$$E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \geq E(E(Z_\tau/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a) = E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \text{ c.s. } \forall \tau \succeq ak$$

$$E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \geq \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_{ak}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.}$$

Por otro lado de las propiedades del supremo esencial, tenemos la existencia de una secuencia $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de planes de muestreo $\tau_n \in T_{ak}$, tales que

$$U_{ak} = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak}) \text{ c.s.}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad, $\tau_1 \equiv b$, donde $b \in \mathcal{A}$, $b \succeq ak$ fijo.
Definimos

$$\tilde{\tau}_1 = \tau_1$$

$$\tilde{\tau}_n = \begin{cases} \tilde{\tau}_{n-1} & B_n \\ \tau_n & B_n^c \end{cases}$$

donde $B_n = \{E(Z_{\tilde{\tau}_{n-1}}/\mathcal{B}_{ak}) \geq E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak})\}$. Así $(\tilde{\tau}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son planes de muestreo tales que $\tilde{\tau}_n \in T_{ak}$.

$$\begin{aligned} E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak}) &= E(I_{B_n} Z_{\tilde{\tau}_{n-1}}/\mathcal{B}_{ak}) + E(I_{B_n^c} Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak}) \\ &=_{(1)} I_{B_n} E(Z_{\tilde{\tau}_{n-1}}/\mathcal{B}_{ak}) + I_{B_n^c} E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak}) \\ &= \text{máx}\{E(Z_{\tilde{\tau}_{n-1}}/\mathcal{B}_{ak}), E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak})\} \text{ c.s. } \forall n \end{aligned}$$

(1), B_n es $\mathcal{B}_{ak}$ medible

Como $E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak}) = \text{máx}\{E(Z_{\tilde{\tau}_{n-1}}/\mathcal{B}_{ak}), E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak})\}$ c.s., entonces forma una sucesión en n no decreciente c.s. Y, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak}) \geq E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak}) \text{ c.s.}$$

$$U_{ak} = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(Z_{\tau_n}/\mathcal{B}_{ak}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak}) = \lim_{n\to\infty} E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak}) \text{ c.s.}$$

$$U_{ak} \leq \lim_{n\to\infty} E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak}) \text{ c.s.}$$

Tomando esperanzas condicionadas, y aplicando el Teorema de la convergencia monótona

$$E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \leq E(\lim_{n\to\infty} E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a)$$

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_{\tilde{\tau}_n}/\mathcal{B}_a) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{ak}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.}$$

$\tilde{\tau}_n \in T_{ak}, \forall n$ luego

$$E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{ak}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.}$$

Deduciéndose de ambas desigualdades, la igualdad.

3. Sea $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, tal que $\tilde{M}_a = \emptyset$, la igualdad se tiene de forma obvia.
   Consideremos por tanto $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{M}_a \neq \emptyset$. Como $T_{ak} \subset T_{a^+}$, se tiene entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{a+}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{ak}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) = E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.}$$

por 2.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{a+}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \geq E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \text{ c.s. } \forall k \in \tilde{M}_a$$

Y así,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{a+}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \geq \sup_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.}$$

Para la otra desigualdad, sea $\tau \in T_{a^+}$, para cada $k \in \tilde{M}_a$ sea $\tau_k \in T_{ak}$

$$\tau_k = \begin{cases} \tau & \{\tau \succeq ak\} \\ ak & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) &= E(\sum_{k\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ak\}} Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) \\ &=_{(1)} E(\sum_{k\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ak\}} Z^+_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) - E(\sum_{k\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ak\}} Z^-_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) \\ &= \sum_{k\in\tilde{M}_a} E(I_{\{\tau\succeq ak\}} Z^+_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) - \sum_{k\in\tilde{M}_a} E(I_{\{\tau\succeq ak\}} Z^-_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) \\ &= \sum_{k\in\tilde{M}_a} E(I_{\{\tau\succeq ak\}} Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) =_{(2)} \sum_{k\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ak\}} E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) \\ &=_{(3)} \sum_{k\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ak\}} E(E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a) \leq \sum_{k\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ak\}} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \\ &\leq \sup_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.} \end{aligned}$$

(1), $\tau \in T_{a^+}$, $\tau = \bigcup_{k\in\tilde{M}_a}\{\tau \succeq ak\}$.
(2), $\{\tau \succeq ak\} \in \mathcal{B}_a$, luego $I_{\{\tau\succeq ak\}}$ es $\mathcal{B}_a$-medible.
(3), $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_{ak}$.

Luego

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq \sup_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \text{ c.s. } \forall\tau \in T_{a^+}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in T_{a^+}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq \sup_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) \text{ c.s.}$$

de donde se deduce la igualdad, y así junto con los casos anteriores 1. y 2., se tiene la ecuación de Bellman.

□

Observación 6

Si tratamos de definir un plan de muestreo $\tau^*_{()}$ análogo al del caso finito, cuando $|M| = +\infty$, puede existir $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $x \in \mathcal{X}$, para el cual el supremo de la ecuación de Bellman no sea alcanzable, es decir

$$B(a\infty) = \{E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) < \sup_{j\in\tilde{M}_a} E(U_{aj}/\mathcal{B}_a)\} \bigcap \{U_a > Z_a\}, \quad \forall k \in \tilde{M}_a$$

es no vacío.
Por ello definimos de forma análoga al caso finito, para $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, con $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $j \in \tilde{M}_a$

$$B(aj) = \{j = \min\{k \in \tilde{M}_a : E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) = \sup_{i\in\tilde{M}_a} E(U_{ai}/\mathcal{B}_a)\}\} \bigcap \{U_a > Z_a\}$$

$$\tau^*(x) = \begin{cases} () & U_{()}(x) = Z_{()}(x) \\ a = (a_1, ..., a_j) & \text{si } x \in B(a^{i+1}), \quad 0 \leq i < j, \quad U_a(x) = Z_a(x) \\ a = (a_1, a_2, ...) & \text{si } x \in B(a^{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \\ a = (a_1, ..., a_j, m, m, ...) & m = \min M, x \in B(a^{i+1}), \quad 0 \leq i < j, \quad x \in B(a^j\infty) \end{cases}$$

Falta comprobar que τ^* es un plan de muestreo, es decir $\{\tau^* = a\} \in \mathcal{B}_a$ y $\{\tau^* \succeq ak\} \in \mathcal{B}_a$.
Si $a = (a_1, ..., a_j) \in \tilde{\mathcal{A}}$, como $B(a^{i+1}) \in \mathcal{B}_{a^i} \subset \mathcal{B}_a$, $0 \leq i < j$, y Z_a, U_a son funciones $\mathcal{B}_a$-medibles, se tiene

$$\{\tau^* = a\} \in \mathcal{B}_a$$

Si $a \in A - \tilde{\mathcal{A}}$, $\{\tau^* = a\} = \emptyset \in \mathcal{B}_a$.
Sea $a = (a_1, ..., a_j) \in A$, $k \in M$, entonces

$$\{\tau^* \succeq ak\} = \begin{cases} \cap_{i=0}^{j-1} B(a^{i+1}) \bigcap B(ak) & k \neq m \\ \cap_{i=0}^{j-1} B(a^{i+1}) \bigcap B(ak) \cup \bigcup_{i=r}^{j} \bigcap_{l=0}^{i-1} B(a^{l+1}) \cap B(a^i \infty) & k = m, \\ & r = \text{máx}\{s : a_s \neq m\} \end{cases}$$

Y se tiene $\{\tau^* \succeq ak\} \in \mathcal{B}_a$. Luego se satisfacen las condiciones de medibilidad de los planes de muestreo secuencial.
τ^* comienza con una muestra (), y paramos cuando $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, si $U_a(x) = Z_a(x)$, es decir, si bajo la información que proporciona $\mathcal{B}_a$, la ganancia máxima esperada $U_a(x)$ es alcanzada.
$\forall a \in A - \mathcal{A}$, $Z_a = -\infty$, entonces paramos en aquellas secuencias muestrales $a \in \mathcal{A}$, es decir

$$P(\tau^* \in A - \mathcal{A}) = 0$$

Si $U_a(x) > Z_a(x)$, el tamaño muestral de la siguiente submuestra, es el menor de entre todas las posibles continuaciones óptimas, dadas por $\sup_{i \in \tilde{M}_a} E(U_{ai}/\mathcal{B}_a)$.
Si este supremo no es alcanzable, el muestreo es definido de forma arbitraria tomando siempre m observaciones.

El siguiente teorema ofrece un resultado acerca de la optimalidad de τ^*.

Teorema 1.4.2 *Si $P(\tau^* \in \mathcal{A}) = 1 \Longrightarrow \tau^*$ es un plan de muestreo óptimo.*

Demostración:

Como ya hemos visto, τ^* es un plan de muestreo (verifica las condiciones de medibilidad), luego es suficiente probar $U_{()} = E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_{()})$ c.s.
Pues como $U_{()} \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_{()})$, $\forall \tau \in T$, entonces se tendría que

$$E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_{()}) \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_{()}), \quad \forall \tau \in T$$

tomando esperanzas

$$E(Z_{\tau^*}) \geq E(Z_\tau), \quad \forall \tau \in T$$

probando que $\tau^* \in T$, se tiene entonces

$$\sup_{\tau \in T} E(Z_\tau) = E(Z_{\tau^*})$$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$, probaremos

$$U_{()} = E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} + \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) \text{ c.s.} \tag{1.1}$$

con $\tilde{\mathcal{A}}_n = \{a \in \tilde{\mathcal{A}} : h(a) = n\}$, y $\{\tau \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\} = \cup_{j=0}^{n-1} \cup_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_j} \{\tau^* = a\}$. Teniéndose en particular $\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_0\} = \emptyset$. Probaremos (1.1) por inducción.
Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_0\}} Z_{\tau^*} &+ \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_0} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) \\ &= E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_0} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) = E(I_{\{\tau^* \succeq ()\}} U_{()} / \mathcal{B}_{()}) = U_{()} \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Supongamos ahora, que la ecuación (1.1) se tiene para $n \in \mathbb{N}_0$, y habrá que ver si se cumple para $n+1$. Para el segundo miembro

$$\begin{aligned} E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) &= E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* = a\}} U_a + \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} \sum_{j \in \tilde{M}_a} I_{\{\tau^* \succeq aj\} \cap \cap_{b \preceq a} B(b\infty)^c} U_a \\ &+ \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq am\} \cap \cup_{b \preceq a} B(b\infty)} U_a / \mathcal{B}_{()}) \\ &=_{(1)} E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* = a\}} Z_a / \mathcal{B}_{()}) + E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} \sum_{j \in \tilde{M}_a} I_{\{\tau^* \succeq aj\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) \\ &=_{(2)} E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* = a\}} Z_a / \mathcal{B}_{()}) + E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} \sum_{j \in \tilde{M}_a} I_{\{\tau^* \succeq aj\}} E(U_{aj} / \mathcal{B}_a) / \mathcal{B}_{()}) \\ &= E(I_{\{\tau^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} / \mathcal{B}_{()}) + \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} \sum_{j \in \tilde{M}_a} E(I_{\{\tau^* \succeq aj\}} U_{aj} / \mathcal{B}_{()}) \\ &= E(I_{\{\tau^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} / \mathcal{B}_{()}) + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}} E(I_{\{\tau^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{B}_{()}) \\ &= E(I_{\{\tau^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}} E(I_{\{\tau^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{B}_{()}) \text{ c.s.} \end{aligned}$$

(1), como $P(\tau^* \in \mathcal{A}) = 1$ paramos c.s., luego el conjunto donde no paramos $\{\tau^* \succeq am\} \cap \cup_{b \preceq a} B(b\infty)$ tiene probabilidad cero, es decir $E(I_{\{\tau^* \succeq am\} \cap \cup_{b \preceq a} B(b\infty)}) = 0$, luego $I_{\{\tau^* \succeq am\} \cap \cup_{b \preceq a} B(b\infty)} = 0$ c.s. y entonces $I_{\{\tau^* \succeq aj\} \cap \cap_{b \preceq a} B(b\infty)^c} = I_{\{\tau^* \succeq aj\}}$ c.s.
(2), si $\tau^* \succeq aj$, continuamos con un plan de muestreo aj, donde $j = \min\{l \in \tilde{M}_a : E(U_{al} / \mathcal{B}_a) = \sup_{i \in \tilde{M}_a} E(U_{ai} / \mathcal{B}_a)\}$, entonces es

$$E(U_{aj} / \mathcal{B}_a) = \sup_{i \in \tilde{M}_a} E(U_{ai} / \mathcal{B}_a)$$

y,

$$U_a = E(U_{aj} / \mathcal{B}_a)$$

Quedando finalmente,

$$U_{()} = E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} + I_{\{\tau^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}} E(I_{\{\tau^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{B}_{()})$$

$$= \quad E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}\}} Z_{\tau^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}} E(I_{\{\tau^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{B}_{()}) \text{ c.s.}$$

es decir, la ecuación (1.1) se tiene para $n+1$. De $\tau^* \in \mathcal{A}$ c.s. y $E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+) < +\infty$, se sigue

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) &\leq_{(1)} \limsup_{n\to\infty} E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+ / \mathcal{B}_a) / \mathcal{B}_{()}) \\
&= \limsup_{n\to\infty} E(E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} \sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+ / \mathcal{B}_a) / \mathcal{B}_{()}) \\
&=_{(2)} \limsup_{n\to\infty} E(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} \sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+ / \mathcal{B}_{()}) \\
&\leq E(\limsup_{n\to\infty} I_{\{\tau^* \succeq \tilde{\mathcal{A}}_n\}} \sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+ / \mathcal{B}_{()}) = 0 \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

(1), $U_a \leq E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z_b^+ / \mathcal{B}_a)$.
(2), $\mathcal{B}_{()} \subset \mathcal{B}_a$

Resulta entonces la ecuación (1.1)

$$\begin{aligned}
U_{()} &= \limsup_{n\to\infty} E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} + \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a / \mathcal{B}_{()}) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} / \mathcal{B}_{()}) \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

Como $I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} \uparrow 1$ c.s., entonces se sigue

$$\begin{cases} 0 \leq I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*}^+ \uparrow Z_{\tau^*}^+ \text{ c.s.} \\ 0 \leq I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*}^- \uparrow Z_{\tau^*}^- \text{ c.s.} \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de la convergencia monótona

$$\begin{aligned}
U_{()} &\leq \limsup_{n\to\infty} [E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*}^+ / \mathcal{B}_{()}) - E(I_{\{\tau^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*}^- / \mathcal{B}_{()})] \\
&= E(Z_{\tau^*}^+ / \mathcal{B}_{()}) - E(Z_{\tau^*}^+ / \mathcal{B}_{()}) = E(Z_{\tau^*} / \mathcal{B}_{()}) \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

Entonces

$$U_{()} \leq E(Z_{\tau^*} / \mathcal{B}_{()}) \text{ c.s.}$$

$$E(U_{()}) \leq E(Z_{\tau^*})$$

Como

$$-\infty < E(U_{()}) \leq E(Z_{\tau^*})$$

es decir

$$E(Z_{\tau^*}^-) < +\infty \Longrightarrow \tau^* \in T$$

Deduciéndose el resultado. □

Observación 7

$P(\tau^* \in \mathcal{A}) = 1$ es condición suficiente para la optimalidad de τ^*.
Esto nos lleva a que la propiedad

$$P(\{\tau^* \succ a\} \cap B(a\infty)) = 0 \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}} \tag{1.2}$$

que resulta de la condición anterior, es necesaria para la optimalidad de τ^*.
En efecto, puesto que si no se cumple, el conjunto

$$D = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{A}}} (\{\tau^* \succ a\} \cap B(a\infty))$$

tendría probabilidad positiva, y $\tau^* \in A^*$ sobre D, luego $Z_{\tau^*} = -\infty$ sobre D. Como

$$E(Z_{\tau^*}) = \int_D Z_{\tau^*} dP + \int_{D^c} Z_{\tau^*} dP \leq \int_D Z_{\tau^*} dP + E(\sup_{a \in \mathcal{A}} Z_a^+)$$

Como $E(\sup_{a \in \mathcal{A}} Z_a^+) < +\infty$ por hipótesis, se llega

$$E(Z_{\tau^*}) = -\infty < E(Z_\tau), \quad \forall \tau \in T$$

τ^* nos lleva a la ganancia menos favorable.

La condición (1.2), se verifica en particular si M es finito, es decir, si existe una cota superior para el tamaño de las submuestras (así, los conjuntos $\tilde{M}_a$ son finitos y por tanto $\sup_{j \in \tilde{M}_a} E(U_{aj}/\mathcal{B}_a)$ se alcanza siempre).

Al contrario de lo que ocurre en la teoría de parada óptima, la existencia de un plan óptimo, no implica la optimalidad de τ^*.

Ejemplo:

Problema $\dfrac{S_n}{n}$ modificado para el caso en el que el número máximo de observaciones por etapa es m.

$$Z_{(a_1,\ldots,a_j)} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{a_1+\ldots+a_j} X_i \leq m$$

entonces

$$E(\sup_{a \in \mathcal{A}} Z_a^+) < +\infty$$

y se puede probar que existe un plan de muestreo óptimo.
Sea

$$\mathcal{A}_a = \{a \times (m)_{1 \leq i \leq k} = (a_1, ..., a_j, m, ...m) : k \in \mathbb{N}\}$$

$$T_a^{(m)} = \{\tau \in T : P(\tau \in \mathcal{A}_a) = 1\}$$

entonces se demuestra que

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) = \operatorname*{ess\ sup}_{\tau \in T_a^{(m)}} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)$$

por lo que la atención se puede restringir a $T_{()}^{(m)}$, es decir, a los planes de muestreo con tamaño muestral fijo m. $\square$

El siguiente resultando proporciona una condición suficiente para la optimalidad de τ^* fácil de verificar.

Teorema 1.4.3 *Sea $P(B(a\infty)) = 0$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, y X una variable aleatoria integrable, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una secuencia de números reales, tales que $\lim_{n\to\infty} r_n = -\infty$ y $Z_a \leq X + r_n$ c.s. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ y $a \in \tilde{\mathcal{A}}_n \Longrightarrow \tau^*$ es un plan de muestreo óptimo.*

Demostración:

Si probamos $P(\tau^* \in \mathcal{A}) = 1$, el teorema anterior nos proporciona el resultado. Como $P(B(a\infty)) = 0$ $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, las funciones U_a y $E(U_{ak}/\mathcal{B}_a)$ pueden elegirse sin ninguna restricción tales que $B(a\infty) = \emptyset$, y por lo tanto

$$\{\tau^* \succeq a\} \bigcap \bigcup_{b \prec a} B(b\infty) = \emptyset, \quad \{\tau^* \succeq a\} \bigcap \bigcap_{b \prec a} B(b\infty)^c = \{\tau^* \succeq a\}$$

Luego

$$\bigcup_{a \prec \tilde{\mathcal{A}}_n} \{\tau^* = a\} \bigcup \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} \{\tau^* \succeq a\}$$

es una partición de $\mathcal{X}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.
Consideremos las siguientes etapas en la demostración:

1. para cada $n \in \mathbb{N}_0$ fijo la siguiente familia

$$\mathcal{B}_n = \{C \in \mathcal{B} : C = \bigcup_{a \prec \tilde{\mathcal{A}}_n} H_a \cup \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} K_a\}$$

donde $H_a \in \mathcal{B}_a$ $\quad H_a \subset \{\tau^* = a\}$, $K_a \in \mathcal{B}_a$ $\quad K_a \subset \{\tau^* \succeq a\}$, es una σ-álgebra sobre $\mathcal{X}$. En efecto

(a) Podemos considerar $H_a = \{\tau^* = a\}$ para $a \prec \tilde{\mathcal{A}}_n$ y $K_a = \{\tau^* \succeq a\}$ para $a \in \tilde{\mathcal{A}}_n$, y así obtenemos

$$\mathcal{X} = \bigcup_{a \prec \tilde{\mathcal{A}}_n} H_a \cup \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} K_a \in \mathcal{B}_n$$

(b) $C \in \mathcal{B}_n$

$$C^c = \mathcal{X} - C = \bigcup_{a \prec \tilde{\mathcal{A}}_n} \{\tau^* = a\} \cup \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_n} \{\tau^* \succeq a\} - C$$

Como

$$C = \bigcup_{a \prec \tilde{A}_n} H_a \cup \bigcup_{a \in \tilde{A}_n} K_a$$

Entonces

$$C^c = \bigcup_{a \prec \tilde{A}_n} (\{\tau^* = a\} - H_a) \cup \bigcup_{a \in \tilde{A}_n} (\{\tau^* \succeq a\} - K_a) \in \mathcal{B}_n$$

(c) Sea $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $C_i \in \mathcal{B}_n$ $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$C_i = \bigcup_{a \prec \tilde{A}_n} H_{a,i} \cup \bigcup_{a \in \tilde{A}_n} K_{a,i}$$

entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{a \prec \tilde{A}_n} \bigcup_{i=1}^{\infty} H_{a,i} \cup \bigcup_{a \in \tilde{A}_n} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{a,i} \in \mathcal{B}_n$$

Además $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

2. Consideremos la sucesión $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ donde

$$V_n = \sum_{a \prec \tilde{A}_n} I_{\{\tau^* = a\}} U_a + \sum_{a \in \tilde{A}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a$$

se tiene que es una martingala respecto de $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
Sea $X_a : (\mathcal{X}, \mathcal{B}_a) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ una variable aleatoria con $a \preceq \tilde{A}_n$ y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces las funciones

$$I_{\{\tau^* = a\}} X_a$$

y

$$I_{\{\tau^* \succeq a\}} X_a \text{ para } h(a) = n$$

son funciones $\mathcal{B}_n$-medibles. Y obtenemos

$$\begin{aligned}
E(V_{n+1}/\mathcal{B}_n) &= E(\sum_{a \prec \tilde{A}_{n+1}} I_{\{\tau^* = a\}} U_a/\mathcal{B}_n) + E(\sum_{a \in \tilde{A}_{n+1}} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a/\mathcal{B}_n) \\
&= \sum_{a \prec \tilde{A}_{n+1}} E(I_{\{\tau^* = a\}} U_a/\mathcal{B}_n) + E(\sum_{a \in \tilde{A}_{n+1}} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a/\mathcal{B}_n) \\
&= \sum_{a \prec \tilde{A}_{n+1}} I_{\{\tau^* = a\}} U_a + E(\sum_{a \in \tilde{A}_n} \sum_{j \in \tilde{M}_a} I_{\{\tau^* \succeq aj\}} U_{aj}/\mathcal{B}_n) \\
&=_{(1)} \sum_{a \prec \tilde{A}_n} I_{\{\tau^* = a\}} U_a + \sum_{a \in \tilde{A}_n} I_{\{\tau^* = a\}} U_a + \sum_{a \in \tilde{A}_n} \sum_{j \in \tilde{M}_a} I_{\{\tau^* \succeq aj\}} U_a \\
&= \sum_{a \prec \tilde{A}_n} I_{\{\tau^* = a\}} U_a + \sum_{a \in \tilde{A}_n} I_{\{\tau^* \succeq a\}} U_a \\
&= V_n \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

(1), $E(I_{\{\tau^* \succeq aj\}} U_{aj}/\mathcal{B}_n) = I_{\{\tau^* \succeq aj\}} E(U_{aj}/\mathcal{B}_a) = I_{\{\tau^* \succeq aj\}} U_a$ de acuerdo a la definición de τ^*.

Para la integrabilidad de V_n, del resultado anterior se tiene que $|E(V_n)| = |E(V_0)| = |E(U_{()}| < \infty$, puesto que habíamos visto en el teorema previo que $E(U_{()}) > -\infty$. Como

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E(V_n^+) \leq E(\sup_{a\in\mathcal{A}} Z_a^+) < \infty$$

por el teorema de convergencia martingala se tiene que la sucesión $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge c.s. a una variable aleatoria integrable V_∞.

3. Supongamos $\tau^* \notin \mathcal{A}$ con probabilidad positiva. Por la construcción de τ^*

$$P(\tau^* \in A - \mathcal{A}) = 0$$

luego

$$P(\tau^* \in A^*) > 0$$

$$\begin{aligned}
P(\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty) &= P(\lim_{n\to\infty}(I_{\{\tau^*\prec\tilde{\mathcal{A}}_n\}} Z_{\tau^*} + \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^*\succeq a\}} U_a) = -\infty) \\
&\geq P(\lim_{n\to\infty} \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^*\succeq a\}} U_a = -\infty) \\
&\geq_{(1)} P(\lim_{n\to\infty} \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^*\succeq aj\}} E(X + \sup_{j\geq n} r_j/\mathcal{B}_a) = -\infty) \\
&\geq P(\lim_{n\to\infty} I_{\{\tau^*\succeq\tilde{\mathcal{A}}_n\}} \sup_{j\geq n} r_j = -\infty) \\
&=_{(2)} P(I_{\{\tau^*\in A^*\}} \limsup_{n\to\infty} r_n = \infty) \\
&= P(\tau^* \in A^*) > 0
\end{aligned}$$

(1), por hipótesis $Z_a \leq X + r_n$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_n$ luego

$$\sup_{b\succeq\tilde{\mathcal{A}}_n} Z_b \leq X + \sup_{j\geq n} r_j$$

$$Z_\tau \leq \sup_{b\succeq\tilde{\mathcal{A}}_n} Z_b \leq X + \sup_{j\geq n} r_j \quad a \in \tilde{\mathcal{A}}_n, \quad \forall\tau \succeq a$$

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq E(X + \sup_{j\geq n} r_j/\mathcal{B}_a) \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_n, \quad \forall\tau \succeq a$$

Luego

$$U_a = \operatorname{ess\,sup}_{a\in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \leq E(X + \sup_{j\geq n} r_j/\mathcal{B}_a) \quad a \in \tilde{\mathcal{A}}_n$$

(2), puesto que $\lim_{n\to\infty} \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_n} I_{\{\tau^*\succeq a\}} E(X/\mathcal{B}_a) < +\infty$ c.s.
Que contradice la convergencia de la sucesión $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ hacia un límite finito c.s. probada en el apartado anterior. Luego

$$P(\tau^* \in \mathcal{A}) = 1$$

□

Capítulo 2

Análisis Estocástico

2.1 Introducción

En este capítulo se estudia el Problema de Parada Opcional para una sucesión de planes de muestreo $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que

$$\tau_n \preceq \tau_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ello se comienza realizando un análisis pormenorizado de las distintas propiedades que cumplen los planes de muestreo. Se definen la σ-álgebras asociadas al plan de muestreo y se describen sus propiedades. Dentro de la misma sección, definimos otros dos tipos distintos de planes de muestreo a partir de uno dado: el plan de muestreo en k etapas, y el plan de muestreo con j observaciones, estudiándose las características de los mismos.

En la siguiente sección se obtiene el Teorema de la Proyección Opcional, resultado básico que prueba que para cualquier función integrable f, sea

$$W_a = E_\theta(f(\theta, a, x)/\mathcal{G}_a), \quad \mathcal{G}_a \subset \mathcal{B}_a$$

se tiene

$$W_\tau = E_\theta(f(\theta, \tau, x)/\mathcal{G}_\tau)$$

y que se emplea tanto en este capítulo como en los dos siguientes.

Posteriormente, se definen y se estudian, las martingalas, submartingalas y supermantingalas para las familias $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a \in A}$.

La sección de planes de muestreo alcanzables tiene como objetivo, definir una función (llamada función de decisión) que bajo determinadas condiciones de medibilidad, y por recurrencia en su aplicación nos permita pasar de un plan de muestreo a otro que lo sucede, es decir que se cumpla la relación $\preceq$ entre ambos. Esto va ser interesante a la hora de obtener el Teorema de parada opcional para dos planes de muestreo cualesquiera que no sean necesariamente sucesores directos.

La siguiente sección dedicada al problema de parada opcional, comienza proporcionando un resultado sobre el mismo en el caso de que los planes de muestreo involucrados sean sucesores directos. El siguiente paso en la construcción del teorema general, consiste en dar un teorema de parada opcional, para planes de muestreo finitamente alcanzables, es decir, aquellos planes de muestreo $\sigma \preceq \tau$, de forma que partiendo de σ podemos llegar a τ a través de una función de decisión, aplicándola un número finito de veces.
Y finalmente en cuanto al problema de parada opcional, se proporciona un resultado para planes de muestreo alcanzables. Estos son, como se prueba en la sección donde se definen, cualquier par de planes de muestreo σ, τ admisibles, tales que $\sigma \preceq \tau$. Es decir, con este resultado se prueba el teorema de parada opcional para cualquier sucesión $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de planes de muestreo con tal de que sean admisibles y

$$\tau_1 \preceq \tau_2 \preceq \cdots \preceq \tau_n \preceq \cdots$$

La sección de parada óptima proporciona un resultado recíproco al teorema de parada opcional anterior, este resultado se obtiene a través del corolario que resulta de la ecuación de Bellman, basándose la demostración de dicha ecuación en la teoría de los planes de muestreo alcanzables.

Y finalmente en la última sección tratamos el problema de parada opcional desde el punto de vista de la integrabilidad uniforme. Se define la integrabilidad uniforme para una secuencia $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a \in A}$ donde sobre el conjunto de índices tenemos definido un orden parcial.

2.2 Planes de Muestreo

En la presente sección comenzaremos recordando el concepto de plan de muestreo dado en el capítulo 1 (1.1.3), y definiendo la σ-álgebra asociada a un plan de muestreo τ, estudiamos las propiedades de los conceptos anteriores; y definiremos, a partir de un plan de muestreo cualquiera τ dos funciones: la primera le hace corresponder a τ las $k \in \mathbb{N}$ primeras etapas, y la segunda las $j \in \mathbb{N}$ primeras observaciones. Estos conceptos serán empleados en el análisis posterior.

Definición 2.2.1 *Una función $\tau : \mathcal{X} \longrightarrow A \cup A^*$, tal que $\{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$, y $\{\tau \succeq (a_1, ..., a_j, k)\} \in \mathcal{B}_a$ $\forall a = (a_1, ..., a_j) \in A$, $\forall k \in \tilde{M}_a$ es un plan secuencial de muestreo no aleatorizado.*

Observación 8

De la definición anterior, se deduce que $\{\tau = a\}$, $\{\tau \succeq a\}$ son conjunto $\mathcal{B}_a$-medibles, $\forall a \in A$.

1. En efecto, sea $a = (a_1, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}$,

$$\{\tau = a\} = \{\tau \preceq a\} \cap \{\tau \preceq a^{k-1}\}^c \in \mathcal{B}_a$$

puesto que

$$\{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a, \quad \{\tau \preceq a^{k-1}\}^c \in \mathcal{B}_{a^{k-1}} \subset \mathcal{B}_a$$

2. $\{\tau \succeq a\} = \{\tau = a\} \cup \{\tau \succ a\} \in \mathcal{B}_a$, puesto que, $\{\tau = a\} \in \mathcal{B}_a$, por el apartado anterior, y

$$\{\tau \succ a\} = \bigcup_{j \in \tilde{M}_a} \{\tau \succeq aj\}$$

$\{\tau \succeq aj\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall j \in \tilde{M}_a$, por la definición de plan de muestreo, luego

$$\bigcup_{j \in \tilde{M}_a} \{\tau \succeq aj\} \in \mathcal{B}_a$$

$\square$

Definición 2.2.2 *Sea τ un plan de muestreo, definimos*

$$\mathcal{B}_\tau^1 = \{C \in \mathcal{B} : \forall a \in A, C \cap \{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a, \ y \ \forall h \in \tilde{M}_a, C \cap \{\tau \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a\}$$

Observación 9

La clase $\mathcal{B}_\tau^1$ es una σ-álgebra. En efecto:

1. $\mathcal{X} \cap \{\tau \preceq a\} = \{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$, y $\mathcal{X} \cap \{\tau \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall a \in A, \forall h \in \tilde{M}_a$. Luego $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_\tau$.

2. Sea $C \in \mathcal{B}_\tau$, entonces, $\forall a \in A$, $\forall h \in \tilde{M}_a$,

$$C^c \cap \{\tau \preceq a\} = \{\tau \preceq a\} - (C \cap \{\tau \preceq a\}) \in \mathcal{B}_a$$

$$C^c \cap \{\tau \succeq ah\} = \{\tau \succeq ah\} - (C \cap \{\tau \succeq ah\}) \in \mathcal{B}_a$$

3. Sea $\{C_i\} \in \mathcal{B}_\tau$, $\forall a \in A$, $\forall h \in \tilde{M}_a$

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \cap \{\tau \preceq a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(C_i \cap \{\tau \preceq a\}) \in \mathcal{B}_a$$

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \cap \{\tau \succeq ah\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(C_i \cap \{\tau \succeq ah\}) \in \mathcal{B}_a$$

Observación 10

De la observación anterior (8) se deduce que

$$\forall C \in \mathcal{B}^1_\tau, \quad \forall a \in A, \quad C \cap \{\tau = a\} \in \mathcal{B}_a, \quad C \cap \{\tau \succeq a\} \in \mathcal{B}_a$$

Proposición 2.2.1 *Dados τ y σ planes de muestreo, tales que $\tau \preceq \sigma$, se tiene que $\mathcal{B}^1_\tau \subset \mathcal{B}^1_\sigma$.*

Demostración:
Sea $B \in \mathcal{B}^1_\tau$, entonces se verifica que $\forall a \in A$, $\forall h \in \tilde{M}_a$,

$$B \cap \{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$$

$$B \cap \{\tau \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$

$B \in \mathcal{B}^1_\sigma$, si $\forall a \in A$, y $\forall h \in \tilde{M}_a$, se verifica

$$B \cap \{\sigma \preceq a\} \in \mathcal{B}_a, B \cap \{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$

En efecto, sea $a \in A$, $h \in \tilde{M}_a$,

1. $B \cap \{\sigma \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$.
   Como $\tau \preceq \sigma$, se tiene que
   $$\{\sigma \preceq a\} \subset \{\tau \preceq a\}$$
   Luego podemos escribir $B \cap \{\sigma \preceq a\}$ de la siguiente forma,
   $$B \cap \{\sigma \preceq a\} = B \cap \{\tau \preceq a\} \cap \{\sigma \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$$

2. $B \cap \{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$. Escribimos este conjunto de la siguiente forma,
   $$B \cap \{\sigma \succeq ah\} = (B \cap \{\tau \preceq a\} \cap \{\sigma \succeq ah\}) \bigcup (B \cap \{\tau \succ a\} \cap \{\sigma \succeq ah\})$$
   $$B \cap \{\tau \preceq a\} \cap \{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$
   Y,
   $$B \cap \{\tau \succ a\} \cap \{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$
   Veámoslo:
   $\{\tau \succ a\} = \bigcup_{j \in \tilde{M}_a} \{\tau \succeq aj\}$, luego,
   $$B \cap \{\tau \succ a\} \cap \{\sigma \succeq ah\} = \bigcup_{j \in \tilde{M}_a} (B \cap \{\tau \succeq aj\} \cap \{\sigma \succeq ah\})$$
   con $B \cap \{\tau \succeq aj\} \in \mathcal{B}_a$ por hipótesis y, $\{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$ por ser σ plan de muestreo.

Entonces,

$$B \in \mathcal{B}^1_\sigma$$

$\square$

Definición 2.2.3 *Sea τ un plan de muestreo, definimos*

$$\mathcal{B}_\tau = \{C \in \mathcal{B} : \forall a \in A, C \cap \{\tau = a\} \in \mathcal{B}_a\}$$

Observación 11

La clase $\mathcal{B}_\tau$ es una σ-álgebra. En efecto:

1. $\mathcal{X} \cap \{\tau = a\} = \{\tau = a\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall a \in A$.
2. Sea $C \in \mathcal{B}_\tau$, $C^c \cap \{\tau = a\} = \{\tau = a\} - (C \cap \{\tau = a\}) \in \mathcal{B}_a$, $\forall a \in A$.
3. Sea $\{C_i\} \in \mathcal{B}_\tau$,

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \cap \{\tau = a\} = (\bigcup_{i=1}^{\infty} (C_i \cap \{\tau = a\}) \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A$$

.

Observación 12

Deduciéndose de la definición anterior que $\forall C \in \mathcal{B}_\tau$

$$C \cap \{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A$$

por ser la familia $\mathcal{B}_a$ isotónica, y por la demostración de la proposición (2.2.1) resulta que dados dos planes de muestreo τ, σ, tales que $\tau \preceq \sigma$, se cumple $\mathcal{B}_\tau \subset \mathcal{B}_\sigma$.

Observación 13

En el caso de familias isotónicas de σ-álgebras se cumple

$$\mathcal{B}_\tau = \{C \in \mathcal{B} : \forall a \in A, \quad C \cap \{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a\}$$

Observación 14

$\mathcal{B}^1_\tau \subset \mathcal{B}_\tau$.

Proposición 2.2.2 *Si X_a es $\mathcal{B}_a$-medible, entonces X_τ será $\mathcal{B}_\tau$-medible, con tal que τ sea admisible, es decir, $g(\tau) < +\infty$ c.s.*

Demostración:

En tal caso si $\mathcal{A}^{(n} = \{a \in A : g(a) = n\}$,

$$X_\tau = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{a\in\mathcal{A}^{(n}} X_a I_{\{\tau=a\}}$$

será $\mathcal{B}_\tau$-medible, si $X_a I_{\{\tau=a\}}$ es $\mathcal{B}_\tau$-medible.

$$\{x : X_a I_{\{\tau=a\}} \le y\} = \begin{cases} \{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} & y < 0 \\ \{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} \cup \{\tau = a\}^c & y \ge 0 \end{cases}$$

Si $y < 0$,

$$\{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau \preceq b\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & a \not\preceq b \\ \{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} & a \preceq b \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_b$$

$$\{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} \in \mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_b, \quad a \preceq b$$

Si $y \ge 0$,

$$\begin{aligned} \{\tau \preceq b\} \quad &\cap \quad (\{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} \cup \{\tau = a\}^c) \\ &= \quad (\{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau \preceq b\}) \cup (\{\tau = a\}^c \cap \{\tau \preceq b\}) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\{x : X_a \le y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau \preceq b\} \in \mathcal{B}_b$$

Veamos que $\{\tau = a\}^c \cap \{\tau \preceq b\} \in \mathcal{B}_b$, en efecto, para $a = (a_1, \cdots, a_k)$,

$$\{\tau = a\}^c \cap \{\tau \preceq b\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\tau \preceq b\} & a \succ b, \text{ o } a \not\succeq b \text{ y } b \not\succeq a \\ \bigcup_{l\neq k}\{\tau = b^l\} & a \prec b, \exists k \text{ con } \quad a = b^k \\ \{\tau \preceq a^{k-1}\} & a = b \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_b$$

Entonces X_τ es $\mathcal{B}_\tau$-medible. □

Definición 2.2.4 *Dados τ, σ planes de muestreo, diremos que son sucesores directos, si $\sigma \preceq \tau$ y, bien, $h(\sigma) = h(\tau)$, ó $h(\tau) = h(\sigma) + 1$.*

Definición 2.2.5 *Dado un plan de muestreo τ, definimos $_k\tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$_k\tau = \begin{cases} \tau & h(\tau) \le k \\ \tau^k = (\tau_1, ..., \tau_k) & h(\tau) > k \end{cases}$$

Observación 15

$_{k+1}\tau$ y $_k\tau$ son sucesores directos, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.2.3 *Dado τ un plan de muestreo, entonces ${}_k\tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$, es un plan de muestreo admisible, y ${}_k\tau \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} \tau$.*

Demostración:

Por la definición, dado $k \in \mathbb{N}$, ${}_k\tau$ consta a lo sumo de k etapas, por lo que será admisible. ${}_k\tau$ es plan de muestreo, en efecto, sea $a \in A$ y $j \in \tilde{M}_a$:

$$\{{}_k\tau = a\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\tau = a\} & h(a) < k \\ \{\tau = a\} \cup \bigcup_{j\in\tilde{M}_a}\{\tau \succeq aj\} & h(a) = k \\ \emptyset & h(a) > k \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

Por lo tanto,

$$\{{}_k\tau \preceq a\} = \bigcup_{i=1}^{h(a)} \{{}_k\tau = a^i\} \in \mathcal{B}_a$$

ya que $a^i \preceq a$, $i = 1, ..., h(a)$, y $\mathcal{B}_{a^i} \subset \mathcal{B}_a$.

$$\{{}_k\tau \succeq aj\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\tau \succeq aj\} & h(a) \leq k-1 \\ \emptyset & h(a) > k-1 \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

□

Proposición 2.2.4 *Sea τ un plan de muestreo, y ${}_k\tau$, entonces*

1. $\mathcal{B}_{{}_k\tau} \subset \mathcal{B}_{{}_{k+1}\tau}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
2. $\mathcal{B}_{{}_k\tau} \subset \mathcal{B}_\tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Cierto utilizando la observación (12) por ser ${}_k\tau \preceq_{k+1} \tau$, y ${}_k\tau \preceq \tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 2.2.5 *Dados τ un plan de muestreo, y ${}_k\tau$, entonces $I_{\{\tau\succ_k\tau\}}$ es una función $\mathcal{B}_{{}_k\tau}$-medible, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

$I_{\{\tau\succ({}_k\tau)\}}$ será $\mathcal{B}_{{}_k\tau}$-medible, si $\{\tau \succ ({}_k\tau)\} \in \mathcal{B}_{{}_k\tau}$, pero $\{\tau \succ_k \tau\} = (h(\tau) > k)$. Sea $a \in A$, $h \in \tilde{M}_a$,

$$(h(\tau) > k) \cap \{{}_k\tau = a\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & h(a) \neq k \\ \{\tau \succ a\} & h(a) = k \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$(h(\tau) > k) \cap \{{}_k\tau = a\} \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A$$

Deduciéndose el resultado. □

Definición 2.2.6 *Sea τ un plan de muestreo, definimos ${}^k\tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$
{}^k\tau = \begin{cases} \tau & g(\tau) \leq k \\ (\tau_1, ..., \tau_j, b) & g(\tau_1, ..., \tau_j) < k, \quad g(\tau_1, ..., \tau_{j+1}) > k, \quad g(\tau_1, ..., \tau_j, b) = k \end{cases}
$$

$b \in M$.

Proposición 2.2.6 *Sea τ un plan de muestreo, entonces ${}^k\tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$, es un plan de muestreo admisible, y ${}^k\tau \underset{k\to\infty}{\xrightarrow{c.s.}} \tau$.*

Demostración:
Sea $a = (a_1, \cdots, a_j) \in A$,

$$
\{{}^k\tau = a\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\tau \succeq a\} = \bigcup_{\substack{l\in M \\ g(l)>g(a^j)}} \{\tau \succeq (a^{j-1}, l)\} \bigcup \{\tau = a\} & g(a) = k \\ \{\tau = a\} & g(a) < k \\ \emptyset & g(a) > k \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a
$$

Entonces,

$$
\{{}^k\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a
$$

Sea $j \in \tilde{M}_a$,

$$
\{{}^k\tau \succeq aj\} = \left\{ \begin{array}{ll} \bigcup_{\substack{l\in M \\ g(l)\geq g(j)}} \{\tau \succeq al\} & g(a) \leq k - j \\ \emptyset & g(a) > k - j \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a
$$

Efectivamente ${}^k\tau$, es un plan de muestreo admisible, pues, $g({}^k\tau) \leq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. □

2.3 Teorema de la Proyección Opcional

Teorema 2.3.1 *Sea $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{B}_a$ una sub-σ-álgebra, $\forall a \in A$, tal que $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{G}_b$, si $a \preceq b$. Sea $f : \Theta \times A \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que $\forall a \in A$, f es $\mathcal{B}_a$-medible. Definimos $W_a = E_\theta(f(\theta, a, x)/\mathcal{G}_a)$, $\forall a \in A$. Entonces para todo plan de muestreo admisible τ, es $W_\tau = E_\theta(f(\theta, \tau, x)/\mathcal{G}_\tau)$.*

Demostración:
Sea $B \in \mathcal{G}_\tau$,

$$
\begin{aligned}
\int_B f(\theta, \tau, x) dP &= \sum_{a\in A} \int_{B\cap\{\tau=a\}} f(\theta, \tau, x) dP = \sum_{a\in A} \int_{B\cap\{\tau=a\}} f(\theta, a, x) dP \\
&= \sum_{a\in A} \int_{B\cap\{\tau=a\}} E_\theta(f(\theta, a, x)/\mathcal{G}_a) dP = \sum_{a\in A} \int_{B\cap\{\tau=a\}} W_a dP \\
&= \sum_{a\in A} \int_{B\cap\{\tau=a\}} W_\tau dP = \int_B W_\tau dP
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.3.2 *En las mismas hipótesis del teorema anterior, se cumple que para todo plan de muestreo τ, es $W_\tau I_{\{h(\tau)<+\infty\}} = E_\theta(f(\theta,\tau,x)I_{\{h(\tau)<+\infty\}}/\mathcal{G}_\tau)$.*

Demostración:
Sea $B \in \mathcal{G}_\tau$,

$$\begin{aligned}\int_B f(\theta,\tau,x)I_{\{h(\tau)<+\infty\}}dP &= \int_{B\cap\{h(\tau)<+\infty\}} f(\theta,\tau,x)dP \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{a\in A_k}\int_{B\cap\{\tau=a\}} W_a dP = \int_B W_\tau I_{\{h(\tau)<+\infty\}}dP\end{aligned}$$

siendo $A_k = \{a \in A : h(a) = k\}$. □

2.4 Martingalas y Submartingalas

Sea $X : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación integrable, adaptada a la familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}_a)_{a\in A}$. Diremos que,

Definición 2.4.1 $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ *es una martingala si,*

$$E(X_{ak}/\mathcal{B}_a) = X_a \ \textit{c.s.}\ \forall k \in \tilde{M}_a, \quad \forall a \in A$$

Definición 2.4.2 $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ *es una submartingala si,*

$$E(X_{ak}/\mathcal{B}_a) \geq X_a \ \textit{c.s.}\ \forall k \in \tilde{M}_a, \quad \forall a \in A$$

Definición 2.4.3 $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ *es una supermartingala si,*

$$E(X_{ak}/\mathcal{B}_a) \leq X_a \ \textit{c.s.}\ \forall k \in \tilde{M}_a, \quad \forall a \in A$$

Observación 16

Las definiciones anteriores son equivalentes a la siguiente. Diremos que $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ es una martingala (sub o super) si

$$E(X_{a^{i+1}}/\mathcal{B}_{a^i}) = X_{a^i} \text{ c.s. } (\geq, \leq \text{ resp.}) \quad \forall a \in A$$

con $a^i = (a_1, ..., a_i)$.

2.4.1 Propiedades

1. Si $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ es una martingala (sub o super), entonces

$$E(X_{a^{i+j}}/\mathcal{B}_{a^i}) = X_{a^i} \text{ c.s. } (\geq, \leq \text{ resp.}), \quad \forall a \in A, \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

   Demostración:
   Por el método de inducción.

- $k = 1$ es cierto por la observación anterior.
- supongamos que es cierto para $k = n$.
- veamos que es cierto para $n + 1$

$$E(X_{a^{i+n+1}}/\mathcal{B}_{a^i}) = E(E(X_{a^{i+n+1}})\mathcal{B}_{a^{i+n}})/\mathcal{B}_{a^i})$$

$$= E(X_{a^{i+n}}/\mathcal{B}_{a^i}) = X_{a^i} \text{ c.s.}$$

de forma análoga se demostraría para submartingalas y supermartingalas.

□

2. $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ es una martingala (sub o super) $\Longleftrightarrow$ para cada $a \in A$, $\forall B \in \mathcal{B}_a$, $\forall k \in \tilde{M}_a$, $\int_B X_{ak} dP = \int_B X_a dP$ ($\geq, \leq$ resp.)

Demostración:
Probaremos el resultado para el caso martingala, siendo los otros dos análogos.
Dado $a \in A$, $B \in \mathcal{B}_a$, y $k \in \tilde{M}_a$,

$$\int_B X_{ak} dP = \int_B E(X_{ak}/\mathcal{B}_a) dP = \int_B X_a dP$$

□

2.5 Planes de Muestreo Alcanzables

A continuación definimos los conceptos de función de decisión, y alcanzabilidad para el problema secuencialmente planificado. Estos conceptos fueron desarrollados por Washburn, Willsky [30], en términos de tiempos de parada para funciones con índices sobre un conjunto parcialmente ordenado.

Se estudian las distintas relaciones que existen entre los términos para dos planes de muestreo τ, y σ de ser finitamente alcanzable, fuertemente alcanzable y alcanzable uno respecto del otro. Se llega a probar que el conjunto de todos las funciones estocásticas τ, tales que $\tau \succeq \sigma$ con σ plan de muestreo, coincide con el conjunto de planes de muestreo alcanzables desde σ y a su vez con el conjunto de los fuertemente alcanzables desde σ; resultado muy interesante a la hora de demostrar el teorema de parada opcional para una sucesión $\tau_1 \preceq \cdots \preceq \tau_n$ de planes de muestreo admisibles.

Definición 2.5.1 *Una función de decisión ϕ es una aplicación*

$$\phi : A \times \mathcal{X} \longrightarrow A$$

que satisface:

$$a \preceq \phi(a,x), \ \ y \ \{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) = b\} \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a, b \in A$$

Sea D el conjunto de todas las funciones de decisión definidas sobre $(A, \preceq)$.

Observación 17

D depende de $(A, \preceq)$ y de $(\mathcal{B}_a)_{a \in A}$.

Observación 18

Nos vamos a centrar en el resto del capítulo en planes de muestreo admisibles, es decir, σ plan de muestreo será admisible si verifica

$$P(\sigma \in A) = 1$$

Observación 19

Dado $k \in \mathbb{N}$, ϕ^k denota el resultado de las k aplicaciones sucesivas de la función ϕ. Así:

$$\phi^{k+1}(a,x) = \phi(\phi^k(a,x), x)$$

con $\phi^0(a,x) = a$, $\forall a \in A$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Observación 20

Para cualquier plan de muestreo σ, $\phi(\sigma)$ denota la función aleatoria $x \longrightarrow \phi(\sigma(x), x)$.

Proposición 2.5.1 *Sea $\phi \in D$, definida en (2.5.1), entonces se cumple:*

1. $\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \succeq b\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall a, b \in A$.
2. $\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \preceq b\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall a, b \in A$.
3. $\{x \in \mathcal{X} : \phi^j(a,x) = b\} \in \mathcal{B}_b$, $\forall a, b \in A$, $j \in \mathbb{N}$.
4. $\{x \in \mathcal{X} : \phi^j(a,x) \preceq b\} \in \mathcal{B}_b$, $\forall a, b \in A$, $j \in \mathbb{N}$.

Demostración:

1. Sea $\phi \in D$ función de decisión, y $a, b \in A$.
Si $a \preceq b$,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \succeq b\} = \bigcup_{\substack{c \in A \\ c \succeq b}} \{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) = c\} \in \mathcal{B}_a$$
Si $a \npreceq b$, $b \npreceq a$,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \succeq b\} = \emptyset \in \mathcal{B}_a$$
Si $b \preceq a$,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \succeq b\} = \Omega \in \mathcal{B}_a$$

2. Sea $\phi \in D$ función de decisión, y $a, b \in A$.
Si $a \prec b$,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \preceq b\} = \bigcup_{i=1}^{h(b)} \{x \in \mathcal{X} : \phi(a) = b^i\} \in \mathcal{B}_a$$
Si $a = b$,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) = a\} \in \mathcal{B}_a$$
Si $a \npreceq b$,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \preceq b\} = \emptyset \in \mathcal{B}_a$$

3. Sea $\phi \in D$ función de decisión, $a, b \in A$, $j \in \mathbb{N}$.
Veamos que se cumple para $j = 2$,
Si $a = b$, entonces,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi^2(a,x) = b\} \in \mathcal{B}_b$$
Si $a \prec b$, entonces,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi^2(a,x) = b\} = \bigcup_{\substack{c_1 \in A \\ a \prec c_1 \preceq b}} \{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) = c_1\} \cap \{x \in \mathcal{X} : \phi(c_1,x) = b\} \in \mathcal{B}_b$$
puesto que,
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) = c_1 \preceq b\} \in \mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_b, \quad \forall a \prec c_1 \preceq b$$
$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(c_1,x) = b\} \in \mathcal{B}_{c_1} \subset \mathcal{B}_b, \quad \forall a \prec c_1 \preceq b$$
Supongamos ahora que $\{x \in \mathcal{X} : \phi^{j-1}(a,x) = b\} \in \mathcal{B}_b$, y veamos que se cumple para $j \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\{x \in \mathcal{X} : \phi^j(a,x) = b\} &= \bigcup_{\substack{c_{j-1} \in A \\ a \preceq c_{j-1} \preceq b}} \{x \in \mathcal{X} : \phi^{j-1}(a,x) = c_{j-1} \preceq b\} \\ &\cap \ \{x \in \mathcal{X} : \phi(c_{j-1},x) = b\} \in \mathcal{B}_b\end{aligned}$$

puesto que,

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi^{j-1}(a,x) = c_{j-1} \preceq b\} \in \mathcal{B}_b, \text{ para } c_{j-1} \preceq b$$

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(c_{j-1},x) = b\} \in \mathcal{B}_b, \quad c_{j-1} \preceq b$$

4. Sea $\phi \in D$ función de decisión, $a, b \in A$, $j \in \mathbb{N}$.

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi^j(a,x) \preceq b\} = \bigcup_{\substack{c \in A \\ c \preceq b}} \{x \in \mathcal{X} : \phi^j(a,x) = c\} \in \mathcal{B}_c \subset \mathcal{B}_b$$

□

Observación 21

Supongamos para las definiciones siguientes, que $\tau : \mathcal{X} \longrightarrow A \cup A^*$, es una función aleatoria, que verifica $\{\tau = a\} \in \mathcal{B}$, $\forall a \in A$; y que σ es un plan de muestreo admisible.

Definición 2.5.2 *Diremos que τ es finitamente alcanzable desde σ, si existe $\phi \in D$, y $k \in \mathbb{N}$, tal que,*

$$\phi^k(\sigma) = \tau \text{ c.s.}$$

Denotamos por $FA(\sigma)$, al conjunto de todos los τ finitamente alcanzables desde σ.

Definición 2.5.3 *Diremos que τ es fuertemente alcanzable desde σ, si existe $\phi \in D$, tal que, existe*

$$\lim_{k \to \infty} \phi^k(\sigma)$$

y es igual a τ c.s.

El límite anterior, se interpreta en términos de la topología discreta sobre A. Es decir, para casi todo x, tenemos que el $\lim_{k \to \infty} \phi^k(\sigma(x), x) = \tau(x)$, si y sólo si, $\phi^n(\sigma(x), x) = \tau(x)$, para algún n, que dependerá en general de x.

Denotamos por $FRA(\sigma)$, al conjunto de todos los τ fuertemente alcanzables desde σ.

Definición 2.5.4 *Diremos que τ es alcanzable desde σ, si $\exists\{\tau_k\}$ secuencia en $FA(\sigma)$, tal que,*

$$\lim_{k \to \infty} P(\tau_k \neq \tau) = 0$$

Denotamos por $A(\sigma)$, al conjunto de todos los τ alcanzables desde σ.

Proposición 2.5.2 *Sea σ un plan de muestreo admisible, $\phi \in D$, y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\phi^k(\sigma) = \tau$, es un plan de muestreo admisible.*

Demostración:
τ será un plan de muestreo, si verifica que $\forall a \in A$ y $\forall h \in \tilde{M}_a$,

$$\{\tau \preceq a\}, \{\tau \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\{\tau \preceq a\} &= \{\phi^k(\sigma) \preceq a\} \\
&= \{\phi^k(\sigma) \preceq a\} \cap \{\sigma \preceq a\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{h(a)} (\{\phi^k(a^i) \preceq a\} \cap \{\sigma = a^i\}) \in \mathcal{B}_a
\end{aligned}$$

$\{\phi^k(a^i) \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$, por la proposición (2.5.1).

$$\begin{aligned}
\{\tau \succeq ah\} &= \{\phi^k(\sigma) \succeq ah\} \\
&= [\bigcup_{j=0}^{k-1} \{\phi^j(\sigma) \preceq a\} \cap \{\phi^{j+1}(\sigma) \succeq ah\}] \cup \{\sigma \succeq ah\} \\
(\{\phi^j(\sigma) \preceq a\} &\subset \{\sigma \preceq a\}) \\
&= [\bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{i=1}^{h(a)} \{\phi^j(\sigma) \preceq a\} \cap \{\phi^{j+1}(\sigma) \succeq ah\} \cap \{\sigma = a^i\}] \cup \{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a
\end{aligned}$$

puesto que,

$$\{\sigma = a^i\} \in \mathcal{B}_{a^i} \subset \mathcal{B}_a$$

$$\{\sigma \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$

por ser σ plan de muestreo, y,

$$\begin{aligned}
\{\phi^j(a^i) \preceq a\} \quad &\cap \quad \{\phi^{j+1}(a^i) \succeq ah\} \\
&= \bigcup_{k \geq i} \{\phi^j(a^i) = a^k \preceq a\} \cap \{\phi(a^k) \succeq ah\}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\{\phi^j(a^i) = a^k \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$$

$$\{\phi(a^k) \succeq ah\} \in \mathcal{B}_{a^k} \subset \mathcal{B}_a$$

por la proposición (2.5.1). Lo que prueba que cualquier función aleatoria, finitamente alcanzable desde un plan de muestreo admisible, es plan de muestreo admisible. □

Observación 22

Dado σ plan de muestreo admisible, $\forall k \in \mathbb{N}$, se tiene por la observación (12) que $\mathcal{B}_{\phi^k(\sigma)} \subset \mathcal{B}_{\phi^{k+1}(\sigma)}$.

Observación 23

Hemos definido con anterioridad τ una función aleatoria, esto no es una restricción en nuestro caso, puesto que más adelante veremos, que si $\tau \in A(\sigma)$ con σ plan de muestreo admisible, entonces τ es un plan de muestreo admisible. Y además, $A(\sigma) = FRA(\sigma)$.

Observación 24

Dado σ plan de muestreo admisible y $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ una submartingala,

1. Llamamos $ST(\sigma)$ "sucesor temporal" al conjunto de todos los τ, tales que, $\sigma \preceq \tau$.
2. Por $PO(\sigma, \{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A})$ denotamos al conjunto de todos los τ, tales que $\sigma \preceq \tau$, y se verifica
$$E(X_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq X_\sigma \text{ c.s.}$$
$PO(\sigma)$, indicará el conjunto de los τ, tales que se cumple el teorema de parada opcional, para cualquier submartingala que consideremos.

En el siguiente teorema se prueba la relación existente entre los conjuntos definidos previamente.

Teorema 2.5.1 *Sea σ un plan de muestreo admisible, entonces*
$$FA(\sigma) \subset FRA(\sigma) \subset A(\sigma) \subset ST(\sigma)$$

Demostración:

1. $\underline{FA(\sigma) \subset FRA(\sigma)}$:
Sea $\tau \in FA(\sigma)$, entonces $\exists \phi \in D$ y $k \in \mathbb{N}$, tal que $\tau = \phi^k(\sigma)$, luego
$$\tau = \lim_{k\to\infty} \varphi^k(\sigma) \text{ c.s.}$$
deduciéndose, que $\tau \in FRA(\sigma)$.

2. $\underline{FRA(\sigma) \subset A(\sigma)}$:
Sea $\tau \in FRA(\sigma)$, entonces $\exists \phi \in D$, tal que
$$\tau = \lim_{k\to\infty} \phi^k(\sigma) \text{ c.s.}$$
Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\tau_k = \phi^k$, $\tau_k \in FA(\sigma)$. Sea $B_k = \{x \in \mathcal{X} : \tau_k(x) \neq \tau(x)\}$, $k \in \mathbb{N}$, consideramos
$$C_n = \bigcup_{k\geq n}^{\infty} B_k, \quad C_n \downarrow C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Se tiene que

$$C \subset \{x \in \mathcal{X} : \lim_{k\to\infty} \tau_k(x) \neq \tau(x)\}$$

En efecto, si $x \in C$, entonces,

$$x \in C_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, $x \in \bigcup_{k\geq n}^{\infty} B_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k_x \geq n, \quad \tau_k(x) \neq \tau(x)$$

entonces,

$$\tau_k(x) \text{ no converge a } \tau(x)$$

Como $\tau \in FRA(\sigma)$, resulta $P(C) = 0$, y $C_n \downarrow C$, será $\lim_{n\to\infty} P(C_n) = 0$. Además $B_n \subset C_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, quedando entonces, $P(B_n) \leq P(C_n)$, y así,

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau_n \neq \tau) = 0$$

deduciéndose, que $\tau \in A(\sigma)$.

3. $\underline{A(\sigma) \subset ST(\sigma)}$:
   Sea $\tau \in A(\sigma)$, entonces $\exists \{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $FA(\sigma)$, tal que $\lim_{k\to\infty} P(\{\tau_k \neq \tau\}) = 0$, y $\forall k \in \mathbb{N}$, $\tau_k \succeq \sigma$.
   Llamamos $A_k = \{\tau_k \neq \tau\}$, y como $\lim_{k\to\infty} P(\{\tau_k \neq \tau\}) = 0$, elegimos:
   Para $\epsilon_1 = 1/2$, n_1, tal que, $P(\{\tau_{n_1} \neq \tau\}) < 1/2$.
   Para $\epsilon_2 = 1/2^2$, $n_2 > n_1$, tal que, $P(\{\tau_{n_2} \neq \tau\}) < 1/2^2$.
   Para $\epsilon_k = 1/2^k$, $n_k > ... > n_1$, tal que, $P(\{\tau_{n_k} \neq \tau\}) < 1/2^k$.

$$P(\limsup_{k\to\infty} A_{n_k}) \leq \sum_{k\geq j} P(A_{n_k}) < \frac{1}{2^{j-1}}, \quad \forall j$$

Entonces,

$$P(\limsup_{k\to\infty} A_{n_k}) = 0$$

y,

$$P(\liminf_{k\to\infty} (A_{n_k})^c) = 1$$

Entonces, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\exists k_0$, tal que, $\forall k \geq k_0$, $x \in (A_{n_k})^c$, c.s., es decir, $x \in \{x \in \mathcal{X} : \tau(x) = \tau_{n_k}(x)\}$ c.s. Como $\forall k \in \mathbb{N}$, es $\tau_{n_k} \succeq \sigma$, entonces es

$$\tau \succeq \sigma \text{ c.s.}$$

□

Observación 25

Intuitivamente, τ es alcanzable desde σ, si existe una secuencia finita de funciones de decisión que alcanzan τ desde σ, con probabilidad arbitrariamente grande.

El siguiente teorema muestra, que si $\tau_2 \in A(\tau_1)$, con τ_1 plan de muestreo admisible, se tiene que τ_2 también es un plan de muestreo admisible; y que para cualquier par de planes de muestreo admisibles $\tau_1 \preceq \tau_2$, τ_2 es fuertemente alcanzable desde τ_1. Lo que nos lleva a que en el caso de los planes de muestreo los conceptos de alcanzable y fuertemente alcanzable coinciden.

Teorema 2.5.2 *1. Sean $\tau_1 \preceq \tau_2$ planes de muestreo admisibles $\Longrightarrow \tau_2 \in FRA(\tau_1)$.*

2. Sea $\tau_2 \in A(\tau_1)$, τ_1 un plan de muestreo admisible $\Longrightarrow \tau_1 \preceq \tau_2$, y τ_2 es un plan de muestreo admisible.

Luego, $A(\tau_1) = FRA(\tau_1)$.

Demostración:

1. Sean $\tau_1 \preceq \tau_2$ planes de muestreo admisibles $\Longrightarrow \tau_2 \in FRA(\tau_1)$. Probamos este resultado en dos etapas:

   (a) Supongamos $\tau_1 \equiv a$, con $a \in A$. Si τ_2 plan de muestreo admisible, tal que $\tau_2 \succeq a$, veamos que $\tau_2 \in FRA(a)$.
   Supongamos $a = (a_1, ..., a_n) \in A$. Definimos:

$$\phi(a,x) = \begin{cases} (a_1, ..., a_n, a_{n+1}) & \tau_2(x) \succeq (a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \\ a & \tau_2(x) \prec (a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \end{cases}$$

   φ está bien definida, al ser A un árbol, y $\varphi(a)$ es $\mathcal{B}_a$-medible, por ser τ_2 un plan de muestreo. En efecto:

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) = b\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & b \notin \tilde{M}_a \\ \{\tau_2(x) \succeq b\} & b \in \tilde{M}_a \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

   Si $\tau_2 \not\succ a$, entonces $\phi(a,x) = a$ y $\lim_{k\to\infty} \phi^k(a,x) = a$.
   Si $\tau_2 \succ a$, entonces $a \prec \phi(a,x) \preceq \tau(x)$.

   Por lo tanto si $a = (a_1, ..., a_n)$, y para $x \in \mathcal{X}$, supongamos que es $\tau_2(x) = (\tau_1^2(x), ..., \tau_{n+k}^2(x))$ entonces,

$$(\tau_1^2(x), \tau_2^2(x), ..., \tau_{n+j}^2(x)) \preceq \phi^j(a,x), \quad 1 \leq j \leq k$$

Y $\phi^k(a,x)=\tau_2(x)$, resultando,

$$\lim_{k\to\infty}\phi^k(a,x)=\tau_2(x)$$

siempre que $\tau_2(x)\succeq a$. Así,

$$\tau_2\in FRA(a)$$

(b) Sean $\tau_1\preceq\tau_2$ planes de muestreo admisibles, aplicamos $\phi\in D$ definida en el apartado anterior a τ_1:

$$\phi(\tau_1(x),x)=\sum_{a_1\in M}(\tau_1(x),a_1)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1)\}}+\tau_1(x)I_{\{\tau_2=\tau_1\}}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\tau_1(x),x) &= \phi(\phi(\tau_1(x),x))=\sum_{a_1,a_2\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1)\}}I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2)\}}\\
&+ \sum_{a_1,a_2\in M}(\tau_1(x),a_1)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1)\}}+\tau_1(x)I_{\{\tau_1=\tau_2\}}\\
&= \sum_{a_1,a_2\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2)\}}+\sum_{a_1\in M}(\tau_1(x),a_1)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1)\}}\\
&+ \tau_1(x)I_{\{\tau_1=\tau_2\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^3(\tau_1(x),x) &= \sum_{a_1,a_2,a_3\in M}\phi(\phi^2(\tau_1(x),(x)))=(\tau_1(x),a_1,a_2,a_3)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2,a_3)\}}\\
&+ \sum_{a_1,a_2\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2)I_{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2)\}}+\sum_{a_1\in M}(\tau_1(x),a_1)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1)\}}\\
&+ \tau_1(x)I_{\{\tau_1=\tau_2\}}\\
&= \sum_{a_1,a_2,a_3\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2,a_3)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2,a_3)\}}\\
&+ \sum_{a_1,a_2\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1,a_2)\}}+\sum_{a_1\in M}(\tau_1(x),a_1)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1)\}}\\
&+ \tau_1(x)I_{\{\tau_1=\tau_2\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^k(\tau_1(x),x) &= \sum_{a_1,\ldots,a_k\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2,\ldots,a_k)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2,\ldots,a_k)\}}\\
&+ \sum_{a_1,\ldots,a_{k-1}\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})\}}\\
&+ \cdots+\sum_{a_1,a_2\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1,a_2)\}}\\
&+ \sum_{a_1\in M}(\tau_1(x),a_1)I_{\{\tau_2=(\tau_1,a_1)\}}+\tau_1(x)I_{\{\tau_2=\tau_1\}}
\end{aligned}$$

Y así:

$$\begin{aligned}
\phi^k(\tau_1(x),x) &= \sum_{a_1,\ldots,a_k\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2,\ldots,a_k)I_{\{\tau_2\succeq(\tau_1,a_1,a_2,\ldots,a_k)\}}+\phi^{k-1}(\tau_1(x),x)\\
&- \sum_{a_1,\ldots,a_{k-1}\in M}(\tau_1(x),a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})I_{\{\tau_2\succ(\tau_1,a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})\}}
\end{aligned}$$

A continuación probaremos, que $\tau_2 \in FRA(\tau_1)$. Como $\tau_1 \preceq \tau_2$, para cada $x \in \mathcal{X}$, $\exists n, k \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\tau_1(x) = (\tau_1^1(x), ..., \tau_n^1(x))$$

$$\tau_2(x) = (\tau_1^2(x), ..., \tau_n^2(x), ..., \tau_{n+k}^2(x))$$

siendo $\tau_1^2(x) = \tau_1^1(x), ..., \tau_n^1(x) = \tau_n^2(x)$.
Y,

$$(\tau_1^2(x), ..., \tau_{n+j}^2(x)) \preceq \phi^j(\tau_1(x), x), \quad 1 \leq j \leq k$$

$\phi^k(\tau_1(x), x) = \tau_2(x)$, y $\phi^{k+j}(\tau_1(x), x) = \tau_2(x)$, $j \geq 1$. Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \phi^k(\tau_1) = \tau_2 \text{ c.s.}$$

$$\Longrightarrow \tau_2 \in FRA(\tau_1)$$

2. Supongamos ahora, que $\tau_2 \in A(\tau_1)$ es una función aleatoria, τ_1 es un plan de muestreo admisible, entonces por el teorema (2.5.1), es $\tau_2 \succeq \tau_1$. Si τ_1 es plan de muestreo admisible, se tiene que τ_2 es plan de muestreo. En efecto:
   Sea $\tau_2 \in A(\tau_1)$, por lo tanto, $\exists \{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, una sucesión en $FA(\tau_1)$, tales que, $\lim_{k\to\infty} P(\tau_k \neq \tau_2) = 0$. Hemos demostrado previamente en la proposición (2.5.2), que τ_k $\forall k \in \mathbb{N}$, es un plan de muestreo admisible, es decir, $\{\tau_k \preceq a\}, \{\tau_k \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$, $\forall k \in \mathbb{N}$,$\forall a \in A$, $\forall h \in \tilde{M}_a$.
   Para probar que τ_2 es plan de muestreo, debemos demostrar que,

$$\{\tau_2 \preceq a\} \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A$$

$$\{\tau_2 \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A, \quad \forall h \in \tilde{M}_a$$

   De acuerdo con la demostración del teorema (2.5.1) $\forall x \in \mathcal{X}$, $\exists k_0$, tal que, $\forall k \geq k_0$, $x \in (A_{n_k})^c$, c.s., siendo $A_{n_k} = \{\tau_{n_k} \neq \tau\}$, es decir, $x \in \{x \in \mathcal{X} : \tau_2(x) = \tau_{n_k}(x)\}$ c.s.
   Dado $a \in A$, y $h \in \tilde{M}_a$,
   si $x \in \{\tau_2 \preceq a\}$, entonces $\exists k_0$, tal que $\forall k \geq k_0$ $x \in \{\tau_2(x) = \tau_{n_k}(x)\}$ c.s., luego $x \in \{\tau_{n_k}(x) \preceq a\}$, es decir,

$$x \in \bigcup_{k_0=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq k_0}^{\infty} \{\tau_{n_k} \preceq a\} \text{ c.s.}$$

   si $x \in \bigcup_{k_0=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq k_0}^{\infty} \{\tau_{n_k} \preceq a\}$ c.s., se tiene

$$x \in \{\tau_2 \preceq a\} \text{ c.s.}$$

   luego podemos escribir:

$$\{\tau_2 \preceq a\} = \bigcup_{k_0=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq k_0}^{\infty} \{\tau_{n_k} \preceq a\} \text{ c.s.}$$

$$\{\tau_2 \succeq ah\} = \bigcup_{k_0=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq k_0}^{\infty} \{\tau_{n_k} \succeq ah\} \text{ c.s.}$$

Como τ_{n_k} es plan de muestreo $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau_{n_k} \preceq a\}, \{\tau_{n_k} \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a$$

se tiene que

$$\{\tau_2 \preceq a\} \in \mathcal{B}_a, \text{ c.s. }, \forall a \in A$$

$$\{\tau_2 \succeq ah\} \in \mathcal{B}_a, \text{ c.s. }, \forall a \in A, \forall h \in \tilde{M}_a$$

Así, τ_2 es c.s. un plan de muestreo, y por ser de $A(\tau_1)$ para c.s., pues τ_2 se puede alcanzar desde τ_1, en un número finito de etapas, como vimos en la definición de "ser alcanzable".

Finalmente, para τ_1, τ_2 planes de muestreo admisibles, $\tau_1 \preceq \tau_2 \Longrightarrow \tau_2 \in FRA(\tau_1) \Longrightarrow \tau_2 \in A(\tau_1) \Longrightarrow \tau_1 \preceq \tau_2$ admisibles. Se tiene,

$$A(\tau_1) = FRA(\tau_1)$$

□

Corolario 2.5.3 *Sea τ_1 un plan de muestreo admisible, entonces*

$$FRA(\tau_1) = A(\tau_1) = ST(\tau_1)$$

Demostración:
$A(\tau_1) \subset ST(\tau_1)$, como vimos en el teorema (2.5.1). Sea $\tau_2 \in ST(\tau_1)$, es decir $\tau_2 \preceq \tau_1$, por el teorema previo se tiene que τ_2 es un plan de muestreo admisible, tal que $\tau_2 \in A(\tau_1)$, quedando así probado el otro contenido. □

Proposición 2.5.3 *Sean τ_1, τ_2, planes de muestreo admisibles, definimos*

$$\phi(\tau_1(x), x) = \sum_{a_1 \in M} (\tau_1(x), a_1) I_{\{\tau_2 \succeq (\tau_1, a_1)\}} + \tau_1(x) I_{\{\tau_2 = \tau_1\}}$$

con $\phi \in D$, definida en el teorema (2.5.2), entonces se tiene que ϕ es $\mathcal{B}_{\tau_1}$-medible, considerando sobre A, la σ-álgebra $\mathcal{P}(A)$.

Demostración:
ϕ será $\mathcal{B}_{\tau_1}$-medible, si $\forall a \in A$, y $\forall B \in \mathcal{P}(A)$, se cumple,

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(\tau_1(x), x) \in B\} \cap \{\tau_1(x) = a\} \in \mathcal{B}_a$$

Sea $b \in A$,

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(\tau_1(x), x) \succeq b\} \cap \{\tau_1(x) = a\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\tau_2(x) \succeq b\} \cap \{\tau_1(x) = a\} & b \in \tilde{M}_a \\ \{\tau_1(x) = a\} & a \succeq b \\ \emptyset & a \not\succeq b, b \notin \tilde{M}_a \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(\tau_1(x), x) = b\} \cap \{\tau_1(x) = a\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\tau_2(x) = a\} \cap \{\tau_1(x) = a\} & b = a \\ \{\tau_2(x) \succeq b\} \cap \{\tau_1(x) = a\} & b \in \tilde{M}_a \\ \emptyset & \text{otro caso} \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

□

2.6 Teorema de Parada Opcional

2.6.1 Parada Opcional para Sucesores Directos

Teorema 2.6.1 *Sea $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a \in A}$ una submartingala (respec., martingala). Sea $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de planes de muestreo admisibles, tales que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tau_n \preceq \tau_{n+1}$ sucesores directos, y $E(|X_{\tau_n}|) < +\infty$. Entonces $\{X_{\tau_n}, \mathcal{B}_{\tau_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una submartingala (respec., martingala).*

Demostración:
Como $E(|X_{\tau_n}|) < +\infty$, X_{τ_n} es integrable $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $B \in \mathcal{B}_{\tau_n}$, probaremos que

$$\int_B X_{\tau_{n+1}} dP \geq \int_B X_{\tau_n} dP$$

Escribimos $B = \bigcup_{a \in A} (B \cap \{\tau_n = a\})$, llamamos $D_a = B \cap \{\tau_n = a\}$, $\forall a \in A$, $D_a \in \mathcal{B}_a$.
Además, como $\{\tau_n = a\} \subset \{\tau_{n+1} \succeq a\}$, podemos escribir, $D_a = D_a \cap \{\tau_{n+1} \succeq a\}$.

$$\begin{aligned}
\int_{D_a} X_{\tau_{n+1}} dP &= \int_{B \cap \{\tau_n = a\}} X_{\tau_{n+1}} dP \\
&= \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} \succeq a\}} X_{\tau_{n+1}} dP \\
&= \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = a\}} X_a dP + \sum_{k \in \tilde{M}_a} \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = ak\}} X_{\tau_{n+1}} dP \\
&= \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = a\}} X_a dP + \sum_{k \in \tilde{M}_a} \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = ak\}} X_{ak} dP \\
&=_{(1)} \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = a\}} X_a dP + \sum_{k \in \tilde{M}_a} \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = ak\}} E(X_{ak}/\mathcal{B}_a) dP \\
&\geq \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = a\}} X_a dP + \sum_{k \in \tilde{M}_a} \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} = ak\}} X_a dP
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1}=a\}} X_a dP + \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} \succ a\}} X_a dP \\
&= \int_{D_a \cap \{\tau_{n+1} \succeq a\}} X_a dP = \int_{D_a} X_a dP = \int_{D_a} X_{\tau_n} dP
\end{aligned}
$$

(1), $\{\tau_n = a\} \cap \{\tau_{n+1} = ak\} = \{\tau_n = a\} \cap \{\tau_{n+1} \succeq ak\} \in \mathcal{B}_a$, por ser τ_n y τ_{n+1} sucesores directos. □

Observación 26

En el teorema anterior (2.6.1) la condición

$$E(|X_{\tau_n}|) < +\infty$$

se cumplirá si $g(\tau_n) \leq k_n < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular, si A es finito.

Demostración:
Si $g(\tau_n) \leq k_n < +\infty$, entonces

$$E(|X_{\tau_n}|) \leq \sum_{a \in A : g(a) \leq k_n} E(|X_a|) < +\infty$$

pues el conjunto $\{a \in A : g(a) \leq k_n\} = \mathcal{A}_n$ tiene cardinal finito. □

Corolario 2.6.2 *Sea $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a \in A}$ una submartingala (respec., martingala). Sea τ un plan de muestreo y $\forall k \in \mathbb{N}$, consideremos ${}_k\tau$ planes de muestreo introducidos en la definición (2.2.5), tales que, $E(|X_{{}_k\tau}|) < +\infty$. Entonces, $\{X_{{}_k\tau}, \mathcal{B}_{{}_k\tau}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una submartingala (respec., martingala).*

Demostración:
Inmediata, pues ${}_k\tau,{}_{k+1}\tau$ son sucesores directos. □

Observación 27

El proceso $\{X_{{}_k\tau, \mathcal{B}_{{}_k\tau}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ será denominado proceso "τ parado en k".

2.6.2 Parada Opcional para Planes de Muestreo Finitamente Alcanzables

Ahora bien el Teorema de Parada Opcional, se ha obtenido para el caso en el que la sucesión de planes de muestreo sean sucesores directos.

Por lo que es necesario introducir un nuevo concepto que relacione planes de muestreo no necesariamente sucesores directos, y que nos permita aplicar el Teorema de Parada Opcional para cualquier par de planes de muestreo admisibles σ, τ, tales que, $\sigma \preceq \tau$. Es decir, en el presente epígrafe daremos condiciones bajo las cuales, dados σ, τ, planes de muestreo admisibles, tales que $\sigma \preceq \tau$, y $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a \in A}$ una submartingala, se cumpla,

$$E(X_\tau / \mathcal{B}_\sigma) \geq X_\sigma$$

Teorema 2.6.3 (Teorema de Parada Opcional en $FA(\sigma)$) *Sea $\{Z_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ una submartingala (martingala, resp.). Sea σ un plan de muestreo admisible, entonces $\forall \tau \in FA(\sigma)$*

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma, \quad (=, \ \textit{resp.})$$

Demostración:

Sea $\tau \in FA(\sigma)$, entonces $\exists \phi \in D$ y $k \in \mathbb{N}$, tal que, $\tau = \phi^k(\sigma)$. Con τ plan de muestreo como vimos en el teorema (2.5.2).

Veamos que $\phi(\sigma) \in PO(\sigma)$ definida en la observación (24). Para ello, es suficiente probar que

$$E(Z_{\phi(\sigma)}/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma$$

o equivalentemente, que para cualquier $B \in \mathcal{B}_\sigma$, es

$$\int_B Z_{\phi(\sigma)} dP \geq \int_B Z_\sigma dP$$

Podemos escribir,

$$B = \bigcup_{a\in A} (B \cap (\sigma = a)) = \bigcup_{a\in A} D_a, \quad D_a \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A$$

$$\begin{aligned}
\int_{D_a} Z_{\phi(\sigma)} dP &= \int_{D_a \cap \{\phi(\sigma) \succeq a\}} Z_{\phi(\sigma)} dP \\
&= \sum_{b \succeq a : b \in A} \int_{D_a \cap \{\phi(\sigma) = b\}} Z_b dP \\
(D_a &\cap \{\phi(\sigma) = b\} = B \cap \{\sigma = a\} \cap \{\phi(\sigma) = b\} \in \mathcal{B}_a) \\
&= \sum_{b \succeq a : b \in A} \int_{D_a \cap \{\phi(\sigma) = b\}} E(Z_b/\mathcal{B}_a) dP \\
&\geq \sum_{b \succeq a : b \in A} \int_{D_a \cap \{\phi(\sigma) = b\}} Z_a dP \\
&= \int_{D_a \cap \{\phi(\sigma) \succeq a\}} Z_a dP = \int_{D_a} Z_a dP = \int_{D_a} Z_\sigma dP
\end{aligned}$$

A continuación probamos que $\forall k \in \mathbb{N}$, es $\phi^k(\sigma) \in PO(\sigma)$.

Aplicamos el principio de inducción:

Supongamos que se cumple para $k-1$, es decir,

$$E(Z_{\phi^{k-1}(\sigma)}/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma$$

Veamos que se cumple para k,

$$E(Z_{\phi^k(\sigma)}/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma$$

Para ello probamos en primer lugar,

$$E(Z_{\phi^k(\sigma)}/\mathcal{B}_{\phi^{k-1}(\sigma)}) \geq Z_{\phi^{k-1}(\sigma)}$$

Sea $B \in \mathcal{B}_{\phi^{k-1}(\sigma)}$, entonces escribimos,

$$B = \bigcup_{a\in A}(B \cap \{\phi^{k-1}(\sigma) = a\}) = \bigcup_{a\in A} D_a$$

Como $\phi^{k-1}(\sigma)$ es un plan de muestreo $\forall k \in \mathbb{N}$ proposición (2.5.2), se tiene que el conjunto

$$D_a = B \cap \{\phi^{k-1}(\sigma) = a\} \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in A$$

Además, como $\phi^k(\sigma) = \phi(\phi^{k-1}(\sigma))$, sobre el conjunto donde $\phi^{k-1}(\sigma) = a$, es $\phi^k(\sigma) = \phi(a)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{D_a} Z_{\phi^k(\sigma)}dP &= \int_{D_a} Z_{\phi(a)}dP = \sum_{b\succeq a:b\in A}\int_{D_a\cap\{\phi(a)=b\}} E(Z_b/\mathcal{B}_a)dP \\ &\geq \sum_{b\succeq a:b\in a}\int_{D_a\cap\{\phi(a)=b\}} Z_a dP = \int_{D_a} Z_{\phi^{k-1}(\sigma)}dP\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_B Z_{\phi^k(\sigma)}dP \geq \int_B Z_{\phi^{k-1}(\sigma)}dP, \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\phi^{k-1}(\sigma)}$$

Como $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_\sigma \subset \mathcal{B}_{\phi^k(\sigma)}$, entonces

$$\begin{aligned}E(Z_{\phi^k(\sigma)}/\mathcal{B}_\sigma) &= E[E(Z_{\phi^k(\sigma)}/\mathcal{B}_{\phi^{k-1}(\sigma)})/\mathcal{B}_\sigma] \\ &\geq E(Z_{\phi^{k-1}(\sigma)}/\mathcal{B}_\sigma) \geq_{(1)} Z_\sigma\end{aligned}$$

(1) por hipótesis de inducción.

Por lo que $\phi^k(\sigma) \in PO(\sigma)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego,

$$FA(\sigma) \subset PO(\sigma)$$

se verifica, cualquiera que sea la submartingala considerada. □

2.6.3 Parada Opcional para Planes de Muestreo Alcanzables

Definición 2.6.1 *Sea $(Z_a)_{a\in A}$ una sucesión de variables aleatorias $\mathcal{B}_a$-medibles $\forall a \in A$, diremos que es uniformemente acotada, si $\exists Z^+ \geq 0$, variable aleatoria integrable, tal que $|Z_a| \leq Z^+$, $\forall a \in A$.*

Teorema 2.6.4 (Teorema de Parada Opcional en $A(\sigma)$) *Sea $\{Z_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$, una submartingala (martingala, resp.) uniformemente acotada. Sea σ un plan de muestreo admisible, entonces $\forall \tau \in A(\sigma)$*

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma, \quad (=,\ resp.)$$

Demostración:
Sea $\tau \in A(\sigma)$, probaremos que

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma$$

Como $\tau \in A(\sigma)$, entonces existe $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $FA(\sigma)$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} P(\tau_k \neq \tau) = 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escribimos

$$Z_\tau = Z_{\tau_k} + (Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}$$

tomando esperanzas en la expresión anterior,

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) = E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_\sigma) + E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)$$

Como $\tau_k \in FA(\sigma)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces por el teorema de Parada Opcional en $FA(\sigma)$ (2.6.3), se tiene

$$E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma$$

Por lo tanto,

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma + E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma) \tag{2.1}$$

$(Z_a)_{a\in A}$, es una sucesión uniformemente acotada, entonces

$$|Z_{\tau_k} - Z_\tau| \leq 2Z^+ \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} P(\tau_k \neq \tau) = 0$$

tomando límite inferior en la expresión (2.1)

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma + \liminf_{k\to\infty} E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)$$

ahora bien

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma) &\leq \liminf_{k\to\infty} |E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)| \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma) &\geq \limsup_{k\to\infty}(-|E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)|) \\
&= -\liminf_{k\to\infty} E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)
\end{aligned}$$

$\forall B \in \mathcal{B}_\sigma$,

$$\begin{aligned}
\int_B E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)dP &= \int_{B\cap\{\tau\neq\tau_k\}} |Z_\tau - Z_{\tau_k}|dP \\
&\leq \int_{\{\tau\neq\tau_k\}} 2Z^+ dP \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

pues Z^+ es integrable y $P(\tau \neq \tau_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Luego,

$$\liminf_{k\to\infty} \int_B E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)dP = 0, \quad \forall B \in \mathcal{B}_\sigma$$

Aplicando el lema de Fatou, a la expresión anterior,

$$\int_B \liminf_{k\to\infty} E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)dP \leq \liminf_{k\to\infty} \int_B E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)dP = 0, \quad \forall B \in \mathcal{B}_\sigma$$

Entonces,

$$\liminf_{k\to\infty} E(|Z_\tau - Z_{\tau_k}|I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma) = 0, \text{ c.s.}$$

por lo que

$$\liminf_{k\to\infty} |E((Z_\tau - Z_{\tau_k})I_{\{\tau\neq\tau_k\}}/\mathcal{B}_\sigma)| = 0, \text{ c.s.}$$

Así,

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma$$

como queríamos probar. Luego,

$$\tau \in PO(\sigma)$$

Se verifica el Teorema de Parada Opcional para el conjunto de planes de muestreo $A(\sigma)$, con σ admisible, siempre que la submartingala sea uniformemente acotada. □

Observación 28

Luego se cumple el Teorema de Parada Opcional para τ, σ, planes de muestreo admisibles, con tal de que $\sigma \preceq \tau$, para cualquier submartingala uniformemente acotada.

Pudiéndose por lo tanto generalizar dicho teorema a una sucesión de planes de muestreo, en las condiciones vistas, de manera análoga al Teorema de parada opcional para planes de muestreo sucesores directos (2.6.1), sin suponer ahora que los planes de muestreo σ, τ sean sucesores directos.
Como contrapartida tenemos que exigir ahora que la submartingala $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ sea uniformemente acotada.

2.6.4 Reciprocidad entre Parada Opcional y Alcance

En esta sección se plantea un resultado recíproco al teorema de parada opcional para planes de muestreo alcanzables. Para ello comenzamos probando unos resultados previos que atañen al problema de parada óptima en el conjunto de los planes alcanzas (el problema se presenta bajo forma de mínimo en lugar de máximo).

Teorema 2.6.5 *Sea $Z : A \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{R}$ una aplicación uniformemente acotada, y adaptada a $(\mathcal{B}_a)_{a\in A}$. Sea τ un plan de muestreo admisible, definimos:*

$$U(a,\tau) = E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \quad a \in A$$

$$U_a = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in A(a)} \{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\}, \quad a \in A$$

Se tiene,

$$U_a = \inf_{b \succ a}\{\text{mín}(E(U_b/\mathcal{B}_a), Z_a)\}, a, b \in A$$

Demostración:
En primer lugar, veamos que, para $a \in A$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in A(a)}\{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\} = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in FA(a)}\{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\}$$

Como $FA(a) \subset A(a)$, se tiene

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in A(a)}\{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\} \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in FA(a)}\{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\}$$

Para ver la otra desigualdad, consideremos $\tau \in A(a)$, entonces $\exists\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión en $FA(a)$, escribimos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) = E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) + E(Z_{\tau_k} - Z_\tau/\mathcal{B}_a)I_{\{\tau\neq\tau_k\}}$$

Como $\tau_k \in FA(a)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \tau \in A(a)$,

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,inf}_{\tau^* \in FA(a)}\{E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_a)\} &\leq E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a)\\ &= E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) + E(Z_{\tau_k} - Z_\tau/\mathcal{B}_a)I_{\{\tau\neq\tau_k\}}\end{aligned}$$

Haciendo $k \to \infty$,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\tau^* \in FA(a)}\{E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_a)\} \leq E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \quad \forall \tau \in A(a)$$

Así,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\tau^* \in FA(a)}\{E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_a)\} \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in A(a)}\{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)\}$$

Llamamos $\tilde{U}_a = \inf_{b\succ a}\{\text{mín}(E(U_b/\mathcal{B}_a), Z_a)\}, \quad \forall a \in A$. Demostramos que $U_a = \tilde{U}_a$, $\forall a \in A$.

- Probamos en primer lugar, que $U_a \geq \tilde{U}_a$, $\forall a \in A$.
  Sea $\tau \in FA(a)$, entonces $\exists \phi \in D$ y $\exists k \in \mathbb{N}$, tal que $\tau = \phi^k(a)$. Definimos

$$\tau_1^h = \begin{cases} \tau & \tau \succeq ah \\ ah & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se cumple que τ_1^h es un plan de muestreo en $FA(ah)$. Veamos que $\tau_1^h \in FA(ah)$: sabemos que $\tau \in FA(a)$, luego $\exists \phi \in D$, tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, de manera que $\phi^k(a) = \tau$,

- Si $\{\tau \not\succeq ah\}$, $\tau_1^h = ah$, y entonces de manera obvia $\tau_1^h \in FA(ah)$.
- Si $\{\tau \succeq ah\}$, $\tau_1^h = \tau$, luego $\phi(a) \succeq ah$. Si $\phi(a) = ah$ y $\phi^k(a) = \tau$, entonces $\phi^{k-1}(ah) = \tau_1^h$ y por lo tanto $\tau_1^h \in FA(ah)$.

- Si $\phi(a) \succ ah$, definimos

$$\psi(r,x) = \begin{cases} \phi(a,x) & r = ah \\ \phi(r) & r \neq ah \end{cases}$$

ψ es una función de decisión, en efecto:
si $r \neq ah$, $\psi(r,x) = \phi(r,x)$, entonces

$$\{x \in \mathcal{X} : \psi(r,x) \preceq b\} = \{x \in \mathcal{X} : \phi(r,x) \preceq b\} \in \mathcal{B}_r$$

si $r = ah$, $\psi(ah,x) = \phi(a,x)$, entonces

$$\{x \in \mathcal{X} : \psi(ah,x) \preceq b\} = \{x \in \mathcal{X} : \phi(a,x) \preceq b\} \in \mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_{ah}$$

Sobre el conjunto $\{\tau \succeq ah\}$ es $\tau_1^h = \tau = \phi^k(a)$ entonces

$$\phi^{k-1}\phi(a) = \phi^{k-1}\psi(ah) = \psi^{k-1}\psi(ah) = \tau_1^h$$

así,

$$\tau_1^h \in FA(ah)$$

$$\begin{aligned} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) &= I_{\{\tau=a\}}Z_a + \sum_{ah\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ah\}}Z_{\tau_1^h}/\mathcal{B}_a) \\ &= Z_aI_{\{\tau=a\}} + \sum_{ah\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ah\}}E(E(Z_b/\mathcal{B}_{ah}/\mathcal{B}_a) \\ &\geq Z_aI_{\{\tau=a\}} + \sum_{ah\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ah\}}E(\operatorname*{ess\,inf}_{\tau^*\in FA(ah)} E(Z_{\tau^*}/\mathcal{B}_{ah}/\mathcal{B}_a) \\ &= Z_aI_{\{\tau=a\}} + \sum_{ah\in\tilde{M}_a} I_{\{\tau\succeq ah\}}E(U_{ah}/\mathcal{B}_a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) &\geq \inf_{ah\in\tilde{M}_a} \text{mín}\{Z_a, E(U_{ah}/\mathcal{B}_a)\} \\ &\geq \inf_{b\succ a} \text{mín}\{Z_a, E(U_b/\mathcal{B}_a)\} \end{aligned}$$

$\forall\tau \in FA(a)$, tomamos ess inf sobre $\tau \in FA(a)$, se tiene

$$U_a = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in FA(a)} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a) \geq \operatorname*{mín}_{b\succ a}\{E(U_b/\mathcal{B}_a), Z_a\}, \quad \forall a \in A$$

- Para probar $\tilde{U}_a \leq U_a$, $\forall a \in A$, comenzaremos demostrando que para $\epsilon > 0$, $\exists \tau \in FRA(a)$, tal que se verifica

$$U_a + \epsilon \geq U(a,\tau) = E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \quad \forall a \in A$$

Sea $a \in A$,

$$U_a = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in FA(a)} E(Z_\tau/\mathcal{B}_a)$$

Veamos que $\{E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \tau \in FA(a)\}$ tiene la propiedad filtrante decreciente, es decir, que dados dos elementos del conjunto, existe otro menor que ellos que pertenece a dicho conjunto.
Sea $\tau_1, \tau_2 \in FA(a)$, sea

$$C = \{x \in \mathcal{X} : E(Z_{\tau_1}/\mathcal{B}_a) < E(Z_{\tau_2}/\mathcal{B}_a)\}$$

obviamente $C \in \mathcal{B}_a$, sea

$$\tau_3(x) = \begin{cases} \tau_1(x) & x \in C \\ \tau_2(x) & x \in C^c \end{cases}$$

Se tiene que $\tau_3 \succeq a$ y es un plan de muestreo, en efecto,

$$\{\tau_3 = b\} = (C \cap \{\tau_1 = b\}) \cup (C^c \cap \{\tau_2 = b\}) \in \mathcal{B}_b, \forall b \succeq a, \quad b \in A$$

$$\{\tau_3 \succeq bh\} = (C \cap \{\tau_1 \succeq bh\}) \cup (C^c \cap \{\tau_2 \succeq bh\}) \in \mathcal{B}_b, \forall b \succeq a, \forall h \in \tilde{M}_b, b \in A$$

$\tau_3 \in FA(a)$, en efecto:
como $\tau_1, \tau_2 \in FA(a)$, existen $\phi_1, \phi_2 \in D$, tal que $\tau_1 = \phi_1^{k_1}(a)$, y $\tau_2 = \phi_2^{k_2}(a)$, para $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
Definimos $\forall c \succeq a$,

$$\phi(c,x) = \begin{cases} \phi_1(c,x) & x \in C \cap \{\tau_1 \neq c\} \\ \phi_2(c,x) & x \in C^c \cap \{\tau_2 \neq c\} \\ c & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ϕ es una función de decisión, y si $k = \max(k_1, k_2)$,

$$\phi^k(a,x) = \tau_1(x) I_C(x) + \tau_2 I_{C^c}(x) = \tau_3(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

entonces,

$$\tau_3 \in FA(a)$$

y además,

$$E(Z_{\tau_3}/\mathcal{B}_a) = I_C E(Z_{\tau_1}/\mathcal{B}_a) + I_{C^c} E(Z_{\tau_2}/\mathcal{B}_a) = E(Z_{\tau_1}/\mathcal{B}_a) \wedge E(Z_{\tau_2}/\mathcal{B}_a)$$

y,

$$E(Z_{\tau_1}/\mathcal{B}_a) \wedge E(Z_{\tau_2}/\mathcal{B}_a)$$

pertenece al conjunto sobre el que vamos a tomar el ínfimo esencial, entonces $\forall a \in A$

$$\exists \{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in FA(a), \text{ tal que } E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a) \downarrow U_a$$

Como $\tau_k \in FA(a)$, es $\tau_k \in FRA(a)$, entonces $\exists \phi_k \in D$, tales que,

$$\tau_k = \lim_{n \to \infty} \phi_k^n(a) \text{ c.s}$$

Por definición de ínfimo, dado $\epsilon > 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\exists k^*(x)$ función aleatoria entero valorada, tal que

$$U_a(x) + \epsilon \geq E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_a)(x)$$

para todo $k \geq k^*(x)$, siendo k^* el primer índice que cumple esta desigualdad.
Veamos que k^* es variable aleatoria $\mathcal{B}_a$-medible.

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathcal{X} : k^*(x) = k\} &= \bigcap_{j=1}^{k-1} \{x \in \mathcal{X} : U_a + \epsilon < E(Z_{\tau_j}/\mathcal{B}_a)\} \bigcap_{j=k}^{\infty} \{x \in \mathcal{X} : U_a + \epsilon \geq E(Z_{\tau_j}/\mathcal{B}_a)\} \\
&\in \mathcal{B}_a
\end{aligned}$$

Ahora $\forall k$, $\exists \phi_k \in D$ y $\exists n_k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\tau_k(y) = \phi_k^{n_k}(a, y), \forall y \in \mathcal{X}$$

entonces

$$\tau_{k^*(x)}(x) = \phi_{k^*(x)}^{n_{k^*(x)}}(a, x)$$

Sea

$$\phi(r, x) = \begin{cases} \phi_{k^*(x)}(r, x) & (r \succeq a) \cap (\tau_{k^*(x)}(x) \neq r) \\ r & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que $\phi \in D$:
$\phi(r, x) \succeq r$, de manera evidente por la propia definición.
Si $b \succeq r$, y $r \succeq a$,

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathcal{X} : \phi(r, x) = b\} &= \{x \in \mathcal{X} : \phi_{k^*(x)}(r, x) = b\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathcal{X} : \phi_k(r, x) = b\} \cap \{k^*(x) = k\} \in \mathcal{B}_b
\end{aligned}$$

pues $\{x \in \mathcal{X} : \phi_{k^*(x)}(r, x) = b\} \in \mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_b$, y $\{k^*(x) = k\} \in \mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}_b$. Si $b \succ r$, y $r \not\succeq a$,

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(r, x) = b\} = \emptyset \in \mathcal{B}_b$$

Si $b \not\succeq r$,

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(r, x) = b\} = \emptyset \in \mathcal{B}_b$$

Si $b = r$, y $r \not\succeq a$,

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(r, x) = b\} = \mathcal{X} \in \mathcal{B}_b$$

Y se verifica:

$$\tau_{k^*}(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_{k^*(x)}^n(a, x)$$

Sea $\tau(x) = \tau_{k^*}(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, entonces

$$\tau(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_{k^*}^n(a, x)$$

Como $\phi \in D$, se deduce, la existencia de $\tau \in FRA(a)$, plan de muestreo por lo tanto, tal que

$$U_a + \epsilon \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_a), \quad \forall a \in A$$

Sea $\epsilon > 0$, $b \succ a$, como acabamos de ver, $\exists \tau' \in FRA(b)$, tal que,

$$U_b + \epsilon > U(b, \tau') = E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_b) \tag{2.2}$$

Queremos probar que $\tau' \in A(a)$, y así, tomando esperanzas condicionadas por $\mathcal{B}_a$ obtener el resultado.
Como $\tau' \in FRA(b)$, $\exists \phi \in D$, tal que,

$$\lim_{k \to \infty} \phi^k(b) = \tau' \text{ c.s.}$$

Definimos $r \in A$,

$$\psi(r) = \begin{cases} \phi(r) & r \succeq b \\ b & r \prec b \\ r & \text{resto} \end{cases}$$

$\psi \in D$,

$$\{\mathcal{X} \in \mathcal{X} : \psi(r,x) = c\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{x \in \mathcal{X} : \phi(r,x) = c\} & c \succeq r \succeq b \\ \mathcal{X} & (c \succeq r, r \prec b) \\ \emptyset & c \prec r \\ \mathcal{X} & \text{en el resto} \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_r$$

y para $b \succ a$,

$$\begin{aligned} \psi^k(a) &= \psi^{k-1}\psi(a) = \psi^{k-1}(b) = \psi^{k-2}\psi(b) = \psi^{k-2}\phi(b) \\ &= \psi^{k-3}\phi^2(b) = \cdots = \phi^{k-1}(b) \end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{k \to \infty} \psi^k(a) = \lim_{k \to \infty} \phi^k(b) = \tau'$$

Así $\tau' \in FRA(a)$, entonces,

$$\tau' \in A(a)$$

Tomamos esperanzas condicionadas respecto de $\mathcal{B}_a$ en la desigualdad (2.2)

$$\begin{aligned} E(U_b/\mathcal{B}_a) + \epsilon &\geq E(U(b, \tau')/\mathcal{B}_a) \\ &= E[E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_b)/\mathcal{B}_a] = E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_a) \\ (\mathcal{B}_a &\subset \mathcal{B}_b) \\ &\geq \operatorname*{ess\,inf}_{\tau' \in A(a)} E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_a) = U_a \end{aligned}$$

Y obtenemos,

$$E(U_b/\mathcal{B}_a) \geq U_a, \quad \forall b \succ a$$

Además, $Z_a = E(Z_a/\mathcal{B}_a) \geq U_a$, se tiene

$$U_a \leq \inf_{b \succ a} \text{mín}\{E(U_b/\mathcal{B}_a), Z_a\}, \quad \forall a, b \in A$$

Por lo que queda probado que $U_a = \tilde{U}_a$.

□

Corolario 2.6.6 *Para cualquier plan de muestreo admisible σ, y $\forall \epsilon > 0$, $\exists \tau \in FRA(\sigma)$, tal que,*

$$U_\sigma + \epsilon \geq U(\sigma, \tau)$$

Demostración:

Sea σ plan de muestreo admisible. Hemos probado que para cada $a \in A$, existe $\tau_a \in FRA(a)$, tal que,

$$U_a + \epsilon > E(Z_{\tau_a}/\mathcal{B}_a)$$

para un $\epsilon > 0$ dado. Sea $\phi_a \in D$, tal que,

$$\lim_{k\to\infty} \phi_a^k = \tau_a \text{ c.s.}$$

Definimos una nueva función,

$$\phi(a) = \begin{cases} \phi_b(a) & b \preceq a \text{ y } \sigma = b \\ a & \sigma \not\preceq a \end{cases}$$

$\phi \in D$,

$$\phi(a, x) \succeq a$$

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(a, x) = c\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{x \in \mathcal{X} : \phi_b(a, x) = c\} & c \succeq a \succeq b, \quad \sigma = b \\ \mathcal{X} & c \succeq a, \quad \sigma \not\preceq a \\ \emptyset & c \prec a \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

Dado $x \in \mathcal{X}$, si $\sigma(x) = b$, entonces

$$\tau(x) = \lim_{k\to\infty} \phi^k(\sigma(x), x) = \lim_{k\to\infty} \phi_b^k(b, x) = \tau_b(x)$$

Así, dado σ plan de muestreo admisible, $\exists \tau$ plan de muestreo, tal que $\tau \in FRA(\sigma)$, y veamos que se tiene

$$U_\sigma + \epsilon \geq E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma)$$

$$\begin{aligned} U_\sigma + \epsilon &= \sum_{b\in A}(U_b+\epsilon)I_{\{\sigma=b\}} \geq \sum_{b\in A} E(Z_{\tau_b}/\mathcal{B}_b)I_{\{\sigma=b\}} \\ &= \sum_{b\in A} E(Z_\tau/\mathcal{B}_b)I_{\{\sigma=b\}} =_{(1)} E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \end{aligned}$$

(1), aplicando el Teorema de la Proyección Opcional.

□

Teorema 2.6.7 *Sean τ y σ dos planes de muestreo admisibles y tales que para cualquier submartingala uniformemente acotada $\{U_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ se cumple*

$$E(U_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq U_\sigma, \ \ c.s.$$

entonces $\tau \in A(\sigma)$

Demostración:
Consideramos la función $Z_a = I_{\{\tau\neq a\}}$, $a \in A$, tenemos que U_a, definida en el teorema anterior (2.6.5) cumple $|U_a| \leq 1$, $a \in A$.
Como vimos en la demostración del teorema anterior (2.6.5), consideremos $ak \in A$, con $k \in \tilde{M}_a$, y dado $\epsilon > 0$, $\exists \tau' \in FRA(ak) = A(ak)$ que cumple

$$U_{ak} + \epsilon \geq E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_{ak})$$

siendo $\tau' \in A(a)$ como ya se vió en el teorema. Tomando esperanzas condicionadas en la expresión anterior respecto de $\mathcal{B}_a$,

$$\begin{aligned} E(U_{ak}/\mathcal{B}_a) + \epsilon &> E(E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a)) = E(Z_{\tau'}/\mathcal{B}_a) \\ &\geq \operatorname*{ess\,inf}_{\tau^+\in A(a)} E(Z_{\tau^+}/\mathcal{B}_a) = U_a \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que $\{U_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ es una submartingala uniformemente acotada por 1. Como $U_\tau = 0$, $E(U_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq U_\sigma$, y $U_\sigma \geq 0$, entonces es

$$U_\sigma = 0$$

Por el corolario previo (2.6.6), dado $\epsilon = 1/k$, $\exists\{\tau_k\}$ sucesión de planes de muestreo en $FRA(\sigma)$ tales que

$$U_\sigma + 1/k \geq E(Z_{\tau_k}/\mathcal{B}_\sigma) = P(\tau_k \neq \tau/\mathcal{B}_\sigma), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

entonces

$$P(\tau_k \neq \tau/\mathcal{B}_\sigma) \leq 1/k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

tomando esperanzas

$$P(\tau_k \neq \tau) \leq 1/k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

luego

$$\lim_{k\to\infty} P(\tau_k \neq \tau) = 0$$

y se deduce

$$\tau \in A(\sigma)$$

como queríamos probar. □

2.7 Integrabilidad Uniforme

En la siguiente sección tratamos el Problema de Parada Opcional desde el punto de vista de la integrabilidad uniforme. Para ello, definimos los conceptos de Integrabilidad Uniforme para una sucesión $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$, y de último elemento de una submartingala (martingala).

Definición 2.7.1 *Dada $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ diremos que esta sucesión de variables aleatorias es uniformemente integrable, si*

$$\int_{\{|X_a|\geq c\}} |X_a| dP \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

uniformemente en $a \in A$.

Definición 2.7.2 *Dada $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ una submartingala (martingala), diremos que tiene último elemento si $\exists X_\infty$ variable aleatoria integrable, tal que $X_a \leq E(X_\infty/\mathcal{B}_a)$, (=, respectivamente), $\forall a \in A$.*

Lema 2 *Sea Y una variable aleatoria integrable definida sobre el espacio de probabilidad $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$. Sea $\{\mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$, entonces $X_a = E(Y/\mathcal{B}_a)$ son uniformemente integrables.*

Demostración:
Para todo $a \in A$,

$$|X_a| = |E(Y/\mathcal{B}_a)| \leq E(|Y|/\mathcal{B}_a), \text{ c.s.}$$

Como X_a es $\mathcal{B}_a$-medible, entonces

$$\{|X_a| \geq c\} \in \mathcal{B}_a$$

$$\int_{\{|X_a|\geq c\}} |X_a| dP \leq \int_{\{|X_a|\geq c\}} E(|Y|/\mathcal{B}_a) dP = \int_{\{|X_a|\geq c\}} |Y| dP$$

Aplicando la Desigualdad de Tchebychev, $\forall a \in A$,

$$P(|X_a| \geq c) \leq \frac{1}{c} E(|X_a|) \leq \frac{1}{c} E(|Y|) \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

puesto que $E(|Y|) < +\infty$.
Al ser Y variable aleatoria integrable, se tiene

$$\int_{\{|X_a|\geq c\}} |Y| dP \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

deduciéndose el resultado. □

2.7.1 Teoremas de Parada Opcional

A continuación se demuestra el teorema de parada opcional para toda submartingala con último elemento, y se demuestra este mismo teorema, para toda submartingala que verifique

$$E(|X_{bk} - X_b|/\mathcal{B}_b) \leq c$$

sobre $\{\tau \succeq b\}$, siendo τ un plan de muestreo admisible, con número esperado de etapas finito.

Teorema 2.7.1 *Sea $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ una submartingala con último elemento X_∞. Sea σ, un plan de muestreo admisible. Entonces*

$$E(X_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq X_\sigma \ c.s., \quad \forall \tau \succeq \sigma$$

Es decir, $\forall \tau \succeq \sigma$, $\tau \in PO(\sigma, \{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A})$, con $\{X_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ submartingala con último elemento.

Demostración:
Para cada $a \in A$, escribimos

$$X_a = X_a - E(X_\infty/\mathcal{B}_a) + E(X_\infty/\mathcal{B}_a)$$

1. Llamamos $Z_a = E(X_\infty/\mathcal{B}_a)$. Z_a, son variables aleatorias $\forall a \in A$:

   $$E(|Z_a|) = E|E(X_\infty/\mathcal{B}_a)|) \leq E(E(|X_\infty|/\mathcal{B}_a)) = E(|X_\infty|) < +\infty$$

   Veamos que $\{Z_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ es una martingala; sea $a \in A$ y $k \in \tilde{M}_a$,

   $$E(Z_{ak}/\mathcal{B}_a) = E[E(X_\infty/\mathcal{B}_{ak})/\mathcal{B}_a] = E(X_\infty/\mathcal{B}_a) = Z_a$$

   Sea $\tau \in A(\sigma)$, plan de muestreo admisible. Consideremos ${}_k\tau$, $\forall k \in \mathbb{N}$, plan de muestreo con a lo sumo k etapas, definido en (2.2.5).
   Por el Teorema de la proyección opcional (2.3.1) se tiene $\forall k \in \mathbb{N}$

   $$Z_{{}_k\tau} = E(X_\infty/\mathcal{B}_{{}_k\tau})$$

   $$Z_\tau = E(X_\infty/\mathcal{B}_\tau)$$

Deduciéndose entonces que Z_τ, y $Z_{{}_k\tau}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ son variables aleatorias integrables:

$$E(|Z_\tau|) = |E(E(X_\infty/\mathcal{B}_\tau))| \leq E(E(|X_\infty|/\mathcal{B}_\tau)) = E(|X_\infty|) < +\infty$$

$$E(|Z_{{}_k\tau}|) = |E(E(X_\infty/\mathcal{B}_{{}_k\tau}))| \leq E(E(|X_\infty|/\mathcal{B}_{{}_k\tau})) = E(|X_\infty|) < +\infty$$

Entonces $\{Z_{{}_k\tau}, \mathcal{B}_{{}_k\tau}\}_{k\in\mathbb{N}}$, es una martingala uniformemente integrable que converge c.s. y en m^1 hacia una variable aleatoria integrable, es decir,

$$Z_{{}_k\tau} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.},\ m^1} E(X_\infty/\mathcal{B}_\infty)$$

con $\mathcal{B}_\infty = \sigma(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{{}_k\tau})$.

Por otra parte como

$${}_k\tau \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.}} \tau$$

por la proposición (2.2.3), entonces es

$$Z_{{}_k\tau} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.}} Z_\tau$$

Luego,

$$Z_{{}_k\tau} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.},\ m^1} Z_\tau$$

Como $\sigma \preceq \tau$, entonces $({}_k\sigma) \preceq ({}_k\tau)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y además ${}_k\tau \in FA({}_k\sigma)$, como vimos en el teorema (2.5.2), al ser $({}_k\sigma) \preceq ({}_k\tau)$, definíamos $\phi \in D$, tal que, $\lim_{j\to\infty} \phi^j({}_k\sigma) =_k \tau$ c.s. como $h({}_k\sigma) \leq k$ y $h({}_k\tau) \leq k$, tenemos que

$$\phi^k({}_k\sigma) =_k \tau$$

por lo que $\forall k \in \mathbb{N}$ ${}_k\sigma \preceq_k \tau$ cumplirán el Teorema de parada opcional (2.6.3), en particular para la submartingala $\{Z_a, \mathcal{B}_a\}_{a\in A}$, es decir,

$$E(Z_{{}_k\tau}/\mathcal{B}_{{}_k\sigma}) \geq Z_{{}_k\sigma}\text{c.s.}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Probamos a continuación que se cumple

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma \text{ c.s.}$$

Escribimos

$$Z_\tau = Z_{{}_k\tau} + (Z_\tau - Z_{{}_k\tau})I_{\{\tau\neq_k\tau\}}$$

Sea $B \in \mathcal{B}_\sigma$

$$\begin{aligned}
\int_B Z_\tau dP &= \int_B Z_{{}_k\tau} dP + \int_B (Z_\tau - Z_{{}_k\tau})I_{\{\tau\neq_k\tau\}} dP \\
&= \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} Z_{{}_k\tau} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} (Z_\tau - Z_{{}_k\tau})I_{\{\tau\neq_k\tau\}} dP \\
&+ \int_{B\cap(h(\sigma)> k)} Z_{{}_k\tau} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)> k)} (Z_\tau - Z_{{}_k\tau})I_{\{\tau\neq_k\tau\}} dP
\end{aligned}$$

$B \cap (h(\sigma) \le k) \in \mathcal{B}_{_k\sigma}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $a \in A$, y $j \in \tilde{M}_a$,

$$B \cap (h(\sigma) \le k) \cap ({}_k\sigma = a) = \left\{ \begin{array}{ll} B \cap (\sigma = a) & h(a) \le k \\ \emptyset & h(a) > k \end{array} \right\} \in \mathcal{B}_a$$

entonces

$$\int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} Z_{_k\tau} dP \ge \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} Z_{_k\sigma} dP$$

luego $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} \int_B Z_\tau dP & \ge & \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} Z_{_k\sigma} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \\ & + & \int_{B\cap(h(\sigma)> k)} Z_{_k\tau} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \\ & =_{(1)} & \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} Z_{\sigma} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \\ & + & \int_{B\cap(h(\sigma)> k)} Z_{_k\tau} I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)> k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \\ & = & \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} Z_{\sigma} dP + \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \\ & + & \int_{B\cap(h(\sigma)> k)} Z_{\tau} I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \end{array}$$

(1), si $h(\sigma) \le k$ entonces ${}_k\sigma = \sigma$.
Consideramos la integral

$$\int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} Z_\sigma dP$$

y la sucesión $\{Z_\sigma I_{\{h(\sigma)\le k\}}\}_{k\in\mathbb{N}}$, cumpliéndose

$$|Z_\sigma I_{\{h(\sigma)\le k\}}| \le |Z_\sigma|, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

con Z_σ integrable, como σ es un plan de muestreo admisible

$$I_{\{h(\sigma)\le k\}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ c.s.}$$

entonces

$$Z_\sigma I_{\{h(\sigma)\le k\}} \underset{k\to\infty}{\overset{\text{c.s.}}{\longrightarrow}} Z_\sigma$$

aplicando el Teorema de la convergencia dominada,

$$\int_B Z_\sigma I_{\{h(\sigma)\le k\}} dP \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_B Z_\sigma dP$$

Consideramos la integral

$$\begin{array}{rcl} |\int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP| & \le & \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} |(Z_\tau - Z_{_k\tau})| I_{\{\tau \ne {}_k\tau\}} dP \\ & \le & \int_{B\cap(h(\sigma)\le k)} |(Z_\tau - Z_{_k\tau})| dP \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}$$

por la convergencia de

$$Z_{_k\tau} \xrightarrow[k\to\infty]{m^1} Z_\tau$$

Y finalmente consideramos la integral

$$\begin{aligned} \left|\int_{B\cap(h(\sigma)>k)} Z_\tau I_{\{\tau\neq_k\tau\}}dP\right| &\leq \int_{B\cap(h(\sigma)>k)} |Z_\tau| I_{\{\tau\neq_k\tau\}}dP \\ &\leq \int_{B\cap(h(\sigma)>k)} |Z_\tau|dP \end{aligned}$$

La sucesión

$$\{|Z_\tau| I_{\{h(\sigma)>k\}}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

es tal que

$$|Z_\tau| I_{\{h(\sigma)>k\}} \leq |Z_\tau|, \quad \forall k$$

con Z_τ variable aleatoria integrable, además como σ es un plan de muestreo admisible,

$$I_{\{h(\sigma)>k\}} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.}} 0$$

aplicando el Teorema de la convergencia dominada,

$$\int_{B\cap(h(\sigma)>k)} |Z_\tau|dP \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

De esta forma dado $B \in \mathcal{B}_\sigma$,

$$\begin{aligned} \int_B Z_\tau dP &\geq \lim_{k\to\infty} \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} Z_\sigma dP \\ &+ \lim_{k\to\infty} \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} (Z_\tau - Z_{_k\tau}) I_{\{\tau\neq_k\tau\}}dP + \lim_{k\to\infty} \int_{B\cap(h(\sigma)>k)} Z_\tau I_{\{\tau\neq_k\tau\}}dP \\ &= \int_B Z_\sigma dP \end{aligned}$$

luego

$$E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq Z_\sigma \text{ c.s.}$$

2. Llamamos $W_a = X_a - E(X_\infty/\mathcal{B}_a)$, variables aleatorias integrables $\forall a \in A$. Es $W_a \leq 0$, $\forall a \in A$, y $W_\infty = 0$.
   Tratamos de ver que $E(W_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \geq W_\sigma$. Consideremos los planes de muestreo $_k\sigma$, $_k\tau$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
   Probamos en primer lugar que $W_\tau, W_\sigma, W_{_k\sigma}, W_{_k\tau}$ son integrables $\forall k \in \mathbb{N}$. El procedimiento para la demostración es el mismo para todas las variables mencionadas, así que lo haremos únicamente para W_τ.
   Sea τ, consideramos el plan de muestreo asociado a él que consiste en tomar j observaciones, $^j\tau$ definido en (2.2.6), con $g(^j\tau) \leq j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$E(|W_{^j\tau}|) \leq \sum_{\substack{a\in A \\ g(a)\leq j}} E(|W_a|) < +\infty, \quad \forall a \in A$$

Luego $W_{^j\tau}$ son variables aleatorias integrables, como ${}^j\tau \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.}} \tau$, entonces

$$W_{^j\tau} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{c.s.}} W_\tau$$

además $W_{^j\tau} \leq 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$; por lo que aplicando el Lema de Fatou,

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{\mathcal{X}} W_{^j\tau} dP \leq \int_{\mathcal{X}} \limsup_{j\to\infty} W_{^j\tau} dP = \int_{\mathcal{X}} W_\tau dP \leq 0$$

Como $W_{^j\tau}$ son integrables, entonces W_τ es integrable.

A continuación consideramos ${}_k\sigma$, y ${}_k\tau$, como $\sigma \preceq \tau$, entonces, $({}_k\sigma) \preceq ({}_k\tau)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sabemos que ${}_k\tau \in FA({}_k\sigma)$, $\forall k$, como hemos deducido en el apartado anterior de esta demostración por el teorema (2.5.2). Por lo que se cumplirá el teorema de parada opcional, puesto que $FA({}_k\sigma) \subset PO({}_k\sigma)$ por el teorema (2.6.3), es decir, $\forall B \in \mathcal{B}_{{}_k\sigma}$,

$$\int_B W_{{}_k\sigma} dP \leq \int_B W_{{}_k\tau} dP$$

Sea $B \in \mathcal{B}_\sigma$, $k \in \mathbb{N}$, como $B \cap (h(\sigma) \leq k) \in \mathcal{B}_{{}_k\sigma}$, y sobre el conjunto $(h(\sigma) \leq k)$, $\sigma = ({}_k\sigma)$, y sobre $(h(\tau) \leq k)$, $\tau = ({}_k\tau)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tendremos

$$\begin{aligned} \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} W_\sigma dP &= \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} W_{{}_k\sigma} dP \leq_{(1)} \int_{B\cap(h(\sigma)\leq k)} W_{{}_k\tau} dP \\ &\leq_{(2)} \int_{B\cap(h(\tau)\leq k)} W_{{}_k\tau} dP = \int_{B\cap(h(\tau)\leq k)} W_\tau dP \end{aligned}$$

como la desigualdad se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$, aplicando el Teorema de la convergencia dominada, se tiene que $\forall B \in \mathcal{B}_\sigma$,

$$\int_B W_\sigma dP \leq \int_B W_\tau dP$$

(1), Teorema de parada opcional en $FA({}_k\sigma)$ (2.6.3).
(2), por la propiedad de monotonía en integración al ser $(h(\tau) \leq k) \subset (h(\sigma) \leq k)$, y $W \leq 0$.

De esta forma como

$$X_\tau = Z_\tau + W_\tau$$

entonces tomando esperanzas condicionadas sobre $\mathcal{B}_\sigma$,

$$\begin{aligned} E(X_\tau/\mathcal{B}_\sigma) &= E(Z_\tau/\mathcal{B}_\sigma) + E(W_\tau/\mathcal{B}_\sigma) \\ &\geq Z_\sigma + W_\sigma = X_\sigma \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Es decir se verifica el teorema de parada opcional para $\sigma \preceq \tau$ planes de muestreo admisibles, siempre y cuando la submartingala que estemos considerando tenga último elemento.

$\square$

Teorema 2.7.2 *Sea $\{X_b, \mathcal{B}_b\}_{b\in A}$ una submartingala y τ un plan de muestreo admisible, tal que $\tau \succeq a$, con $a \in A$. Supongamos:*

1. $E(h(\tau)) < +\infty$.
2. $E(|X_{bk} - X_b|/\mathcal{B}_b) \leq c < +\infty$, *sobre* $\{\tau \succeq b\}$, *con* $b \succeq a$, *y* $k \in \tilde{M}_b$.

Entonces,

$$E(X_\tau/\mathcal{B}_a) \geq X_a \ c.s.$$

Demostración:

Sea $\tau \succeq a$, para $a \in A$. Tenemos para $b \in A$

$$X_b = \sum_{i=1}^{h(b)} (X_{b^i} - X_{b^{i-1}})$$

siendo $X_{()} = 0$. Entonces

$$X_\tau = \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} (X_{{}_i\tau} - X_{{}_{i-1}\tau}) + X_{a^{h(a)-1}}$$

Llamamos

$$Z_{b^i} = |X_{b^i} - X_{b^{i-1}}|$$

y,

$$Y_\tau = \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} Z_{{}_i\tau}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |X_\tau| &\leq \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} |X_{{}_i\tau} - X_{{}_{i-1}\tau}| + |X_{a^{h(a)-1}}| = \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} Z_{{}_i\tau} + |X_{a^{h(a)-1}}| \\ &= Y_\tau + |X_{a^{h(a)-1}}| \end{aligned}$$

Si para τ, consideramos ${}_k\tau$ plan de muestreo consistente en tomar las k primeras etapas del plan de muestreo τ, es $\forall k \geq h(a)$

$$X_{{}_k\tau} = \sum_{i=h(a)}^{h({}_k\tau)} (X_{{}_i\tau} - X_{{}_{i-1}\tau}) + X_{a^{h(a)-1}}$$

como $h(\tau) \geq h({}_k\tau)$,

$$\begin{aligned} |X_{{}_k\tau}| &\leq \sum_{i=h(a)}^{h({}_k\tau)} |X_{{}_i\tau} - X_{{}_{i-1}\tau}| + |X_{a^{h(a)-1}}| \\ &\leq \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} |X_{{}_i\tau} - X_{{}_{i-1}\tau}| + |X_{a^{h(a)-1}}| \\ &= \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} Z_{{}_i\tau} + |X_{a^{h(a)-1}}| = Y_\tau + |X_{a^{h(a)-1}}| \end{aligned}$$

Como $X_{a^{h(a)-1}}$ es integrable, si Y_τ es una variable aleatoria integrable, se tendrá que X_τ y $X_{{}_k\tau}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ están uniformemente acotadas. En efecto,

$$\begin{aligned}
E(Y_\tau) &= \int_\Omega Y_\tau dP = \int_\Omega \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} Z_{{}_i\tau} dP = \sum_{i=h(a)}^{h(\tau)} \int_\Omega Z_{{}_i\tau} dP \\
&= \sum_{\substack{b \succeq a \\ b \in A}} \sum_{i=h(a)}^{h(b)} \int_{\{\tau=b\}} Z_{{}_i\tau} dP = \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{h(b)\geq i \\ b\succeq a : b\in A}} \int_{\{\tau=b\}} Z_{{}_i\tau} dP \\
&= \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{b \succeq a \\ b \in A}} \int_{\{\tau=b\}\cap\{h(b)\geq i\}} Z_{{}_i\tau} dP = \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{b \succeq a \\ b \in A}} \int_{\{\tau=b\}\cap\{h(\tau)\geq i\}} Z_{{}_i\tau} dP \\
&= \sum_{i=h(a)}^{\infty} \int_{\{h(\tau)\geq i\}} Z_{{}_i\tau} dP =_{(1)} \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{b \succeq a \\ b \in A}} \int_{\{{}_{i-1}\tau=b\}\cap\{h(\tau)\geq i\}} Z_{{}_i\tau} dP \\
&=_{(2)} \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{b \succeq a^{h(a)-1} \\ b \in A}} \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{\{{}_{i-1}\tau=b\}\cap\{h(\tau)\geq i\}\cap\{{}_i\tau\succeq bk\}} Z_{{}_i\tau} dP \\
&=_{(3)} \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{b \succeq a^{h(a)-1} \\ b \in A}} \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{\{{}_{i-1}\tau=b\}\cap\{h(\tau)\geq i\}\cap\{{}_i\tau\succeq bk\}} E(Z_{bk}/\mathcal{B}_b) dP \\
&\leq_{(4)} \sum_{i=h(a)}^{\infty} \sum_{\substack{b \succeq a^{h(a)-1} \\ b \in A}} \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{\{{}_{i-1}\tau=b\}\cap\{h(\tau)\geq i\}\cap\{{}_i\tau\succeq bk\}} c dP = c \sum_{i=h(a)}^{\infty} P(h(\tau)\geq i) \\
&\leq cE(h(\tau)) < +\infty
\end{aligned}$$

(1), $\{h(\tau) \geq i\}^c = \{h(\tau) < i\} = \{h(\tau) \leq i-1\} \in \mathcal{B}_{{}_{i-1}\tau}$.
(2) sobre $\{{}_{i-1}\tau = b\} = \bigcup_{k\in\tilde{M}_a} \{{}_i\tau = bk\}$. Ahora bien, si $\{{}_{i-1}\tau = b\}$, entonces $\exists k \in \tilde{M}_a$, tal que $\{{}_i\tau = bk\} = \{{}_i\tau \succeq bk\}$.
(3), $\{{}_{i-1}\tau = b\} \cap \{h(\tau) \geq i\} \in \mathcal{B}_b$, y $\{{}_i\tau \succeq bk\} \in \mathcal{B}_b$, entonces

$$\{{}_{i-1}\tau = b\} \cap \{h(\tau) \geq i\} \cap \{{}_i\tau \succeq bk\} \in \mathcal{B}_b$$

(4), $E(Z_{bk}/\mathcal{B}_b) \leq c$, sobre el conjunto $\{\tau \succeq b\}$, como estamos sobre el conjunto donde $\{{}_{i-1}\tau = b\} \cap \{h(\tau) \geq i\}$, es entonces $\{\tau \succ b\} \subset \{\tau \succeq b\}$.

Por tanto Y_τ es una variable aleatoria integrable. Escribimos para todo $k \geq h(a)$,

$$X_\tau = X_{{}_k\tau} + (X_\tau - X_{{}_k\tau}) I_{\{\tau \neq {}_k\tau\}}$$

tomando esperanzas condicionadas por $\mathcal{B}_a$,

$$E(X_\tau/\mathcal{B}_a) = E(X_{{}_k\tau}/\mathcal{B}_a) + E((X_\tau - X_{{}_k\tau}) I_{\{\tau\neq{}_k\tau\}}/\mathcal{B}_a)$$

${}_k\tau \in FA(a)$, por lo que se verifica el Teorema de parada opcional (2.6.3), y para todo $k \geq h(a)$

$$E(X_{{}_k\tau}/\mathcal{B}_a) \geq X_a$$

Por otro lado,

$$|E((X_\tau - X_{{}_k\tau})I_{\{\tau \neq {}_k\tau\}}/\mathcal{B}_a)| \leq E(|X_\tau - X_{{}_k\tau}|I_{\{\tau \neq {}_k\tau\}}/\mathcal{B}_a)$$

como $|X_\tau - X_{{}_k\tau}| \leq 2Y_\tau$, variable aleatoria integrable, entonces al igual que en la demostración del Teorema de parada opcional en $A(\sigma)$ (2.6.4) se tiene,

$$\liminf_{k\to\infty} E((X_\tau - X_{{}_k\tau})I_{\{\tau \neq {}_k\tau\}}/\mathcal{B}_a) = 0$$

Luego como para todo $k \geq h(a)$,

$$E(X_\tau/\mathcal{B}_a) \geq X_a + E((X_\tau - X_{{}_k\tau})I_{\{\tau \neq {}_k\tau\}}/\mathcal{B}_a)$$

tomando $\liminf$ se obtiene

$$E(X_\tau/\mathcal{B}_a) \geq X_a \text{ c.s.}$$

$\square$

Capítulo 3

Suficiencia

3.1 Introducción

En el presente capítulo, introducido el concepto de familia de σ-álgebras suficientes transitivas; se obtiene que la clases de procedimientos de decisión secuencialmente planificados, basados en la familia de σ-álgebras suficientes, forman una clase esencialmente completa, de acuerdo con ello el decisor puede restringir su elección a dichos procedimientos sin aumentar en absoluto el riesgo.

Con el objetivo de probar que los procedimientos de decisión secuencialmente planificados basados en la familia de σ-álgebras suficientes transitivas forman una clase esencialmente completa, definimos en primer lugar la familia $\{\mathcal{G}_a\}$ de σ- álgebras suficientes para $\{\mathcal{B}_a\}$, y dado un plan de muestreo τ las familias de σ-álgebras $\widetilde{\mathcal{G}}_a = \sigma(\mathcal{G}_a \cup \{\tau = a\})$, y $\widehat{\mathcal{G}}_a = \sigma(\mathcal{G}_a \cup \{\tau \succeq a\})$, siendo $\{\mathcal{G}_a\}$ en general una familia no isotónica de σ-álgebras.

Se definen también los planes de muestreo respecto a la familia no isotónica $\{\mathcal{G}_a\}$ no aleatorizados y aleatorizados, concluyéndose que los procedimientos secuencialmente planificados (τ^*, φ^*), donde τ^* es un plan de muestreo aleatorizado respecto de $\{\mathcal{G}_a\}$, y φ^*_a es $\widetilde{\mathcal{G}}_a$-medible, forman una clase esencialmente completa.

Definición 3.1.1 *Diremos que $\{\mathcal{G}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ es una familia de σ-álgebras suficientes para $\{\mathcal{B}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ si $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{B}_a$, $\forall a \in \mathcal{A}$, y $\forall B \in \mathcal{B}_a$*

$$E_\theta(I_B/\mathcal{G}_a)$$

tiene una versión independiente de θ, $\theta \in \Theta$.

Supondremos que la familia $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ de distribuciones probabilísticas sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, está dominada por una medida σ-finita, con lo que existirá una medida λ equivalente a $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$

sobre cada $\mathcal{B}_a$, y será

$$E_\theta(I_B/\mathcal{G}_a) = E_\lambda(I_B/\mathcal{G}_a), \quad \forall B \in \mathcal{B}_a, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

Dado $a \in \mathcal{A}$, $a = (a_1, \cdots, a_k)$, sea $a^i = (a_1, ..., a_i)$, $i = 1, \cdots, k$. Sea $\mathcal{G}_a^* = \sigma(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{G}_{a^i})$, con ello $\{\mathcal{G}_a^*\}_{a\in\mathcal{A}}$ será una familia isotónica de σ-álgebras.

Además al estar $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ dominada por una medida σ-finita sobre $\mathcal{B}_a$, se deduce por el teorema de factorización, por ser $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{G}_a^* \subset \mathcal{B}_a$, que $\mathcal{G}_a^*$ es σ-álgebra suficiente para $\mathcal{B}_a$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Definimos a continuación los conceptos de familia de sub-σ-álgebras transitiva respecto de una familia isotónica de sub-σ-álgebras y de plan de muestreo respecto de una familia de sub-σ-álgebras no isotónicas.

Definición 3.1.2 *Sean $\{\mathcal{G}_a\}_{a\in A}$, y $\{\mathcal{G}_a^*\}_{a\in A}$ dos familias de sub-σ- álgebras de $\mathcal{B}$. Diremos que $\{\mathcal{G}_a\}_{a\in A}$ es transitiva respecto a $\{\mathcal{G}_a^*\}_{a\in A}$, si para cualquier función $\mathcal{G}_{ak}$-medible e integrable f, $a \in A$ y $k \in \tilde{M}_a$, se cumple*

$$E(f/\mathcal{G}_a) = E(f/\mathcal{G}_a^*) \ c.s.$$

Definición 3.1.3 *Sea $\{\mathcal{G}_a\}_{a\in A}$ una familia de σ-álgebras de $\mathcal{B}$ no isotónica, tal que $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{G}_a^*$, $\forall a \in A$ con $\{\mathcal{G}_a^*\}_{a\in A}$ familia de σ-álgebras de $\mathcal{B}$ isotónica. Diremos que τ es un plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$, si para cada $a \in A$ y $k \in \tilde{M}_a$ se cumple*

$$\begin{cases} \{\tau \succeq a\} \in \mathcal{G}_a^* \\ \{\tau = a\} = \{\tau \succeq a\} \cap D_1 & D_1 \in \mathcal{G}_a \\ \{\tau \succeq ak\} = \{\tau \succeq a\} \cap D_2 & D_2 \in \mathcal{G}_a \end{cases}$$

Observación 29

Se deduce de la definición anterior (3.1.3), que si τ es un plan de muestreo respecto de $\{\mathcal{G}_a\}$ entonces es un plan de muestreo respecto de la familia isotónica $\{\mathcal{G}_a^*\}$. En efecto, para $a = (a_1, a_2, ..., a_j) \in A$ y $k \in \tilde{M}_a$,

$$\{\tau \preceq a\} = \bigcup_{i=1}^{j} \{\tau = a^i\} \cup \{()\} \in \mathcal{G}_a^*$$

$$\{\tau \succeq ak\} \in \mathcal{G}_a^*$$

Proposición 3.1.1 *Dada una familia no isotónica $\{\mathcal{G}_a\}$ y un plan de muestreo τ respecto a $\{\mathcal{B}_a\}$, sea*

$$\widetilde{\mathcal{G}}_a = \sigma(\mathcal{G}_a \cup \{\tau = a\})$$

y sea

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\tau = \{C \in \mathcal{B} : C \cap \{\tau = a\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_a\}$$

Entonces $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$ es σ-álgebra.

Demostración:

1. $$\mathcal{X} \cap \{\tau = a\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_a$$

2. Si $C \in \widetilde{\mathcal{G}}_\tau$, entonces $C \cap \{\tau = a\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_a$, así

$$C^c \cap \{\tau = a\} = (\mathcal{X} - C) \cap \{\tau = a\} = \{\tau = a\} - (C \cap \{\tau = a\}) \in \widetilde{\mathcal{G}}_a$$

3. Si $\{C_i\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_\tau$, $\forall i$, entonces

$$(\bigcup_i C_i) \cap \{\tau = a\} = \bigcup_i (C_i \cap \{\tau = a\}) \in \widetilde{\mathcal{G}}_a$$

□

Teorema 3.1.1 (Teorema de la proyección opcional para las familias no isotónicas $\widetilde{\mathcal{G}}_a$). *Sea $f : \Theta \times A \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{IR}$, $\forall a \in A$ es una función $\mathcal{B}_a$-medible e integrable. Sea $W_a = E_\theta(f(\theta, a, x)/\widetilde{\mathcal{G}}_a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Entonces para todo plan de muestreo admisible τ respecto a $\mathcal{B}_a$ es*

$$W_\tau = E_\theta(f(\theta, \tau, x)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau)$$

Demostración:
Subsiste la misma que en el teorema de la proyección opcional (2.3.1) del capítulo de análisis estocástico. □

Proposición 3.1.2 *Dada una familia no isotónica $\{\mathcal{G}_a\}$ y un plan de muestreo τ respecto a $\mathcal{B}_a$, si X_a es $\mathcal{G}_a$-medible, entonces X_τ es $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$-medible con tal que τ sea admisible.*

Demostración:

Definimos $\mathcal{A}^{(n} = \{a \in A : g(a) = n\}$,

$$X_\tau = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{a \in \mathcal{A}^{(n}} X_a I_{\{\tau = a\}}$$

será $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$-medible si $X_a I_{\{\tau=a\}}$ es $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$-medible.

$$\{x \in \mathcal{X} : X_a I_{\{\tau=a\}} \leq y\} = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X} : X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} & y < 0 \\ \{x \in \mathcal{X} : X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} \cup \{\tau = a\}^c & y \geq 0 \end{cases}$$

Sea $b \in A$,
Si $y < 0$

$$\{x \in \mathcal{X} : X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau = b\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & a \neq b \\ \{x \in \mathcal{X} : X_b \leq y\} \cap \{\tau = b\} & a = b \end{array} \right\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_b$$

Si $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \{X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau = b\} \quad &\cup \quad \{\tau = a\}^c \cap \{\tau = b\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \{X_b \leq y\} \cap \{\tau = b\} & a = b \\ \{\tau = b\} & a \neq b \end{array} \right\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_b \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.1.3 *Dada una familia no isotónica $\{\mathcal{G}_a\}$ y un plan de muestreo τ respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$, sea*

$$\widehat{\mathcal{G}}_a = \sigma(\mathcal{G}_a \cup \{\tau \succeq a\})$$

y,

$$\widehat{\mathcal{G}}_\tau = \{C \in \mathcal{B} : C \cap \{\tau = a\} \in \widehat{\mathcal{G}_a}\}$$

Entonces $\widehat{\mathcal{G}}_\tau$ es σ-álgebra.

Demostración:

1. $$\mathcal{X} \cap \{\tau = a\} = \{\tau = a\} = \{\tau \succeq a\} \cap D_1 \in \widehat{\mathcal{G}}_a$$

2. Si $C \in \widehat{\mathcal{G}}_\tau$, entonces $C \cap \{\tau = a\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$, por lo tanto,
$$C^c \cap \{\tau = a\} = (\mathcal{X} - C) \cap \{\tau = a\} = \{\tau = a\} - (C \cap \{\tau = a\}) \in \widehat{\mathcal{G}}_a$$

3. Y si, $\{C_i\} \in \widehat{\mathcal{G}}_\tau$, $\forall i$, entonces
$$(\bigcup_i C_i) \cap \{\tau = a\} = \bigcup_i (C_i \cap \{\tau = a\}) \in \widehat{\mathcal{G}}_a$$

$\square$

Teorema 3.1.2 (Teorema de la proyección opcional para las familias no isotónicas $\widehat{\mathcal{G}}_a$). *Sea $f : \Theta \times A \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall a \in A$ es una función $\mathcal{B}_a$-medible e integrable. Sea $W_a = E_\theta(f(\theta, a, x)/\widehat{\mathcal{G}}_a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Entonces para todo plan de muestreo admisible τ respecto a $\mathcal{B}_a$ es*

$$W_\tau = E_\theta(f(\theta, \tau, x)/\widehat{\mathcal{G}}_\tau)$$

Demostración:
Subsiste la misma que en el teorema de la proyección opcional (2.3.1) del capítulo de análisis estocástico. □

Proposición 3.1.4 *Dada una familia no isotónica $\{\mathcal{G}_a\}$ y un plan de muestreo τ respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$, X_τ será $\widehat{\mathcal{G}}_\tau$-medible con tal que τ sea admisible, es decir, $g(\tau) < +\infty$ c.s.*

Demostración:
Definimos $\mathcal{A}^{(n} = \{a \in A : g(a) = n\}$,

$$X_\tau = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{a\in\mathcal{A}^{(n}} X_a I_{\{\tau=a\}}$$

será $\widehat{\mathcal{G}}_\tau$-medible si $X_a I_{\{\tau=a\}}$ es $\widehat{\mathcal{G}}_\tau$-medible.

$$\{x \in \mathcal{X} : X_a I_{\{\tau=a\}} \leq y\} = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X} : X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} & y < 0 \\ \{x \in \mathcal{X} : X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} \cup \{\tau = a\}^c & y \geq 0 \end{cases}$$

Si $y < 0$

$$\{x \in \mathcal{X} : X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau = b\} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & a \neq b \\ \{x \in \mathcal{X} : X_b \leq y\} \cap \{\tau = b\} & a = b \end{array} \right\} \in \widehat{\mathcal{G}}_b$$

En efecto, si τ es plan de muestreo respecto a $\mathcal{G}_a$

$$\begin{aligned} \{X_b \leq y\} \cap \{\tau = b\} &= \{\tau \succeq b\} \cap D_1 \cap \{X_b \leq y\} \\ &= \{\tau \succeq b\} \cap C \in \widehat{\mathcal{G}}_b, \text{ pues } C \in \mathcal{G}_b \end{aligned}$$

Si $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \{X_a \leq y\} \cap \{\tau = a\} \cap \{\tau = b\} &\cup \{\tau = a\}^c \cap \{\tau = b\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \{X_b \leq y\} \cap \{\tau = b\} & a = b \\ \{\tau = b\} = D_1 \cap \{\tau \succeq b\} & a \neq b \end{array} \right\} \in \widehat{\mathcal{G}}_b \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.5 *Si τ es plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{B}_a\}$ y $\{\mathcal{G}_a\}$ es una familia suficiente, entonces $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$ es σ-álgebra suficiente para $\mathcal{B}_\tau$.*

Demostración:
Por la dominancia, $\{\widetilde{\mathcal{G}}_a\}$ será suficiente para $\mathcal{B}_a$. Sea $A \in \mathcal{B}_\tau$,

$$\begin{aligned} I_{\{\tau=a\}} E_\theta(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_a) &=_{(1)} E_\theta(I_A I_{\{\tau=a\}}/\widetilde{\mathcal{G}}_a) =_{(2)} E_\lambda(I_A I_{\{\tau=a\}}/\widetilde{\mathcal{G}}_a) \\ &= I_{\{\tau=a\}} E_\lambda(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_a) \end{aligned}$$

(1), pues $\{\tau = a\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_a$.
(2), por la suficiencia.
Hemos utilizado que $I_{A\cap\{\tau=a\}}$ es $\mathcal{B}_a$-medible, pues

$$A \cap \{\tau = a\} = (A \cap \{\tau \preceq a\}) \cap \{\tau \preceq a^{k-1}\}^c \in \mathcal{B}_a$$

puesto que $A \cap \{\tau \preceq a\} \in \mathcal{B}_a$, y $\{\tau \preceq a^{k-1}\} \in \mathcal{B}_a^{k-1} \subset \mathcal{B}_a$.
Por el teorema de la proyección opcional, si

$$W_a = E_\lambda(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_a)$$

entonces,

$$W_\tau = E_\lambda(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau)$$

siendo

$$W_\tau = \sum_{a\in\mathcal{A}} I_{\{\tau=a\}} W_a$$

y por lo mismo

$$E_\theta(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau) = \sum_{a\in\mathcal{A}} I_{\{\tau=a\}} E_\theta(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_a)$$

como hemos probado que

$$I_{\{\tau=a\}} E_\theta(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_a) = I_{\{\tau=a\}} E_\lambda(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_a)$$

resulta

$$E_\theta(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau) = E_\lambda(I_A/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau), \text{ c.s.}, \quad \forall A \in \mathcal{B}_\tau$$

entonces $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$ es suficiente para $\mathcal{B}_\tau$. □

Proposición 3.1.6 *Si τ es un plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$, y $\{\mathcal{G}_a\}$ es una familia suficiente, entonces $\widehat{\mathcal{G}}_\tau$ es suficiente para $\mathcal{B}_\tau$.*

Demostración:
En efecto, al ser τ plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$,

$$\{\tau = a\} = \{\tau \succeq a\} \cap D_1, \quad D_1 \in \mathcal{G}_a$$

entonces $\{\tau = a\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$. Sea $A \in \mathcal{B}_\tau$

$$\begin{aligned} I_{\{\tau=a\}} E_\theta(I_A/\widehat{\mathcal{G}}_a) &= E_\theta(I_{\{\tau=a\}} I_A/\widehat{\mathcal{G}}_a) = E_\lambda(I_{\{\tau=a\}} I_A/\widehat{\mathcal{G}}_a) \\ &= I_{\{\tau=a\}} E_\lambda(I_A/\widehat{\mathcal{G}}_a) \end{aligned}$$

Ya que

$$A \cap \{\tau = a\} = A \cap \{\tau \succeq a\} \cap D_1 = A \cap \{\tau \succeq (a^{k-1}, a_k)\} \cap D_1 \in \mathcal{B}_a$$

puesto que

$$A \cap \{\tau \succeq (a^{k-1}, a_k)\} \in \mathcal{B}_{a^{k-1}} \subset \mathcal{B}_a$$

Y de aquí por el Teorema de la Proyección Opcional (2.3.1),

$$E_\theta(I_A/\widehat{\mathcal{G}}_\tau) = E_\lambda(I_A/\widehat{\mathcal{G}}_\tau), \quad \lambda \text{ c.s.}$$

□

Observación 30

1. $\widehat{\mathcal{G}}_a \subset \mathcal{G}_a^*$, puesto que $\{\tau \succeq a\} \in \mathcal{G}_a^*$.
2. Se satisface que $\{\tau = a\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$, y $\{\tau \succeq ak\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$. Que $\{\tau = a\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$, ya está visto, y $\{\tau \succeq ak\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$, ya que

$$\{\tau \succeq ak\} = \{\tau \succeq a\} \cap D_2$$

con $D_2 \in \mathcal{G}_a$.

Observación 31

La estructura de $\widehat{\mathcal{G}}_a = \sigma(\mathcal{G}_a, \tau \succeq a)$, es de la siguiente forma. Sea

$$\mathcal{H} = \{(A \cap \{\tau \succeq a\}) \cup (B \cap \{\tau \not\succeq a\}), \quad A, B \in \mathcal{G}_a\}$$

Se tiene que $\mathcal{H}$ es un σ-álgebra, con $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{H}$, y $\{\tau \succeq a\} \subset \mathcal{H}$, entonces

$$\widehat{\mathcal{G}}_a = \mathcal{H}$$

Observación 32

De manera análoga a la observación anterior, se tiene, que la estructura de $\widetilde{\mathcal{G}}_a = \sigma(\mathcal{G}_a, \tau = a)$, es de la siguiente forma. Sea

$$\mathcal{I} = \{(A \cap \{\tau = a\}) \cup (B \cap \{\tau \neq a\}), \quad A, B \in \mathcal{G}_a\}$$

$\mathcal{I}$ es un σ-álgebra, con $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{I}$, y $\{\tau = a\} \subset \mathcal{I}$, entonces

$$\widetilde{\mathcal{G}}_a = \mathcal{I}$$

3.2 Reglas de Decisión Terminales adaptadas a la Familia Suficiente

Teorema 3.2.1 *Sea $\mathcal{D}$ un espacio métrico completo y separable. Si $\{\mathcal{G}_a\}$ es una familia de sub-σ-álgebras suficientes para $\{\mathcal{B}_a\}$, dada una regla de decisión cualquiera (τ, φ), existe una regla de decisión (τ, φ^*), tal que $\forall a \in \mathcal{A}$, φ^*_a es $\widetilde{\mathcal{G}}_a$-medible, y*

$$R(\theta, (\tau, \varphi^*)) = R(\theta, (\tau, \varphi)), \quad \forall \theta \in \Theta$$

.

Demostración:
$\forall B \in \mathcal{D}$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathcal{X}$, sea

$$\varphi^*_a(x, B) = E_\lambda(\varphi_a(x, B)/\widetilde{\mathcal{G}}_a)$$

independiente de θ, por ser $\varphi_a(x, B)$, $\mathcal{B}_a$-medible y ser $\widetilde{\mathcal{G}}_a$ suficiente para $\mathcal{B}_a$. Al ser $\mathcal{D}$ espacio métrico completo y separable, existe una versión de la esperanza condicionada, de forma que $\varphi^*_a(x, \cdot)$ es un probabilidad sobre $(\mathcal{D}, \mathcal{B}_\mathcal{D})$. Como $\{\tau = a\} \in \widetilde{\mathcal{G}}_a$,

$$\begin{aligned} I_{\{\tau=a\}}\varphi^*_a(x, B) &= E_\lambda(I_{\{\tau=a\}}\varphi_a(x, B)/\widetilde{\mathcal{G}}_a) \\ &= I_{\{\tau=a\}}E_\lambda(\varphi_\tau(x, B)/\widetilde{\mathcal{G}}_a) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\varphi^*_\tau(x, B) = \sum_{a \in \mathcal{A}} I_{\{\tau=a\}}E_\lambda(\varphi_\tau(x, B)/\widetilde{\mathcal{G}}_a) = E_\lambda(\varphi_\tau(x, B)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau)$$

por el Teorema de la Proyección Opcional (2.3.1).

Ahora por la observación anterior (32), al ser $\varphi^*_a(x, B) = E_\lambda(\varphi_a(x, B)/\widetilde{\mathcal{G}}_a)$, $\widetilde{\mathcal{G}}_a$-medible, por la estructura de $\widetilde{\mathcal{G}}_a$ se podrá escribir como:

$$\varphi^*_a(x, B) = I_{\{\tau=a\}}\varphi^1_a(x, B) + I_{\{\tau\neq a\}}\varphi^2_a(x, B)$$

siendo $\varphi^1_a(\cdot, B)$ y $\varphi^2_a(\cdot, B)$, $\mathcal{G}_a$-medibles, con lo que

$$\varphi^*_\tau(x, B) = \varphi^1_\tau(x, B)$$

siendo $\varphi^1_a(\cdot, B)$, $\mathcal{G}_a$-medible.

Sean

$$\nu(A \times B) = \int_A \varphi_\tau(x, B)\lambda(dx)$$

$$\nu^*(A \times B) = \int_A \varphi^*_\tau(x, B)\lambda(dx) = \int_A \varphi^1_\tau(x, B)\lambda(dx)$$

con $A \in \mathcal{B}$, y $B \in \mathcal{B}_D$. Se tiene que ν y ν^* son dos medidas sobre $\mathcal{B} \times \mathcal{B}_D$. Y se cumple, $\nu(A \times B) = \nu^*(A \times B)$, $\forall A \in \widetilde{\mathcal{G}}_\tau$, $B \in \mathcal{B}_D$, ya que si $A \in \widetilde{\mathcal{G}}_\tau$,

$$\begin{aligned}
\nu(A \times B) &= \int_A \varphi_\tau(x,B)\lambda(dx) = \int_A E_\lambda(\varphi_\tau(x,B)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau)\lambda(dx) \\
&= \int_A \varphi_\tau^*(x,B)\lambda(dx) = \nu^*(A \times B)
\end{aligned}$$

Entonces $\forall A \in \widetilde{\mathcal{G}}_\tau$,

$$\begin{aligned}
\int_A E[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau]\lambda(dx) &=_{(1)} \int_A \int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)\lambda(dx) \\
&= \int_{A\times D} L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\nu(dx,de) \\
&= \int_{A\times D} L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\nu^*(dx,de) \\
&= \int_A \int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi^*_{\tau(x)}(x,de)\lambda(dx) \\
&= \int_A E[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi^*_{\tau(x)}(x,de)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau]\lambda(dx)
\end{aligned}$$

(1), independiente de θ por la suficiencia de $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$ para $\mathcal{B}_\tau$ y ser

$$\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)$$

$\mathcal{B}_\tau$-medible.
Al ser válido $\forall A \in \widetilde{\mathcal{G}}_\tau$ y ser las funciones $\widetilde{\mathcal{G}}_\tau$ medibles, entonces

$$E[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau] = E[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi^*_{\tau(x)}(x,de)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau], \text{ c.s.}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
R(\theta,(\tau,\varphi)) &= \int_{\mathcal{X}}[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)]dP_\theta(x) + \int_{\mathcal{X}} c(\theta,\tau(x))dP_\theta(x) \\
&= E_\theta[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)] + \int_{\mathcal{X}} c(\theta,\tau(x))dP_\theta(x) \\
&= E_\theta E[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_{\tau(x)}(x,de)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau] + \int_{\mathcal{X}} c(\theta,\tau(x))dP_\theta(x) \\
&= E_\theta E[\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi^*_{\tau(x)}(x,de)/\widetilde{\mathcal{G}}_\tau] + \int_{\mathcal{X}} c(\theta,\tau(x))dP_\theta(x) \\
&= R(\theta,(\tau,\varphi^*))
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2 *Si $\{\mathcal{G}_a\}$ es familia de sub-σ-álgebras suficientes para $\{\mathcal{B}_a\}$, dada una regla de decisión (τ,φ), con τ plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$, existe una regla (τ,φ^{**}), tal que $\forall a \in \mathcal{A}$, φ_a^{**} es $\widehat{\mathcal{G}}_a$-medible y*

$$R(\theta,(\tau,\varphi^{**})) = R(\theta,(\tau,\varphi)), \quad \forall\theta \in \Theta$$

Demostración:
$\forall B \in \mathcal{D}$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $\forall x \in \mathcal{X}$, sea

$$\varphi_a^{**}(x,B) = E_\lambda(\varphi_a(x,B)/\widehat{\mathcal{G}}_a)$$

independiente de θ. Como $\{\tau = a\} \in \widehat{\mathcal{G}}_a$, al ser $\{\tau = a\} = \{\tau \succeq a\} \cap D_1$, $D_1 \in \mathcal{G}_a$,

$$I_{\{\tau=a\}}\varphi_a^{**}(x,B) = I_{\{\tau=a\}}E_\lambda(\varphi_\tau(x,B)/\widehat{\mathcal{G}}_a)$$

y la demostración subsiste igual que en la proposición anterior.
Al ser $\varphi_a^{**}(x,B)$, $\widehat{\mathcal{G}}_a$-medible, se puede escribir por la estructura de $\widehat{\mathcal{G}}_a$ como

$$\varphi_a^{**}(x,B) = I_{\{\tau\succeq a\}}\varphi_a^1(x,B) + I_{\{\tau\not\succeq a\}}\varphi_a^2(x,B)$$

$\varphi_a^1(x,B)$, y $\varphi_a^2(x,B)$, $\mathcal{G}_a$-medibles. Y

$$\varphi_\tau^{**} = \varphi_\tau^1(x,B)$$

□

3.3 Completitud de la Clase de Reglas Adaptadas a la Familia Suficiente

Definición 3.3.1 *Diremos que τ es un plan aleatorizado respecto de $\{\mathcal{G}_a\}$ si dado $a \in \mathcal{A}$, y $k \in \tilde{M}_a$, se cumple*

$$P(\tau \succeq a/\mathcal{B}_a), \ \text{es } \mathcal{G}_a^* - \text{medible}$$
$$\beta_a(\cdot,0) = P(\tau = a/\mathcal{B}_a, \tau \succeq a), \ \text{es } \widehat{\mathcal{G}}_a - \text{medible}$$
$$\beta_a(\cdot,k) = P(\tau \succeq ak/\mathcal{B}_a, \tau \succeq a), \ \text{es } \widehat{\mathcal{G}}_a - \text{medible}$$

Observación 33

Veamos que esta definición coincide cuando τ es no aleatorizado con la dada para τ plan de muestreo no aleatorizado respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$.
Si τ es no aleatorizado, $P(\tau = a/\mathcal{B}_a, \tau \succeq a)$, será o bien 0 ó bien 1, y la función indicatriz del conjunto $\{\tau = a\}$, debe ser $\widehat{\mathcal{G}}_a$-medible. Entonces,

$$I_{\{\tau=a\}} = I_{(B_1\cap\{\tau\succeq a\})} + I_{(B_2\cap\{\tau\not\succeq a\})}, \quad B_1, B_2 \in \mathcal{G}_a \tag{3.1}$$

Si $\omega \in \{\tau = a\}$, entonces $I_{\{\tau=a\}} = 1$, y $I_{\{\tau\succeq a\}} = 1$, $I_{\{\tau\not\succeq a\}} = 0$. Luego, de la ecuación anterior (3.1) tendremos, $I_{B_1} = 1$, entonces $\omega \in B_1$, entonces $\{\tau = a\} \subset B_1 \cap \{\tau \succeq a\}$.
Recíprocamente, si $\omega \in B_1 \cap \{\tau \succeq a\}$, es $I_{\{\tau\succeq a\}\cap B_1}(\omega) = 1$, y $I_{\{\tau\not\succeq a\}\cap B_1} = 0$, entonces

$I_{\{\tau=a\}} = 1$ y por lo tanto, $B_1 \cap \{\tau \succeq a\} \subset \{\tau = a\}$.
Con lo que si τ es no aleatorizado queda,

$$\{\tau = a\} = \{\tau \succeq a\} \cap B_1, \quad B_1 \in \mathcal{G}_a$$

como en la definición de τ no aleatorizado basado en $\{\mathcal{G}_a\}$ Análogamente, como $P(\tau \succeq ak/\mathcal{B}_a, \tau \succeq a)$, es una función $\widehat{\mathcal{G}}_a$-medible, al ser τ un plan de muestreo no aleatorizado, queda

$$\{\tau \succeq ak\} = \{\tau \succeq a\} \cap C_1, \quad C_1 \in \mathcal{G}_a$$

como en la definición de τ no aleatorizado basado en $\mathcal{G}_a$.
Y finalmente, si τ es un plan de muestreo no aleatorizado

$$P(\tau \succeq a/\mathcal{B}_a) = I_{\{\tau \succeq a\}}$$

si es $\mathcal{G}_a^*$-medible será $\{\tau \succeq a\} \in \mathcal{G}_a^*$.

Observación 34

Al ser $\beta_a(\cdot, 0)$, $\widehat{\mathcal{G}}_a$-medible, será

$$\mathcal{B}_a(\cdot, 0) = P(\tau = a/\mathcal{G}_a, \tau \preceq a) = \frac{P(\tau = a/\mathcal{G}_a)}{P(\tau \preceq a/\mathcal{G}_a)}$$

con lo que $\mathcal{B}_a(\cdot, 0)$, será $\mathcal{G}_a$-medible. Y por lo mismo $\mathcal{B}_a(\cdot, k)$ será también $\mathcal{G}_a$-medible.

Proposición 3.3.1 (Propiedad de la transitividad entre $\mathcal{G}_a$, y $\mathcal{G}_a^*$). *Si $\{\mathcal{G}_a\}$ es transitiva respecto a $\{\mathcal{G}_a^*\}$, para todo $B \in \mathcal{G}_a^*$, se tiene*

$$E(I_B/\mathcal{G}_{ak}) = E(E(I_B/\mathcal{G}_a)/\mathcal{G}_{ak})$$

Demostración:
Sea $B \in \mathcal{G}_a^*$, y $C \in \mathcal{G}_{ak}$, entonces

$$\int_C E(I_B/\mathcal{G}_{ak})dP = \int I_C I_B dP = \int_B E(I_C/\mathcal{G}_a^*)dP$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\int_C E(E(I_B/\mathcal{G}_a)/\mathcal{G}_{ak})dP &= \int I_C E(I_B/\mathcal{G}_a)dP \\
&= \int E(I_C E(I_B/\mathcal{G}_a)/\mathcal{G}_a)dP = \int E(I_C/\mathcal{G}_a)E(I_B/\mathcal{G}_a)dP \\
&= \int I_B E(I_C/\mathcal{G}_a)dP = \int_B E(I_C/\mathcal{G}_a)dP
\end{aligned}$$

Como por la transitividad $E(I_C/\mathcal{G}_a^*) = E(I_C/\mathcal{G}_a)$ resulta,

$$E(I_B/\mathcal{G}_{ak}) = E(E(I_B/\mathcal{G}_a)/\mathcal{G}_{ak}), \quad \forall B \in \mathcal{G}_A^*$$

□

Corolario 3.3.1

$$E(f/\mathcal{G}_{ak}) = E(E(f/\mathcal{G}_a)/\mathcal{G}_{ak}), \quad \forall f \textit{ función } \mathcal{G}_a^* - \textit{medible}$$

Definición 3.3.2 *Diremos que la familia de σ-álgebras $\{\mathcal{G}_a\}$ es transitiva respecto a $\{\mathcal{B}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, si para toda función f $\mathcal{G}_{ak}$-medible,*

$$E(f/\mathcal{G}_a) = E(f/\mathcal{B}_a), \quad \lambda \textit{ c.s.}$$

Observación 35

Por la demostración de la proposición (3.3.1), tomando $B \in \mathcal{B}_a$, queda

$$E(f/\mathcal{G}_{ak}) = E(E(f/\mathcal{G}_a)/\mathcal{G}_{ak})$$

para toda f $\mathcal{B}_a$-medible.

Teorema 3.3.2 *Si β es un plan de muestreo aleatorizado y $\{\mathcal{G}_a\}$ es una familia de σ-álgebras suficientes transitivas respecto de $\{\mathcal{B}_a\}$, existe un plan de muestreo aleatorizado $\widetilde{\beta}$, que es plan de muestreo respecto de $\{\mathcal{G}_a\}$, y tal que*

$$E(b_a^{\widetilde{\beta}}(\cdot,k)/\mathcal{G}_a) = E(b_a^{\beta}(\cdot,k)/\mathcal{G}_a) \quad \lambda \textit{ c.s.}, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall k \in \tilde{M}_a \cup \{0\}$$

en particular

$$P_\theta^\beta(a) = P_\theta^{\widetilde{\beta}}(a), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall \theta \in \Theta$$

y para toda función Z_a, $\mathcal{G}_a$-medible

$$E_\theta(Z_\beta) = E_\theta(Z_{\widetilde{\beta}})$$

Demostración:

Sea $\widetilde{\beta}_{()}(k) = \beta_{()}(k)$, $\forall k \in M$, definimos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_a(\cdot,k) &= \frac{E(b_a^\beta(\cdot,k)/\mathcal{G}_a)}{\sum_{l\in\tilde{M}_a} E(b_a^\beta(\cdot,l)/\mathcal{G}_a)} = \frac{P(\tau \succeq ak/\mathcal{G}_a)}{P(\tau \succeq a/\mathcal{G}_a)} \\
&= P(\tau \succeq ak/\tau \succeq a, \mathcal{G}_a) = E(I_{\{\tau\succeq ak\}}/\widehat{\mathcal{G}}_a) = E(E(I_{\{\tau\succeq ak\}}/\mathcal{B}_a)/\widehat{\mathcal{G}}_a) \\
&= E(\beta_a(\cdot,k)/\widehat{\mathcal{G}}_a)
\end{aligned}$$

Y,

$$\widetilde{\beta}_a(\cdot,0) = P(\tau = a/\tau \succeq a, \mathcal{G}_a) = E(\beta_a(\cdot,0)/\widehat{\mathcal{G}}_a)$$

con ello se cumplirán las condiciones segunda y tercera de plan aleatorizado τ^* respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$. La primera condición,
$P(\tau^* \succeq a/\mathcal{B}_a)$, es $\mathcal{G}_a^*$-medible, equivale a

$$\sum_{l\in\tilde{M}_a\cup\{0\}} E(b_a^{\widetilde{\beta}}(\cdot,l)/\mathcal{B}_a)$$

es $\mathcal{G}_a^*$-medible. En efecto, $\widetilde{\beta}_a(\cdot,k)$, es $\mathcal{G}_a$-medible, por la definición. Al ser $\widetilde{\beta}_a(\cdot,k)$ $\mathcal{G}_a$-medible, entonces $\widetilde{b}_a^\beta(\cdot,k)$ es $\mathcal{G}_a^*$-medible, $\forall k \in \tilde{M}_a \cup 0$.
A continuación demostraremos que

$$E(b_a^{\widetilde{\beta}}(\cdot,k)/\mathcal{G}_a) = E(b_a^\beta(\cdot,k)/\mathcal{G}_a) \quad \lambda \text{ c.s.}, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall k \in \tilde{M}_a \cup \{0\}$$

en particular

$$P^\beta(\{a\}) = P^{\widetilde{\beta}}(\{a\}), \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

Por inducción respecto a $h(a)$,

1. si $h(a)=0$, $\forall k \in \tilde{M}_{()} \cup \{0\}$, $\mathcal{G}_{()} = (\Omega, \emptyset)$

$$E(b_{()}^{\widetilde{\beta}}(\cdot,k)/\mathcal{G}_{()}) = E(b_{()}^{\widetilde{\beta}}(\cdot,k)) = E(b_{()}^\beta(\cdot,k)) = E(b_{()}^\beta(\cdot,k)/\mathcal{G}_{()})$$

2. Suponemos que se cumple par $h(a)=n-1$, y lo vemos para n,

$$\begin{aligned}
E(b_a^{\widetilde{\beta}}(\cdot,k)/\mathcal{G}_a) &= E(\widetilde{\beta}_a(\cdot,k) b_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}^{\widetilde{\beta}}(\cdot,a_n)/\mathcal{G}_a) \\
&= \widetilde{\beta}_a(\cdot,k) E(b_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}^{\widetilde{\beta}}(\cdot,a_n)/\mathcal{G}_a) \\
&=_{(1)} \widetilde{\beta}_a(\cdot,k) E(E(b_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}^{\widetilde{\beta}}(\cdot,a_n)/\mathcal{G}_{a^{n-1}}/\mathcal{G}_a) \\
&=_{(2)} \widetilde{\beta}_a(\cdot,k) E(E(b_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}^{\beta}(\cdot,a_n)/\mathcal{G}_{a^{n-1}}/\mathcal{G}_a) \\
&=_{(3)} \widetilde{\beta}_a(\cdot,k) E(b_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}^{\beta}(\cdot,a_n)/\mathcal{G}_a) \\
&=_{(4)} \widetilde{\beta}_a(\cdot,k) \sum_{l \in \tilde{M}_a \cup \{0\}} E(b_a^\beta(\cdot,l)/\mathcal{G}_a) \\
&=_{(5)} E(b_a^\beta(\cdot,k)/\mathcal{G}_a)
\end{aligned}$$

(1), al ser $b_{(a_1,\cdots,a_{n-1})}^{\widetilde{\beta}}$, $\mathcal{G}_{a^{n-1}}^*$-medible y por tanto, $\mathcal{B}_{a^{n-1}}$-medible, y por la transitividad.
(2), hipótesis de inducción.
(3), por la transitividad.
(4), ya que $b_{a^{n-1}}^\beta(\cdot,a_n) = \sum_{l \in \tilde{M}_a \cup \{0\}} b_a^\beta(\cdot,l)$.
(5), por la definición de $\widetilde{\beta}_a(\cdot,k)$

3. Como

$$P_\theta^\beta(\{a\}) = \int_{\mathcal{X}} b_a^\beta(x,0)dP(x)$$

entonces

$$P_\theta^\beta(\{a\}) = E(b_a^\beta(\cdot,0)) = E(b_a^{\widetilde{\beta}}(\cdot,0)) = P_\theta^{\widetilde{\beta}}(\{a\})$$

4. Para cualquier función $\mathcal{G}_a$-medible, Z_a,

$$E_\theta(Z_\beta) = E_\theta(\sum_{a \in \mathcal{A}} b_a^\beta(\cdot,0) Z_a)$$

$$
\begin{aligned}
&= E_\theta(E(\sum_{a\in\mathcal{A}} b_a^\beta(\cdot,0)Z_a/\mathcal{G}_a)) = E_\theta(\sum_{a\in\mathcal{A}} Z_a E(b_a^\beta(\cdot,0)/\mathcal{G}_a)) \\
&= E_\theta(\sum_{a\in\mathcal{A}} Z_a E(b_a^{\widetilde{\beta}}(\cdot,0)/\mathcal{G}_a)) = E_\theta(Z_{\widetilde{\beta}})
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.3.3 *Si $\{\mathcal{G}_a\}$ es una familia de σ-álgebras suficientes para $\mathcal{B}_a$ y transitivas respecto a $\mathcal{B}_a$, la función de coste $c(\theta,a,\cdot)$ es $\mathcal{G}_a$-medible, y la función de pérdida es $\mathcal{G}_a$-medible, entonces la clase de reglas de decisión tales que τ^* es plan aleatorizado respecto a $\mathcal{G}_a$ y φ_a^* es $\widetilde{\mathcal{G}}_a$- medible es esencialmente completa.*

Demostración:

Dada cualquier regla (τ,φ) elegimos φ^* como en el teorema (3.2.1), con lo que

$$R(\theta,(\tau,\varphi)) = R(\theta,(\tau,\varphi^*)), \quad \forall\theta\in\Theta$$

$$
\begin{aligned}
R(\theta,(\tau,\varphi^*)) &= \int_{\mathcal{X}}(\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi^*_{\tau(x)}(x,de) + c(\theta,x,\tau(x)))P_\theta(dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}}(\int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi^1_{\tau(x)}(x,de) + c(\theta,x,\tau(x)))P_\theta(dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}} Z_\tau(\theta,x)P_\theta(dx)
\end{aligned}
$$

siendo $Z_a(\theta,x) = \int_D L_a(\theta,e,x)\varphi_a^1(x,de) + c(\theta,x,a)$.
Veamos que en efecto,

$$Z_\tau = \int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_\tau^*(x,de) + c(\theta,\tau(x),x)$$

Teníamos

$$
\begin{aligned}
\varphi_\tau^*(x,B) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} I_{\{\tau=a\}}\varphi_a^*(x,B) \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} I_{\{\tau=a\}}\varphi_a^1(x,B)
\end{aligned}
$$

Sea $x\in\mathcal{X}$, si $\tau(x)=a\in\mathcal{A}$, entonces $Z_\tau = Z_a$, $\varphi_\tau(x,B) = \varphi_a^1(x,B)$, $L_{\tau(x)}(\theta,e,x) = L_a(\theta,e,x)$, y $c(\theta,\tau(x),x) = c(\theta,a,x)$, luego

$$Z_\tau = \int_D L_{\tau(x)}(\theta,e,x)\varphi_\tau^*(x,de) + c(\theta,\tau(x),x), \text{ c.s.}$$

Al ser $\varphi_a^1(x,B)$ $\mathcal{G}_a$-medible y $L_a(\theta,e,x)$ $\mathcal{G}_a$-medible, entonces

$$\int_D L_a(\theta,e,x)\varphi_a^1(x,de)$$

es $\mathcal{G}_a$-medible y Z_a es $\mathcal{G}_a$-medible, ya que $c(\theta,x,a)$ es $\mathcal{G}_a$-medible por hipótesis.

Entonces hallamos a partir del plan de muestreo τ, τ^* plan aleatorizado de muestreo respecto a $\mathcal{G}_a$, en virtud del teorema (3.3.2), con lo cual

$$R(\theta, (\tau, \varphi^*)) = E_\theta(Z_\beta) = E_\theta(Z_{\widetilde{\beta}}) = R(\theta, (\tau^*, \varphi^*))$$

resultando

$$R(\theta, (\tau, \varphi)) = R(\theta, (\tau^*, \varphi^*))$$

□

3.4 Ejemplo

Sean $X_1, X_2, \cdots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas según una Poisson de parámetro θ, con $\theta > 0$. Sea

$$L_a(\theta, e, x) = \frac{(g(a)+1)^2}{h(a)}(\theta - e)^2$$

independiente de x. Consideremos un coste constante c_0 por cada etapa de muestreo y un coste constante c_1 por cada observación. Sea

$$S_a = \sum_{j=1}^{g(a)} X_j$$

estadístico suficiente transitivo. Nos limitaremos a reglas basadas en él. Construiremos una regla Bayes, consideramos que el parámetro θ sigue una distribución Gamma de parámetros $(1, 1)$. Se tiene entonces, que la distribución

$$\theta / x_1, \cdots, x_{g(a)} \equiv \mathcal{G}(1 + S_a, \frac{1}{g(a)+1})$$

La regla terminal Bayes es

$$\varphi_a(x_1, \cdots, x_{g(a)}) = \frac{1 + \sum_{j=1}^{g(a)} X_j}{g(a)+1} = \frac{1 + S_a}{g(a)+1}$$

$$\rho_a(x_1, \cdots, x_{g(a)}) = \frac{(g(a)+1)^2}{h(a)} \frac{1 + S_a}{(g(a)+1)^2} = \frac{S_a + 1}{h(a)}$$

Tenemos que parar de manera óptima la sucesión

$$Z_a = \frac{1}{h(a)}(\sum_{j=1}^{g(a)} X_j + 1) + c_0 h(a) + c_1 g(a)$$

Supondremos que el problema es un problema finito con $\mathcal{A} = \{a \in A : g(a) \leq 3\}$. Supongamos que $g(a) = j$, entonces para calcular la distribución de $(X_j / X_1, \cdots, X_{j-1})$, hacemos en primer lugar

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_j) &= \int_0^\infty \frac{\theta^{S_j}e^{-j\theta}}{x_1!\cdots x_j!}e^{-\theta}d\theta = \frac{1}{x_1!\cdots x_j!}\int_0^\infty \theta^{S_j+1-1}e^{-(j+1)\theta}d\theta \\ &= \frac{\Gamma(S_j+1)}{x_1!\cdots x_j!(j+1)^{S_j+1}}\frac{(j+1)^{S_j+1}}{\Gamma(S_j+1)}\int_0^\infty \theta^{S_j+1-1}e^{-(j+1)\theta}d\theta \\ &= \frac{S_j!}{x_1!\cdots x_j!}\frac{1}{(j+1)^{S_j+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_j/x_1,\cdots,x_{j-1}) &= \frac{f(x_1,\cdots,x_j)}{f(x_1,\cdots,x_{j-1})} = \frac{S_j!}{x_j!S_{j-1}!}\frac{j^{S_{j-1}+1}}{(j+1)^{S_j+1}} \\ &= \frac{(S_{j-1}+x_j)!}{x_j!S_{j-1}!}(\frac{j}{j+1})^{S_{j-1}+1}(\frac{1}{j+1})^{x_j} \end{aligned}$$

Al ser función de cuantía

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k/x_1,\cdots,x_{j-1}) = 1$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(S_{j-1}+k)!}{k!}(\frac{1}{j+1})^k = S_{j-1}!(\frac{j+1}{j})^{S_{j-1}+1}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} E(X_j/X_1,\cdots,X_{j-1}) &= (\frac{j}{j+1})^{S_{j-1}+1}\frac{1}{S_{j-1}!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(S_{j-1}+k)!}{(k-1)!}(\frac{1}{j+1})^k \\ &= (\frac{j}{j+1})^{S_{j-1}+1}\frac{1}{S_{j-1}!}\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(S_{j-1}+1+k)!}{k!}(\frac{1}{j+1})^k \\ &= (\frac{j}{j+1})^{S_{j-1}+1}\frac{1}{S_{j-1}!}\frac{1}{j+1}(S_{j-1}+1)!(\frac{j+1}{j})^{S_{j-1}+2} \\ &= \frac{1}{j}(S_{j-1}+1) \end{aligned}$$

Consideremos la distribución de $(X_{j-1},X_j)/X_1,\cdots,X_{j-2}$

$$\begin{aligned} f(x_{j-1},x_j/x_1,\cdots,x_{j-2}) &= \frac{f(x_1,\cdots,x_j)}{f(x_1,\cdots,x_{j-2})} = \frac{S_j!}{x_{j-1}!x_j!S_{j-2}!}\frac{(j-1)^{S_{j-2}+1}}{(j+1)^{S_j+1}} \\ &= \frac{(S_{j-2}+x_{j-1}+x_j)!}{x_{j-1}!x_j!S_{j-2}!}\frac{(j-1)^{S_{j-2}+1}}{(j+1)^{S_j+1}}(\frac{1}{j+1})^{x_{j-1}+x_j} \end{aligned}$$

será

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(S_{j-2}+k+l)!}{k!l!}(\frac{1}{j+1})^{k+l} = (S_{j-2})!(\frac{j+1}{j-1})^{S_{j-2}+1}$$

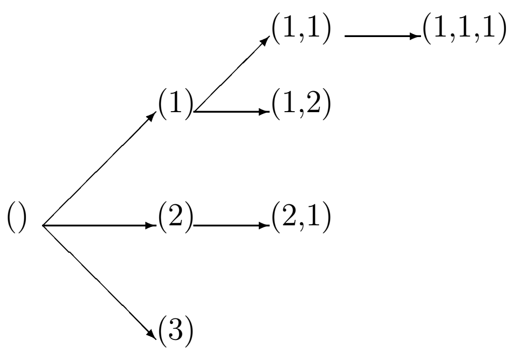
resultando

$$f(x_j/x_1,\cdots,x_{j-1}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(S_{j-2}+x_{j-1}+x_j)!}{x_{j-1}!x_j!S_{j-2}!}\left(\frac{j-1}{j+1}\right)^{S_{j-2}+1}\left(\frac{1}{j+1}\right)^{x_j}\left(\frac{1}{j+1}\right)^{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_j!S_{j-2}!}(\frac{j-1}{j+1})^{S_{j-2}+1}(\frac{1}{j+1})^{x_j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(S_{j-2}+x_j+k)!}{k!}(\frac{1}{j+1})^k \\
&= \frac{1}{x_j!S_{j-2}!}(\frac{j-1}{j+1})^{S_{j-2}+1}(\frac{1}{j+1})^{x_j}(S_{j-2}+x_j)!(\frac{j+1}{j})^{S_{j-2}+x_j+1} \\
&= \frac{1}{x_j!S_{j-2}!}(\frac{j-1}{j})^{S_{j-2}+1}(\frac{1}{j})^{x_j}(S_{j-2}+x_j)!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X_j/X_1,\cdots,X_{j-2}) &= \frac{1}{S_{j-2}!}(\frac{j-1}{j})^{S_{j-2}+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(S_{j-2}+k)!(\frac{1}{j})^k \\
&= \frac{1}{S_{j-2}!}(\frac{j-1}{j})^{S_{j-2}+1}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(S_{j-2}+k+1)!(\frac{1}{j})^k \\
&= \frac{1}{S_{j-2}!}(\frac{j-1}{j})^{S_{j-2}+1}\frac{1}{j}(S_{j-2}+1)!(\frac{j}{j-1})^{S_{j-2}+2} \\
&= (S_{j-2}+1)\frac{1}{j}\frac{j}{j-1} = \frac{S_{j-2}+1}{j-1}
\end{aligned}
$$

La solución del problema de muestreo óptimo:
Por inducción hacia atrás calculamos los valores de la función U_a, para $a \in \mathcal{A}$ secuencias muestrales admisibles. Como $g(a) \leq 3$, las secuencias muestrales resultantes son las que aparecen a continuación, reflejadas en el árbol



- La secuencia muestral $(1,1,1)$, es tal que $\tilde{M}_{(1,1,1)} = \emptyset$, luego $U_{(1,1,1)} = Z_{(1,1,1)}$, entonces

$$Z_{(1,1,1)} = \frac{1}{3}(S_3+1) + 3c_0 + 3c_1 = U_{(1,1,1)}$$

- La secuencia muestral $(1,1)$, es tal que $\tilde{M}_{(1,1)} = \{1\}$, para obtener

$$U_{(1,1)} = \text{mín}\{Z_{(1,1)}, E(U_{(1,1,1)}/X_1, X_2)\}$$

$$Z_{(1,1)} = \frac{1}{2}(S_2 + 1) + 2c_0 + 2c_1$$

$$\begin{aligned} E(Z_{(1,1,1)}/X_1, X_2) &= \frac{1}{3}(S_2 + E(X_3/X_1, X_2) + 1) + 3c_0 + 3c_1 \\ &= \frac{1}{3}(S_2 + \frac{1}{3}(S_2 + 1) + 1) + 3c_0 + 3c_1 \\ &= \frac{4}{9}(S_2 + 1) + 3c_0 + 3c_1 \end{aligned}$$

$$U_{(1,1)} = \text{mín}\{\frac{1}{2}(S_2 + 1) + 2c_0 + 2c_1, \frac{4}{9}(S_2 + 1) + 3c_0 + 3c_1\}$$

$$\frac{1}{2}(S_2 + 1) + 2c_0 + 2c_1 - \frac{4}{9}(S_2 + 1) + 3c_0 + 3c_1 > 0$$

si

$$\frac{1}{18}(S_2 + 1) - c_0 - c_1 > 0$$

entonces

$$S_2 + 1 > 18(c_0 + c_1)$$

por lo tanto,

$$U_{(1,1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(S_2 + 1) + 2c_0 + 2c_1 & \text{si } S_2 + 1 < 18(c_0 + c_1) \text{ en cuyo caso paramos} \\ \frac{4}{9}(S_2 + 1) + 3c_0 + 3c_1 & \text{si } S_2 + 1 > 18(c_0 + c_1) \text{ en cuyo caso se toma } X_3 \end{cases}$$

- La secuencia muestral $(1,2)$, es tal que $\tilde{M}_{(1,1)} = \emptyset$, luego

$$U_{(1,2)} = Z_{(1,2)} = \frac{1}{2}(S_3 + 1) + 2c_0 + 3c_1$$

- La secuencia muestral (1), es tal que $\tilde{M}_{(1)} = \{1,2\}$ luego

$$U_{(1)} = \text{mín}\{Z_{(1)}, E(U_{(1,1)}/X_1), E(U_{(1,2)}/X_1)\}$$

calculamos cada una de las esperanzas

$$Z_{(1)} = (S_1 + 1) + c_0 + c_1$$

$$\begin{aligned} E(U_{(1,2)}/X_1) &= \frac{1}{2}(S_1 + E(X_2/X_1) + E(X_3/X_1) + 1) + 2c_0 + 3c_1 \\ &= \frac{1}{2}(S_1 + \frac{1}{2}(S_1 + 1) + \frac{1}{2}(S_1 + 1) + 1) + 2c_0 + 3c_1 \\ &= \frac{1}{2}2(S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = (S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 \end{aligned}$$

Para calcular la otra esperanza sabemos,

$$U_{(1,1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(X_1+X_2+1)+2c_0+2c_1 & (X_1+X_2+1) < 18(c_0+c_1) \\ \frac{4}{9}(X_1+X_2+1)+3c_0+3c_1 & (X_1+X_2+1) > 18(c_0+c_1) \end{cases}$$

Sea $Z = X_1 + X_2 + 1$, con $Z = 1, 2, 3, \cdots$

$$E(U_{(1,1)}/X_1) = \sum_{z=1}^{[18(c_0+c_1)]} (\frac{1}{2}z + 2c_0 + 2c_1)p(z/X_1) + \sum_{z=[18(c_0+c_1)]+1}^{\infty} (\frac{4}{9}z + 3c_0 + 3c_1)p(z/X_1)$$

representado [ ] parte entera.
Si $X_1 = k$, $z = k+1, k+2, k+3, \cdots$.
Si $k \geq [18(c_0+c_1)]$, entonces $P(Z \geq [18(c_0+c_1)]+1) = 1$, luego

$$U_{(1,1)} = \frac{4}{9}(X_1+X_2+1)+3c_0+3c_1$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(U_{(1,1)}/X_1 = k) &= \frac{4}{9}(X_1 + \frac{1}{2}(X_1+1)+1)+3c_0+3c_1 \\ &= \frac{4}{9}\frac{3}{2}(k+1)+3c_0+3c_1 = \frac{2}{3}(k+1)+3c_0+3c_1 \end{aligned}$$

Para $k \leq [18(c_0+c_1)] - 1$

$$\begin{aligned} E(U_{(1,1)}/X_1 = k) &= \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-1-k} (\frac{1}{2}(k+l+1)+2c_0+2c_1)p(X_2 = l/X_1 = k) \\ &+ \sum_{l=[18(c_0+c_1)]-k}^{\infty} (\frac{4}{9}(k+l+1)+3c_0+3c_1)p(X_2 = l/X_1 = k) \end{aligned}$$

$$P(X_2 = l/X_1 = k) = \frac{(k+l)!}{l!k!}(\frac{2}{3})^{k+1}(\frac{1}{3})^l$$

$$\begin{aligned} E(U_{(1,1)}/X_1 = k) &= \sum_{l=0}^{\infty}(\frac{4}{9}(k+l+1)+2c_0+2c_1)p(X_2 = l/X_1 = k) \\ &+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-1-k}(k+l+1)p(X_2 = l/X_1 = k) \\ &+ (c_0+c_1)\sum_{l=[18(c_0+c_1)]-k}^{\infty} p(X_2 = l/X_1 = k) \\ &= E(\frac{4}{9}(X_1+X_2+1)+2c_0+2c_1/X_1 = k) \\ &+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-1-k}(k+l+1)p(X_2 = l/X_1 = k) \\ &+ (c_0+c_1)\sum_{l=[18(c_0+c_1)]-k} p(X_2 = l/X_1 = k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9}(k + \frac{1}{2}(k+1)+1) + 2c_0 + 2c_1/X_1 = k) \\
&+ \frac{1}{18} \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-1-k} (k+l+1)p(X_2 = l/X_1 = k) \\
&+ (c_0+c_1) \sum_{l=[18(c_0+c_1)]-k} p(X_2 = l/X_1 = k)
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{l=0}^{\infty} p(X_2 = l/X_1 = k) = 1$$

entonces,

$$\sum_{l=[18(c_0+c_1)]-k}^{\infty} p(X_2 = l/X_1 = k) = 1 - \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-k-1} p(X_2 = l/X_1 = k)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1 = k) &= \frac{2}{3}(k+1) + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1) \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-k-1} \begin{pmatrix} k+l \\ l \end{pmatrix} (\frac{1}{3})^l (\frac{2}{3})^{k+1} \\
&+ \frac{k+1}{18} \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-1-k} \begin{pmatrix} k+l+1 \\ l \end{pmatrix} (\frac{1}{3})^l (\frac{2}{3})^{k+1}
\end{aligned}$$

Si hacemos $c_0 = c_1 = 1/4$, habría que calcular lo anterior para $k = 0, 1, \cdots, 8$.

1. Si $X_1 \geq 9$, entonces como

$$U_{(1)} = \text{mín}\{Z_{(1)}, E(U_{(1,1)}/X_1), E(U_{(1,2)}/X_1)\}$$

se tiene

$$U_{(1)} = \text{mín}\{(X_1+1) + c_0 + c_1, \frac{2}{3}(X_1+1) + 3c_0 + 3c_1, (X_1+1) + 2c_0 + 3c_1\}$$

resultando que

$$U_{(1)} = \frac{2}{3}(X_1+1) + 3c_0 + 3c_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{13}{6}$$

por lo que se tomaría una observación más si $X_1 \geq 9$.

2. Calculamos a continuación $U_{(1)}$ para el caso en que $X_1 \leq 8$. Llamamos

$$\Sigma_1 = \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-k-1} \begin{pmatrix} k+l \\ l \end{pmatrix} (\frac{1}{3})^l (\frac{2}{3})^{k+1}$$

y

$$\Sigma_2 = \sum_{l=0}^{[18(c_0+c_1)]-1-k} \begin{pmatrix} k+l+1 \\ l \end{pmatrix} (\frac{1}{3})^l (\frac{2}{3})^{k+1}$$

– Si $X_1 = 0$, $k = 0$, y

$$\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1 = 0) &= \frac{2}{3}(k+1) + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3} + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{8}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^{k+1} \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{8}(l+1)(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3}) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}0.9999 + \frac{1}{18}1.4994 = 1.75
\end{aligned}$$

– Si $X_1 = 1$, $k = 1$, y

$$\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1 = 1) &= \frac{2}{3}(k+1) + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}2 + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{7}(l+1)(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^2 \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{7}\frac{(l+2)(l+1)}{2}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^2 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}0.9990 + \frac{1}{18}1.4948 = 2.499
\end{aligned}$$

– Si $X_1 = 2$, $k = 2$, y

$$\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1 = 2) &= \frac{2}{3}(k+1) + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}3 + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{6}\frac{(l+2)(l+1)}{2}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^3 \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{6}\frac{(l+3)(l+2)(l+1)}{6}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^3 \\
&= \frac{6}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 = \frac{6}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}0.9917 + \frac{1}{18}1.4705 = 3.249
\end{aligned}$$

– Si $X_1 = 3$, $k = 3$, y

$$\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1 = 3) &= \frac{2}{3}(k+1) + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}4 + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{5}\frac{(l+3)(l+2)(l+1)}{6}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^4 \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{5}\frac{(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{4!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^4 \\
&= \frac{8}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}0.9575 + \frac{1}{18}1.385 = 3.9957
\end{aligned}$$

– Si $X_1 = 4$, $k = 4$, y

$$E(U_{(1,1)}/X_1 = 4) = \frac{2}{3}(k+1) + 3c_0 + 3c_1 - (c_0+c_1)\Sigma_1 + \frac{1}{18}\Sigma_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}5 + 3c_0 + 3c_1 \\
&- (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{4}\frac{(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{4!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^5 \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{4}\frac{(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{5!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^5 \\
&= \frac{10}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{10}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}0.8551+\frac{1}{18}1.1803 = 4.7336
\end{aligned}
$$

– Si $X_1 = 5$, $k = 5$, y

$$
\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1=5) &= \frac{2}{3}(k+1)+3c_0+3c_1-(c_0+c_1)\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}6 + 3c_0 + 3c_1 \\
&- (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{3}\frac{(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{5!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^6 \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{3}\frac{(l+6)(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{6!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^6 \\
&= \frac{12}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 = \frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}0.6503+\frac{1}{18}0.8389 \\
&= 5.4549
\end{aligned}
$$

– Si $X_1 = 6$, $k = 6$, y

$$
\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1=6) &= \frac{2}{3}(k+1)+3c_0+3c_1-(c_0+c_1)\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}7 + 3c_0 + 3c_1 \\
&- (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{2}\frac{(l+6)(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{6!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^7 \\
&+ \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{2}\frac{(l+7)(l+6)(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{7!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^7 \\
&= \frac{14}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 = \frac{14}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}0.37717+\frac{1}{18}0.4487 \\
&= 6.1525
\end{aligned}
$$

– Si $X_1 = 7$, $k = 7$, y

$$
\begin{aligned}
E(U_{(1,1)} \quad / \quad X_1=7) &= \frac{2}{3}(k+1)+3c_0+3c_1-(c_0+c_1)\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}8 + 3c_0 + 3c_1 \\
&- (c_0+c_1)\sum_{l=0}^{1}\frac{(l+7)(l+6)(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{7!}(\frac{1}{3})^l(\frac{2}{3})^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \quad \frac{1}{18}\sum_{l=0}^{1}\frac{(l+8)(l+7)(l+6)(l+5)(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{8!}(\frac{1}{3})^{l}(\frac{2}{3})^{8} \\
& = \quad \frac{16}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2=\frac{16}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}0.1430+\frac{1}{18}0.1560 \\
& = \quad 6.8311
\end{aligned}
$$

– Si $X_1 = 8$, $k = 8$, y

$$
\begin{aligned}
E(U_{(1,1)}/X_1=8) &= \frac{2}{3}(k+1)+3c_0+3c_1-(c_0+c_1)\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}9+3c_0+3c_1-(c_0+c_1)(\frac{2}{3})^9+\frac{1}{18}(\frac{2}{3})^9 \\
&= \frac{18}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Sigma_1+\frac{1}{18}\Sigma_2 \\
&= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}0.0260+\frac{1}{18}0.0260=7.513
\end{aligned}
$$

Calculamos a continuación para cada valor de $X_1 = 0, \cdots, 8$,

$$U_{(1)} = \text{mín}\{Z_{(1)}, E(U_{(1,1)}/X_1), E(U_{(1,2)}/X_1)\}$$

– $X_1 = 0$,

$$Z_{(1)} = (S_1+1)+c_0+c_1 = 1+1/2 = 3/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1=0) = (S_1+1)+2c_0+3c_1 = 1+2/4+3/4 = 9/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{3/2, 1.75, 9/4\} = 3/2$$

la decisión será parar.

– $X_1 = 1$,

$$Z_{(1)} = (S_1+1)+c_0+c_1 = 2+1/2 = 5/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1=1) = (S_1+1)+2c_0+3c_1 = 2+2/4+3/4 = 13/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{5/2, 2.4999, 13/4\} = 2.4999$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 2$,

$$Z_{(1)} = (S_1+1)+c_0+c_1 = 3+1/2 = 7/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1=1) = (S_1+1)+2c_0+3c_1 = 3+2/4+3/4 = 17/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{7/2, 3.2492, 17/4\} = 3.2492$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 3$,

$$Z_{(1)} = (S_1+1)+c_0+c_1 = 4+1/2 = 9/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1=1) = (S_1+1)+2c_0+3c_1 = 4+2/4+3/4 = 21/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{9/2, 3.9957, 21/4\} = 3.9957$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 4$,

$$Z_{(1)} = (S_1 + 1) + c_0 + c_1 = 5 + 1/2 = 11/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1 = 1) = (S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = 5 + 2/4 + 3/4 = 25/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{11/2, 4.7336, 25/4\} = 4.7336$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 5$,

$$Z_{(1)} = (S_1 + 1) + c_0 + c_1 = 6 + 1/2 = 13/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1 = 1) = (S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = 6 + 2/4 + 3/4 = 29/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{13/2, 5.45448, 29/4\} = 5.45448$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 6$,

$$Z_{(1)} = (S_1 + 1) + c_0 + c_1 = 6 + 1/2 = 15/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1 = 1) = (S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = 6 + 2/4 + 3/4 = 33/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{15/2, 6.1525, 33/4\} = 6.1525$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 7$,

$$Z_{(1)} = (S_1 + 1) + c_0 + c_1 = 8 + 1/2 = 17/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1 = 1) = (S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = 8 + 2/4 + 3/4 = 37/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{17/2, 6.8311, 37/4\} = 6.8311$$

la decisión será tomar una observación más.

– $X_1 = 8$,

$$Z_{(1)} = (S_1 + 1) + c_0 + c_1 = 9 + 1/2 = 19/2$$

$$E(U_{(1,2)}/X_1 = 1) = (S_1 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = 9 + 2/4 + 3/4 = 41/4$$

$$U_{(1)} = \text{mín}\{19/2, 7.513, 41/4\} = 7.513$$

la decisión será tomar una observación más.

– Para $X_1 \geq 9$, se tomaba una observación más.

El cálculo de las esperanzas arroja los siguientes resultados,

- Para la secuencia muestral (1),

$$\begin{aligned} E(U_{(1)}) &= U_{(1)}(0)\frac{1}{2} + U_{(1)}(1)\frac{1}{2^2} + \cdots + \sum_{k=9}^{\infty}(\frac{2}{3}k + \frac{13}{6})\frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 2.2909 + 0.017252 = 2.308152 \end{aligned}$$

- Para la secuencia muestral (3),

$$U_{(3)} = Z_{(3)} = S_3 + 1 + c_0 + 3c_1 = (X_1 + X_2 + X_3) + 1 + 1 = X_1 + X_2 + X_3 + 2$$

luego

$$E(U_{(3)}) = 3E(X) + 2 = 5$$

- Para la secuencia muestral (2), calculamos

$$U_{(2,1)} = Z_{(2,1)} = \frac{1}{2}(S_3 + 1) + 2c_0 + 3c_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + X_3 + 1) + \frac{5}{4}$$

$$Z_{(2)} = (X_1 + X_2 + 1) + c_0 + 2c_1 = X_1 + X_2 + 1 + \frac{3}{4} = X_1 + X_2 + \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} E(U_{(2,1)}/X_1, X_2) &= \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + 1) + 1 + \frac{5}{4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{4}{3}(X_1 + X_2 + 1) + \frac{5}{4} = \frac{2}{3}(X_1 + X_2 + 1) + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$Z_{(2)} > E(U_{(2,1)}/X_1, X_2)$, si

$$(X_1 + X_2 + 1) + \frac{3}{4} > \frac{2}{3}(X_1 + X_2 + 1) + \frac{5}{4}$$

es decir, si

$$X_1 + X_2 > \frac{1}{2}$$

Salvo que $X_1 = X_2 = 0$ en cuyo caso pararemos, para cualquier otro valor de X_1 o X_2, tomaremos otra observación. Entonces,

$$U_{(2)} = \begin{cases} \frac{7}{4} & X_1 = 0, \quad X_2 = 0 \\ \frac{2}{3}(X_1 + X_2 + 1) + \frac{5}{4} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(X_1, X_2) = \frac{(X_1 + X_2)!}{X_1! X_2!}(\frac{1}{3})^{X_1 + X_2 + 1}$$

$$\begin{aligned} E(X_1) = E(X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+l)!}{(k-1)!l!}(\frac{1}{3})^{k+l+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(\frac{1}{3})^{k+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{l!}(\frac{1}{3})^{l} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(\frac{1}{3})^{k+1}k!(\frac{3}{2})^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k(\frac{1}{2})^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k(\frac{1}{2})^{k} = 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(U_{(2)}) &= \frac{7}{4}P(X_1=0,X_2=0)+\frac{5}{4}P(X_1\neq 0,X_2\neq 0)+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(k+l+1)\frac{(k+l)!}{k!l!}(\frac{1}{3})^{k+l+1}\\
&= \frac{7}{12}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k+1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(k+l+1)!}{l!}(\frac{1}{3})^{l}\\
&= \frac{7}{12}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k+1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+l+1)!}{l!}(\frac{1}{3})^{l}-(k+1)!\right)\\
&= \frac{7}{12}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(\frac{1}{3})^{k+1}\left((\frac{3}{2})^{k+2}-1\right)\\
&= \frac{7}{12}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(\frac{1}{2})^{k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(\frac{1}{3})^{k+1}\right)=2.6388
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la decisión será:
Comenzar tomando una muestra de tamaño uno, ya que $E(U_{(1)})=2.308152$, continuamos de manera óptima de la siguiente forma; si $X_1=0$, se para, y si $X_1\geq 1$, se toma una observación más, como

$$U_{(1,1)}=\text{mín}\{Z_{(1,1)},E(U_{(1,1,1)}/X_1,X_2)\}$$

$$Z_{(1,1)}=\frac{1}{2}(S_2+1)+2c_0+2c_1$$

$$E(Z_{(1,1,1)}/X_1,X_2)=\frac{4}{9}(S_2+1)+3c_0+3c_1$$

por lo tanto,

$$
U_{(1,1)}=\begin{cases}\frac{1}{2}(S_2+1)+2c_0+2c_1 & \text{si } S_2+1<18(c_0+c_1) \text{ en cuyo caso paramos}\\ \frac{4}{9}(S_2+1)+3c_0+3c_1 & \text{si } S_2+1>18(c_0+c_1) \text{ en cuyo caso se toma } X_3\end{cases}
$$

Capítulo 4

Procedimientos Secuencialmente Planificados Invariantes

El criterio de invariancia tiene una justificación de tipo intuitivo: en aquellos problemas simétricos o invariantes bajo un grupo de transformaciones, parece lógico limitarse a la consideración de reglas igualmente simétricas o invariantes bajo las mismas transformaciones.

A continuación, definimos los Problemas de Decisión Secuencialmente Planificados Invariantes; para un grupo de transformaciones $\mathcal{F}$, se define la invariancia en distribución, la invariancia de la función de pérdida y de la función de costes, lo que nos permite llegar a definir los procedimientos de decisión secuencialmente planificados invariantes (β, φ).

Se demostrarán algunas propiedades básicas de los mismos, como por ejemplo que cualquier procedimiento de decisión secuencialmente planificado invariante (β, φ) tiene función de riesgo constante sobre las órbitas de $\mathcal{F}$. Y se introducen los conceptos de estadístico maximal invariante y la transitividad del grupo $\mathcal{F}$.

En la siguiente sección el objetivo es encontrar el procedimiento de decisión secuencialmente planificado invariante óptimo, con el objetivo de minimizar la función de riesgo asociada al problema de decisión. El problema que presenta este estudio radica en que la familia de sub-σ-álgebras de $\{\mathcal{B}_a\}_{a\in A}$ invariantes $\{\mathcal{G}_a\}_{a\in A}$, no es isotónica, por lo que partiendo de los conceptos definidos en el capítulo anterior: planes de muestreo respecto de una familia de sub-σ-álgebras no isotónicas (3.1.3), y transitividad de una familia de sub-σ- álgebras respecto de otra (3.1.2), permiten resolver el problema.

Así, en la sección siguiente se soluciona el problema del plan de muestreo óptimo invariante para el caso finito. Para resolver el problema en el caso general, es necesaria una etapa previa, que consiste en encontrar el óptimo en el caso de horizonte infinito y número máximo de etapas m.

Y finalmente, se trata de aproximar la solución del problema general, a través de los problemas trucados en m etapas; se prueba que bajo determinadas condiciones acerca de la función de pérdida L, se tiene un resultado en este sentido, obteniéndose dos aproximaciones una por arriba y otra por abajo del problema general mediante los problemas truncados.

4.1 Introducción

Sea $\mathcal{F}$ un grupo de transformaciones medibles (que deben de ser biyectivas), de $\mathcal{X}$ en sí mismo, tal que $f \in \mathcal{F}$, $f = (f_a)_{a \in A}$ siendo f_a $\mathcal{B}_a$- medibles, $\forall a \in A$.

Definición 4.1.1 *Diremos que un problema de decisión secuencialmente planificado, es invariante bajo el grupo $\mathcal{F}$ de transformaciones, si cumple:*

1. (Invariancia de distribuciones)*: $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall \theta \in \Theta$, existe un único $\theta' \in \Theta$, tal que $\forall a \in A$ la distribución de $f_a(X_a)$ dado θ, es idéntica a la distribución de X_a dado θ'. θ' está determinado por f y θ, denotaremos por $\overline{f}(\theta) = \theta'$. Entonces,*

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f} : f \in \mathcal{F}\}$$

es un grupo de transformaciones medibles sobre Θ. Para simplificar la notación suprimiremos los paréntesis y escribiremos $f_a X_a$, o $\overline{f}\theta$.

2. (Invariancia de la función de pérdida)*: para todo $\theta \in \Theta$, $x \in \mathcal{X}$, $a \in A$ y $d \in D$, existe un único $d' \in D$, tal que $\forall x \in \mathcal{X}$ y $\forall a \in A$*

$$L_a(\overline{f}\theta, d', f_a x) = L_a(\theta, d, x)$$

Definiéndose $d' = \tilde{f}d$, así,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}\}$$

es un grupo de transformaciones medibles sobre D.

3. (Invariancia de la función de costes)*: $\forall a \in A$, $\forall \theta \in \Theta$, $\forall x \in \mathcal{X}$*

$$c(\overline{f}\theta, a, f_a x) = c(\theta, a, x)$$

Observación 36

La existencia de un único d' no es una condición restrictiva, puesto que si existiera d'', tal que

$$L_a(\overline{f}\theta, d', f_a x) = L_a(\overline{f}\theta, d'', f_a x) \quad \forall\theta \in \Theta, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

entonces

$$L_a(\theta, d', x) = L_a(\theta, d'', x), \quad \forall\theta \in \Theta, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

por lo que bastaría eliminar d'' del espacio de acciones D.

Recordemos que dado un espacio $\mathcal{Y}$ y un grupo de transformaciones $\mathcal{H}$ sobre él dos puntos y_1 e y_2 pertenecen a la misma órbita si $\exists h \in \mathcal{H}$, tal que $y_2 = h(y_1)$.

La siguiente definición nos proporciona los Procedimientos de Decisión Secuencialmente Planificados Invariantes.

Definición 4.1.2 *Un procedimiento de decisión secuencialmente planificado (β, φ) es invariante, si:*

1. $\tilde{f}\varphi_a(x) = \varphi_a(f_a x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall a \in A$, $\forall f \in \mathcal{F}$. *Representando $\varphi_a(x)$, la regla de decisión terminal; siendo $\tilde{f}\varphi_a(x)$ la distribución de $\tilde{f}Z$, y Z una v.a. con distribución $\varphi_a(x)$, $x \in \mathcal{X}$, $a \in A$.*

2. $\beta_a(x_a, k) = \beta_a(f_a x_a, k)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall k \in M_0$, $a \in A$, *y* $\forall f \in \mathcal{F}$. $\beta_a(x_a, k)$ *es la probabilidad de elegir un tamaño muestral k, para la submuestra siguiente condicionada a la historia pasada.*

Observación 37

Entonces $b_a^\beta(fx, k) = b_a^\beta(x, k)$, $\forall a \in A$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall k \in M_0$, $\forall f \in \mathcal{F}$, representando $b_a^\beta(x, k)$ la probabilidad de una sucesión de tamaños muestrales (a, k) condicionado a x.
En lo sucesivo y de manera general, denotaremos $b_a^\beta(x, k) = b_a(x, k)$ con el fin de abreviar la notación.
Sea τ un plan de muestreo no aleatorizado, entonces es $b_a(\cdot, 0) = I_{\{\tau=a\}}(\cdot)$, $\forall a \in A$.

Teorema 4.1.1 *La función de riesgo de un Procedimiento de Decisión Secuencialmente Planificado Invariante (β, φ) es constante sobre las órbitas de $\overline{\mathcal{F}}$, es decir,*

$$R(\overline{f}\theta, (\beta, \varphi)) = R(\theta, (\beta, \varphi)), \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}, \quad \forall\theta \in \Theta$$

Demostración:

$$R(\theta, (\beta, \varphi)) = \sum_{a \in A} E_{\theta,\beta}(b_a(X, 0)(L_a(\theta, \varphi_a(X), X) + c(\theta, a, X)))$$

$$
\begin{aligned}
&=_{(1)} && \sum_{a\in A} E_{\theta,\beta}(b_a(fX,0)(L_a(\overline{f}\theta,\tilde{f}\varphi_a(X),fX))+c(\overline{f}\theta,a,fX))) \\
&=_{(2)} && \sum_{a\in A} E_{\theta,\beta}(b_a(fX,0)(L_a(\overline{f}\theta,\varphi_a(fX),fX)+c(\overline{f}\theta,a,fX))) \\
&=_{(3)} && \sum_{a\in A} E_{\overline{f}\theta,\beta}(b_a(X,0)(L_a(\overline{f}\theta,\varphi_a(X),X)+c(\overline{f}\theta,a,X))) \\
&= && R(\overline{f}\theta,(\beta,\varphi))
\end{aligned}
$$

(1), por la invariancia de la función de pérdida, y de la función de costes.
(2), invariancia de φ_a.
(3), la distribución de fX bajo θ, es idéntica a la distribución de X bajo $\overline{f}\theta$. □

Definición 4.1.3 *Diremos que un grupo $\overline{\mathcal{F}}$ de transformaciones en Θ es transitivo, si para cada par θ_1, $\theta_2 \in \Theta$, existe $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$, tal que $\overline{f}\theta_1 = \theta_2$.*

Observación 38

La definición anterior nos lleva, a que todos los Procedimientos de Decisión Secuencialmente Planificados Invariantes (β,φ) tienen riesgo constante, cuando $\overline{\mathcal{F}}$ es transitivo en Θ.
En efecto, sean $\theta_1,\theta_2 \in \Theta$, existe $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $\theta_2 = \overline{f}\theta_1$. Entonces

$$R(\theta_2,(\beta,\varphi)) = R(\overline{f}\theta_1,(\beta,\varphi)) = R(\theta_1,(\beta,\varphi))$$

□

Definición 4.1.4 *Diremos que un conjunto B es invariante, si es unión de órbitas, es decir, si se cumple $x \in B \Longrightarrow fx \in B$, $\forall f \in \mathcal{F}$.*
Y representamos por $\mathcal{B}_I$ a la σ-álgebra de los conjuntos invariantes, donde

$$\mathcal{B}_I = \{B \in \mathcal{B} : f(B) = B\}$$

Análogamente definimos

$$\mathcal{B}_a^I = \{B \in \mathcal{B}_a : f_a(B) = B\}, \quad \forall a \in A$$

Definición 4.1.5 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio y $\mathcal{F}$ un grupo de transformaciones en $\mathcal{X}$. Una función $T(x)$ sobre $\mathcal{X}$ se dice que es maximal invariante con respecto a $\mathcal{F}$, si*

1. *$T(f(x)) = T(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall f \in \mathcal{F}$.*
2. *$T(x_1) = T(x_2)$, implica que $x_1 = fx_2$ para alguna función $f \in \mathcal{F}$.*

Observación 39

Un estadístico maximal invariante, es aquél que es constante sobre las órbitas de $\mathcal{X}$, y toma una valor distinto sobre cada una de ellas.
La mínima σ-álgebra que hace al estadístico maximal invariante medible, coincide con la σ-álgebra $\mathcal{B}_I$ de los conjuntos invariantes.

Observación 40

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio medible, $\mathcal{F}$ un grupo de transformaciones medibles en $\mathcal{X}$, $T(x)$ una función maximal invariante con respecto a $\mathcal{F}$.
Una función $\phi(x)$ es invariante respecto de $\mathcal{F} \Longleftrightarrow \phi$ es función de $T(x)$.

Observación 41

Dado un Procedimiento de Decisión Secuencialmente Planificado (β, φ) de forma que las funciones β_a, $\forall a \in A$, son funciones invariantes bajo el grupo $\mathcal{F}_a$ de transformaciones medibles, entonces por la observación anterior son funciones del maximal invariante $Y_a(X_a)$ de $\mathcal{F}_a$, $\forall a \in A$.
Escribiremos para enfatizar esta dependencia, $\beta_a(Y_a, k)$ y $b_a(Y_a, k)$, $\forall a \in A$, $\forall k \in M$.

Observación 42

La distribución de una función invariante depende del parámetro a través del maximal invariante paramétrico; con lo que si $\overline{\mathcal{F}}$ es transitivo, las distribuciones de $\beta_a(Y_a, k)$ y $b_a(Y_a, k)$ serán independientes de θ.

Teorema 4.1.2 *Sea $\overline{\mathcal{F}}$ un grupo transitivo sobre Θ, e Y_a una función maximal invariante bajo $\mathcal{F}_a$. Supongamos que (β, φ^0) es un Procedimiento de Decisión Secuencialmente Planificado, tal que $\forall a \in A$, φ_a^0 es una regla de decisión terminal invariante que minimiza para $\theta_0 \in \Theta$,*

$$E_{\theta_0}(L_a(\theta_0, \varphi_a(X), X)/Y_a)$$

sobre el conjunto de todas las reglas invariantes de decisión. Entonces, $\forall \theta \in \Theta$,

$$R(\theta, (\beta, \varphi^0)) \leq R(\theta, (\beta, \varphi))$$

en el conjunto de todos los procedimientos de decisión invariantes (β, φ) con β fijo.

Demostración:

Sea $\theta_0 \in \Theta$ fijo,

$$\begin{aligned}
R(\theta, (\beta, \varphi)) &= R(\theta_0, (\beta, \varphi)) = \sum_{a \in A} E_{\theta_0}(b_a(Y_a, 0)(L_a(\theta_0, \varphi_a(X), X)) + c(\theta_0, a, X)) \\
&= \sum_{a \in A} E(b_a(Y_a, 0) E_{\theta_0}((L_a(\theta_0, \varphi_a(X), X)) + c(\theta_0, a, X))/Y_a)) \\
&\geq \sum_{a \in A} E(b_a(Y_a, 0) E_{\theta_0}((L_a(\theta_0, \varphi_a^0(X), X)) + c(\theta_0, a, X))/Y_a)) \\
&= R(\theta_0, (\beta, \varphi^0)) = R(\theta, (\beta, \varphi^0))
\end{aligned}$$

al ser φ^0 invariante. $\square$

4.2 Procedimiento de Decisión Secuencialmente Planificado Óptimo

Nuestro objetivo consiste en minimizar $R(\theta, (\tau, \varphi))$, función de riesgo asociada al problema de decisión. Si el grupo $\overline{\mathcal{F}}$ es transitivo, el espacio Θ tiene una única órbita, y el problema planteado se reduce a encontrar (τ, φ), que minimice para $\theta_0 \in \Theta$, $R(\theta_0, (\tau, \varphi))$.

$$R(\theta_0, (\tau, \varphi)) = \sum_{a \in A} E[b_a(Y_a, 0) E_{\theta_0}(L_a(\theta_0, \varphi_a(X), X) + c(\theta_0, a, X))/Y_a)]$$

Sea $\varphi^0 = (\varphi_a^0)_{a \in A}$, con φ_a^0, $\forall a \in A$, regla de decisión terminal invariante que minimiza la siguiente expresión,

$$E_{\theta_0}(L_a(\theta_0, \varphi_a(X_a), X_a)/Y_a), \quad \theta_0 \in \Theta$$

El riesgo se minimizará encontrando el plan de muestreo óptimo τ^* para la sucesión

$$-E_{\theta_0}[(L_a(\theta_0, \varphi_a^0(X_a), X_a) - c(\theta_0, a, X))/Y_a]$$

Denotando por $L_a(Y_a) = E_{\theta_0}[(L_a(\theta_0, \varphi_a^0(X_a), X_a)/Y_a]$ y por $c_a(Y_a) = E_{\theta_0}[c(\theta_0, a, X)/Y_a]$, que claramente es $\forall a \in A$, una función del estadístico maximal invariante Y_a, por lo que escribimos $L_a(Y_a)$ y $c_a(Y_a)$ para enfatizar la dependencia del maximal invariante. Escribimos entonces

$$E_{\theta_0}[(L_a(\theta_0, \varphi_a^0(X_a), X_a) + c(\theta_0, a, X))/Y_a] = L_a(Y_a) + c_a(Y_a)$$

O equivalentemente, el riesgo será mínimo para el plan de muestreo óptimo de la sucesión,

$$Z_a(Y_a) = -L_a(Y_a) - c(Y_a), \quad \forall a \in A$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que la función de pérdida y la función de costes son funciones no negativas. Así,

$$Z_a(Y_a) \leq 0, \quad \forall a \in A$$

4.2.1 Formalización del Problema

Definición 4.2.1 *Un Problema de Muestreo Óptimo Invariante, es una upla*

$$((\mathcal{X}, \mathcal{B}, P), \mathcal{A}, (\mathcal{B}_a)_{a \in A}, (Y_a)_{a \in A}, (Z_a(Y_a))_{a \in \mathcal{A}}, (\sigma(Y_a))_{a \in A})$$

donde

- $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ *es un espacio de probabilidad.*
- $\mathcal{A} \subset A$ *es el conjunto de secuencias muestrales admisibles finitas.*

- $(\mathcal{B}_a)_{a \in A}$ *familia isotónica de sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$.*
- $\forall a \in A$, *Y_a estadístico maximal invariante bajo $\mathcal{F}_a$, tal que* $Y_a : (\mathcal{X}, \mathcal{B}_a) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$.
- $(\sigma(Y_a))_{a \in A}$ *familia sub-σ-álgebras de $\mathcal{B}$.*
- $\forall a \in \mathcal{A}$, *$Z_a(Y_a)$ es una variable aleatoria que depende del maximal invariante, y por lo tanto invariante, $\sigma(Y_a)/\mathbb{B}$- medible.*

Observación 43

1. Definimos $\forall a \in (A \cup A^*) - \mathcal{A}$, $Z_a = -\infty$. Siendo Z_a la ganancia asociada a la secuencia muestral $a \in \mathcal{A}$.
2. $Y_\tau = \sum\limits_{a \in A} Y_a I_{\{\tau = a\}}$.
3. Para cada plan secuencial de muestreo τ es
$$Z_\tau(Y_\tau) = \begin{cases} Z_a(Y_a) & \{\tau = a\}, a \in \mathcal{A} \\ -\infty & \text{resto} \end{cases}$$
4. Obviamente $\sigma(Y_a) \subset \mathcal{B}_a$ $\forall a \in A$, pero $(\sigma(Y_a))_{a \in A}$ no tiene porqué ser una familia isotónica de sub-σ-álgebras. Denotamos por $\mathcal{G}_a = \sigma(Y_a)$, $\forall a \in A$.
5. Denotaremos por $\{\mathcal{G}_a^*\}_{a \in A}$ a la familia de sub-σ- álgebras isotónica de $\{\mathcal{B}_a\}$ tales que, $\mathcal{G}_a^* = \sigma(Y_{a^1}, \cdots, Y_{a^n})$, para $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A$. Es claro que $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{G}_a^*$, $\forall a \in A$.

Definición 4.2.2 *Consideremos una Problema de Muestreo Óptimo Invariante Transitivo*

$$((\mathcal{X}, \mathcal{B}, P), \mathcal{A}, (\mathcal{B}_a)_{a \in A}, (Y_a)_{a \in A}, (Z_a(Y_a))_{a \in \mathcal{A}}, (\mathcal{G}_a)_{a \in A})$$

1. *Sea $\widehat{T} = \{\tau : \tau$ plan secuencial de muestreo tal que $\exists E Z_\tau\}$ el conjunto de todos los planes secuenciales de muestreo admisibles.*
2. *Sea $v = \sup_{\tau \in \widehat{T}} E Z_\tau$ el valor del problema.*
3. *Diremos que un plan secuencial de muestreo admisible τ^* es óptimo, si $v = E Z_{\tau^*}$.*

Definimos los siguientes conjuntos por su utilidad en el desarrollo posterior:

$$T = \{\tau \in \widehat{T} : E Z_\tau > -\infty\}$$

$$T_a = \{\tau \in T : \tau \succeq a\}, a \in A$$

$$T_a^{'} = \{\tau \in T_a : \tau \text{ es plan de muestreo respecto a } \{\mathcal{G}_a^*\}\}, a \in A$$

$$T_a^* = \{\tau \in T_a : \tau \text{ es plan de muestreo respecto a } \{\mathcal{G}_a\}\}, a \in A$$

$$\tilde{T}_a = \{\tau \in T_a^* : \tau \text{ es invariante}\}, a \in A$$

Buscamos el plan de muestreo invariante $\tau^* \in \tilde{T}_a$ que maximice la ganancia esperada, nos restringiremos a planes de muestreo secuenciales $\tau \in T$ admisibles, es decir, que cumplan:

$$P(\tau \in \mathcal{A}) = 1$$

4.2.2 Plan Secuencial de Muestreo Invariante Óptimo en el caso Finito

En la presente sección se da una solución al problema planteado cuando el conjunto $\mathcal{A}$ de secuencias muestrales admisibles cumple $\mathcal{A} \subset \{a \in A : g(a) \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Siendo por tanto $\mathcal{A}$ un conjunto finito.

De acuerdo a la idea básica de la programación dinámica, construiremos un plan de muestreo invariante óptimo a través del principio de inducción hacia atrás. Sea

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{a} \in A : \exists a \in \mathcal{A}, \tilde{a} \preceq a\}$$

el mínimo sub-árbol de A que contiene a $\mathcal{A}$; obviamente $\mathcal{A}$ es finito.

Definimos $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$

$$\tilde{M}_a = \{j \in M : aj \in \tilde{\mathcal{A}}\}$$

y para $a = (a_1, ..., a_k) \in A$, $1 \leq i \leq k$

$$a^i = (a_1, ..., a_i)$$

las i primeras submuestras.

En nuestro caso $\tilde{M}_a = \emptyset$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, tal que $g(a) \geq m$.

$Z_a(Y_a)$ es una función medible, $\forall a \in \mathcal{A}$, como $Z_a^- < +\infty$, y $Z_a \leq 0$, entonces Z_a es una función integrable $\forall a \in \mathcal{A}$.

Teorema 4.2.1 *Consideremos un Problema de Muestreo Óptimo Invariante Transitivo, con $\mathcal{A}$ finito, y tal que $\{\mathcal{G}_a\}$ es una familia de sub-σ-álgebras transitiva respecto a $\{\mathcal{G}_a^*\}$.*

Definimos para $a = (a_1, ..., a_k) \in \tilde{\mathcal{A}}$

$$U_a(Y_a) = \begin{cases} Z_a(Y_a) & si\ \tilde{M}_a = \emptyset \\ \max\{Z_a(Y_a), \max_{j \in \tilde{M}_a} E(U_{aj}(Y_{aj})/Y_a)\} & si\ \tilde{M}_a \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\widehat{B}(aj) = \{x : j = \min\{l \in \tilde{M}_a : E(U_{al}(Y_{al})/Y_a) = \max_{i \in \tilde{M}_a} E(U_{ai}(Y_{ai})/Y_a)\}\}$$

para $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $j \in \tilde{M}_a$.

Y

$$\tau_a^*(x) = \begin{cases} a & si\ U_a(Y_a) = Z_a(Y_a) \\ b = (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_j) & si\ para\ b^i \quad U_{b^i}(Y_{b^i}) > Z_{b^i}(Y_{b^i}), x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \\ & k \leq i < k + j, U_b(Y_b) = Z_b(Y_b) \end{cases}$$

Entonces $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, se tiene:

1. *$\tau_a^*(x)$ es un plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$ invariante, es decir, $\tau_a^* \in \tilde{T}_a$, $a \in \tilde{\mathcal{A}}$.*

2. *$E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a^*) = U_a(Y_a)$ P-c.s.*

3. *$U_a(Y_a) \geq E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*)$ P-c.s., para cualquier τ plan de muestreo secuencial con $\tau \in T_a^{'}$.*

4. *$EZ_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*}) = \sup_{\tau \in T_a^{'}} EZ_\tau(Y_\tau)$, en particular $\nu = EZ_{\tau_{()}^*}(Y_{\tau_{()}^*})$.*

Demostración:
Se omite la demostración de este teorema, por ser una particularización de la del teorema de muestreo óptimo con horizonte infinito y número máximo de etapas m (4.3.1), que se plantea en la sección siguiente. $\square$

Corolario 4.2.2 *Bajo la hipótesis de transitividad nos podemos limitar a considerar planes de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$ invariantes.*

Demostración:
Como $\tilde{T}_a \subset T_a^{'}$, entonces

$$\sup_{\tilde{T}_a} E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*) \leq \sup_{T_a^{'}} E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*) \leq U_a(Y_a) = E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a^*)$$

como $\tau_a^* \in \tilde{T}_a$, se tiene

$$\sup_{\tilde{T}_a} E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*) = \sup_{T_a^{'}} E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*)$$

$\square$

4.3 Plan Secuencial de Muestreo Invariante Óptimo con horizonte infinito y Número máximo de etapas m

Consideremos el problema del plan secuencial de muestreo invariante óptimo cuando el conjunto $\mathcal{A}$ de secuencias muestrales admisibles es tal que

$$\mathcal{A} \subset \{a \in A : h(a) \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{a} \in A : \exists a \in \mathcal{A}, \quad \tilde{a} \preceq a\}$$

Y que $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$ con $h(a) \geq m$ es $\tilde{M}_a = \emptyset$.
$Z_a(Y_a)$ es una función $\mathcal{G}_a$-medible, $\forall a \in A$, como $Z_a^- < +\infty$, y $Z_a \leq 0$ $\forall a \in \mathcal{A}$, entonces Z_a es una función integrable $\forall a \in \mathcal{A}$.

Teorema 4.3.1 *Consideremos un Problema de Muestreo Óptimo Invariante Transitivo con* $\mathcal{A} \subset \{a \in A : h(a) \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}$, *satisfaciendo* $\tilde{M}_a = \emptyset$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, *tales que* $h(a) = m$, *y de manera que* $\{\mathcal{G}_a\}$ *es una familia de sub-*σ*-álgebras transitiva respecto a* $\{\mathcal{G}_a^*\}$..

$$U_a(Y_a) = \begin{cases} Z_a(Y_a) & si\ \tilde{M}_a = \emptyset \\ \text{máx}\{Z_a(Y_a), \sup_{j \in \tilde{M}_a} E(U_{aj}(Y_{aj})/Y_a)\} & si\ \tilde{M}_a \neq \emptyset \end{cases}$$

Sea

$$\widehat{B}(aj) = \{x \in \mathcal{X} : j = \text{mín}\{l \in \tilde{M}_a : E(U_{al}(Y_{al})/Y_a) = \sup_{i \in \tilde{M}_a} E(U_{ai}(Y_{ai})/Y_a)\}\}$$

para $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $j \in \tilde{M}_a$.
Sea

$$B(a, \infty) = \{x \in \mathcal{X} : E(U_{ak}(Y_{ak})/Y_a) < \sup_{j \in \tilde{M}_a} E(U_{aj}(Y_{aj})/Y_a), \quad \forall k \in \tilde{M}_a\} \cap \{U_a > Z_a\}$$

para $\tilde{M}_a \neq \emptyset$, $j \in \tilde{M}_a$.
Y para $\theta_0 \in \Theta$ *y* $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, *supongamos que*

$$P_{\theta_0}(B(a, \infty)) = 0$$

Definimos para cada $a = (a_1, \cdots, a_k) \in \tilde{\mathcal{A}}$

$$\tau_a^*(x) = \begin{cases} a & si\ U_a(Y_a) = Z_a(Y_a) \\ b = (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_j) & si\ para\ b^i \quad U_{b^i}(Y_{b^i}) > Z_{b^i}(Y_{b^i}), x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \\ & k \leq i < k + j, U_b(Y_b) = Z_b(Y_b), \quad k + j \leq m \\ b = (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_j) & si\ para\ b^i \quad U_{b^i}(Y_{b^i}) > Z_{b^i}(Y_{b^i}), x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \\ & k \leq i < k + j, x \in B(b\infty), \quad k + j \leq m \end{cases}$$

Entonces $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, *se tiene:*

1. $P_\theta(B(a, \infty)) = 0$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\forall \theta \in \Theta$.

2. $\tau_a^*(x)$ *es un plan de muestreo respecto a* $\{\mathcal{G}_a\}$ *invariante, es decir,* $\tau_a^* \in \tilde{T}_a$, $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, *tal que* $h(\tau_a^*) \leq m$.

3. $E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a^*) = U_a(Y_a)$ *P-c.s.*

4. $U_a(Y_a) \geq E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*)$ *P-c.s., para cualquier* τ *plan de muestreo secuencial con* $\tau \in T_a^{'}$.

5. $EZ_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*}) = \sup_{\tau \in T_a^{'}} EZ_\tau(Y_\tau)$, *en particular* $v = EZ_{\tau_{()}^*}(Y_{\tau_{()}^*})$.

Demostración:

1. $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $P_\theta(B(a,\infty)) = 0$, $\forall \theta \in \Theta$, debido a que el grupo $\overline{\mathcal{F}}$ es un grupo transitivo y $B(a,\infty)$ es un conjunto invariante por pertenecer a $\sigma(Y_a)$.
   En efecto
   $$P_\theta(B(a,\infty)) = P_{\overline{f}\theta_0}(B(a,\infty)) = P_{\theta_0}(f^{-1}B(a,\infty)) = P_{\theta_0}(B(a,\infty))$$

2. τ_a^* es un plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$ invariante, tal que $h(\tau_a^*) \leq m$. En efecto, sea $a = (a_1, \cdots, a_k), \quad b = (b_1, \cdots, b_j) \in \tilde{\mathcal{A}}$,
   $$\{\tau_a^* \succeq b\} = \{x \in \mathcal{X} : x \in \widehat{B}(b^{i+1}), k \leq i < k+j, \quad k+j \leq m\}$$
   $$\{\tau_a^* \succeq b\} = \emptyset, \quad h(b) > m$$
   Como $\widehat{B}(aj) \in \mathcal{G}_a$, entonces
   $$\widehat{B}(b^{i+1}) \in \mathcal{G}_{b^i} \subset \mathcal{G}_{b^i}^* \subset \mathcal{G}_b^*$$
   entonces
   $$\{\tau_a^* \succeq b\} \in \mathcal{G}_b^*$$
   Por otra parte, si $h(b) \leq m$
   $$\{\tau_a^* = b\} = \{\tau_a^* \succeq b\} \cap D_1$$
   siendo
   $$D_1 = \{x \in \mathcal{X} : U_b(x) = Z_b(x)\} \cup \{B(b,\infty)\} \in \mathcal{G}_b$$
   puesto que $\{U_b = Z_b\} \in \mathcal{G}_b$, $B(b,\infty) \in \mathcal{G}_b$. Si $h(b) \leq m$,
   $$\{\tau_a^* \succeq bk\} = \{\tau_a^* \succeq b\} \cap D_1^c \cap \{\widehat{B}(bk)\} \in \widehat{\mathcal{G}}_b$$
   puesto que $D_1^c \cap \{\widehat{B}(bk)\} \in \mathcal{G}_b$.
   τ_a^* es función de los maximales invariantes y por tanto invariante.
   Bajo la hipótesis $P_\theta(B(a,\infty)) = 0$, $\forall \theta \in \Theta$ implica que para cualquier función f cuya integral exista se tiene
   $$\int_{\{\tau_a^* = a\}} f dP_\theta = \int_{U_a = Z_a} f dP_\theta, \quad \forall \theta \in \Theta$$

3. y 4. Se demuestran por inducción hacia atrás respecto al número de etapas. Si $h(a) = m$, es $\tilde{M}_a = \emptyset$, entonces $\tau_a^* = a$ y
   $$Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*}) = Z_a(Y_a)$$

luego $Z_{\tau_a^*} = Z_a(Y_a)$ es una función integrable, $\mathcal{G}_a$-medible y por lo tanto $\mathcal{G}_a^*$-medible, y se verifica el punto 3, puesto que,

$$E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a^*) = E(Z_a(Y_a)/\mathcal{G}_a^*) = Z_a(Y_a) = U_a(Y_a)$$

Y $\forall \tau \in T_a^{'}$ ha de ser $\tau = a$, es $Z_\tau(Y_\tau) = Z_a(Y_a) = U_a(Y_a)$, así Z_τ es una función integrable, $\mathcal{G}_a$- medible y por lo tanto $\mathcal{G}_a^*$-medible y se verifica el punto 4, es decir

$$E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*) = Z_a(Y_a) = U_a(Y_a)$$

Supongamos que 3 y 4 se cumplen para todo $a \in \tilde{\mathcal{A}}_j = \{a \in \tilde{\mathcal{A}} : h(a) = j\}$ con $i \leq j \leq m$, $i = 1, \cdots, m$. Veamos que se verifica para todo $a \in \tilde{\mathcal{A}}_{i-1}$.
Sea para cada $k \in \tilde{M}_a$

$$\widehat{\tau}_k = \begin{cases} \tau & \{\tau \succeq ak\} \\ ak & \text{otro caso} \end{cases}$$

que define un plan de muestreo en $T_{ak}^{'}$.
Sea $C \in \mathcal{G}_a^*$

$$\begin{aligned}
\int_C Z_\tau(Y_\tau)dP &= \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_\tau(Y_\tau)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} Z_\tau(Y_\tau)dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} Z_\tau(Y_\tau)dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} Z_{\widehat{\tau}_k}dP \\
&=_{(1)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{G}_a^*)dP \\
&=_{(2)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E[E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{G}_{ak}^*)/\mathcal{G}_a^*) \\
&\leq_{(3)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E(U_{ak}(Y_{ak})/\mathcal{G}_a^*)dP \\
&=_{(4)} \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} E(U_{ak}(Y_{ak})/\mathcal{G}_a)dP \\
&\leq \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a} \int_{C\cap\{\tau\succeq ak\}} \max_{j\in\tilde{M}_a} E(U_{aj}(Y_{aj})/\mathcal{G}_a)dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau=a\}} Z_a(Y_a)dP + \int_{C\cap\{\tau\succ a\}} \max_{j\in\tilde{M}_a} E(U_{aj}(Y_{aj})/\mathcal{G}_a)dP \\
&\leq \int_C U_a(Y_a)dP
\end{aligned}$$

(1), $C \cap \{\tau \succeq ak\} \in \mathcal{G}_a^*$.
(2), $\mathcal{G}_a^* \subset \mathcal{G}_{ak}^*$.
(3), por hipótesis de inducción, $U_{ak}(Y_{ak}) \geq E(Z_{\widehat{\tau}_k}/\mathcal{G}_{ak}^*)$, ya que $ak \in \tilde{\mathcal{A}}_i$, $\widehat{\tau}_k \succeq ak$.

(4), por la transitividad de $\{\mathcal{G}_a\}$, respecto de $\{\mathcal{G}_a^*\}$.
Entonces $\forall C \in \mathcal{G}_a^*$, y $\tau \in T_a'$ plan secuencial de muestreo

$$\int_C Z_\tau(Y_\tau)dP \leq \int_C U_a(Y_a)dP$$

y

$$\int_C E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*)dP \leq \int_C U_a(Y_a)dP$$

Luego

$$U_a(Y_a) \geq E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*) \text{ c.s.}$$

$\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_{i-1}, \quad \forall \tau \in T_a'$ plan secuencial de muestreo. Por lo tanto por inducción hacia atrás, queda probado el resultado 4, $\forall a \in \mathcal{A}$.
La demostración subsiste si en vez de considerar $C \in \mathcal{G}_a^*$ se considera $C \in \mathcal{G}_a$, al ser $U_a(Y_a)$, $\mathcal{G}_a$-medible, y se tiene en este caso

$$U_a(Y_a) \geq E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a) \text{ c.s.}$$

Demostramos a continuación 3,
Sea $a \in \tilde{\mathcal{A}}_{i-1}$, consideremos τ_a^*. Sea $C \in \mathcal{G}_a^*$

$$\begin{aligned}
\int_C Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})dP &= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a}\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})dP \\
&=_{(1)} \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} Z_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a}\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_{ak}^*}(Y_{\tau_{ak}^*})dP \\
&=_{(2)} \int_{C\cap\{U_a=Z_a\}} U_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a}\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(Z_{\tau_{ak}^*}(Y_{\tau_{ak}^*})/\mathcal{G}_a^*)dP \\
&= \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} U_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a}\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(E(Z_{\tau_{ak}^*}(Y_{\tau_{ak}^*})/\mathcal{G}_{ak}^*)/\mathcal{G}_a^*)dP \\
&=_{(3)} \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} U_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a}\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(U_{ak}/\mathcal{G}_a^*)dP \\
&=_{(4)} \int_{C\cap\{\tau_a^*=a\}} U_a(Y_a)dP + \sum_{k\in\tilde{M}_a}\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} E(U_{ak}/\mathcal{G}_a)dP \\
&=_{(5)} \int_C U_a(Y_a)dP
\end{aligned}$$

(1), $I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}}Z_{\tau_a^*} = I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}}Z_{\tau_{ak}^*}$, en efecto: si $x \in \{\tau_a^* \succeq ak\}$, entonces

$$\tau_a^*(x) = \begin{cases} ak & U_{ak}(x) = Z_{ak}(x) \\ (ak, b_1, \cdots, b_j) & x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \quad h(ak) \leq i < h(ak) + j \end{cases}$$

Es decir,

$$I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}}\tau_a^* = I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}}\tau_{ak}^*$$

entonces,

$$\begin{aligned} I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*}) &= I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}}(I_{\{\tau_a^*=ak\}} Z_{ak}(Y_{ak}) + \sum_{\substack{b\succeq ak \\ h(b)\leq m}} I_{\{\tau_a^*=b\}} Z_b(Y_b)) \\ &= I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}}(I_{\{\tau_{ak}^*=ak\}} Z_{ak}(Y_{ak}) + \sum_{\substack{b\succeq ak \\ h(b)\leq m}} I_{\{\tau_{ak}^*=b\}} Z_b(Y_b)) \\ &= I_{\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_{ak}^*}(Y_{\tau_{ak}^*}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})dP = \int_{C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}} Z_{\tau_{ak}^*}(Y_{\tau_{ak}^*})dP$$

(2), $C\cap\{\tau_a^*\succeq ak\}\in\mathcal{G}_a^*$.
(3), hipótesis de inducción $E(Z_{\tau_{ak}^*}(Y_{\tau_{ak}^*})/\mathcal{G}_{ak}^*) = U_{ak}$.
(4), por la transitividad de $\{\mathcal{G}_a\}$, respecto de $\{\mathcal{G}_a^*\}$.
(5), sobre el conjunto $\{\tau_a^*\succeq ak\}$ es $\max_{i\in\tilde{M}_a} E(U_{ai}/\mathcal{G}_a) = E(U_{ak}/\mathcal{G}_a)$ y por tanto $U_a(Y_a) = E(U_{ak}/\mathcal{G}_a)$.
Por tanto, $Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})$ es una variable integrable, y $\forall C\in\mathcal{G}_a^*$

$$\int_C Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})dP = \int_C U_a(Y_a)dP$$

Entonces

$$E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a^*) = U_a(Y_a) \text{ c.s.}$$

El resultado es cierto para $a\in\tilde{\mathcal{A}}^{i-1}$, entonces por inducción hacia atrás se tiene $\forall a\in\tilde{\mathcal{A}}$.
La demostración sigue siendo válida, si como en el caso anterior consideramos $C\in\mathcal{G}_a$, tendríamos:

$$E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a) = U_a(Y_a)$$

5. Tomando esperanzas en las expresiones anterior 3. y 4. se tiene

$$E[E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})/\mathcal{G}_a^*)] = E(U_a(Y_a)) \geq E[E(Z_\tau(Y_\tau)/\mathcal{G}_a^*)]$$

$\forall\tau\succeq a$, plan secuencial de muestreo en $T_a^{'}$.
Entonces,

$$E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*})) = E(U_a(Y_a)) \geq E(Z_\tau(Y_\tau))$$

$\forall\tau\in T_a^{'}$, y $\tau_a^*\in T_a$. Por lo tanto

$$\sup_{\tau\in T_a^{'}} E(Z_\tau(Y_\tau)) = E(Z_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*}))$$

Considerando como caso particular $\tau_{()}^*\in T_{()}^{'} = T^{'}$ $(\emptyset\in\tilde{\mathcal{A}})$. Se cumple para cualquier $\tau\in T^{'}$,

$$E(Z_{\tau_{()}^*}(Y_{\tau_{()}^*})) \geq E(Z_\tau(Y_\tau))$$

$$\nu = \sup_{\tau \in T'} E(Z_\tau(Y_\tau)) = E(Z_{\tau^*_{()}}(Y_{\tau^*_{()}}))$$

Por el corolario(4.2.2) se deduce que nos podemos limitar a considerar únicamente planes de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$ invariantes. □

4.4 Plan Secuencial de Muestreo Invariante Óptimo en el Caso General

4.4.1 Planteamiento del Problema

Consideremos para $a \in \mathcal{A} \subset A$ y $Z_a(Y_a)$ función $\mathcal{G}_a$-medible. De manera análoga al caso del capítulo de introducción, denotamos

$$U_a = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in T_a} E(Z_\tau / \mathcal{G}^*_a), \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

La ecuación de Bellman es

$$U_a = \max\{Z_a(Y_a), \sup_{k \in \tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{G}^*_a)\}, \quad \text{c.s.}$$

de acuerdo a la demostración de Schmitz ([25]), recogida en el capítulo 1, lema 1 (1), bajo la hipótesis $E(\sup_{b \in \mathcal{A}} Z^+_b) < +\infty$. En nuestro caso no es necesaria esta hipótesis puesto que $Z_a \leq 0$, $\forall a \in A$.

4.4.2 Plan de Muestreo Óptimo

A lo largo de toda la sección, definimos $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, y $j \in \tilde{M}_a$

$$B(a, \infty) = \{E(U_{ak}/\mathcal{G}^*_a) < \sup_{j \in \tilde{M}_a} E(U_{aj}/\mathcal{G}^*_a), \quad \forall k \in \tilde{M}_a\} \cap \{U_a > Z_a\}$$

y

$$\widehat{B}(aj) = \{j = \min\{k \in \tilde{M}_a : E(U_{ak}/\mathcal{G}^*_a) = \sup_{l \in \tilde{M}_a} E(U_{al}/\mathcal{G}^*_a)\} \cap \{U_a > Z_a\}\}$$

Se tiene $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, y $j \in \tilde{M}_a$

$$B(a, \infty), \widehat{B}(aj) \in \mathcal{G}^*_a$$

Sea $a \in \mathcal{A}$, con $a = (a_1, \cdots, a_k)$, definimos

$$\tau^*_a = \begin{cases} a & U_a(x) = Z_a(x) \\ b = (a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_j) & x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \quad k \leq i < k+j, \quad U_b(x) = Z_b(x) \\ b = (a_1, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots) & x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \quad \forall i \geq k \\ b = (a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_j, m, m, \cdots) & m = \min M, \quad x \in \widehat{B}(b^{i+1}), \quad k \leq i < k+j, \\ & x \in B(b^{k+j}, \infty) \end{cases}$$

Proposición 4.4.1 *τ_a^* definido previamente es un plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a^*\}$ invariante.*

Demostración:

Sea $a = (a_1, \cdots, a_h), b = (a_1, \cdots, a_h, b_1, \cdots, b_j) \in \tilde{\mathcal{A}}$,

$$\{\tau_a^* \succeq b\} = \cap_{i=h}^{j-1} \widehat{B}(b^{i+1}) \cup \cup_{i=r}^{j-1} \cap_{l=h}^{i-1} \widehat{B}(b^{l+1}) \cap B(b^i, \infty) \in \mathcal{G}_b^*$$

siendo $r = \text{máx}\{s : s \neq m\}$. Sea $k \in \tilde{M}_b$

$$\{\tau_a^* \succeq bk\} = \begin{cases} \{\tau_a^* \succeq b\} \cap \widehat{B}(bk) & k \neq m \\ \{\tau_a^* \succeq b\} \cap \left(\widehat{B}(bk) \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} \bigcap_{l=h}^{i-1} \widehat{B}(b^{l+1}) \cap B(b^i \infty)\right) & k = m \end{cases}$$

con $\widehat{B}(bk) \in \mathcal{G}_b^*$, y $\bigcup_{i=1}^{j-1} \bigcap_{l=h}^{i-1} \widehat{B}(b^{l+1}) \cap B(b^i, \infty) \in \mathcal{G}_b^*$.
Además τ_a^* es invariante puesto que es función de los maximales invariantes Y_a.

Teorema 4.4.1 *Si $P(\tau_a^* \in \mathcal{A}) = 1$ entonces τ_a^* es un plan de muestreo óptimo invariante.*

Demostración:

Para probar que τ_a^* es el plan de muestreo óptimo, basta ver que

$$U_a = E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*)$$

Sea $\tilde{\mathcal{A}}_n^a = \{b \in \tilde{\mathcal{A}} : b \succeq a, \quad h(b) - h(a) = n\}$ entonces,

$$\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n^a\} = \bigcup_{j=0}^{n-1} \bigcup_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_j} \{\tau_a^* = b\}$$

Veamos que

$$U_a = E(I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} I_{\{\tau_a^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{G}_a^*) \text{ c.s.}$$

Para $n = 0$

$$E(I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_0^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_0^a} I_{\{\tau_a^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{G}_a^*) = U_a \text{ c.s.}$$

Supongamos que se cumple para n,

$$\begin{aligned} E(\sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} I_{\{\tau_a^* \succeq b\}} U_b / \mathcal{G}_a^*) &= E(\sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} I_{\{\tau_a^* = b\}} Z_b + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} \sum_{j \in \tilde{M}_b} I_{\{\tau_a^* \succeq bj\} \cap \cap_{a \preceq d \preceq b} B^c(d,\infty)} E(U_{bj}/\mathcal{G}_b^*) \\ &+ \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} I_{\{\tau_a^* \succeq bm\} \cap \cup_{a \preceq d \preceq b} B(d,\infty)} / \mathcal{G}_a^*) \\ &=_{(1)} E(I_{\{\tau_a^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} \sum_{j \in \tilde{M}_b} I_{\{\tau_a^* \succeq bj\}} E(U_{bj}/\mathcal{G}_b^*) / \mathcal{G}_a^*) \\ &= E(I_{\{\tau_a^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*} / \mathcal{G}_a^*) + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} \sum_{j \in \tilde{M}_b} E(I_{\{\tau_a^* \succeq bj\}} U_{bj} / \mathcal{G}_b^*) / \mathcal{G}_a^*) \\ &= E(I_{\{\tau_a^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}^a} I_{\{\tau_a^* \succeq j\}} U_b / \mathcal{G}_a^*) \end{aligned}$$

(1), puesto que $P(\tau_a^* \in \mathcal{A}) = 1$.
Resultando

$$\begin{aligned} U_a &= E(I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*) + E(I_{\{\tau_a^* \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}^a} I_{\{\tau_a^* \succeq b\}} U_b/\mathcal{G}_a^*) \\ &= E(I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}^a} I_{\{\tau_a^* \succeq b\}} U_b/\mathcal{G}_a^*) \text{ c.s.} \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple el resultado para $n+1$. Resulta

$$\begin{aligned} U_a &= \limsup_{n\to\infty} E(I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*} + \sum_{b \in \tilde{\mathcal{A}}_n^a} I_{\{\tau_a^* \succeq b\}} U_b/\mathcal{G}_a^*) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} E(I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*) \text{ c.s.} \end{aligned}$$

ya que $U_b \leq 0, \quad \forall b \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Como $I_{\{\tau_a^* \prec \tilde{\mathcal{A}}_n^a\}} \uparrow 1$, c.s. por el Teorema de la convergencia monótona,

$$U_a \leq E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*), \text{ c.s.}$$

pero por definición de U_a es

$$U_a \geq E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*)$$

deduciéndose por tanto,

$$U_a = E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*), \text{ c.s.}$$

□

Teorema 4.4.2 *Sea $P(B(a,\infty)) = 0$ $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$ y sea X una variable aleatoria integrable, y $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una secuencia de números reales, tales que, $\lim_{k\to\infty} r_k = -\infty$ y $Z_a \leq X + r_k$, P-c.s. $\forall k \in \mathbb{N}$ and $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Entonces τ_a^* es un plan de muestreo óptimo invariante.*

Demostración:
Análoga a la dada por Schmitz ([25]), recogida en el capítulo 1, teorema (1.4.3).

Corolario 4.4.3 *Si se supone que $\tilde{M}_a$ es finito, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, y que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists r_k \in \mathbb{R}$, tal que $c(\theta_0, a, x) \geq r_k$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$, entonces τ_a^* es óptimo invariante.*
Siendo $\tilde{\mathcal{A}}_k = \{a \in \tilde{\mathcal{A}} : h(a) = k\}$.

Demostración:
Se dan las condiciones del teorema de Haggstrom (4.4.2), ya que $P(B(a,\infty)) = 0$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, por ser $\tilde{M}_a$ finito, y puesto que $-c(\theta_0, a, x) \leq -r_k$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$,

$$Z_a(Y_a) = -L_a(Y_a) - c_a(Y_a) \leq -c_a(Y_a) \leq -r_k$$

con $\lim_{k\to\infty} -r_k = -\infty$. Entonces

$$Z_a \leq -r_k, \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$$

por lo que se tiene que τ^* es un plan de muestreo óptimo. $\square$

4.5 Convergencias

Diremos que un problema de decisión secuencialmente planificado está truncado en la etapa m, si nos restringimos a planes de muestreo τ tales que $h(\tau) \leq m$, es decir, aquéllos que tienen a los sumo m etapas.
Obteniendo el riesgo óptimo para los problemas truncados, en esta sección daremos condiciones bajo las cuales, el óptimo del problema general se puede aproximar por los óptimos de los problemas truncados.

Teorema 4.5.1 *El problema de horizonte infinito general se puede aproximar por la sucesión de problemas truncados por número de etapas bajo cualquiera de las dos hipótesis siguientes:*

1. *τ^* es un plan de muestreo óptimo en el problema general y*

$$E_{\theta_0}(\sup_{a\in\mathcal{A}} L_a(Y_a)) < +\infty, \quad \theta_0 \in \Theta$$

2. *τ^* es un plan de muestreo óptimo en el problema general y*

$$E_{\theta_0}(\sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_k} L_a(Y_a)) < +\infty, \quad \theta_0 \in \Theta$$

siendo $\forall k \in \mathbb{N}\ \tilde{\mathcal{A}}_k = \{a \in \tilde{\mathcal{A}} : h(a) = k\}$.

Demostración:
Sea τ^* el plan de muestreo óptimo para el problema general, es decir,

$$\nu = \sup_{\tau\in T} E_{\theta_0} Z_\tau = E_{\theta_0} Z_{\tau^*}$$

y denotamos por

$$\nu^k = \sup_{\{\tau:h(\tau)\leq k\}} E_{\theta_0} Z_\tau$$

para el problema truncado en k etapas.
Introducimos como en el capítulo de Análisis Estocástico el plan de muestreo con a lo sumo k etapas (2.2.5),

$${}_k\tau = \begin{cases} \tau^* & h(\tau^*) \leq k \\ (\tau_1^*, \cdots, \tau_k^*) & h(\tau^*) > k \end{cases}$$

con lo que ${}_k\tau$ es un plan de muestreo tal que

$$ {}_k\tau I_{\{h(\tau^*)\leq k\}} = \tau^* I_{\{h(\tau^*)\leq k\}}, \quad \forall k \in \mathbb{N} $$

y

$$ {}_k\tau \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tau^*, \text{ c.s.} $$

Como ${}_k\tau \in \{\tau : h(\tau) \leq k\}$ será $\nu^k \geq E_{\theta_0}(Z_{{}_k\tau})$. Tendremos,

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\geq \quad \nu^k - \nu \geq E_{\theta_0}(Z_{{}_k\tau}) - E_{\theta_0}(Z_{\tau^*}) = E_{\theta_0}(-L_{{}_k\tau}(Y_{{}_k\tau}) + L_{\tau^*}(Y_{\tau^*})) \\
&+ \quad E_{\theta_0}(-c_{{}_k\tau}(Y_{{}_k\tau}) + c_{\tau^*}(Y_{\tau^*})) \\
&= \quad E_{\theta_0}((-L_{{}_k\tau}(Y_{{}_k\tau}) + L_{\tau^*}(Y_{\tau^*}))I_{\{h(\tau^*)>k\}}) + E_{\theta_0}(-c_{{}_k\tau}(Y_{{}_k\tau}) + c_{\tau^*}(Y_{\tau^*})) \\
&\geq_{(1)} \quad E_{\theta_0}(-L_{{}_k\tau}(Y_{{}_k\tau})I_{\{h(\tau^*)>k\}}) \underset{k\to\infty_{(2)}}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

(1), probaremos que $E_{\theta_0}(-c_{{}_k\tau}(Y_{{}_k\tau}) + c_{\tau^*}(Y_{\tau^*})) \geq 0$ bajo la hipótesis de que la función de coste $c(\theta_0, a, x)$ es no decreciente en a.
De acuerdo con la notación de epígrafes anteriores consideraremos las σ-álgebras $\mathcal{G}_a$ y $\mathcal{G}_a^*$. Sea

$$ c_a' = E_{\theta_0}(c(\theta_0, a, x)/\mathcal{G}_a^*) $$

con lo que por el Teorema de la proyección opcional (2.3.1), se tiene

$$ c_{\tau^*}' = E_{\theta_0}(c(\theta_0, \tau^*, x)/\mathcal{G}_{\tau^*}^*) $$

$$ c_{{}_k\tau}' = E_{\theta_0}(c(\theta_{0,k}\tau, x)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}^*) $$

Como ${}_k\tau \preceq \tau^*$ c.s., entonces $\mathcal{G}_{{}_k\tau}^* \subset \mathcal{G}_{\tau^*}^*$ y $c(\theta_{0,k}\tau, x) \leq c(\theta_0, \tau^*, x)$ c.s. y tendremos

$$
\begin{aligned}
c_{{}_k\tau}' &= E_{\theta_0}(E_{\theta_0}(c(\theta_{0,k}\tau, x)/\mathcal{G}_{\tau^*}^*)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}^*) \leq E_{\theta_0}(E_{\theta_0}(c(\theta_0, \tau^*, x)/\mathcal{G}_{\tau^*}^*)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}^*) \\
&\leq E_{\theta_0}(c_{\tau^*}'/\mathcal{G}_{{}_k\tau}^*)
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
c_{{}_k\tau} &= E_{\theta_0}(c(\theta_{0,k}\tau, x)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}) = E_{\theta_0}(E_{\theta_0}(c(\theta_{0,k}\tau, x)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}^*)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}) \\
&= E_{\theta_0}(c_{{}_k\tau}'/\mathcal{G}_{{}_k\tau}) \leq E_{\theta_0}(E_{\theta_0}(c_{\tau^*}'/\mathcal{G}_{{}_k\tau}^*)/\mathcal{G}_{{}_k\tau}) \\
&= E_{\theta_0}(c_{\tau^*}'/\mathcal{G}_{{}_k\tau}) = E_{\theta_0}(c(\theta_0, \tau^*, x)/\mathcal{G}_{{}_k\tau})
\end{aligned}
$$

con lo cual, tomando esperanzas

$$
\begin{aligned}
E_{\theta_0}(c_{{}_k\tau}) &\leq E_{\theta_0}(c(\theta_0, \tau^*, x)) = E_{\theta_0}(E_{\theta_0}(c(\theta_0, \tau^*, x)/\mathcal{G}_{\tau^*})) \\
&= E_{\theta_0}(c_{\tau^*})
\end{aligned}
$$

(2), veamos

1. Bajo la hipótesis 1. la variable $L = \sup_{a \in \mathcal{A}} L_a(Y_a)$ es integrable, y
$$-L_{_k\tau}(Y_{_k\tau}) \geq -L$$
con lo cual
$$E_{\theta_0}(-L_{_k\tau}(Y_{_k\tau})I_{\{h(\tau^*)>k\}}) \geq E_{\theta_0}(-LI_{\{h(\tau^*)>k\}}) = \int_{\{h(\tau^*)>k\}} -LdP_{\theta_0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
puesto que
$$P_{\theta_0}(h(\tau^*) > k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
por ser τ^* admisible.

2. Bajo la hipótesis 2. $L^{'}_k = \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_k} L_a(Y_a)$ es una variable aleatoria integrable. Si $h(\tau^*) > k$, entonces $h({_k\tau}) = k$ y
$$\begin{aligned} I_{\{h(\tau^*)>k\}}L_{_k\tau}(Y_{_k\tau}) &= I_{\{h(\tau^*)>k\}} \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_k} I_{\{_k\tau=a\}}L_a(Y_a) \\ &\leq I_{\{h(\tau^*)>k\}} \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_k} L_a(Y_a) \\ &= L^{'}_k I_{\{h(\tau^*)>k\}} \end{aligned}$$
y
$$E_{\theta_0}(-L_{_k\tau}(Y_{_k\tau})I_{\{h(\tau^*)>k\}}) \geq E_{\theta_0}(-L^{'}_kI_{\{h(\tau^*)>k\}}) = \int_{\{h(\tau^*)>k\}} -L^{'}_kdP_{\theta_0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
quedando así probado el resultado puesto que
$$P_{\theta_0}(h(\tau^*) > k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Observación 44

Si no hacemos la hipótesis de que τ^* sea óptimo, y consideramos un plan de muestreo ϵ-óptimo τ_ϵ, es decir, tal que
$$E_{\theta_0}Z_{\tau_\epsilon} \geq \nu - \epsilon$$
para $\epsilon > 0$, que siempre existirá. Sea
$$_k\tau_\epsilon = \begin{cases} \tau_\epsilon & h(\tau_\epsilon) \leq k \\ (\tau_{\epsilon,1}, \cdots, \tau_{\epsilon,k}) & h(\tau_\epsilon) > k \end{cases}$$
Tendremos de forma análoga a la demostración previa,
$$\begin{aligned} 0 &\geq \nu^k - \nu \geq E_{\theta_0}(Z_{_k\tau_\epsilon}) - E_{\theta_0}(Z_{\tau_\epsilon}) - \epsilon \\ &\geq E_{\theta_0}(-L_{_k\tau_\epsilon}(Y_{_k\tau_\epsilon})I_{\{h(\tau_\epsilon)>k\}}) - \epsilon \end{aligned}$$

en virtud de idéntico razonamiento que en el teorema anterior.
Ahora al ser

$$E_{\theta_0}(Z_{\tau_\epsilon}) \geq \nu - \epsilon$$

ha de ser

$$P(\tau_\epsilon \notin \mathcal{A}) = 0$$

ya que $\forall a \notin \mathcal{A}$, $Z_a = -\infty$, en consecuencia como antes

$$P(h(\tau_\epsilon) > k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

y bajo la hipótesis

$$E_{\theta_0}(\sup_{a\in\mathcal{A}} L_a(Y_a)) < +\infty$$

ó la hipótesis

$$E_{\theta_0}(\sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_k} L_a(Y_a)) < +\infty$$

se tendrá

$$E_{\theta_0}(-L_{{}_k\tau_\epsilon}(Y_{{}_k\tau_\epsilon})I_{\{h(\tau_\epsilon)>k\}}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

y al ser ϵ arbitrario, se deduce que el problema general se puede aproximar por la sucesión de problemas truncados por número de etapas.

Corolario 4.5.2 *Si $\tilde{M}_a$ es un conjunto finito $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, entonces el problema general se puede aproximar por la sucesión de los problemas truncados, y para cada uno de estos existirá un plan de muestreo óptimo.*

Demostración:
Evidentemente si $\tilde{M}_a$ es finito, entonces

$$P_{\theta_0}(B(a,\infty)) = 0, \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}, \quad \theta_0 \in \Theta$$

y para cada problema truncado en k etapas, $k \in \mathbb{N}$, existirá un plan de muestreo óptimo ${}_k\tau^*$ de acuerdo con el teorema (4.5.1).
Además

$$card(\tilde{\mathcal{A}}_k) = \sum_{a\in\tilde{\mathcal{A}}_{k-1}} card(\tilde{M}_a), \quad card(\tilde{\mathcal{A}}_{()}) = 1$$

con lo cual $card(\tilde{\mathcal{A}}_k)$ es finito, $\forall k \in \mathbb{N}$ y como $L_a(Y_a)$ es integrable, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, será integrable $\sum_{a\tilde{\in}\mathcal{A}_k} L_a(Y_a)$, y se cumplirá la hipótesis 2. del teorema (4.5.1). □

Teorema 4.5.3 *Si τ^* es un plan de muestreo óptimo para el problema general y éste puede ser aproximado por la sucesión de problemas truncados en m, siendo $\{\mathcal{G}_a\}$ transitiva respecto de $\{\mathcal{G}_a^*\}$, entonces se verifica la ecuación de Bellman*

$$U_a = \text{máx}\{Z_a(Y_a), \sup_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{G}_a)\}$$

Se cumple que $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\forall j \in \tilde{M}_a$

$$B(a,\infty) = \{E(U_{ak}/\mathcal{G}_a) < \sup_{k\in\tilde{M}_a} E(U_{aj}/\mathcal{G}_a), \quad \forall k \in \tilde{M}_a\} \cap \{U_a > Z_a\}$$

$$\widehat{B}(a,j) = \text{mín}\{k \in \tilde{M}_a : E(U_{ak}/\mathcal{G}_a) = \sup_{j\in\tilde{M}_a} E(U_{aj}/\mathcal{G}_a)\} \cap \{U_a > Z_a\}$$

y τ_a^* *es un plan de muestreo respecto de* $\{\mathcal{G}_a\}$ *invariante.*

Demostración:

En las condiciones del teorema (4.5.1),

$$U_a = \operatorname{ess}\sup_{\tau\in T_a} E(Z_\tau/\mathcal{G}_a^*) = E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*)$$

Sea

$$T_a^J = \{\tau \in T : \tau \succeq a, \quad h(\tau) \le J\}$$

y sea

$$U_a^J = \operatorname{ess}\sup_{\tau\in T_a^J} E(Z_\tau/\mathcal{G}_a^*)$$

De acuerdo con los resultados relativos al problema de muestreo óptimo con número máximo de etapas J, existe $\forall a$ con $h(a) \le J$, $\tau_a^{*J} \in T_a^J$ tal que $U_a^J = E(Z_{\tau_a^{*J}}/\mathcal{G}_a^*)$. Comparando τ_a^*, con τ_a^{*J} resulta $\forall J \ge j$, con $a = (a_1, \cdots, a_j)$,

$$I_{\{h(\tau_a^*)\le J\}}\tau_a^* = I_{\{h(\tau_a^*)\le J\}}\tau_a^{*J} = I_{\{h(\tau_a^*)\le J\}}({}_J\tau_a)$$

siempre es $\tau_a^{*J} \preceq \tau_a^*$, entonces

$$\tau_a^{*J} \underset{J\to\infty}{\longrightarrow} \tau_a^*, \text{ c.s.}$$

Tendremos

$$\begin{aligned} 0 &\ge U_a^J - U_a = E(Z_{\tau_a^{*J}}/\mathcal{G}_a^*) - E(Z_{\tau_a^*}/\mathcal{G}_a^*) \\ &= E_{\theta_0}(-L_{\tau_a^{*J}}(Y_{\tau_a^{*J}}) + L_{\tau_a^*}(Y_{\tau_a^*}))I_{\{h(\tau_a^*)>J\}} \ge E_{\theta_0}(-L_{\tau_a^{*J}}(Y_{\tau_a^{*J}}))I_{\{h(\tau_a^*)>J\}} \underset{J\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

La demostración de que

$$E_{\theta_0}(-c_{\tau_a^{*J}} + c_{\tau_a^*}) \ge 0$$

será similar a la del teorema (4.5.1), resulta pues,

$$U_a = \lim_{J\to\infty} U_a^J, \text{ c.s.}$$

De acuerdo con el teorema (4.3.1), U_a^J es $\mathcal{G}_a$-medible, resultando U_a $\mathcal{G}_a$-medible. U_{ak}^J es $\mathcal{G}_{ak}$-medible, resultado U_{ak} $\mathcal{G}_{ak}$-medible, por la propiedad de transitividad se tendrá

$$E(U_{ak}/\mathcal{G}_a^*) = E(U_{ak}/\mathcal{G}_a)$$

resultando la ecuación de Bellman

$$U_a = \text{máx}\{Z_a(Y_a), \sup_{k \in \tilde{M}_a} E(U_{ak}/\mathcal{G}_a)\}, \text{ c.s.}$$

Veamos que τ^* es un plan de muestreo respecto de $\{\mathcal{G}_a\}$.
Ya se ha visto en la proposición (4.4.1), que

$$\{\tau^* \succeq a\} \in \mathcal{G}_a^*$$

Ahora,

$$\{\tau^* = a\} = \{\tau^* \succeq a\} \cap \{U_a = Z_a\}$$

con $\{U_a = Z_a\} \in \mathcal{G}_a$, al ser tanto U_a como Z_a funciones $\mathcal{G}_a$-medibles.

$$\{\tau^* \succeq am\} = \begin{cases} \{\tau^* \succeq a\} \cap (\widehat{B}(am) \cup B(a,\infty)) & \{\tau^* \succeq a\} = \cap_{i=0}^{j-1} \widehat{B}(a^{i+1}) \\ \{\tau^* \succeq a\} & \{\tau^* \succeq a\} = \cup_{i=r}^{j} \cap_{l=0}^{i-1} \widehat{B}(a^{l+1}) \cap B(a^i,\infty) \end{cases}$$

siendo $r = \text{máx}\{s : a_s \neq m\}$.
El segundo caso tiene probabilidad nula de acuerdo con las hipótesis. En el primer caso $\widehat{B}(am) \in \mathcal{G}_a$, $B(a,\infty) \in \mathcal{G}_a$ de acuerdo con la definición de ambos al ser U_a $\mathcal{G}_a$-medible.
En ambos casos

$$\{\tau^* \succeq am\} = \{\tau^* \succeq a\} \cap N$$

con $N \in \mathcal{G}_a$. Deduciéndose que τ^* es plan de muestreo respecto a $\{\mathcal{G}_a\}$. □

4.5.1 Problema Truncado en k Etapas Modificado

Después de haber aproximado el problema general por abajo, es decir,

$$\nu^1 \leq \nu^2 \leq \cdots \leq \nu^k \leq \cdots \leq \nu$$

tratamos de encontrar una sucesión decreciente que aproxime el valor del problema general por arriba.
Consideramos que en el problema truncado en k etapas, se modifica la función de pérdida y se toma

$$L_a(\theta, \varphi_a(x), x_a) = 0, \quad h(a) = k, \quad \forall a \in \tilde{\mathcal{A}}$$

Con lo que para $a \in \tilde{\mathcal{A}}$, tal que $h(a) = k$ será

$$L_a(Y_a) = 0, \quad h(a) = k$$

Sea

$$Z_a^k(Y_a) = \begin{cases} Z_a(Y_a) & h(a) < k \\ -c_a(Y_a) & h(a) = k \end{cases}$$

Será
$$\rho^k = \sup_{\{\tau : h(\tau) \leq k\}} E_{\theta_0} Z_\tau^k$$
en el problema truncado en k modificado.
Si τ es un plan de muestreo, consideramos ${}_k\tau$ y ${}_{k+1}\tau$ y comparamos $E_{\theta_0} Z^k_{{}_k\tau}$ y $E_{\theta_0} Z^{k+1}_{{}_{k+1}\tau}$ resulta

$$\begin{aligned}
E_{\theta_0} Z^{k+1}_{{}_{k+1}\tau} - E_{\theta_0} Z^k_{{}_k\tau} &= E_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{k} I_{\{h(\tau)=i\}} Z_\tau) - E_{\theta_0}(c_{{}_{k+1}\tau} I_{\{h(\tau)>k\}}) \\
&- E_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{k-1} I_{\{h(\tau)=i\}} Z_\tau) + E_{\theta_0}(c_{{}_k\tau} I_{\{h(\tau)>k-1\}}) \\
&= E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)=k\}}(-L_\tau - c_\tau)) + E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)=k\}} c_\tau) - E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)>k\}}(c_{{}_{k+1}\tau} - c_{{}_k\tau})) \\
&= E_{\theta_0}(-I_{\{h(\tau)=k\}} L_\tau) - E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)>k\}}(c_{{}_{k+1}\tau} - c_{{}_k\tau})) \\
&\leq -E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)>k\}}(c_{{}_{k+1}\tau} - c_{{}_k\tau}))
\end{aligned}$$

Como ${}_k\tau \preceq_{k+1} \tau$, por el mismo razonamiento empleado en el teorema (4.5.1) en su segundo apartado
$$E_{\theta_0} c_{{}_k\tau} \leq E_{\theta_0} c_{{}_{k+1}\tau}$$
y
$$0 \leq E_{\theta_0}(c_{{}_{k+1}\tau} - c_{{}_k\tau}) = E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)>k\}}(c_{{}_{k+1}\tau} - c_{{}_k\tau}))$$
puesto que ${}_{k+1}\tau =_k \tau$, si $h(\tau) \leq k$. Por tanto
$$E_{\theta_0} Z^{k+1}_{{}_{k+1}\tau} \leq E_{\theta_0} Z^k_{{}_k\tau} \leq -E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau)>k\}}(c_{{}_{k+1}\tau} - c_{{}_k\tau})) \leq 0$$

Así,
$$E_{\theta_0} Z^{k+1}_{{}_{k+1}\tau} \leq E_{\theta_0} Z^k_{{}_k\tau}, \quad \forall \tau$$
resultando entonces
$$\rho^{k+1} \leq \rho^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
y por lo mismo
$$\nu \leq \rho^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

□

Estudiemos si $\rho^k \downarrow \nu$, cuando $k \to \infty$.

Teorema 4.5.4 *Supongamos que se cumple alguna de las hipótesis del teorema (4.5.1) y además $c(\theta_0, a, x) \geq r_k$, con $r_k \in \mathbb{R}$ y $r_k \to \infty$, cuando $k \to \infty$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$, entonces*
$$\rho^k \downarrow_{k \to \infty} \nu$$

Demostración:
Sea τ^k plan de muestreo ϵ-óptimo en el problema truncado en k etapas modificado, para $\epsilon > 0$.

$$E_{\theta_0} Z^k_{\tau^k} \geq \rho^k - \epsilon, \quad E_{\theta_0} Z_{\tau^k} \leq \nu$$

$$\rho^k - \nu \leq E_{\theta_0} Z^k_{\tau^k} - E_{\theta_0} Z_{\tau^k} + \epsilon = E_{\theta_0}(L_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}}) + \epsilon$$

Bajo la hipótesis 1. del teorema (4.5.1), como $L_{\tau^k} \leq L$ variable aleatoria integrable

$$0 \leq \rho^k - \nu \leq E_{\theta_0}(L I_{\{h(\tau^k)=k\}}) + \epsilon$$

Y,

$$E_{\theta_0}(L_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}}) \leq E_{\theta_0}(L I_{\{h(\tau^k)=k\}}) = \int_{\{h(\tau^k)=k\}} dP_{\theta_0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{si } P_{\theta_0}(h(\tau^k) = k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Bajo la hipótesis 2. del teorema (4.5.1),

$$L_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}} = I_{\{h(\tau^k)=k\}} \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_k} L_a I_{\{\tau^k = a\}} \leq I_{\{h(\tau^k)=k\}} L^{'}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho^k - \nu E_{\theta_0}(L_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}}) \leq E_{\theta_0}(I_{\{h(\tau^k)=k\}} \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_k} L_a I_{\{\tau^k=a\}}) \\ &\leq E(I_{\{h(\tau^k)=k\}} L^{'}) = \int_{\{h(\tau^k)=k\}} L^{'} dP_{\theta_0} \end{aligned}$$

y llegamos al mismo resultado.
Hemos de demostrar que

$$P_{\theta_0}(h(\tau^k) = k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dado $\epsilon > 0$

$$\nu - \epsilon \leq \rho^k - \epsilon \leq E_{\theta_0} Z^k_{\tau^k} \leq E_{\theta_0}(-c_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}})$$

Si se diese la hipótesis $c(\theta_o, a, x) \geq r_k$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$, con $r_k \to \infty$. Será $c_a(Y_a) \geq r_k$, $\forall a \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}} &= \left(\sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_k} c_a(Y_a) I_{\{\tau^k=a\}} \right) I_{\{h(\tau^k)=k\}} \\ &\geq r_k I_{\{h(\tau^k)=k\}} \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior

$$E_{\theta_0}(c_{\tau^k} I_{\{h(\tau^k)=k\}}) \leq -r_k I_{\{h(\tau^k)=k\}}$$

luego

$$\nu - \epsilon \leq -r_k E(_{\theta_0}(I_{\{h(\tau^k)=k\}}) = -r_k P(I_{\{h(\tau^k)=k\}})$$

con lo que

$$P_{\theta_0}(I_{\{h(\tau^k)=k\}}) \leq \frac{-\nu + \epsilon}{r_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

al ser ϵ arbitrario.

$\square$

Bibliografía

[1] Berger, J. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* (1985). Springer-Verlag.

[2] Chow, Y.S., Robbins, H., Siegmund, D. *Great Expectations: The theory of optimal stopping* (1971). Houghton Mifflin.

[3] Crowell, J.J., Sen, P.K. *On stopping times for fixed-width confidence regions* (1992). Sequential Analysis, 11 190-204.

[4] Dantzig, G. *On the non-existence of test of "Student's" hypothesis having power functions independent of* σ (1940). Annals of Mathematical Statistics 11, 186-192.

[5] Dodge, H., Romig, H. *Sampling inspections Tables-Single and double sampling* (1939). Wiley.

[6] Ehrenfeld, S. *On group sequential sampling* (1974). Technometrics 14, 167-174.

[7] Ferguson, Th. *Mathematical statistics. A decision theoretic approach* (1967). Academic Press.

[8] Ghosh, B.K., Sen, P.K. *Handbook of Sequential Analysis* (1991).

[9] Haggstrom, G.W. *Optimal Stopping and Experimental Design* (1966). Annals of Mathematical Statistics 37, 7-29.

[10] Hall, P. *Asymptotic Theory of Triple Sampling for Sequential Estimation of a mean* (1981). Annals of Statistics 9, 1229-1238.

[11] Harenbrock, M., Schmitz, N. *Optional Sampling of Submartingales with Scanned Index Sets* (1992). Journal of Theorical Probability, 5,2 309-326.

[12] Hurzeler, H.E. *Quasimartingales on Partially Ordered Sets* (1984). Journal of Multivariate Analysis 14, 34-73.

[13] Hurzeler, H.E. *The Optional Sampling Theorem for Processes Indexed by a Partially Ordered Set* (1985). The Annals of Probability 13, 4 1224-1235.

[14] Ibarrola, P., Pardo, L., Quesada, V. *Teoría de la Probabilidad* (1997). Síntesis.

[15] Irle, A. *Transitivity in problemas of optimal stopping* (1981). Annals of Probability 9, 4 642-647.

[16] Jacka, S.D. *Local Times, Optimal Stopping and Semimartingales* (1993). The Annals of Probability, 21, 1 329-339.

[17] Knight, F.B., Maisonneuve, B. *A Characterization of Stopping Times* (1994). The Annals of Probability, 22, 3 1600-1606.

[18] Krengel, U., Sucheston, L. *Stopping Rules and Tactics for Processes indexed by a Directed Set* (1981). Journal of Multivariate Analysis, 11 199-229.

[19] Kuhne, R. Ruschendorf, L. *Aproximation of Optimal Stopping problems* (2000). Stochastic Process. Appl. 90 307-325.

[20] Kuhne, R. Ruschendorf, L. *Optimal Stopping with discount and observation costs* (2000). Journal of Appl. Probability, 1 64-72.

[21] Kurtz, T.G. *The Optional Sampling theorema for Martingales indexed by Directed Sets* (1980). Annals of Probability 8, 675-681.

[22] Mandelbaum, A., Vanderbei, R.J. *Optimal Stopping and Supermartingales over Partially Ordered Sets* (1981). Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 57 253-264.

[23] Marcozzi, M.D. *On the approximation of optimal stopping problemas with application to financial mathematics* (2000). SIAM, J. Sci. Comput. 22, 5 1865-1882.

[24] Peskir, G. *Optimal stopping of the maximun process: the maximility principle* (1998). Annals of Probability 26, 4 1614-1640.

[25] Schmitz, N. *Optimal Sequentially Planned Decision Procedures* (1993). Lectures Notes in Statistics. Springer- Verlag.

[26] Schmitz, N. *From Optimal Stopping to Optimal Sampling* (1988). Statistik, Informatik und Ökonometrie. Springer.

[27] Siegmund, D. *Some problems in Theory of Optimal Stopping* (1967). Annals of Mathematical Statistics 38, 1627-1640.

[28] Stein, Ch. *A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance* (1945). Annals of Mathematical Statistics 16, 243-258.

[29] Wald, A. *Sequential Analysis* (1947). Wiley.

[30] Washburn, R.B., Willsky, A.S. *Optional sampling of submartingales indexed by partially ordered sets* (1981). Annals of probability 9, 957-970.

[31] Wetherille, G., Glazebrook, K. *Sequential Methods in Statistics* (1986). Chapman and Hall.

[32] Whittle, P. *Optimation over Time* (1982). Wiley

[33] Whittle, P. *Optimal Control* (1996). Wiley