UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Geometría y Topología

SUMAS DE CUADRADOS DE GÉRMENES DE FUNCIÓN ANALÍTICA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

José Francisco Fernando Galván

Bajo la dirección del Doctor:

Jesús María Ruiz Sancho

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-1795-0

Sumas de cuadrados de gérmenes de función analítica.

por

José F. Fernando Galván

Licenciado en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid

Memoria presentada al
Departamento de Geometría y Topología
para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Septiembre, 2001

Dirigida por el profesor
Jesús M. Ruiz Sancho (Universidad Complutense de Madrid).

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer la ayuda y apoyo prestados al director de este trabajo, Jesús M. Ruiz, que ha sido la persona que me ha introducido en el mundo de la Geometría Analítica Real y las sumas de cuadrados. Además, me ha ayudado a conseguir, con su trabajo desinteresado y su amplio conocimiento de la materia, que los contenidos de esta memoria aparezcan de forma clara y concisa.

Agradezco también la ayuda prestada, los comentarios y consejos, y las muestras de apoyo y aprecio que constantemente recibo de José M. Gamboa.

Quiero destacar la ayuda recibida de los departamentos de Álgebra y Geometría y Topología, y en especial de sus directores Enrique Outerelo y Carlos Andradas; y de los miembros del proyecto de investigación DGICYT PB98-0756-C02-01, dirigido por Mari Emi Alonso, al cual pertenezco y que me ha dado la posibilidad de asistir a diversos Congresos Internacionales.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y a Mari Carmen su presencia constante en la realización de este trabajo.

Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio de los elementos semidefinidos positivos (los psd) y las sumas de cuadrados (las sos) de los anillos analíticos reales de dimensión 2, es decir, de los gérmenes de superficie analítica real. Los dos resultados principales que obtenemos son los siguientes:

I. La finitud del número de Pitágoras de un germen de superficie arbitrario, que acotamos en función de la multiplicidad y la codimensión, y

II. La determinación de todos los gérmenes de superficie sumergida para los que psd = sos, y que según demostraremos tienen todos número de Pitágoras 2.

Índice General

Preliminares

1. Planteamiento general.

En el estudio de los gérmenes semidefinidos positivos (= psd) y de las sumas de cuadrados (= sos) los dos problemas principales son:

- *Problema cualitativo:* Estudiar si todo germen semidefinido positivo es suma de cuadrados.
- *Problema cuantitativo:* Estudiar si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que todo elemento que es suma de cuadrados se puede expresar como suma de p cuadrados.

Estos dos problemas se pueden formular en un anillo arbitrario A mediante el espectro real.

Sea A un anillo conmutativo unitario. Un cono primo *de A es un par $\alpha = (\mathfrak{p}_\alpha, \leq_\alpha)$ formado por un ideal primo $\mathfrak{p}_\alpha$ de A y un orden $\leq_\alpha$ del cuerpo residual $\kappa(\alpha) = cf(A/\mathfrak{p}_\alpha)$; denotaremos $k(\alpha)$ la clausura real del cuerpo ordenado $(\kappa(\alpha), \leq_\alpha)$. Si $a \in A$, denotamos por $a(\alpha)$ la imagen de a por el homomorfismo canónico de A en $k(\alpha)$, de modo que las expresiones*

$$a(\alpha) \geq 0,$$
$$a(\alpha) > 0,$$
$$a(\alpha) = 0$$

tienen un significado evidente. El espectro real de A, *que se denota* $\operatorname{Spec}_r(A)$, *es el espacio topológico cuyos puntos son los conos primos de A y cuya topología viene dada por la base de abiertos*

$$\mathcal{U}(a_1, \ldots, a_n) = \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r(A) \mid a_1(\alpha\} > 0, \ldots, a_n(\alpha) > 0\}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ es una familia finita de elementos de A. Para la teoría general del espectro real nos remitimos a [BCR] y [AnBrRz].

Así, los conos primos forman un espacio en el que los elementos de A se ven como funciones. Para formular el problema cualitativo en este ámbito general consideramos el conjunto $\mathcal{P}(A) \subset A$ de los $f \in A$ tales que $f(\alpha) \geq 0$ para todo cono primo $\alpha \in \operatorname{Spec}_r(A)$

y el conjunto $\Sigma(A) \subset A$ de los elementos $f \in A$ que son suma de cuadrados en A; los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son los *psd* de A, y los de $\Sigma(A)$ los *sos* de A. Evidentemente, $\Sigma(A) \subset \mathcal{P}(A)$ y el problema consiste en determinar si $\mathcal{P}(A) = \Sigma(A)$ o en caso de que no se de la igualdad, estimar la diferencia $\mathcal{P}(A) \setminus \Sigma(A)$. Para el problema cuantitativo, se define el número de Pitágoras $p(A)$ de A como el número

$$p(A) = \min\{q \in \mathbb{N} \mid \Sigma(A) = \Sigma_q(A)\}$$

siendo $\Sigma_q(A)$ el conjunto de los elementos de A que son suma de q cuadrados en A; en el caso de que tal número no exista, decimos que $p(A)$ es infinito.

Determinar si $p(A)$ es finito es ya un problema delicado. Además, si lo es, digamos $p(A) = p$, el problema cualitativo $\mathcal{P}(A) = \Sigma(A)$ se reduce a ver si $\mathcal{P}(A) = \Sigma_p(A)$, esto es, a determinar cuándo las ecuaciones

$$f = Y_1^2 + \ldots + Y_p^2 \quad \text{para } f \text{ psd}$$

tienen solución.

2. Algunos resultados conocidos.

Como es bien sabido todo esto tiene su origen en el célebre problema decimoséptimo de Hilbert, que consistía en estudiar si todo polinomio ≥ 0 sobre $\mathbb{R}^n$ es suma de cuadrados de funciones racionales (pues puede no serlo de polinomios como probó el propio Hilbert) y que fue afirmativamente resuelto por E. Artin en 1927 ([E.Ar]).

De modo natural, el mismo problema se plantea para otras funciones: regulares, de Nash, analíticas,... en variedades reales, y también para gérmenes. Que la formulación natural para funciones equivalga a la abstracta mediante el espectro real es una consecuencia, fundamentalmente, del Principio de Tarski, como se explica con detalle en [BCR] y [AnBrRz].

Mencionemos brevemente algunos resultados destacables acerca del problema decimoséptimo de Hilbert. E. Artin demostró que si $V \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto algebraico irreducible, entonces toda función polinomial sobre V no negativa en un abierto Zariski no vacío de V es suma de cuadrados de funciones racionales de V ([E.Ar]). Por otra parte, si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad de Nash conexa, entonces toda función de Nash sobre M es suma de cuadrados en el cuerpo de fracciones del anillo de las funciones de Nash ([Ms]). En lo referente a variedades analíticas reales y conexas, se sabe que si M es compacta entonces toda función analítica no negativa en M es suma de cuadrados de funciones meromorfas en M ([Jw],[Rz2]).

Para referirnos al problema cuantitativo, sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico irreducible, $\mathcal{P}[V]$ su anillo de funciones polinómicas y $\mathcal{K}(V) = cf(\mathcal{P}[V])$ su cuerpo de funciones racionales. Consideramos los números de Pitágoras $p[V] = p(\mathcal{P}[V])$, $p(V) = p(\mathcal{K}(V))$, y se cumple:

- Si $\dim V = 1$ entonces $p[V] < +\infty$. Por ejemplo, $p[\mathbb{R}] = 2$, ([Ch *et al*]).
- Si $\dim V = 2$ se piensa que $p[V] = +\infty$, pues $p[\mathbb{R}^2] = +\infty$ ([Ch *et al*]).
- Si $\dim V \geq 3$ entonces $p[V] = +\infty$ ([Ch *et al*]).
- Si $\dim V = n$ entonces $n + 2 \leq p(V) \leq 2^n$, con lo que para $n = 2$ se tiene que $p(V) = 4$ ([Pf], [Ca *et al*]).

Por otra parte, si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad de Nash conexa de dimensión d entonces el número de Pitágoras del cuerpo de funciones racionales de Nash es $\leq 2^d$ ([BCR]). En lo referente a variedades analíticas reales cabe destacar que si M es una superficie conexa no compacta (resp. compacta) entonces toda función psd es suma de dos (resp. tres) cuadrados de funciones analíticas en M ([BoKuSh]).

En esta memoria vamos a estudiar los dos problemas para gérmenes analíticos. Empecemos introduciendo la terminología y notación básica que emplearemos en lo sucesivo. Sea X un germen de conjunto analítico en el origen; denotaremos por $\mathcal{O}(X)$ al anillo de gérmenes de función analítica sobre X y por $\mathcal{M}(X)$ a su anillo total de fracciones. En particular, $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}\{x\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; el orden de una serie $f \in \mathbb{K}\{x\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se denotará por $\omega(f)$ y el cuerpo de fracciones de $\mathbb{K}\{x\}$ por $\mathbb{K}(\{x\})$. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}\{x\}/I$, siendo I el ideal de gérmenes de función analítica que se anulan sobre X. Un germen $f \in \mathcal{O}(X)$ es *semidefinido positivo* o psd si algún representante de f es ≥ 0 en algún representante de X (resp. de $X \setminus \{0\}$); denotaremos $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de todos los gérmenes psd en X. Además denotaremos por $\Sigma(X)$ (resp. $\Sigma_q(X)$) al conjunto de los f que son suma de cuadrados (resp. q cuadrados) de elementos de $\mathcal{O}(X)$. Finalmente, denotaremos por $p[X]$ al número de Pitágoras de $\mathcal{O}(X)$ y por $p(X)$ al de $\mathcal{M}(X)$.

Para los gérmenes analíticos de dimensión 2 se sabe que $p(\mathbb{R}^2_o) = p[\mathbb{R}^2_o] = 2$ ([BoRi]). Además, se tiene el siguiente resultado (que puede considerarse folklore) que proporciona una acotación superior de $p(X)$.

Proposición 0.1 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un germen analítico de dimensión 2, entonces*

$$p(X) \leq 2 \dim_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)} \mathcal{M}(X).$$

Demostración. En primer lugar, como $\dim X = 2$, se cumple que $\mathcal{O}(X)$ es un $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$-módulo finitamente generado (véase [Rz3, II]) y $\mathcal{M}(X)$ es un $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$-espacio vectorial de dimensión finita digamos m. Para demostrar que $\Sigma(\mathcal{M}(X)) = \Sigma_{2m}(\mathcal{M}(X))$ basta con probar que toda forma cuadrática $Q = \sum_{i=1}^r L_i(\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_m)^2$ sobre $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}(\{x, y\})$ se puede expresar como suma de $2m$ cuadrados de formas lineales sobre $\mathbb{R}(\{x, y\})$.

Para ver eso, como Q es una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}(\{x, y\})$ existe una matriz $M \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R}(\{x, y\}))$ tal que $Q = \mathtt{z}M\mathtt{z}^t$, $\mathtt{z} = (\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_m)$. Por el teorema de diagonalización sobre un cuerpo, existen $D, P \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R}(\{x, y\}))$, D diagonal y P invertible, tales que $M = PDP^t$. Además, como $D = P^{-1}M(P^{-1})^t$ y $Q = \sum_{i=1}^r L_i(\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_m)^2$, entonces los elementos de la diagonal principal de D son suma de cuadrados, y como $p[\mathbb{R}^2_o] = 2$, de dos cuadrados. De esta forma, como $Q = (\mathtt{z}P)D(\mathtt{z}P)^t$, se tiene

$$Q = (\mathtt{z}P)D(\mathtt{z}P)^t = (H_1, H_2 \dots , H_m) \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & & & \\ & a_2^2 + b_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m^2 + b_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{pmatrix}$$

siendo $H_1(\mathtt{z}), \dots , H_m(\mathtt{z})$ formas lineales sobre $\mathbb{R}(\{x, y\})$. Así,

$$Q = \sum_{i=1}^{m} H_i^2(a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=1}^{m} H_i^2 a_i^2 + \sum_{i=1}^{m} H_i^2 b_i^2$$

y por tanto, Q se expresa como suma de $2m$ cuadrados de formas lineales sobre $\mathbb{R}(\{x, y\})$ como se quería. ■

Es importante observar que este mismo argumento se podría utilizar para acotar $p(X)$, en dimensión cualquiera d, si conociésemos una cota para $p(\mathbb{R}^d_o)$. Pero, aunque se conjetura que 2^{d-1} es tal cota, sólo se sabe que $p(\mathbb{R}^3_o) \leq 8$ ([Jw]).

3. Finitud del número de Pitágoras.

Vamos a analizar ahora el invariante $p[X]$. En primer lugar, tenemos:

Teorema 0.2 ([Ch *et al*]) *Si A es un anillo local regular de dimensión mayor o igual que* 3*, entonces $p(A) = +\infty$.*

De este importante resultado se deduce fácilmente el siguiente.

Corolario 0.3 ([Rz4]) *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un germen analítico de dimensión mayor o igual que* 4*, o de dimensión* 3 *y regular, entonces $p[X] = +\infty$*

Además, como los anillos locales regulares de dimensión 3 tienen número de Pitágoras infinito, se espera que lo mismo ocurra para todos los anillos analíticos locales de dimensión 3. En lo referente a la dimensión 1 hay información más precisa: el número de Pitágoras de un germen de curva es menor o igual que su multiplicidad ([Qz]). Por lo anterior, en dimensión > 1 los gérmenes con número de Pitágoras finito deben buscarse en dimensión 2, y algunos ya se conocen ([Rz4]). El ejemplo más antiguo es el ya mencionado antes: $p[\mathbb{R}^2_o] = 2$.

El resultado central del capítulo I de esta memoria es la *acotación del número de Pitágoras de cualquier germen analítico de dimensión* 2, mediante el teorema que enunciamos a continuación. La demostración de dicho teorema, en la sección I.4, se inspira en el argumento de la Proposición 0.1 anterior, pero requiere la diagonalización de formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}\{x,y\}$ que desarrollamos en la sección I.2.

Teorema 0.4 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un germen analítico de dimensión 2, entonces*

$$E\big[\log_2(\omega(I(X))+1)\big] \leq p[X] \leq 2\,\mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X)^{\mathrm{codim}(X)}$$

donde $E\big[.\big]$ representa la parte entera.

Aquí $\omega(I(X))$ es el mínimo orden de un elemento de $I(X)$ y $\mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X)$ *la multiplicidad total* de X, es decir, la suma de las multiplicidades de todas sus componentes irreducibles y no sólo de sus componentes de dimensión máxima. Explicaremos esto último con detalle en la sección I.3.

Si $\omega(I(X)) \leq 2$, la cota inferior no dice nada, pero tenemos:

Proposición 0.5 *Si X es un germen analítico de dimensión ≥ 2 se cumple que $p[X] \geq 2$.*

Demostración. Supongamos que existe $X \subset \mathbb{R}^n$ germen analítico de dimensión ≥ 2 tal que $p[X]=1$. Entonces para cada germen de curva $Y \subset X$ se cumple que $p[Y]=1$ (pues $\mathcal{O}(Y)$ es un cociente de $\mathcal{O}(X)$) y, por [CaRz], $\mathrm{mult}(Y) = \mathrm{emb\,dim}(Y) \leq n$. Esto contradice el hecho de que en cualquier germen analítico de dimensión ≥ 2 existen curvas de multiplicidad arbitrariamente alta. ■

En la sección I.5 veremos que no se puede obtener una cota superior del número de Pitágoras que dependa sólo de la multiplicidad y por tanto, es necesario introducir el concepto de la multiplicidad total.

4. El problema cualitativo, en general.

De nuevo tenemos un resultado especial para dimensión ≥ 3 que reduce la cuestión a dimensión ≤ 3 y de hecho ≤ 2.

Teorema 0.6 ([Sch1]) *Sea A un anillo local regular de dimensión ≥ 3. Entonces $\Sigma(A) \neq \mathcal{P}(A)$.*

Según decíamos, de este resultado deducimos:

Corolario 0.7 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un germen analítico de dimensión $d \geq 4$ entonces $\Sigma(X) \neq \mathcal{P}(X)$.*

Demostración. En efecto, si X_d es una componente irreducible de X de dimensión d, por el lema de selección de curvas, existe un germen de curva $\gamma \subset X$ tal que $\gamma \not\subset \operatorname{Sing} X$ y el ideal de γ es un ideal primo de $\mathcal{O}(X)$ de altura $d-1$, tal que $A = \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local regular de dimensión $d-1 \geq 3$. Por 0.6 existe $f/g \in \mathcal{P}(A) \setminus \Sigma(A)$ con $g \notin \mathfrak{p}$.

Sea $h \in \mathcal{O}(X)$ una ecuación del germen de conjunto analítico formado por la unión de las componentes irreducibles de X que no contienen a γ y del lugar singular de X_d. El elemento $F = h^2g^2f/g$ pertenece, claramente, a $\mathcal{P}(A)$ y es, por tanto, positivo en todos los órdenes de $cf(A)$, que es, de hecho, el cuerpo de funciones meromorfas de X_d. Así, $F \geq 0$ en X_d y 0 en el resto de las componentes irreducibles de X, con lo que $F \in \mathcal{P}(X)$. Pero $F \notin \Sigma(X)$, pues si F es sos en $\mathcal{O}(X)$, como $hg \notin \mathfrak{p}$ es unidad en A, resultaría $f/g \in \Sigma(A)$. ∎

Digamos también que se espera $\Sigma \neq \mathcal{P}$ para cualquier germen de dimensión 3. En cuanto a dimensión 1 se sabe que una curva $X \subset \mathbb{R}^n$ cumple $\Sigma(X) = \mathcal{P}(X)$ si y solo si es la unión de n rectas independientes. Esto es fácil de probar para curvas del plano, y en todo caso es consecuencia de un teorema general para anillos locales de dimensión 1 ([Sch2]).

5. El problema cualitativo para gérmenes de superficie.

Vemos pues, que los gérmenes para los que $\Sigma = \mathcal{P}$, deben tener dimensión 2. Sin embargo, se conocen numerosos ejemplos para los que $\Sigma \neq \mathcal{P}$ y muy pocos para los que $\Sigma = \mathcal{P}$, todos ellos gérmenes de superficie en $\mathbb{R}^3$ de multiplicidad 2. Comentemos en este punto que presentamos en la sección II.6, última de la memoria, algunos ejemplos más, diferentes por ser gérmenes de superficie con dimensión de inmersión y multiplicidad arbitrariamente grandes. En todo caso, es razonable empezar por caracterizar los gérmenes de superficie de $\mathbb{R}^3$ para los que $\mathcal{P} = \Sigma$. Hacemos esto en el capítulo II probando el teorema que sigue:

Teorema 0.8 *Los gérmenes de superficie singular $X \subset \mathbb{R}^3$ tales que $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$ son exactamente los siguientes*

(i) $z^2 - x^3 - y^5 = 0$ *(Singularidad de Brieskorn)*

(ii) $z^2 - x^3 - xy^3 = 0$

(iii) $z^2 - x^3 - y^4 = 0$

(iv) $z^2 - x^2 = 0$ *(Par de planos)*

(v) $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ *(Cono)*

(vi) $z^2 - x^2 - y^k = 0,\ k \geq 3$ *(Deformaciones del par de planos)*

(vii) $z^2 - x^2y = 0$ *(Paraguas de Whitney)*

(viii) $z^2 - x^2y + y^3 = 0$

(ix) $z^2 - x^2y - (-1)^k y^k = 0,\ k \geq 4$ *(Deformaciones del Paraguas de Whitney)*

Además, en todos estos casos $p[X] = p(X) = 2$.

La primera parte del enunciado anterior, esto es, que si $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$ el germen X está en la lista anterior, está parcialmente en [Rz4]. Para completar los argumentos allí dados necesitamos el siguiente lema general.

Lema 0.9 *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un germen analítico tal que* $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$. *Entonces*

$$\omega(I(X)) = 2.$$

Demostración. Empezamos elegiendo una serie $F \in I(X)$ de orden $r > 0$. Después de un cambio lineal podemos suponer

$$F = x_n^r + a_{r-1}x_n^{r-1} + \cdots + a_1x_n + a_0,$$

donde $a_j \in \mathbb{R}\{y\}, y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $\omega(a_j) \geq r - j$ para $0 \leq j \leq r - 1$. Además, existe $M > 0$ tal que $|a_j| < M\|y\|^{r-j}$.

En efecto, digamos que $f = a_1, \ldots, a_{r-1}$ tiene orden $\geq s$. Como $\omega(f^2) = 2s$ podemos escribir $f^2 = \sum_{|\nu|=2s} a_\nu(y)y^\nu$, y así, en un entorno del origen se tiene que

$$|f(y)|^2 \leq \sum_{|\nu|=2s} c_\nu |y|^\nu = \sum_{|\nu|=2s} c_\nu \|y\|^{2s}|z|^\nu = \|y\|^{2s} \sum_{|\nu|=2s} c_\nu |z|^\nu$$

siendo $c_\nu = 1 + |a_\nu(0)|$ y $z = y/\|y\|$. La función $\sum_{|\nu|=2r} c_\nu |z|^\nu$ está acotada en $\|z\| = 1$, digamos por $M > 0$, y así $\|f\|^2 < M\|y\|^{2s}$ con lo que $\|f\| < M\|y\|^s$. Esto muestra nuestra afirmación.

Ahora, para cada entero $k \in \mathbb{N}$ consideramos la forma cuadrática

$$g_k = k^2(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) - x_n^2$$

y afirmamos que para k suficientemente grande g_k es psd en X.

En efecto, en caso contrario X contiene una sucesión $x^{(k)} = (y^{(k)}, x_n^{(k)}) \to 0$ tal que $g_k(x^{(k)}) < 0$, o sea

$$0 \leq k\rho_k < |x_n^{(k)}|, \quad \text{con } \ \rho_k = \|y^{(k)}\|.$$

Como $F \in I(X)$, es $F(x^{(k)}) = 0$, y se tiene

$$|x_n^{(k)}|^r = |\sum_{j=0}^{r-1} a_j(y^{(k)})(x_n^{(k)})^j| \leq \sum_{j=0}^{r-1} |a_j(y^{(k)})||x_n^{(k)}|^j \leq$$

$$M \sum_{j=0}^{r-1} \rho_k^{r-j} |x_n^{(k)}|^j < M \sum_{j=0}^{r-1} \frac{|x_n^{(k)}|^r}{k^{r-j}} = M|x_n^{(k)}|^r \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{k^{r-j}}.$$

Al ser $|x_n^{(k)}|^r > 0$ obtenemos $1 < M\left(\dfrac{1}{k} + \cdots + \dfrac{1}{k^r}\right)$, contradicción.

Una vez visto que $g_k \in \mathcal{P}(X)$ para k suficientemente grande, veamos que $g_k \notin \Sigma(X)$ si $\omega(I(X)) \geq 3$. En efecto, si g_k fuera suma de cuadrados en $\mathcal{O}(X)$ entonces

$$g_k = h_1^2 + \cdots + h_s^2 + h,$$

con $h_i \in \mathbb{R}\{x\}, h \in I(X)$ y $\omega(h) \geq 3$. De este modo, igualando formas iniciales en la expresión anterior encontramos $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que

$$g_k = a_1^2 + \cdots + a_r^2,$$

lo que es imposible. ■

Del resultado anterior se deduce que si $X \subset \mathbb{R}^3$ tiene la propiedad $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$ entonces $\omega(I(X)) = 2$ y podemos aplicar [Rz4], donde se prueba que en ese caso X está en la lista.

La segunda parte del enunciado de 0.8, y la más delicada, es probar $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para los gérmenes de la lista. En [Rz4] se hace esto para la singularidad de Brieskorn, el par de planos y el paraguas de Whitney. La demostración para la singularidad de Brieskorn es completamente análoga a la del plano y utiliza esencialmente que es factorial y su complexificado también (una propiedad que la caracteriza, [Br]). Para el par de planos y el paraguas de Whitney las demostraciones son específicas de cada caso.

Nosotros desarrollamos un método que nos permite demostrar la propiedad $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para todos los gérmenes de la lista anterior, a partir del caso factorial (el plano y la singularidad de Brieskorn). La demostración se desglosa en varias etapas:

1. *Reducción polinomial* (II.2): consideramos la *superficie algebraica asociada* al germen dado, es decir, la superficie de $\mathbb{R}^3$ con la misma ecuación que ese germen, y probamos que el conjunto de polinomios *definidos positivos* en esa superficie es *denso* en el conjunto de germenes de función psd de dicho germen.

2. *Explosión:* utilizando una explosión adecuada, obtenemos una equivalencia birregular entre un abierto denso de la superficie asociada al germen y un abierto denso del plano o de la superficie de Brieskorn. Esto agrupa los gérmenes anteriores de la siguiente manera:

   (a) *Explosiones de la singularidad de Brieskorn* (II.3): que son $z^2 - x^3 - xy^3 = 0$ y $z^2 - x^3 - y^4 = 0$.

   (b) *Familia del par de planos* (II.4): formada por el cono, las deformaciones del par de planos y el propio par de planos.

   (c) *Familia del paraguas de Whitney* (II.5): formada por $z^2 - x^2y + y^3 = 0$, las deformaciones del paraguas de Whitney y el propio paraguas.

3. *Solución en el caso polinomial:* utilizando la equivalencia birregular anterior, el hecho de que el plano y la singularidad de Brieskorn poseen la propiedad $\mathcal{P} = \Sigma_2$ y ciertas ecuaciones estándar de sumas de cuadrados, demostramos que todo polinomio *definido positivo* sobre la superficie es suma de dos cuadrados de gérmenes de función analítica.

4. *Solución en el caso general:* extendemos la propiedad anterior de polinomios a gérmenes de función analítica utilizando el Teorema de Aproximación de M. Artin ([Ku *et al*, II], [M.Ar]), que enunciamos a continuación.

   Teorema 0.10 *Sean* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *y* $F = (F_1, \dots, F_r) \in \mathbb{K}\{x\}[y]^r$*,* $x = (x_1, \dots, x_n)$*,* $y = (y_1, \dots, y_m)$ *un sistema de polinomios. Entonces existe una función* $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *con la siguiente propiedad:*

   > Para cada $c \geq 1$, si $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_m) \in \mathbb{K}\{x\}^m$ cumple $F(\widehat{y}) \equiv 0 \mod \mathfrak{m}^{\nu(c)}$, entonces existe $y \in \mathbb{K}\{x\}^m$ tal que $F(y) = 0$ e $y \equiv \widehat{y} \mod \mathfrak{m}^c$.

Para el par de planos y el paraguas de Whitney, la nueva demostración es una especie de *paso al límite* del resultado que cumplen sus deformaciones.

Señalamos que primero trataremos el cono de forma independiente (II.1). Lo hacemos por dos motivos: *(i)* esta demostración directa fue anterior en el tiempo e ilustra bien algunas ideas básicas de la reducción polinomial; *(ii)* la demostración se basa en la prueba de Polya ([PoSz]) de que todo polinomio sobre la circunferencia es suma de dos cuadrados de polinomios; nuestro tratamiento directo del cono es una especie de parametrización respecto al radio de este argumento, lo que es tal vez la razón intuitiva más poderosa para esperar el resultado.

Capítulo I

Números de Pitágoras

1 Sumas de dos cuadrados en dos variables

El objetivo de esta sección es demostrar que todo elemento semidefinido positivo (=psd) de $\mathbb{R}\{x\}[y]$ se puede expresar como suma de dos cuadrados de elementos de $\mathbb{R}\{x\}[y]$.

Notaciones 1.1 Dado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, denotaremos por $\Omega_{\mathbb{K}}$ al anillo de series de Puiseux convergentes con coeficientes en $\mathbb{K}$, por $\Phi_{\mathbb{K}}$ a su cuerpo de fracciones y por $\mathbb{K}(\{x\})$ al cuerpo de fracciones de $\mathbb{K}\{x\}$. Si $\alpha \in \Omega_{\mathbb{K}}$ denotaremos $\mathrm{q}(\alpha) = \min\{n \in \mathbb{N} |\ \alpha \in \mathbb{K}\{x^{1/n}\}\}$ y $\omega(\alpha) = r/n$ si $\alpha = a_r x^{r/n} + a_{r+1} x^{(r+1)/n} + \cdots$; si $\varphi = \frac{\alpha}{\beta} \in \Phi_{\mathbb{K}}$ con $\alpha, \beta \in \Omega_{\mathbb{K}}$ entonces $\mathrm{q}(\varphi) = \min\{n \in \mathbb{N} |\ \alpha \in \mathbb{K}(\{x^{1/n}\}\}) = \mathrm{m.c.m}\{\mathrm{q}(\alpha), \mathrm{q}(\beta)\}$ y $\omega(\varphi) = \omega(\alpha) - \omega(\beta)$

Observación 1.2 El cuerpo $\mathbb{R}(\{x\})$ admite dos únicos órdenes que son los siguientes:

- $(\mathbb{R}(\{x\}), <)$ orden en el que x es positivo y cuyo cierre real es $(\Phi_{\mathbb{R}}, \mathrm{id})$.

  Si $f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots$, entonces $f > 0$ para este orden si y sólo si $a_r > 0$, y $f/g > 0$ si y sólo si $fg > 0$.

- $(\mathbb{R}(\{x\}), \prec)$ orden en el que x es negativo y cuyo cierre real es $(\Phi_{\mathbb{R}}, \sigma)$, siendo $\sigma : \mathbb{R}(\{x\}) \to \Phi_{\mathbb{R}} : f(x) \mapsto f(-x)$.

  Si $f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots$, entonces $f \succ 0$ para este orden si y sólo si $(-1)^r a_r > 0$, y $f/g \succ 0$ si y sólo si $fg \succ 0$.

La unicidad de estos órdenes es debida a que todo elemento $f \in \mathbb{R}\{x\}$ admite una expresión del tipo $f = \varepsilon x^p g^2$ siendo $\varepsilon = \pm 1, p = 0, 1, g \in \mathbb{R}\{x\}$.

Proposición 1.3 *Sea $f \in \mathbb{R}(\{x\})[y], f \neq 0$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) f es un elemento psd del anillo $\mathbb{R}(\{x\})[y]$.

b) f es un elemento psd del cuerpo $cf(\mathbb{R}\{x\}[y])$.

c) Existen $r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ tales que $x^{2r}f \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ y está definida y es ≥ 0 en la región $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$.

d) Para cada $\xi \in \Phi_{\mathbb{R}}$ las series de Puiseux $f(x, \xi)$, $f(-x, \xi)$ son elementos positivos de $\Phi_{\mathbb{R}}$.

Demostración.
Vamos a probar la siguiente cadena de implicaciones *a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* $\Rightarrow$ *d)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *a)*.

a) $\Rightarrow$ *b)* Trivial.

b) $\Rightarrow$ *c)* Como f es psd en $cf(\mathbb{R}\{x\}[y])$, entonces $f \geq 0$ en todos los órdenes de este cuerpo y por tanto, es suma de cuadrados ([BCR, 1.1.11]); con lo que existen $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $b \neq 0$ tales que

$$b^2 f = a_1^2 + \cdots + a_m^2.$$

Luego existen $\varepsilon > 0$ y $r \in \mathbb{N}$ tales que $x^{2r}f \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ y $b^2 f \geq 0$ en la región $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$, $x \neq 0$. De esta forma, como $b \neq 0$ se deduce que $x^{2r}f$ es, por continuidad, ≥ 0 en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$.

c) $\Rightarrow$ *d)* Sea $\xi \in \Phi_{\mathbb{R}}$. Si $f(x, \xi) = 0$ ya hemos terminado, por tanto podemos suponer que $f(x, \xi) \neq 0$. Existen series $h_1, h_2 \in \mathbb{R}\{t\}$, $q \in \mathbb{N}$ y $0 < \delta < \varepsilon^{1/q}$ tales que $\xi = \frac{h_1(x^{1/q})}{h_1(x^{1/q})} \in \Phi_{\mathbb{R}}$, $q = \mathrm{q}(\xi)$ y las series h_1, h_2 convergen en el intervalo $(0, \delta)$. Como $x^{2r}f \geq 0$ en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$ entonces para $0 < t = x^{1/q} < \delta$ se cumple que

$$t^{2rq} f\left(t^q, \frac{h_1(t)}{h_2(t)}\right) = \frac{a_r t^r + a_{r+1}t^{r+1} + \cdots}{t^s} \quad \text{con } r, s \geq 0$$

y por tanto $a_r > 0$, con lo que

$$f(x, \xi) = \frac{a_r x^{r/q} + a_{r+1}x^{(r+1)/q} + \cdots}{x^{2r+(s/q)}} \geq 0$$

Análogamente, $f(-x, \xi) \geq 0$.

d) $\Rightarrow$ *b)* Supongamos ahora que existe un orden en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ tal que $f < 0$,. Entonces, por el Teorema de Artin-Lang, véase por ejemplo [La, XI], existe un $\mathbb{R}(\{x\})$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{R}(\{x\})[y] \to \Phi_{\mathbb{R}}$ tal que $\varphi(f) < 0$. Ahora, por la descripción en I.1.2 de los dos únicos órdenes de $\mathbb{R}(\{x\})$ y sus respectivos cierres reales, si $\varphi(y) = \xi$, resulta que $\varphi(f) = f(\varepsilon x, \xi) < 0$ con $\varepsilon = \pm 1$, contradicción.

b) $\Rightarrow$ *a)* Sea $\alpha = (\mathfrak{p}_\alpha, \leq_\alpha)$ un cono primo del anillo $\mathbb{R}(\{x\})[y]$, veamos que α induce un orden en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ y por tanto, en su cuerpo de fracciones. Recordamos que $\mathfrak{p}_\alpha$ es un ideal primo de $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ y que $\leq_\alpha$ es un orden del cuerpo residual $\kappa(\alpha) = cf(R(\{x\})[y]/\mathfrak{p}_\alpha)$. En efecto, como $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ es un DIP entonces existe $P_\alpha \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$ polinomio mónico irreducible tal que $\mathfrak{p}_\alpha = (P_\alpha)$. Sea, ahora, $g \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $g \neq 0$; al ser $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ un DIP y en particular un DFU, entonces existen $k(g) \in \mathbb{N}$ y $h_g \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$ tales que $g = h_g P_\alpha^{k(g)}$ y $P_\alpha \nmid h_g$. De esta forma, decimos que $g \geq_\alpha 0$ si $h_g + \mathfrak{p}_\alpha \geq_\alpha 0$ como elemento de $\kappa(\alpha)$.

Es claro que $\geq_\alpha$ es un orden de $\mathbb{R}(\{x\})[y]$, y así, como f es psd en $cf(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ entonces $f \geq_\alpha 0$ y por tanto $f + \mathfrak{p}_\alpha \geq_\alpha 0$, es decir, $f(\alpha) \geq 0$. Como esto ocurre para todo cono primo de $\mathbb{R}(\{x\})[y]$, entonces f es psd en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$. ■

Para demostrar el resultado que anunciabamos al inicio de esta sección, necesitamos el siguiente lema previo.

Lema 1.4 *Sea $P \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$. Entonces, si $\xi = g(x^{1/q})$, $q = \mathrm{q}(\xi)$, es raíz de P se cumple que $\eta_k = g(e^{k\pi i/q}x^{1/q})$ es raíz de $P((-1)^k x, y)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como ξ es raíz de P, si hacemos $t = x^{1/q}$ obtenemos que:

$$P(t^q, g(t)) = P(x, g(x^{1/q})) = P(x, \xi) = 0$$

Consideramos ahora η_k para $k \in \mathbb{N}$. Si hacemos $s = e^{k\pi i/q}x^{1/q}$ resulta

$$P((-1)^k x, \eta_k) = P((-1)^k x, g(e^{k\pi i/q}x^{1/q})) = P(s^q, g(s)) = 0,$$

como pretendíamos. ■

Definición y Proposición 1.5 *Para cada $\xi \in \Phi_\mathbb{C}$, escrita como $\xi = x^{p/q}(a_0 + a_1 x^{1/r} + a_2 x^{2/r} + \cdots)$ con $p/q \in \mathbb{Q}$ y $a_0 + a_1 x^{1/r} + a_2 x^{2/r} + \cdots \in \mathbb{C}\{x^{1/r}\}$, se define la serie conjugada de ξ como*

$$\overline{\xi} = x^{p/q}(\overline{a_0} + \overline{a_1}x^{1/r} + \overline{a_2}x^{2/r} + \cdots).$$

De esta forma la aplicación $\sigma(\xi) = \overline{\xi}$ es un automorfismo de $\Phi_\mathbb{C}$, cuyo cuerpo fijo es $\Phi_\mathbb{R}$.

Teorema 1.6 *$\mathcal{P}(\mathbb{R}\{x\}[y]) = \Sigma_2(\mathbb{R}\{x\}[y])$.*

Demostración. Sea $f = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\{x\}[y])$. Como $f \geq 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que f esta definida y es psd en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$. Vamos a demostrar en varias etapas que $f \in \Sigma_2(\mathbb{R}\{x\}[y])$:

Paso I: Veamos que $\mathrm{grad}_y(f)$ es par y que $a_n \geq 0$ en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. De esta forma, en particular, $a_n = u^2$ con $u \in \mathbb{R}\{x\}$.

En efecto, sea $x_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $a_n(x_0) \neq 0$, entonces el polinomio $f(x_0, y) = a_n(x_0)y^n + a_{n-1}(x_0)y^{n-1} + \cdots + a_1(x_0)y + a_0(x_0)$ es ≥ 0 en $\mathbb{R}$ y tiene grado n. Pero, para $|y|$ suficientemente grande se cumple que $\mathrm{sign}(f(x_0, y)) = \mathrm{sign}(a_n(x_0)y^n)$ de donde se deduce que n es par y $a_n(x_0) > 0$. Por tanto, $\mathrm{grad}_y(f)$ es par y $a_n \geq 0$ en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Paso II: Consideramos el polinomio

$$g = \frac{f}{a_n} = y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0 \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$$

siendo $b_j = \frac{a_j}{a_n}$. La descomposición en polinomios irreducibles de g en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ es de la forma:

$$g = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{2\lambda_i+1} \prod_{j=1}^{s} P_j^{2\mu_j} = \left(\prod_{i=1}^{r} Q_i^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{s} P_j^{\mu_j} \right)^2 \prod_{i=1}^{r} Q_i = H^2 \prod_{i=1}^{r} Q_i$$

siendo $\lambda_j, \mu_j \geq 0$, Q_i, P_j polinomios mónicos irreducibles del anillo $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ (todos distintos) y $H = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{s} P_j^{\mu_j}$.

Para demostrar que $f \in \Sigma_2(\mathbb{R}\{x\}[y])$ vamos a comprobar que cada $Q_i = A_i^2 + B_i^2$ siendo $A_i, B_i \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$ ya que entonces

$$\begin{aligned} f = a_n H^2 \prod_{i=1}^{r} Q_i = a_n H^2 \prod_{i=1}^{r} (A_i^2 + B_i^2) &= a_n H^2 (A^2 + B^2) \\ &= u^2 H^2 (A^2 + B^2) = (uHA)^2 + (uHB)^2, \end{aligned}$$

siendo $A^2 + B^2 = \prod_{i=1}^{r} (A_i^2 + B_i^2)$, $A, B \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$. Además,

$$0 \leq \omega_x(f) = 2 \min\{\omega_x(uHA), \omega_x(uHB)\}$$

con lo que $\omega_x(uHA), \omega_x(uHB) \geq 0$ y por tanto $uHA, uHB \in \mathbb{R}\{x\}[y]$, lo que hace que $f \in \Sigma_2(\mathbb{R}\{x\}[y])$.

Paso III: Veamos, pues, que $Q_i = A_i^2 + B_i^2$ con $A_i, B_i \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$.

En primer lugar, Q_i no tiene raíces en $\Phi_{\mathbb{R}}$. Supongamos que Q_i tiene una raíz $\xi \in \Phi_{\mathbb{R}}$; como cada Q_i es irreducible sobre $\mathbb{R}(\{x\})$, entonces ξ es una raíz de multiplicidad impar de g y por tanto de f. Pero esto es imposible ya que:

- Si $\omega(\xi) > 0$ entonces f no es psd en un entorno del origen.
- Si $\omega(\xi) = 0$ entonces $\xi = c_0 + \zeta$ siendo $c_0 \in \mathbb{R}, \omega(\zeta) > 0$ con lo que f no es psd en un entorno del punto $(0, c_0)$.
- Si $\omega(\xi) < 0$ entonces el polinomio $w^n f(x, 1/w)$ es psd y tiene una raíz de multiplicidad impar en $\Omega_{\mathbb{R}}$, y esto ya hemos visto que es una contradicción.

Por tanto, Q_i no tiene raíces en $\Phi_{\mathbb{R}}$.

En segundo lugar, Q_i es reducible sobre $\mathbb{C}(\{x\})[y]$. Supongamos que Q_i fuera irreducible; como $Q_i \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$, si ξ es raíz de Q_i también lo es $\overline{\xi}$. Además, por [Che, 8.3],

al ser Q_i irreducible sobre $\mathbb{C}(\{x\})[y]$, se cumple que si $\xi = g(x^{1/q})$ con $q = \mathrm{q}(\xi)$ es raíz de Q_i, entonces
$$Q_i = \prod_{j=0}^{q-1}(y - g(e^{2j\pi i/q}x^{1/q})).$$
Como $\overline{\xi}$ es raíz de Q_i entonces existe $j \in \{0, \dots, q-1\}$ tal que $\overline{\xi} = g(e^{2j\pi i/q}x^{1/q})$ y por tanto $\overline{g(s)} = g(e^{2j\pi i/q}s)$. Por I.1.4, $\eta_k = g(e^{k\pi i/q}x^{1/q})$ es raíz de $Q_i((-1)^k x, y)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Ahora
$$\overline{\eta_j} = \overline{g(e^{j\pi i/q}x^{1/q})} = \overline{g}(\overline{e^{j\pi i/q}}x^{1/q}) = \\ g(e^{2j\pi i/q}(e^{-j\pi i/q}x^{1/q})) = g(e^{(2j-j)\pi i/q}x^{1/q}) = g(e^{j\pi i/q}x^{1/q}) = \eta_j.$$
Así $\eta_j \in \Phi_{\mathbb{R}}$ y es raíz de $Q_i((-1)^j x, y)$, y por tanto raíz de multiplicidad impar de $f((-1)^j x, y)$ en $\Phi_{\mathbb{R}}$, lo que es imposible, como ya hemos visto, porque $f((-1)^j x, y)$ es ≥ 0 en $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, Q_i es reducible en $\mathbb{C}(\{x\})[y]$: $Q_i = R_i S_i$, siendo R_i el irreducible de ξ y S_i el irreducible de $\overline{\xi}$, y tales que $S_i = \overline{R_i}$. Así $Q_i = R_i\overline{R_i} = A^2 + B^2$ con $R_i = A_i + \sqrt{-1}B_i$ y $A_i, B_i \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$. ■

2 Diagonalización sobre dos variables

El objetivo de esta sección es demostrar que las formas cuadráticas semidefinidas positivas sobre $\mathbb{R}\{x\}[y]$ son diagonalizables y, como consecuencia, que un anillo A que es un módulo con n generadores sobre $\mathbb{R}\{x\}[y]$ o $\mathbb{R}\{x, y\}$ cumple $p(A) \leq 2n$.

La demostración de este resultado esta basada en las ideas desarrolladas por Djoković en [Dj] para demostrar que dada una matriz $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}[x])$ psd existen $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}[x])$ tales $a = b_1^t b_1 + b_2^t b_2$. En lo sucesivo, una matriz diagonal a se denotará $a = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ siendo $a_1, \dots, a_n$ los elementos de la diagonal principal de a. Utilizaremos el siguiente resultado básico de dominios de ideales principales ([Hu, VII.2]):

Teorema 2.1 *Sean R un dominio de ideales principales y $a \in \mathfrak{M}_n(R)$ una matriz de rango r. Entonces existen dos matrices invertibles u, v y una diagonal*
$$e = \langle e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0\rangle,$$
tales que $e_1|e_2|\dots|e_r$ y $a = uev$; además, los ideales $(e_1), (e_2), \dots, (e_r)$ son únicos, y los elementos $e_1, e_2, \dots, e_r$ de la diagonal de e se llaman factores invariantes de a. *La matriz diagonal $e = \langle e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0\rangle$ es una* matriz de factores invariantes de a.

Dada una matriz $a = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ con coeficientes en $\mathbb{C}(\{x\})[y]$ consideramos su *traspuesta conjugada* $a^* = \overline{a^t} = (\overline{a_{ji}})_{1\leq i,j\leq n}$. A lo largo de toda la sección utilizaremos frecuentemente que $\mathbb{C}(\{x\})[y]$ es un dominio de factorización única (DFU). Empezamos con el siguiente lema.

Lema 2.2 *Sea a una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}(\{x\})[y]$ de rango r tal que $a = a^*$. Entonces existen $a_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ y $u \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ invertible, tales que $a = u^* \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$ y $\det(a_1) \neq 0$.*

Demostración. Si $a = uev$ como en el teorema anterior, entonces $a = uev(u^*)^{-1}u^* = uepu^*$ con $p = v(u^*)^{-1}$ invertible. Como $a = a^*$ entonces $ep = p^*e^*$ y como $e = \langle e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0\rangle$ es diagonal, tenemos

$$ep = \begin{pmatrix} e_1p_{11} & e_1p_{12} & \cdots & e_1p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_rp_{r1} & e_rp_{r2} & \cdots & e_rp_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{p_{11}e_1} & \cdots & \overline{p_{r1}e_r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \overline{p_{n1}e_1} & \cdots & \overline{p_{rn}e_r} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = p^*e^*$$

y por tanto $p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ * & p_2 \end{pmatrix}$ siendo p_1 y p_2 matrices invertibles; pues $\det p = \det p_1 \det p_2 \neq 0$, al ser p invertible. De este modo, si $e' = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ entonces $ep = \begin{pmatrix} e'p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\det(e'p_1) = \det(e')\det(p_1) \neq 0$. Además, e' es una matriz de factores invariantes de $a_1 = I_re'p_1$. ∎

Observación 2.3 Sea a una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}(\{x\})[y]$ tal que $a = a^*$; entonces podemos suponer que los factores invariantes de a son elementos de $\mathbb{R}(\{x\})[y]$.

En efecto, por I.2.1 existen dos matrices invertibles u, v y una matriz diagonal $e = \langle e_1, \ldots, e_r, 0, \ldots, 0\rangle$ de factores invariantes, tales que $a = uev$. Como $a = a^* = v^*e^*u^*$ entonces $e^* = \langle \overline{e_1}, \ldots, \overline{e_r}, 0, \ldots, 0\rangle$ es también una matriz de factores invariantes de a, con lo que $(e_i) = (\overline{e_i})$ para $i = 1, \ldots, r$. De este modo, para cada i existe $u_i \in \mathbb{C}\{x\}$, $u_i \neq 0$ tal que $\overline{e_i} = u_ie_i$. Es sencillo comprobar que $u_i\overline{u_i} = 1$, con lo que u_i es de hecho una unidad de $\mathbb{C}\{x\}$ y así, existe $w_i \in \mathbb{C}\{x\}$ tal que $w_i^2 = u_i$, y en particular $w_i\overline{w_i} = 1$. Ahora,

$$\overline{w_ie_i} = \overline{w_i e_i} = \overline{w_i}u_ie_i = (\overline{w_i}w_i)\, w_ie_i = w_ie_i.$$

Consideramos, finalmente, la matriz diagonal $\widehat{e} = \langle w_1e_1, \ldots, w_re_r, 0, \ldots, 0\rangle$ y la matriz invertible $q = \langle \overline{w_1}, \ldots, \overline{w_r}, 1, \ldots, 1\rangle$. Entonces,

(i) $a = u\widehat{e}(qv)$

(ii) $\widehat{e}$ es una matriz de factores invariantes de a con coeficientes en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$.

Definiciones 2.4 *Sea a una matriz con coeficientes en $\mathbb{K}(\{x\})[y]$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces:*

- *Si $a = a^*$, para cada $z \in \mathbb{K}(\{x\})^n$ se tiene que $z^*az \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$. Decimos que $a \geq 0$ si y sólo si $z^*az \geq 0$, es decir, es psd en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ (I.1.3) para cada $z \in \mathbb{K}(\{x\})^n$.*
- *Decimos que a es* anisótropa *si para cada $z \in \mathbb{K}(\{x\})^n, z \neq 0$, se cumple que $z^*az \neq 0$.*

Observaciones 2.5 (a) Sean $b, c \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $\det(b) \neq 0$ entonces si $a = b^*cb$ se cumple que $a \geq 0$ si y sólo si $c \geq 0$.

En primer lugar, $a \geq 0$ significa en particular que $a = a^*$ y así, como además $\det(b) \neq 0$, se tiene que $c = c^*$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}(\{x\})^n$ y consideramos $y_0 = \operatorname{Adj}(b^t)z_0$. Se tiene

$$0 \leq y_0^*ay_0 = z_0^* \operatorname{Adj}(b^t)^*b^*cb \operatorname{Adj}(b^t)z_0 = \overline{\det(b)} \det(b)z_0^*cz_0 = |\det(b)|^2 z_0^*cz_0.$$

Ahora como $|\det(b)|^2 \neq 0$ concluimos que $z_0^*cz_0 \geq 0$ y así $c \geq 0$. El recíproco es trivial.

(b) Si $a \geq 0$, entonces para cada $z \in \mathbb{C}(\{x\})[y]^n$ se cumple que $z^*az \geq 0$.

En efecto, si $z \in \mathbb{C}(\{x\})[y]^n, z \neq 0$, tomamos $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ una matriz con determinante no nulo cuya primera columna es z. Por la observación anterior $c = b^*ab \geq 0$ y entonces $z^*az = c_{11} \geq 0$.

(c) Si $a = a^* \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ cumple que $\det(a) \neq 0$ y $a \geq 0$, entonces a es anisótropa.

Sean $z_0 \in \mathbb{C}(\{x\})^n, z_0 \neq 0$, y $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\}))$ una matriz invertible, cuya primera columna es z_0. Como $a \geq 0$ y b es invertible, entonces $c = b^*ab \geq 0$ y $\det(c) \neq 0$. Además, $z_0^*az_0 = u_1^*cu_1 = c_{11} \geq 0$ (siendo u_i, el vector cuya coordenada i-ésima es 1 y todas las demás son nulas). Si $c_{11} = 0$ veamos que entonces $c_{1j} = 0$ para $2 \leq j \leq n$ y por tanto $\det(c) = 0$ lo cual es una contradicción. Si existiera $2 \leq j \leq n$ tal que $c_{1j} \neq 0$ (digamos $j = 2$) tomamos $z_0^* = (-\overline{c_{22}} - \frac{1}{2}, c_{12}, 0, \dots, 0) \neq 0$ y, como $c \geq 0$, obtenemos que $z_0^*cz_0 = -(c_{22}+1)|c_{12}|^2 \geq 0$ y por tanto, al ser $c_{12} \neq 0$, tendríamos que $1 + c_{22} \leq 0$ lo que es falso, pues $c_{22} = u_2^*cu_2 \geq 0$.

Lema 2.6 *Sea $\xi \in \Phi_\mathbb{R} \subset \Phi_\mathbb{C}$, entonces el polinomio irreducible de ξ sobre $\mathbb{C}(\{x\})$ pertenece, de hecho, a $\mathbb{R}(\{x\})[y]$.*

Demostración. En efecto, si $\xi \in \Phi_\mathbb{R}$ entonces existe $g \in \mathbb{R}(\{x\})$ tal que $\xi = g(x^{1/q})$ siendo $q = \mathrm{q}(\xi)$, y el irreducible de ξ sobre $\mathbb{C}(\{x\})$ es $Q(x, y) = \prod_{k=0}^{q-1}(y - g(e^{2k\pi i/q}x^{1/q}))$.

Además, se tiene que

$$\overline{Q(x,y)} = \prod_{k=0}^{q-1} \overline{(y - g(e^{2k\pi i/q}x^{1/q}))} = \prod_{k=0}^{q-1}(y - \overline{g(e^{2k\pi i/q}x^{1/q})})$$
$$= \prod_{k=0}^{q-1}(y - g(\overline{e^{2k\pi i/q}}x^{1/q})) = \prod_{k=0}^{q-1}(y - g(e^{-2k\pi i/q}x^{1/q}))$$
$$= \prod_{k=0}^{q-1}(y - g(e^{2(q-k)\pi i/q}x^{1/q})) = Q(x,y)$$

Con lo que, en efecto, $Q \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$. ■

Proposición 2.7 *Sea $a \geq 0$ con $\det(a) \neq 0$ y supongamos que $a = ep$ siendo $e \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ una matriz de factores invariantes de a y $p \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ invertible. Entonces para cada $1 \leq i \leq n$ existe $\varepsilon_i = +1$ o -1 tal que $\varepsilon_i e_i \geq 0$. De este modo, reemplazando e_i por $\varepsilon_i e_i$ podemos suponer que $e_i \geq 0$ para todo i.*

Demostración. Supongamos que existen índices i tales que e_i no es definido, y sea $i = m$ el primero de ellos. Como e_m no es definido, tiene una raíz $\xi \in \Phi_{\mathbb{R}}$ de multiplicidad impar $\lambda(m)$ y, por tanto, el polinomio irreducible Q_m de ξ sobre $\mathbb{C}(\{x\})[y]$ divide a e_m.

Denotamos por $\lambda(k)$ la multiplicidad (posiblemente 0) de ξ como raíz de e_k, es decir, $\lambda(k) = \max\{r \in \mathbb{N} : Q_m^r | e_k\}$. Dado que $e_1, \ldots, e_{m-1} \geq 0$ y $e_1 | \ldots | e_n$, se tiene $\lambda(1) \leq \ldots \leq \lambda(m-1) < \lambda(m) \leq \lambda(m+1) \leq \ldots \leq \lambda(n)$.

Veamos que $Q_m | p_{ij}$ si $1 \leq i \leq m \leq j \leq n$.

En primer lugar, como $a \geq 0$ entonces $a_{mm} = e_m p_{mm} \geq 0$ y así, como $\lambda(m)$ es impar, se tiene que $Q_m | p_{mm}$. Por otro lado, como

$$ep = \begin{pmatrix} e_1p_{11} & e_1p_{12} & \ldots & e_1p_{1m} & \ldots & e_1p_{1n} \\ e_2p_{21} & e_2p_{22} & \ldots & e_2p_{2m} & \ldots & e_2p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_mp_{m1} & e_mp_{m2} & \ldots & e_mp_{mm} & \ldots & e_mp_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_np_{n1} & e_np_{n2} & \ldots & e_np_{nm} & \ldots & e_np_{nn} \end{pmatrix}$$

y $ep = p^*e^*$ entonces $e_i p_{ij} = \overline{e_j p_{ji}} = e_j \overline{p_{ji}}$ y así, si $i < m \leq j$ se obtiene que $Q_m | p_{ij}$, ya que $\lambda(i) < \lambda(m) \leq \lambda(j)$.

Veamos ahora que si $i = m < j$ entonces $Q_m | p_{mj}$. En efecto, como $ep \geq 0$ si

$$v_j(\rho,\mu) = (0, \ldots, 0, \overset{(m)}{\rho}, 0, \ldots, 0, \overset{(j)}{\mu}, 0, \ldots, 0)$$

con $\rho, \mu \in \mathbb{C}(\{x\})[y]$ se tiene que

$$0 \leq v_j(\rho,\mu)^* e p v_j(\rho,\mu) = (\overline{\rho}, \overline{\mu}) \begin{pmatrix} e_m p_{mm} & e_m p_{mj} \\ e_j p_{jm} & e_j p_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} = (\overline{\rho}, \overline{\mu}) \begin{pmatrix} e_m p_{mm} & e_m p_{mj} \\ e_m \overline{p_{mj}} & e_j p_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}$$

Ahora, por I.2.5 (b), si tomamos $\rho = -e_m p_{mj}, \mu = e_m p_{mm}$ obtenemos

$$e_m \overline{p_{mm}} (e_m p_{mm} e_j p_{jj} - e_m^2 p_{mj} \overline{p}_{mj}) \geq 0.$$

Además, como $a = ep \geq 0$ y $\det(a) \neq 0$ entonces por I.2.5 (c) a es anisótropa. Por tanto, se tiene que $e_m p_{mm} \neq 0$ y $e_m p_{mm} \geq 0$ con lo que $e_m p_{mm} e_j p_{jj} - e_m^2 p_{mj} \overline{p}_{mj} \geq 0$.

De esta forma, como $e_m | e_j$ se tiene que $e_j = e_m d_j$ y así $d_j p_{mm} p_{jj} - |p_{mj}|^2 \geq 0$. Ahora, como ξ es raíz de p_{mm} entonces $-|p_{mj}(\xi)|^2 \geq 0$, con lo que $|p_{mj}(\xi)|^2 = 0$, lo que implica que $Q_m | p_{mj}$ o $Q_m | \overline{p_{mj}}$ (pues Q_m es irreducible). Pero, como $\xi \in \Phi_{\mathbb{R}}$ entonces (por I.2.6) $Q_m \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$ y por tanto $Q_m | p_{mj}$.

Finalmente, como

$$p(\xi) = \begin{pmatrix} p_{11}(\xi) & \dots & p_{1,m-1}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m-1,1}(\xi) & \dots & p_{m-1,m-1}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ p_{m1}(\xi) & \dots & p_{m,m-1}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ p_{m+1,1}(\xi) & \dots & p_{m+1,m-1}(\xi) & p_{m+1,m}(\xi) & \dots & p_{m+1,n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(\xi) & \dots & p_{n,m-1}(\xi) & p_{nm}(\xi) & \dots & p_{nn}(\xi) \end{pmatrix}$$

se tiene que $\det(p)(\xi) = \det(p(\xi)) = 0$, ya que las m primeras filas son linealmente dependientes. Sin embargo, como p es invertible entonces $\det(p) = g \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$ y por tanto, $0 = \det(p)(\xi) = g$, contradicción. ■

Lema 2.8 *Sean $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$ tales que $e_1 | e_2 | \dots | e_n$ y $e_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces existen $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{C}(\{x\})[y]$ tales que $l_1 | \dots | l_n$ y $e_i = l_i \overline{l_i}$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Para demostrarlo vamos a proceder por inducción:

Para $n = 1$, como $e_1 \geq 0$ entonces $e_1 = \frac{d_1}{t^{2r_1}}$ con $r_1 \geq 0$, $d_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\{x\}[y])$. Por I.1.6, $d_1 \in \Sigma_2(\mathbb{R}\{x\}[y])$ y existen $\xi_1, \eta_1 \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ tales que $d_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2$, y, por tanto, $e_1 = \frac{\xi_1}{t^{r_1}}^2 + \frac{\eta_1}{t^{r_1}}^2$. De este modo, basta tomar $l_1 = \frac{\xi_1}{t^{r_1}} + i\frac{\eta_1}{t^{r_1}}$.

Supongamos el resultado cierto para $n-1$: existen $l_1, \dots, l_{n-1} \in \mathbb{C}(\{x\})[y]$ tales que $l_1 | \dots | l_{n-1}$ y $e_i = l_i \overline{l_i}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces, como $e_{n-1} | e_n$ tenemos $e_n = e_{n-1} v_n$ y así, como $e_{n-1}, e_n \geq 0$, también $v_n \geq 0$. Por ello, al igual que antes, $v_n = q_n \overline{q_n}$ con $q_n \in \mathbb{C}(\{x\})[y]$. De esta forma, $e_n = l_{n-1} \overline{l_{n-1}} q_n \overline{q_n} = (l_{n-1} q_n)(\overline{l_{n-1} q_n})$ y basta tomar $l_n = l_{n-1} q_n$. ■

Teorema 2.9 *Sea* $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ *tal que* $a \geq 0$ *y* $\det(a) \neq 0$. *Entonces existen* $b, c \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ *tales que* $\det(b) \neq 0$, c *es invertible,* $c \geq 0$ *y* $a = b^*cb$.

Demostración. Por I.2.2, I.2.3 y I.2.7 existen $u, p \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ invertibles y $e \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ matriz de factores invariantes de a tal que $a = u^*epu$ y los elementos de la diagonal de e son psd. De esta forma, por I.2.8 existen $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{C}(\{x\})[y]$ tales que $l_1|\ldots|l_n$ y $e_i = l_i\overline{l_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Así construimos la matriz $l = \langle l_1, \ldots, l_n\rangle$ que cumple que $e = l^*l$ y $l_1|l_2|\ldots|l_n$. Como $ep = p^*e^*$ entonces

$$ep = l^*lp = \begin{pmatrix} \overline{l_1}l_1p_{11} & \overline{l_1}l_1p_{12} & \ldots & \overline{l_1}l_1p_{1n} \\ \overline{l_2}l_2p_{21} & \overline{l_2}l_2p_{22} & \ldots & \overline{l_2}l_2p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{l_n}l_np_{n1} & \overline{l_n}l_np_{n2} & \ldots & \overline{l_n}l_np_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{l_1}l_1\overline{p_{11}} & \overline{l_2}l_2\overline{p_{21}} & \ldots & \overline{l_n}l_n\overline{p_{n1}} \\ \overline{l_1}l_1\overline{p_{12}} & \overline{l_2}l_2\overline{p_{22}} & \ldots & \overline{l_n}l_n\overline{p_{n2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{l_1}l_1\overline{p_{1n}} & \overline{l_2}l_2\overline{p_{2n}} & \ldots & \overline{l_n}l_n\overline{p_{nn}} \end{pmatrix} = p^*l^*l = p^*e^*$$

Nuestro objetivo es encontrar una matriz $q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que

$$l^*lp = l^*ql = \begin{pmatrix} \overline{l_1}q_{11}l_1 & \overline{l_1}q_{12}l_2 & \ldots & \overline{l_1}q_{1n}l_n \\ \overline{l_2}q_{21}l_1 & \overline{l_2}q_{22}l_2 & \ldots & \overline{l_2}q_{2n}l_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{l_n}q_{n1}l_1 & \overline{l_n}q_{n2}l_2 & \ldots & \overline{l_n}q_{nn}l_n \end{pmatrix}$$

Igualando las dos expresiones anteriores, y teniendo en cuenta que $l_1|l_2|\ldots|l_n$, se deduce

$$q_{ij} = \begin{cases} \overline{p_{ji}\frac{l_j}{l_i}} & \text{si } i < j \\ p_{ii} & \text{si } i = j \\ p_{ij}\frac{l_i}{l_j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

Finalmente, como

$$\det(e)\det(p) = \det(ep) = \det(l^*ql) = \det(l^*)\det(q)\det(l) = \det(e)\det(q)$$

y $\det(e) \neq 0$, entonces $\det(p) = \det(q)$ y, por tanto, q es invertible.

Si tomamos $b = lu$ y $c = q$ obtenemos el resultado deseado. ■

A continuación vamos a demostrar que todo elemento $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ que es invertible y psd admite una expresión del tipo $a = b^*b$ siendo $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$. Para ello procederemos de forma análoga a la utilizada por Djoković en [Dj]. Empezamos con unos preliminares:

Definición 2.10 *Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$, decimos que a tiene diagonal dominante si $a_{ii} \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ y para $i \neq j$ se tiene*

$$\mathrm{grad}_y(a_{ii}) > \mathrm{grad}_y(a_{ij}),$$

(si $\mathrm{grad}_y(a_{ii}) = 0$, esto significa $a_{ij} = 0$).

Observaciones 2.11 (a) Si a tiene diagonal dominante, entonces

$$\mathrm{grad}_y(\det(a)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}_y(a_{ii})$$

y, en particular, $\det(a) \neq 0$.

En efecto, $\det(a) = a_{11} \dots a_{nn} + \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ y como a tiene diagonal dominante $\mathrm{grad}_y(a_{11} \dots a_{nn}) > \mathrm{grad}_y\left(\sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}\right)$, con lo que

$$\mathrm{grad}_y(\det(a)) = \mathrm{grad}_y(a_{11} \dots a_{nn}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}_y(a_{ii})$$

(b) Una matriz $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})) \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ con diagonal dominante es, de hecho, diagonal.

Lema 2.12 *Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ una matriz con diagonal dominante y sea W_k el $\mathbb{C}(\{x\})$-subespacio de $\mathfrak{M}_{n\times k}(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ formado por las matrices $\mathtt{z}$ tales que $\mathrm{grad}_y(\mathtt{z}_{ij}) < \mathrm{grad}_y(a_{ii})$ $\forall i, j$. Entonces $\mathfrak{M}_{n\times k}(\mathbb{C}(\{x\})[y]) = a\ \mathfrak{M}_{n\times k}(\mathbb{C}(\{x\})[y]) \oplus W_k$.*

Demostración. Es suficiente con probar el caso $k = 1$, es decir, que

$$\mathbb{C}(\{x\})[y]^n = a\ \mathbb{C}(\{x\})[y]^n \oplus W$$

donde $W = W_1$.

En primer lugar, observamos que si $\mathtt{z} \in \mathbb{C}(\{x\})[y]^n \setminus \{0\}$ entonces $\mathtt{y} = a\mathtt{z} \notin W$.

En efecto, sea $1 \leq r \leq n$ tal que $\mathtt{z}_r \neq 0$ y $\mathrm{grad}_y(\mathtt{z}_r) \geq \mathrm{grad}_y(\mathtt{z}_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como a tiene diagonal dominante entonces para $i \neq r$

$$\mathrm{grad}_y(a_{ri}\mathtt{z}_i) \leq \mathrm{grad}_y(a_{ri}) + \mathrm{grad}_y(\mathtt{z}_r) < \mathrm{grad}_y(a_{rr}\mathtt{z}_r)$$

y por tanto, como $\mathtt{y}_r = a_{r1}\mathtt{z}_1 + a_{r2}\mathtt{z}_2 + \dots + a_{rr}\mathtt{z}_r + \dots + a_{rn}\mathtt{z}_n$ se tiene que $\mathrm{grad}_y(\mathtt{y}_r) = \mathrm{grad}_y(a_{rr}\mathtt{z}_r) \geq \mathrm{grad}_y(a_{rr})$, con lo que $\mathtt{y} \notin W$.

Esto muestra ya que $a\ \mathbb{C}(\{x\})[y]^n \cap W = \{0\}$ y para completar la demostración veamos ahora que $a\ \mathbb{C}(\{x\})[y]^n + W = \mathbb{C}(\{x\})[y]^n$.

Para cada $d \in \mathbb{N}$ sea $W(d)$ el $\mathbb{C}(\{x\})$-subespacio de $\mathbb{C}(\{x\})[y]^n$ formados por todos los vectores $\mathtt{z} \in \mathbb{C}(\{x\})[y]^n$ cuyas coordenadas $\mathtt{z}_i$ satisfacen que $\text{grad}_y(\mathtt{z}_i) < \text{grad}_y(a_{ii}) + d$ para $1 \leq i \leq n$. Claramente:

$$W = W(0) \subset W(1) \subset W(2) \subset \cdots \quad \text{y} \quad \dim_{\mathbb{C}(\{x\})}(W(d+1)/W(d)) = n$$

Como cada $\mathtt{z} \in \mathbb{C}(\{x\})[y]^n$ está en algún $W(d)$ basta ver que $W(d+1) \subset a\ \mathbb{C}(\{x\})[y]^n + W(d)$.

Sea e_i el vector tal que todas sus coordenadas son nulas excepto la i-ésima que es 1. Como $\det(a) \neq 0$, los vectores $\{ae_1, ae_2, \ldots, ae_n\}$ son $\mathbb{C}(\{x\})$-linealmente independientes y $\mathtt{t} = \sum_i \lambda_i a e_i = a\left(\sum_i \lambda_i e_i\right) \notin W$, entonces el $\mathbb{C}(\{x\})$-subespacio vectorial de $a\mathbb{C}(\{x\})[y]^n \cap W(d+1) \subset \mathbb{C}(\{x\})[y]^n$ generado por $\{y^d ae_1, y^d ae_2, \ldots, y^d ae_n\}$ corta a $W(d)$ únicamente en el origen. Por tanto, como $\dim_{\mathbb{C}(\{x\})}(W(d+1)/W(d)) = n$ entonces se obtiene que $W(d+1) \subset a\ \mathbb{C}(\{x\})[y]^n + W(d)$. ■

Teorema 2.13 *Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ una matriz anisótropa tal que $a = a^*$. Entonces existen $u, d \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$, u invertible y d con diagonal dominante, tales que $a = u^* du$.*

Demostración. Como el resultado es trivial para $n = 1$, supondremos que $n \geq 2$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los pares $(b, s) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y]) \times \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que:

1. b es congruente con a: existe $u \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ invertible tal que $b = u^* a u$. En particular $b = b^*$.
2. $0 \leq \text{grad}_y(b_{11}) \leq \text{grad}_y(b_{22}) \leq \ldots \leq \text{grad}_y(b_{ss})$ y, si $s > 1$, la submatriz $b \in \mathfrak{M}_{s-1}(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ en la esquina superior izquierda de a tiene diagonal dominante.

   En el caso en el que $s = 1$, esto se reduce a que $b_{11} \neq 0$

Es claro que $\mathcal{S}$ es no vacío, ya que como a es anisótropa, entonces $a_{11} \neq 0$ y por tanto $(a, 1) \in \mathcal{S}$. Ahora definimos en $\mathcal{S}$ la siguiente relación equivalencia:

$$(b, s) \sim (c, r) \text{ si y sólo si } s = r \text{ y } \text{grad}_y(b_{ii}) = \text{grad}_y(c_{ii}) \text{ para } 1 \leq i \leq r.$$

Denotemos por $\mathcal{R}$ al conjunto cociente $\mathcal{S}/\sim$, y por $[b, s]$ a sus elementos. Dados dos elementos $[b, s]$ y $[c, r]$ de $\mathcal{R}$ diremos que $[b, s] \leq [c, r]$ si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

1. Existe $k \leq \min\{s, r\}$ tal que $\text{grad}_y(b_{ii}) = \text{grad}_y(c_{ii})$ para $1 \leq i < k$ y $\text{grad}_y(b_{kk}) < \text{grad}_y(c_{kk})$.
2. $s \geq r$ y $\text{grad}_y(b_{ii}) = \text{grad}_y(c_{ii})$ para $1 \leq i \leq r$

La relación $\leq$ está bien definida y es, de hecho, una relación de orden en $\mathcal{R}$. Además, toda cadena decreciente $[b_1, s_1] > [b_2, s_2] > \cdots$ en $\mathcal{R}$ es necesariamente finita, con lo que $\mathcal{R}$ es inductivo y, por el lema de Zorn, tiene un elemento minimal que denotaremos por $[b, s]$, siendo (b, s) uno cuaquiera de sus representantes.

En primer lugar, vamos a demostrar que necesariamente $s > 1$. Supongamos que $s = 1$, entonces $\mathrm{grad}_y(b_{22}) < \mathrm{grad}_y(b_{11})$ porque si no $[b, 2] \in \mathcal{R}$ y $[b, 2] < [b, 1]$. Sea b' la matriz que se obtiene a partir de b intercambiando las dos primeras filas de b y después las dos primeras columnas. Entonces $[b', 1] \in \mathcal{R}$ y $[b', 1] < [b, 1]$, lo cual es una contradicción. Por, tanto $s > 1$.

Dividimos la matriz b en submatrices de la siguiente manera

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2^* & b_3 \end{pmatrix}, \quad b_1 \in \mathfrak{M}_{s-1}(\mathbb{C}(\{x\})[y]),$$

donde b_1 tiene diagonal dominante. Por I.2.12, existe $\mathtt{z} \in \mathfrak{M}_{(s-1)\times(n-s+1)}(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ e $\mathtt{y} \in W$ tal que $b_2 = b_1\mathtt{z} + \mathtt{y}$. Sean

$$d = \begin{pmatrix} 1 & -\mathtt{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v = d^*bd = \begin{pmatrix} b_1 & \mathtt{y} \\ \mathtt{y}^* & c \end{pmatrix}$$

Intercambiando simultáneamente las últimas $n - s + 1$ filas y columnas de v, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\mathrm{grad}_y(c_{11}) \leq \mathrm{grad}_y(c_{22}) \leq \ldots \leq \mathrm{grad}_y(c_{(n-s+1)(n-s+1)}).$$

Ahora distinguimos dos casos:

- $\mathrm{grad}_y(c_{11}) < \mathrm{grad}_y(b_{s-1,s-1})$. Entonces, sea $r \leq s - 1$ tal que

  $$\mathrm{grad}_y(b_{r-1,r-1}) \leq \mathrm{grad}_y(c_{11}) < \mathrm{grad}_y(b_{rr})$$

  Intercambiando en a las filas r-ésima y s-ésima y después las columnas r-ésima y s-ésima obtenemos un elemento $[v', r + 1] \in \mathcal{R}$ tal que $[v', r + 1] < [b, s]$ lo cual es una contradicción.

- $\mathrm{grad}_y(c_{11}) \geq \mathrm{grad}_y(b_{s-1,s-1})$, con lo que la submatriz $s \times s$ en la esquina superior izquierda de v tiene diagonal dominante. Si $s < n$ entonces $[v, s+1] \in \mathcal{R}$ y $[v, s+1] < [b, s]$ con lo que llegamos a contradicción.

De esta forma $s = n$ y, dado que v es simétrica, tiene diagonal dominante. ∎

Dada una matriz $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$, denotamos $\delta(a) = \mathrm{grad}_y(\det(a))$. Es claro, que si $a = u$ es invertible entonces $\det(u)$ es una unidad de $\mathbb{C}(\{x\})[y]$, y por tanto $\delta(u) = 0$.

Teorema 2.14 *Sea $a = a^* \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ una matriz anisótropa e invertible. Entonces a es congruente a una matriz diagonal $d \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\}))$.*

Demostración. Por el teorema anterior, existen $u, d \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tales que u es invertible, d es una matriz con diagonal dominante y $a = u^*du$. Como d es una matriz con diagonal dominante entonces, por I.2.11,

$$0 = \delta(a) = 2\delta(u) + \delta(d) = \delta(d) = \mathrm{grad}_y(d_{11}) + \mathrm{grad}_y(d_{22}) + \ldots + \mathrm{grad}_y(d_{nn})$$

Por tanto, cada $d_{ii} \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$. Ahora, por I.2.11(b) d es diagonal. Finalmente, como $d = (u^{-1})^* a (u^{-1})$ y $a = a^*$, se tiene que $d = d^*$, y por tanto, $d_{ii} = \overline{d_{ii}}$ para $1 \leq i \leq n$. De este modo, d es una matriz diagonal de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\}))$. ■

Ya podemos demostrar el siguiente teorema que nos permitirá acotar el número de Pitágoras según anunciabamos al principio.

Teorema 2.15 *Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $a \geq 0$. Entonces existe $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $a = b^*b$.*

Demostración. Por I.2.2 existen $u \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ invertible y $a' \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ ($r = \mathrm{rg}(a)$) tales que $a = u^* \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$, $a' \geq 0$ y $\det(a') \neq 0$. Además, por I.2.9 existen $b_1, c \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tales que $\det(b_1) \neq 0$, c es invertible, $c \geq 0$ y $a' = b_1^* c b_1$. Ahora, como c es ≥ 0 e invertible, entonces por I.2.5 (c) es anisótropa, y así por I.2.14 existen matrices $v \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ invertible y $d \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R}(\{x\}))$ diagonal y ≥ 0 (por I.2.5 (a)), tales que $c = v^*dv$. Como cada $d_i \in \mathbb{R}(\{x\})$ es psd, existe $g_i \in \mathbb{R}(\{x\})$ tal que $d_i = g_i^2$. Por tanto, si $g = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ entonces $a' = b_1^* v^* g g v b_1 = (gvb_1)^*(gvb_1)$. Así, si tomamos $b = \begin{pmatrix} gvb_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$, obtenemos el resultado deseado. ■

Corolario 2.16 *Sean $L_1, L_2, \ldots, L_r$ formas lineales en n variables sobre $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $\mathbb{R}\{x\}[y]$ ó $\mathbb{R}\{x, y\}$, y $\varphi = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_r^2$. Existen formas lineales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n}$ sobre R tales que $\varphi = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_{2n}^2$.*

Demostración. Supongamos primero $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$. Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ la matriz asociada a la forma cuadrática φ. Como $a \geq 0$ entonces para cada $z \in \mathbb{R}(\{x\})^n$ se tiene que $z^t a z \geq 0$. Esto vale también para $z \in \mathbb{C}(\{x\})^n$. En efecto, si tomamos $y = u + iv \in \mathbb{C}(\{x\})^n$ tenemos que $(u+iv)^* a (u+iv) = (u^t - iv^t) a (u+iv) = (u^t a u + v^t a v) + i(u^t a v - v^t a u) = u^t a u + v^t a v \geq 0$.

Así, por el teorema anterior existe $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $a = b^*b$. Como $b = b_1 + ib_2$ con $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ entonces $a = (b_1^t - ib_2^t)(b_1 + ib_2) = b_1^t b_1 + b_2^t b_2 + i(b_1^t b_2 - b_2^t b_1)$ y por tanto:

$$\begin{aligned} a &= b_1^t b_1 + b_2^t b_2 \\ b_1^t b_2 &= b_2^t b_1 \end{aligned}$$

De este modo, $\varphi = \mathtt{z}a\mathtt{z}^t = \mathtt{z}b_1^t b_1 \mathtt{z}^t + \mathtt{z}b_2^t b_2 \mathtt{z}^t$ (siendo $\mathtt{z} = (\mathtt{z}_1, \dots, \mathtt{z}_n)$) y así, existen formas lineales $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n}$ sobre $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ tales que $\varphi = Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots + Q_{2n}^2$.

Pasemos ahora al caso $R = \mathbb{R}\{x\}[y]$. Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}\{x\}[y]) \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ la matriz asociada a la forma cuadrática φ. Como acabamos de ver existen dos matrices $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ tales que $a = b_1^t b_1 + b_2^t b_2$.

Sean, ahora, $c_1, c_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}\{x\}[y])$, $r \geq 0$ tales que $b_k = \dfrac{c_k}{x^r}$. Operando tenemos

$$a_{ii} = \frac{(c_{i1}^{(1)})^2 + \cdots + (c_{in}^{(1)})^2 + (c_{i1}^{(2)})^2 + \cdots + (c_{in}^{(2)})^2}{x^{2r}} \in \mathbb{R}\{x\}[y]$$

con lo que necesariamente $x^r | c_{ij}^{(k)}$ para cualesquiera i, j, k, y en consecuencia $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}\{x\}[y])$. Así, podemos terminar como antes, pero ahora sabemos que las formas Q_i están definidas sobre $\mathbb{R}\{x\}[y]$.

Finalmente supongamos $R = \mathbb{R}\{x, y\}$. Sean $m \geq 0$, A_{im} el jet de grado m de L_i para $1 \leq i \leq r$, y consideramos la forma cuadrática $\varphi_m = A_{1m}^2 + A_{2m}^2 + \cdots + A_{rm}^2$ sobre $\mathbb{R}\{x\}[y]$, que es semidefinida positiva. Por el caso anterior, existen formas lineales $Q_{1m}, Q_{2m}, \dots, Q_{2n,m}$ sobre $\mathbb{R}\{x\}[y]$ tales que $\varphi_m = Q_{1m}^2 + Q_{2m}^2 + \cdots + Q_{2n,m}^2 \equiv \varphi \mod (x, y)^{m+1}$.

Como esto lo podemos hacer para cada $m \geq 0$, por el Teorema de Aproximación de M. Artin (0.10), existen $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n}$ formas lineales sobre $\mathbb{R}\{x, y\}$ tales que $\varphi = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_{2n}^2$. ■

Teorema 2.17 *Sea A un anillo que es un módulo finitamente generado, digamos por n generadores, sobre $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $\mathbb{R}\{x\}[y]$ ó $\mathbb{R}\{x, y\}$. Entonces $p(A) \leq 2n$.*

Demostración. Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ los generadores de A y

$$f = (a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n)^2 + (a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n)^2 + \cdots + (a_{r1}y_1 + \cdots + a_{rn}y_n)^2 \in \Sigma A^2.$$

Consideramos la forma cuadrática

$$\varphi = (a_{11}\mathtt{z}_1 + \cdots + a_{1n}\mathtt{z}_n)^2 + (a_{21}\mathtt{z}_1 + \cdots + a_{2n}\mathtt{z}_n)^2 + \cdots + (a_{r1}\mathtt{z}_1 + \cdots + a_{rn}\mathtt{z}_n)^2,$$

que abreviamos $\varphi = \mathtt{z}b\mathtt{z}^t$, $\mathtt{z} = (\mathtt{z}_1 \dots, \mathtt{z}_n)$ y $b \in \mathfrak{M}_n(R)$; φ es claramente semidefinida positiva. Entonces, por I.2.16, existen formas lineales $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n}$ tales que $\varphi = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_{2n}^2$. Finalmente, si denotamos $y = (y_1, \dots, y_n)$ resulta

$$f = \varphi(y) = Q_1(y)^2 + Q_2(y)^2 + \cdots + Q_{2n}(y)^2$$

que es una suma de $2n$ cuadrados en a. ■

3 Multiplicidades

En esta sección, recordamos algunas propiedades generales de la multiplicidad de un anillo local, y deducimos una descripción particular para anillos analíticos.

(3.1) Multiplicidad en un anillo local. Sea A un anillo local con cuerpo de coeficientes κ e ideal maximal $\mathfrak{m}$. Si M es un módulo finitamente generado sobre A tenemos la *función característica de* M

$$L_M : k \mapsto \dim_\kappa(M/\mathfrak{m}^k M).$$

Se demuestra que existe $Q_M \in \mathbb{Q}[T]$ tal que

$$L_M(k) = Q_M(k)$$

para k suficientemente grande; este Q_M se denomina *polinomio característico de* M ([Ei, 12.1]). El polinomio característico de M tiene grado $d = \dim_A(M)$, siendo esta la dimensión de Krull del anillo $A/(\operatorname{ann} M)$, ([Ei, 10.1,12.1]). Su coeficiente director se denota $\mathfrak{e}(M)$. En fin, la *multiplicidad de* M es

$$\operatorname{mult}(M) = d!\ \mathfrak{e}(M)$$

que es un número entero ≥ 1.

(3.2) Multiplicidad total. Supongamos $M = A/I$ siendo I un ideal radical de altura r. Escribimos

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{p}_{s+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$$

siendo $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ los asociados primos de altura r, y $\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{p}_l$ los de altura $> r$. Utilizando las sucesiones exactas habituales

$$0 \to M' = A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \to M = A/\mathfrak{a} \oplus A/\mathfrak{b} \to M'' = A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \to 0$$

se relacionan los polinomios caracteríticos de los tres módulos M, M', M'' del modo siguiente

$$Q_M = Q_{M'} + Q_{M''} - Q^*$$

con $\operatorname{grad}(Q^*) < \dim M'$ ([Ei, 12.2]). De esto se deduce fácilmente:

$$\operatorname{mult}(M) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{mult}(A/\mathfrak{p}_i).$$

Así pues, la noción habitual de *multiplicidad* olvida los asociados primos que no tienen altura mínima, y para poder tenerlos en cuenta se introduce la noción de *multiplicidad total*:

$$\operatorname{mult}_{\mathrm{T}}(M) = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{mult}(A/\mathfrak{p}_i).$$

Nosotros necesitamos estas nociones cuando A es el anillo de series convergentes $\mathbb{R}\{x\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y M es un cociente de este anillo. Para describir en este caso la multiplicidad de forma más geométrica, es preciso cierto trabajo previo. Empezamos con una terminología afinada sobre cambios transversales de coordenadas. En lo sucesivo denotaremos $\mathcal{O}_n = \mathbb{R}\{x\}$ y $\mathfrak{m}_n$ al ideal maximal $(x_1, \ldots, x_n)\mathcal{O}_n$.

Definición 3.3 *Un polinomio $P \in \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}[x_n]$ se llama* especial (con respecto a x_n) *si es distinguido con repecto a x_n, y $\omega(P) = \operatorname{grad}_y(P)$.*

Proposición y Definición 3.4 *Sea I un ideal de $\mathcal{O}_n$ de altura r. Entonces tras un cambio lineal de coordenadas $I \cap \mathcal{O}_{n-r} = (0)$, y existen polinomios especiales $P_i \in I \cap \mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$, $1 \leq i \leq r$, tales que $\omega(P_i) = \omega(I \cap \mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}])$. Así, el homomorfismo*

$$\varphi : \mathcal{O}_{n-r} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_n \overset{p}{\to} \mathcal{O}_n/I$$

es finito e inyectivo. En esta situación, diremos que I está bien sumergido.

Además, si el ideal $I = \mathfrak{p}$ es primo, entonces los polinomios especiales $P_1, \ldots, P_r$ son irreducibles como elementos de $\mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$ y sus grados (con respecto a x_{n-i+1}) son $\leq [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)]$.

Este cambio lineal de coordenadas se puede hacer de forma simultánea para una familia finita de ideales.

Demostración. Para un ideal general I repítase la demostración de [Rz3, II.2.3] eligiendo en cada paso los $P_i \in I \cap \mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$ de orden mínimo.

Veamos, ahora, que si $I = \mathfrak{p}$ es un ideal primo entonces los P_i son irreducibles en $\mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$ de grados $\leq [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)]$ para $1 \leq i \leq r$. En efecto, sea $d = n - r$, entonces para cada $d + 1 \leq j \leq n$ consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_d & \to & \mathcal{O}_d[\theta_j] & \to & \mathcal{O}_n/\mathfrak{p} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ cf(\mathcal{O}_d) & \to & cf(\mathcal{O}_d)[\theta_j] & \to & cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) \end{array}$$

siendo $\theta_j = x_j + I$. Sea, además, Q_j el polinomio irreducible de θ_j sobre $cf(\mathcal{O}_d)$. Como $\mathcal{O}_d$ es íntegramente cerrado, entonces $Q_j \in \mathcal{O}_d[T]$ y por tanto, $Q_j(x_j) \in \mathfrak{p}$. Pero, por cómo hemos elegido los P_i, se cumple que

$$\operatorname{grad}_{x_j}(P_{n-j+1}) = \omega(P_{n-j+1}) \leq \omega(Q_j) \leq \operatorname{grad}_{x_j}(Q_j) \leq [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)].$$

Veamos, finalmente, que los P_i son también irreducibles. Por reducción al absurdo, supongamos que P_i no es irreducible en $\mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$. Entonces existen polinomios mónicos $F, G \in \mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$ de grados estrictamente menores que el grado de P_i tales que $P_i = FG$. De este modo,

$$\mathrm{grad}_{x_{n-i+1}}(F) + \mathrm{grad}_{x_{n-i+1}}(G) = \mathrm{grad}_{x_{n-i+1}}(P_i) = \omega(P_i) = \omega(F) + \omega(G)$$

y por tanto,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{grad}_{x_{n-i+1}}(F) & = & \omega(F) \\ \mathrm{grad}_{x_{n-i+1}}(G) & = & \omega(G) \end{array}$$

con lo que F, G son especiales y $\omega(F), \omega(G) < \omega(P_i)$. Finalmente, como $\mathfrak{p}$ es primo, se cumple que $F \in \mathfrak{p}$ o $G \in \mathfrak{p}$, contradicción. ■

Proposición 3.5 *Sea* $\mathfrak{p}$ *un ideal primo de* $\mathcal{O}_n$ *de altura* $r = n - d$*, bien sumergido. Entonces*

$$\mathrm{mult}(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) = [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)].$$

Demostración. Como $\mathfrak{p}$ está bien sumergido, la aplicación

$$\varphi : \mathcal{O}_d \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_n \overset{p}{\to} \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$$

es finita e inyectiva. Sea $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)\mathcal{O}_n$. Por [ZaSa, VIII.§10], se cumple que existe un polinomio $Q_\mathfrak{q}$ de grado d y coeficiente director $[cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)]/d!$ tal que para k suficientemente grande

$$Q_\mathfrak{q}(k) = \dim_\mathbb{R}\left(\mathcal{O}_n \Big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}]\right)$$

Así, basta demostrar que para k suficientemente grande la diferencia

$$\dim_\mathbb{R}\left(\mathcal{O}_n \Big/ [\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}]\right) - \dim_\mathbb{R}\left(\mathcal{O}_n \Big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}]\right)$$

está acotada por un polinomio de grado $\leq d-1$. O equivalentemente, dado que la sucesión

$$0 \to [\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}] \Big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}] \to \mathcal{O}_n \Big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}] \to \mathcal{O}_n \Big/ [\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}] \to 0$$

es exacta, que para k suficientemente grande

$$\dim_\mathbb{R}\left([\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}] \Big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}]\right)$$

está acotada por un polinomio de grado $\leq d - 1$. Comprobemos, pues, esta última afirmación.

Como $\mathfrak{p}$ está bien sumergido existen polinomios especiales $P_i \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$, $1 \leq i \leq r$, irreducibles en $\mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$ y de grados $d_i \leq [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)] = m$. Entonces, cualquier $f \in \mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}$ se puede dividir sucesivamente por ellos hasta obtener

$$f = \sum_{i=1}^{r} H_i P_i + g, \quad g = \sum_{0 \leq \nu_{d+1}, \cdots, \nu_n < m} a_{\nu'}(x') x_{d+1}^{\nu_{d+1}} \cdots x_n^{\nu_n},$$

siendo $x' = (x_1, \ldots, x_d)$ y $\nu' = (\nu_{d+1}, \ldots, \nu_n)$.

Afirmamos que $\omega(g) \geq \omega(f)$ y así $\omega(a_{\nu'}) \geq k - (\nu_{d+1} + \cdots + \nu_n)$ si $0 \leq \nu_{d+1}, \ldots, \nu_n < m$. Para ver esto, basta con demostrar que el resto R de la división de Weierstrass de una serie h entre un polinomio especial $P \in \mathcal{O}_{n-i}[x_{n-i+1}]$ cumple que $\omega(R) \geq \omega(h)$. Esto último se ve por reducción al absurdo.

En efecto, supongamos que $\omega(h) > \omega(R)$ y que las descomposiciones en componentes homogéneas de P, Q, R (siendo Q el cociente de la división anterior) son:

$$\begin{aligned} P &= P_\mu + P_{\mu+1} + \cdots \\ Q &= Q_\lambda + Q_{\lambda+1} + \cdots \\ R &= R_s + R_{s+1} + \cdots \end{aligned}$$

Como $\omega(h) > \omega(R)$, discutiendo las posibilidades encontramos $\lambda + \mu = s$ y $P_\mu Q_\lambda + R_s = 0$. Por tanto,

$$\mu - 1 \geq \operatorname{grad}_{x_n}(R_s) = \operatorname{grad}_{x_n}(P_\mu) + \operatorname{grad}_{x_n}(Q_\lambda) \geq \mu,$$

contradicción.

Así, todo elemento de $[\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}] \big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}]$ tiene un representante de la forma

$$g + \mathfrak{q}^k + \mathfrak{p} = \sum_{1 \leq \nu_{d+1}, \cdots, \nu_n < m} a_{\nu'}(x') x_{d+1}^{\nu_{d+1}} \cdots x_n^{\nu_n} + \mathfrak{q}^k + \mathfrak{p},$$

con $k - |\nu'| \leq \omega(a_{\nu'}) \leq k - 1$ si $1 \leq \nu_{d+1}, \ldots, \nu_n < m$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{R}} \left([\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}] \big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}] \right) \\ &\leq \sum_{0 \leq \nu_{d+1}, \cdots, \nu_n < m} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{L}_{\mathbb{R}}[x_1^{\nu_1} \cdots x_d^{\nu_d} : \ k - |\nu'| \leq \nu_1 + \cdots + \nu_d \leq k - 1] \\ &= \sum_{0 \leq \nu_{d+1}, \cdots, \nu_n < m} \left[\binom{k-1+d}{d} - \binom{k - |\nu'| - 1 + d}{d} \right] \\ &= \sum_{0 \leq \nu_{d+1}, \cdots, \nu_n < m} \left[\frac{k \cdots (k + (d-1))}{d!} - \frac{(k - |\nu'|) \cdots (k - |\nu'| + (d-1))}{d!} \right]. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es consecuencia inmediata de [Ei, 1.10]. De la última igualdad se deduce que $\dim_{\mathbb{R}} \left([\mathfrak{m}_n^k + \mathfrak{p}] \big/ [\mathfrak{q}^k + \mathfrak{p}] \right)$ está acotada por una suma finita de polinomios de grados $\leq d-1$, con lo que concluye la demostración. ■

Ejemplo 3.6 Si $F \in \mathcal{O}_n$, entonces $\text{mult}(\mathcal{O}_n/(F)) = \omega(F)$.

Mediante un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que F es regular con respecto a x_n de orden $\omega(F)$ y, de hecho, que F es un polinomio especial con respecto a x_n. En primer lugar, vamos a calcular para $k > \omega(F)$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_n/[(F)+\mathfrak{m}_n^k])$$

Para ello hay que observar que todo elemento de $\mathcal{O}_n/[(F)+\mathfrak{m}_n^k]$ tiene un único representante del tipo

$$g+(F)+\mathfrak{m}_n^k = \sum_{i=0}^{\omega(F)-1} a_i x_n^i + (F) + \mathfrak{m}_n^k$$

siendo $a_i \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_{n-1}]$ y $\text{grad}(a_i) \leq k-i-1$. De este modo,

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_n/[(F)+\mathfrak{m}_n^k]) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{\omega(F)-1} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{L}_{\mathbb{R}}[x_1^{\nu_1}\cdots x_{n-1}^{\nu_{n-1}} : \ 0 \leq \nu_1+\cdots+\nu_{n-1} \leq k-i-1] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{\omega(F)-1} \binom{m-i-1+n-1}{n-1} = \sum_{i=0}^{\omega(F)-1} \frac{(k-i)\cdots(k-i+n-2)}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Este sumatorio es un polinomio de grado $n-1$ y coeficiente principal $\frac{\omega(F)}{(n-1)!}$, y por tanto

$$\text{mult}(\mathcal{O}_n/(F)) = \omega(F).$$

4 Acotaciones

Después del trabajo preparatorio de las secciones anteriores, ya es posible acotar el número de Pitágoras de un germen de superficie en función de algunos de sus invariantes numéricos.

Comenzamos con la acotación inferior.

Teorema 4.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un germen analítico, $n \geq 3$. Entonces*

$$p[X] \geq E\big[\log_2(\omega(I(X))+1)\big]$$

siendo $E\big[.\big]$ la parte entera.

Demostración. Consideramos un polinomio $f \in \mathbb{R}[x,y]$ de grado $q = 2^p - 2$ que sea suma de cuadrados de polinomios, pero no menos de p ([Ch *et al*]). Homogeneizando f obtenemos

$$g(x_1,\dots,x_n) = x_n^q f\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n}\right).$$

Claramente g es sos en $\mathbb{R}^n$, luego también en X. Si $p[X] < p$, entonces

$$g = h_1^2 + \cdots + \mathrm{h}_{p-1}^2 + h$$

con $h \in I(X)$. Si $\omega(I(X)) > q$, entonces igualando formas iniciales obtenemos

$$g = g_1^2 + \cdots + g_{p-1}^2$$

con $g_1, \ldots, g_{p-1} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_n]$ homogéneos. Deshomogeneizando resulta que f es suma de $p-1$ cuadrados, contradicción.

Por tanto, si $p = E\big[\log_2(\omega(I(X)) + 1)\big]$, entonces $p[X] \geq p$, como queríamos. ∎

Observaciones 4.2 (a) Si $\omega(I(X)) \geq 3$, $p[X] \geq n$. En efecto, se puede repetir el argumento anterior con $g = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ que no es suma de $n-1$ cuadrados.

(b) Para dimensión de inmersión $n = 3$ existen gérmenes de curva y de superficie con número de Pitágoras arbitrariamente alto. En la sección I.5, veremos como obtener gérmenes de curva en $\mathbb{R}^3$ cuyos ideales tiene órdenes arbitrariamente altos.

Como cota superior tenemos la siguiente:

Teorema 4.3 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un germen de superficie. Entonces*

$$p[X] \leq 2\,\mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X)^{\mathrm{codim}(X)}.$$

Demostración. Denotaremos por γ_X al mínimo número de generadores de $\mathcal{O}(X)$ como $\mathcal{O}_d$-módulo. Afirmamos que se cumple que

$$\gamma_X \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X)^{\mathrm{codim}(X)}.$$

Por comodidad, vamos a suponer que X es un germen analítico de dimensión d. En primer lugar, sea $I(X) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s$ la descomposición primaria reducida de $I(X)$ con $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = r_i = n - d_i$. Por I.3.4 podemos suponer que los ideales $\mathfrak{p}_i$ están bien sumergidos, y entonces por I.3.5 se cumple que

$$[cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}_i) : cf(\mathcal{O}_{d_i})] = \mathrm{mult}(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq s.$$

Sea P_{ij} el polimomio irreducible de elemento $\theta_{ij} = x_j + \mathfrak{p}_i \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}_i$ sobre $cf(\mathcal{O}_{d_i})$ para $1 \leq i \leq s$, $d+1 \leq j \leq n$; entonces, por [Rz3, II.3], se cumple que los P_{ij} son polinomios distinguidos de $\mathcal{O}_{d_i}[T]$ de grados $\leq [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}_i) : cf(\mathcal{O}_{d_i})] = \mathrm{mult}(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}_i)$.

Consideramos, a continuación, los polinomios $P_j(x^{(i)}, x_j) = \prod_{i=1}^{s} P_{ij}(x^{(i)}, x_j), x^{(i)} = (x_1, \ldots, x_{d_i})$ que son claramente elementos de $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s = I(X)$ y cuyos grados (con respecto a x_j) son $\leq \sum_{i=1}^{s} \operatorname{mult}(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}_i) = \operatorname{mult}_{\mathrm{T}}(X)$. Por división sucesiva por estos P_j, vemos que

$$\mathcal{G} = \{x_{d+1}^{\nu_{d+1}} \cdots x_n^{\nu_n} : \ 0 \leq \nu_{d+1}, \ldots, \nu_n < \operatorname{mult}_{\mathrm{T}}(X)\}$$

es un sistema de generadores de $\mathcal{O}(X)$ como $\mathcal{O}_d$-módulo, y por tanto, $\gamma_X \leq \operatorname{mult}_{\mathrm{T}}(X)^{n-d}$.

Una vez probado lo anterior, el enunciado resulta inmediatamente de I.2.17. ■

5 Ejemplos

Aquí mostraremos que no se puede obtener una cota superior del número de Pitágoras de un germen de superficie sólo en función de la multiplicidad, lo que explica el uso de la multiplicidad total en la sección anterior. Empezamos demostrando el siguiente resultado previo.

Proposición 5.1 *Para cada $q \in \mathbb{N}$ existen gérmenes de curva $Y \subset \mathbb{R}^3$ cuyo número de Pitágoras es $\geq q$.*

Demostración. Como consecuencia de I.4.1 basta demostrar que para cada $k \geq 1$ existe un germen de curva irreducible Y_k, cuyo ideal primo $I(Y_k) = \mathfrak{p}_k$ cumple que $\omega(\mathfrak{p}_k) > k$; de hecho, de I.4.1 se deduce que el germen de curva $Y = Y_{2^q}$ tiene número de Pitágoras $\geq q$.

Para ello, consideramos tres enteros $a_k < b_k < c_k$ primos entre si, y afirmamos que podemos elegirlos para que el germen de curva parametrizado por $x = t^{a_k}, y = t^{b_k}, z = t^{c_k}$ cumpla esa condición.

En efecto, simplifiquemos la notación escribiendo $a = a_k, b = b_k, c = c_k$, y $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k$ que es el núcleo del homomorfismo $\mathbb{R}\{x, y, z\} \to \mathbb{R}\{t\} : \ x, y, z \mapsto t^a, t^b, t^c$. Buscamos un sistema de generadores de $\mathfrak{p}$ como sigue. Sea

$$F = \sum_{\nu} a_\nu x^{\nu_1} y^{\nu_2} z^{\nu_3} \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$$

tal que

$$F(t^a, t^b, t^c) = \sum_{d=1}^{\infty} \left(\sum_{a\nu_1 + b\nu_2 + c\nu_3 = d} a_\nu t^d \right) = 0.$$

Consideramos los polinomios

$$F_d = \sum_{a\nu_1 + b\nu_2 + c\nu_3 = d} a_\nu x^{\nu_1} y^{\nu_2} z^{\nu_3} \in I(Y_k),$$

de modo que $F = \sum_{d=1}^{\infty} F_d$. Ahora, se sabe que existen tres binomios

$$P_\alpha = x^{\alpha_1} - y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}, P_\beta = y^{\beta_2} - x^{\beta_1} z^{\beta_3}, P_\gamma = z^{\gamma_3} - x^{\gamma_1} y^{\gamma_2}$$

(con $a\alpha_1 = b\alpha_2 + c\alpha_3, b\beta_2 = a\beta_1 + c\beta_3, c\gamma_3 = a\gamma_1 + b\gamma_2$) que generan el núcleo del homomorfismo $\mathbb{R}[x,y,z] \to \mathbb{R}[t] : x,y,z \mapsto t^a, t^b, t^c$ (véase, por ejemplo, [Kz, V.§3]). De este modo, para cada $d \in \mathbb{N}$ existen polinomios $A_d, B_d, C_d \in \mathbb{R}[x,y,z]$ tales que $F_d = A_d P_\alpha + B_d P_\beta + C_d P_\gamma$, y por tanto $F = P_\alpha \sum_d A_d + P_\beta \sum_d B_d + P_\gamma \sum_d C_d$, con lo que $I(Y_k) = (P_\alpha, P_\beta, P_\gamma)$. Veamos que los órdenes $\omega_\alpha = \omega(P_\alpha), \omega_\beta = \omega(P_\beta), \omega_\gamma = \omega(P_\gamma)$ son $\geq k$ para la siguiente elección: $a = p$ un número primo $\geq k^2 + 2$, $b = p(p-1) + k$ y $c = p^2 + 1$.

(i) $\omega_\alpha \geq k$: Como $a\alpha_1 = b\alpha_2 + c\alpha_3 \geq b(\alpha_2 + \alpha_3)$ y $a < b$, entonces $\alpha_1 \geq \alpha_2 + \alpha_3$, y por tanto $\omega_\alpha = \alpha_2 + \alpha_3$. Por otro lado, sustituyendo los valores de a, b y c obtenemos que

$$p\alpha_1 = ((p-1)\alpha_2 + p\alpha_3)p + k\alpha_2 + \alpha_3$$

y así, $p \leq k\alpha_2 + \alpha_3 \leq k(\alpha_2 + \alpha_3) = k\omega_\alpha$, lo que significa que $\omega_\alpha \geq p/k \geq k$.

(ii) $\omega_\beta \geq k$: Como $b\beta_2 = a\beta_1 + c\beta_3 \geq c\beta_3$ y $b < c$, entonces $\beta_2 > \beta_3$. Además, tenemos la expresión

$$(p\beta_3 + \beta_1 - (p-1)\beta_2)p = k\beta_2 - \beta_3 > 0$$

con lo que $k\beta_2 \geq p$ y $\beta_2 \geq p/k \geq k$. Si $\omega_\beta = \beta_2 \leq \beta_1 + \beta_3$ hemos terminado. Por tanto, supongamos que $\omega_\beta = \beta_1 + \beta_3$ y $\beta_1 \leq k$ (en caso contrario no hay nada que probar). Entonces $p\beta_3 + \beta_1 > (p-1)\beta_2 \geq (p-1)p/k$ y así, $\omega_\beta \geq \beta_3 \geq (p-1)/k - \beta_1/p \geq (p-1)/k - k/p \geq (p-2)/k \geq k$.

(iii) $\omega_\gamma \geq k$: Como $c\gamma_3 = a\gamma_1 + b\gamma_2 \leq b(\gamma_1 + \gamma_2)$ y $c > b$, entonces $\gamma_1 + \gamma_2 \geq \gamma_3 = \omega_\gamma$. Por otro lado

$$(p\gamma_3 - (p-1)\gamma_2 - \gamma_1)p = k\gamma_2 - \gamma_3$$

y tenemos tres subcasos:

(a) $k\gamma_2 < \gamma_3$. Entonces $\omega_\gamma = \gamma_3 \geq p \geq k$.

(b) $k\gamma_2 = \gamma_3$. Entonces $\gamma_2 \geq 1$ y $\omega_\gamma = \gamma_3 \geq k$.

(c) $k\gamma_2 > \gamma_3$. Entonces $k\gamma_2 \geq p$ y $p\gamma_3 > (p-1)\gamma_2 \geq (p-1)p/k$, con lo que $\omega_\gamma = \gamma_3 \geq (p-1)/k \geq k$.

■

Corolario 5.2 *Para cada $q \in \mathbb{N}$ existen un gérmenes de superficie analítica $X \subset \mathbb{R}^3$ de multiplicidad* 1 *y número de Pitágoras $\geq q$.*

Demostración. Por el teorema anterior, existe un germen de curva $Y \subset \mathbb{R}^3$ cuyo número de Pitágoras es $\geq q$. Sea, ahora, $X = Y \cup \{z = 0\}$ que es un germen analítico de dimensión 2, tal que $\mathrm{mult}(X) = \mathrm{mult}(\{z = 0\}) = 1$ (como consecuencia de 3.2, aunque su multiplicidad total es $\mathrm{mult}(Y) + 1$ y por tanto alta), y $p[X] \geq p[Y] \geq q$ por ser $\mathcal{O}(Y)$ un cociente de $\mathcal{O}(X)$. ■

Capítulo II

Sumas de dos cuadrados

1 El cono

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema, que resuelve el problema $\mathcal{P} = \Sigma$ para el germen del cono.

Teorema 1.1 *Sea $X : z^2 = x^2 + y^2$ la singularidad del cono. Entonces cualquier germen analítico no negativo sobre X se puede expresar como suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos.*

Demostraremos este resultado en tres etapas. En primer lugar, observamos que $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}\{x, y, z\}/(z^2 - x^2 - y^2)$ es un $\mathbb{R}\{x, y\}$-módulo libre de rango 2 con base $1, z$. En efecto, dividiendo por $z^2 - x^2 - y^2$ los elementos de $\mathcal{O}(X)$ se escriben en la forma $f(x, y) + zg(x, y)$ con $f, g \in \mathbb{R}\{x, y\}$. Con esta escritura, tenemos el siguiente resultado parcial:

Proposición 1.2 *Sean $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que $f + zg$ es psd sobre X. Entonces existe un entero $m \geq 0$, tal que $z^m(f + zg)$ es suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos en X.*

Demostración. Estimemos primero los órdenes de las series f, g. Para ello, observamos que un germen de curva plana (at, bt) se eleva a dos gérmenes de curva en el cono, que son $(at, bt, \pm ct)$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $f + zg \geq 0$ en el cono cerca del origen, entonces

$$0 \leq f(at, bt) \pm ctg(at, bt) = (f_p(a, b)t^p + \cdots) \pm (cg_q(a, b)t^{q+1} + \cdots),$$

donde f_p y g_q son las formas iniciales de f y g respectivamente. Si elegimos (a, b) adecuados, tenemos que $f_p(a, b) \neq 0$ y $g_q(a, b) \neq 0$, con lo que la igualdad anterior implica que $p \leq q+1$, y p es par: $p = 2n$. De esta forma las descomposiciones de f y g en componentes homogeneas son de la forma

$$f = f_{2n} + \cdots + f_r, \ g = g_{2n-1} + \cdots + g_{r-1}.$$

En particular, la forma inicial de $f + zg$ es $f_{2n} + zg_{2n-1}$, y podemos suponer que no se anula sobre el cono (en caso contrario, reemplazamos f por $f - f_{2n}$ y g por $g - g_{2n-1}$ y obtenemos la misma función sobre el cono).

Consideramos, a continuación, la explosión $\varphi : x = ut, y = vt, z = t$, que aplica el cilindro $Y : u^2 + v^2 = 1$ sobre el cono. De hecho, φ aplica el germen de Y a lo largo de la circunferencia $t = 0$, $u^2 + v^2 = 1$ sobre el germen de X en el origen. Componiendo con f obtenemos

$$f \circ \varphi = f(tu, tv) + tg(tu, tv) = t^{2n} h(u, v, t),$$

donde

$$\begin{aligned} h(u, v, t) = \big(f_{2n}(u, v) + g_{2n-1}(u, v)\big) + t\big(f_{2n+1}(u, v) + g_{2n}(u, v)\big) + \cdots \\ + t^{r-2n}\big(f_r(u, v) + g_{r-1}(u, v)\big). \end{aligned}$$

Como $f_{2n}(x, y) + zg_{2n-1}(x, y)$ no se anula sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$, entonces $f_{2n}(u, v) + g_{2n-1}(u, v)$ no es idénticamente cero sobre $u^2 + v^2 = 1$. Además, como $f + zg$ es psd sobre $z^2 = x^2 + y^2$ cerca del origen, se cumple que $h_t(u, v) \geq 0$ en $u^2 + v^2 = 1$, y $|t|$ suficientemente pequeño. En lo sucesivo, nuestro argumento es una especie de revisión parametrizada de la demostración clásica de que todo polinomio psd sobre la circunferencia es suma de dos cuadrados de polinomios, como se puede ver en [PoSz].

Consideramos los polinomios trigonométricos para $u = \cos\theta$, $v = \operatorname{sen}\theta$:

$$\begin{aligned} \cos(k\theta) = P_k(u) &\text{ donde } P_k \text{ tiene grado } k, \text{ y} \\ \operatorname{sen}(k\theta) = vQ_{k-1}(u) &\text{ donde } Q_{k-1} \text{ tiene grado } k - 1. \end{aligned}$$

Entonces, para $u^2 + v^2 = 1$ tenemos la expresión:

$$\begin{aligned} h(u, v, t) = \gamma_0(t) + \lambda_1(t)P_1(u) + \cdots + \lambda_r(t)P_r(u) \\ + v\big(\mu_1(t) + \mu_2(t)Q_1(u) + \cdots + \mu_r(t)Q_{r-1}(u)\big), \end{aligned}$$

donde $\gamma_0, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}[t]$ tiene grado $\leq r - 2n$, y λ_r, μ_r no son los dos cero. En lo que sigue denotaremos por $\Re$ la *parte real*, y por $\Im$ la *parte imaginaria* (see [Rz1]). De las igualdades

$$P_k(u) = \Re\big((u + \sqrt{-1}v)^k\big),\ vQ_{k-1}(u) = \Im\big((u + \sqrt{-1}v)^k\big),$$

deducimos que

$$\begin{aligned} h(u, v, t) &= \gamma_0 + \sum_k \lambda_k \Re\big((u + \sqrt{-1}v)^k\big) + \mu_k \Im\big((u + \sqrt{-1}v)^k\big) \\ &= \gamma_0 + \sum_k \tfrac{1}{2}(\lambda_k + \sqrt{-1}\mu_k)(u - \sqrt{-1}v)^k + \tfrac{1}{2}(\lambda_k - \sqrt{-1}\mu_k)(u + \sqrt{-1}v)^k. \end{aligned}$$

Sea ahora $w = u + \sqrt{-1}v$, con lo que $w\overline{w} = 1$ y

$$\begin{aligned} w^r h(u, v, t) &= w^r(\gamma_r \overline{w}^r + \cdots + \gamma_1 \overline{w} + \gamma_0 + \overline{\gamma}_1 w + \cdots + \overline{\gamma}_r w^r) \\ &= \gamma_r + \cdots + \gamma_1 w^{r-1} + \gamma_0 w^r + \overline{\gamma}_1 w^{r+1} + \cdots + \overline{\gamma}_r w^{2r} = G(t, w), \end{aligned}$$

donde $\gamma_k = \frac{1}{2}(\lambda_k + \sqrt{-1}\mu_k)$ para $k \geq 1$. No hay que olvidar que las igualdades anteriores sólo se cumplen si $u = \cos\theta$, $v = \sin\theta$, pero independientemente de esto hemos obtenido este polinomio $G(t,w) \in \mathbb{C}[t,w]$, y por construcción

$$G(0,w) = w^r \big(f_{2n}(u,v) + g_{2n-1}(u,v)\big)$$

para $u^2 + v^2 = 1$, es decir $G(0,w) \neq 0$; por tanto, como serie en t, este polinomio tiene orden 0. A continuación, vamos a estudiar $G(t,w)$ como polinomio en w, cuyas raíces son series de Puiseux en la variable t.

En primer lugar, dichas raíces están relacionadas por la siguiente propiedad:

(1) *Ninguna raíz de G es cero, y si ζ es raíz, entonces $1/\overline{\zeta}$ es también raíz de la misma multiplicidad.*

Sea ζ una raíz de G. Como $G(t,0) = \gamma_r = \frac{1}{2}(\lambda_r + \sqrt{-1}\mu_r)$, y λ_r,μ_r no son las dos cero, entonces $\zeta \neq 0$. Además, tenemos que

$$w^{2r}\overline{G}(t,1/w) = G(w),$$

y la substitución $w = 1/\overline{\zeta}$ nos da que $G(t,1/\overline{\zeta}) = 0$. La afirmación acerca de la multiplicidad se deduce, de forma sencilla, derivando la igualdad anterior con respecto w y haciendo de nuevo la substitución $w = 1/\overline{\zeta}$.

Vamos a distinguir un caso especial de raíces, estudiando para ello *la conjugación sobre* $\mathbb{C}\{t\}$.

(2) *Si ζ y $1/\overline{\zeta}$ son conjugadas, entonces ambas raíces tienen orden* 0 *y multiplicidad par, y sus polinomios irreducibles pertenecen a* $\mathbb{C}\{t\}[w]$.

Intercambiando ζ y $1/\overline{\zeta}$ (si es necesario) podemos suponer $\zeta = \xi(t^{1/q})$ para una serie convergente ξ. Recordamos que las series conjugadas de $\zeta = \xi(t^{1/q})$ son las series $\zeta^k = \xi(e^{\frac{2\pi i}{q}k}t^{1/q})$, $1 \leq k \leq q$, y que el polinomio irreducible de ζ es el producto $\prod_k(w - \zeta^k)$, que es siempre un elemento de $\mathbb{C}\{t\}[w]$. Supongamos, ahora, que $\zeta^k = 1/\overline{\zeta}$. Esto implica que

$$1 = \xi(e^{\frac{2\pi i}{q}k}t^{1/q})\overline{\xi}(t^{1/q}) = \xi(e^{\frac{\pi i}{q}k}t^{1/q})\overline{\xi}(e^{-\frac{\pi i}{q}k}t^{1/q})$$

(tras la substitución $t^{1/q} \mapsto e^{-\frac{\pi i}{q}k}t^{1/q}$), y si hacemos $\eta = \xi(e^{\frac{\pi i}{q}k}t^{1/q})$, obtenemos que $\overline{\eta} = \overline{\xi}(e^{-\frac{\pi i}{q}k}t^{1/q})$ y que $1 = \eta\overline{\eta}$. Además, ξ deberá tener orden 0.

Estudiemos más detenidamente la serie de Puiseux η. En primer lugar, como $\big(e^{-\frac{\pi i}{q}k}\big)^q = (-1)^k$, la substitución $t^{1/q} \mapsto e^{-\frac{\pi i}{q}k}t^{1/q}$ transforma el polinomio $G(t,w)$ en el polinomio $G((-1)^k t, w)$, y ζ en η. Así, η es raíz de $G((-1)^k t, w)$ y todo se reduce a probar que η tiene multiplicidad par.

Para ello, consideramos la función real:

$$\mathit{\Gamma}(t,\theta) = h(\cos\theta, \sin\theta, (-1)^k t) = e^{-ir\theta}G((-1)^k t, e^{i\theta}).$$

Para $s \in \mathbb{R}$ tenemos la función analítica $\mathit{\Gamma}_s : \theta \mapsto \mathit{\Gamma}((-1)^k s, \theta)$. Derivándola sucesivamente obtenemos que

$$\tfrac{\partial^k}{\partial \theta^k} \mathit{\Gamma}(s,\theta) = \sum_{\ell=0}^{k} c_{k\ell} \tfrac{\partial^\ell}{\partial w^\ell} G((-1)^k s, e^{i\theta}),$$

con $c_{kk} \neq 0$. De estas identidades se deduce que si $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $G_s = G((-1)^k s, w) \in \mathbb{C}[w]$, entonces $\theta \in \mathbb{R}$ es raíz de la misma multiplicidad de $\mathit{\Gamma}_s$. Pero por construcción, la función real $\mathit{\Gamma}_s$ es ≥ 0 para $\theta \in \mathbb{R}$, de donde se deduce que todas las raíces reales tiene multiplicidad par. Ahora, si η tiene multiplicidad p, entonces una especialización adecuada nos da una raíz $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ de multiplicidad p de G_s para algún s, y concluimos que p es par.

Así finaliza la demostración de (2), y factorizamos:

(3) $G(t,w) = cQ^2 \prod_\ell (w - \zeta_\ell)\big(w - \frac{1}{\overline{\zeta}_\ell}\big)$,

donde $c = \overline{\gamma}_r \in \mathbb{C}[t]$, y el factor $Q(t,w) \in \mathbb{C}\{t\}[w]$ corresponde a todas las raíces de G de orden 0 y multiplicidad par, con lo que Q tiene orden 0. Además, intercambiando algunas ζ_ℓ y $1/\overline{\zeta}_\ell$ si es necesario, podemos suponer que todas las ζ_ℓ's tiene orden ≥ 0. Hay que señalar que, por (2), las raíces ζ_ℓ y $1/\overline{\zeta}_\ell$ no son conjugadas.

Después de estas observaciones previas, ya podemos probar que:

(4) *El producto $\prod_\ell (w - \zeta_\ell)$ es, de hecho, un polinomio de $\mathbb{C}\{t\}[w]$.*

Para demostrar la afirmación, estudiaremos detalladamente las raíces conjugadas de las ζ_ℓ's. Sean ζ_ℓ y ζ' series conjugadas. Si ζ' es conjugada de alguna $1/\overline{\zeta}_{\ell'}$, entonces $\ell' \neq \ell$ y el orden de $\zeta_{\ell'}$ es cero, con lo que podemos intercambiar $\zeta_{\ell'}$ y $1/\overline{\zeta}_{\ell'}$. Por tanto, garantizamos que ninguna raíz de $\prod_\ell (w - \zeta_\ell)$ es conjugada de una raíz de $\prod_\ell \big(w - \frac{1}{\overline{\zeta}_\ell}\big)$. Además, por la estructura de nuestra factorización, ninguna raíz de $\prod_\ell (w - \zeta_\ell)$ es conjugada de alguna raíz de Q. De este modo, concluimos que $\prod_\ell (w - \zeta_\ell)$ es el producto de los polinomios irreducibles de las ζ_ℓ's, todos ellos de orden ≥ 0, y, en consecuencia, es un producto de polinomios de $\mathbb{C}\{t\}[w]$, con lo que es un elemento de este anillo.

Como $h(u,v,t) \geq 0$ para $|w| = u^2 + v^2 = 1$ y t real próximo a 0, podemos escribir:

$$\begin{aligned} h(u,v,t) = |h(u,v,t)| = |w^r h(u,v,t)| = |G(t,w)| = |c| \left|Q^2\right| \prod_\ell |w - \zeta_\ell| \Big|w - \frac{1}{\overline{\zeta}_\ell}\Big| \\ = \Big|\frac{c}{\prod_\ell \overline{\zeta}_\ell}\Big| \left|Q^2\right| \prod_\ell |w - \zeta_\ell| |\overline{\zeta}_\ell w - 1| = \Big|\frac{c}{\prod_\ell \zeta_\ell}\Big| \left|Q^2\right| \prod_\ell |w - \zeta_\ell|^2, \end{aligned}$$

la última igualdad es debida a que $|w - \zeta_\ell| = |\overline{\zeta}_\ell w - 1|$ para $|w| = 1$ y t real. Así, obtenemos que

(5) $$h(u,v,t) = \Big|\frac{c}{\prod_\ell \zeta_\ell}\Big| \big|Q \textstyle\prod_\ell (w - \zeta_\ell)\big|^2.$$

Para finalizar, debemos demostrar que el primer factor de la fórmula anterior es, en realidad, un elemento de $\mathbb{C}\{t\}$. Para ello, analizamos el producto

$$c\prod_{\ell}(w-\zeta_\ell)\big(w-\frac{1}{\overline{\zeta}_\ell}\big)\in\mathbb{C}\{t\}[w].$$

Supongamos que

$$\prod_{\ell}(w-\zeta_\ell)=w^p+\alpha_{p-1}w^{p-1}+\cdots+\alpha_1 w+\alpha_0,$$

entonces un cálculo sencillo muestra que

$$\prod_{\ell}\Big(w-\frac{1}{\overline{\zeta}_\ell}\Big)=w^p+\frac{\overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha}_0}w^{p-1}+\cdots+\frac{\overline{\alpha}_{p-1}}{\overline{\alpha}_0}w+\frac{1}{\overline{\alpha}_0}.$$

Esto, nos permite obtener una expresión explícita de los coeficientes $\beta_k=\eta_k/\overline{\alpha}_0$ de

$$P(t,w)=\prod_{\ell}(w-\zeta_\ell)\big(w-\frac{1}{\overline{\zeta}_\ell}\big)=w^{2p}+\beta_{2p-1}w^{2p-1}+\cdots+\beta_1 w+\beta_0.$$

Recordamos que $G(t,w)=cQ^2P$ es una serie de orden 0 en t, y de hecho, lo mismo se cumple para cP. En consecuencia, el orden con respecto a t de todos los productos $c\beta_k$ debe ser ≥ 0, y el de alguno de ellos exactamente 0. En lo sucesivo, denotaremos por ord_t el orden con respecto a t. Como:

$$\beta_p=\frac{1}{\overline{\alpha}_0}(|\alpha_0|^2+\cdots+|\alpha_{p-1}|^2+1),$$

entonces $\mathrm{ord}_t(\overline{\alpha}_0)\leq\mathrm{ord}_t(c)$ y así,

$$0\leq\mathrm{ord}_t(c\beta_i)=\big(\mathrm{ord}_t(c)-\mathrm{ord}_t(\overline{\alpha}_0)\big)+\mathrm{ord}_t(\eta_k),$$

que es 0 sólo si $\mathrm{ord}_t(c)=\mathrm{ord}_t(\overline{\alpha}_0)$. Como $\mathrm{ord}_t(\overline{\alpha}_0)=\mathrm{ord}_t(\alpha_0)$, se deduce que $c/\alpha_0=c/\prod_\ell\zeta_\ell$ es una unidad $a\in\mathbb{C}\{t\}$, y entonces $|a|^2$ es una unidad de $\mathbb{R}\{t\}$, y de hecho un cuadrado, pongamos $|a|^2=b^2$, $b\in\mathbb{R}\{t\}$. Ahora, como $w=u+\sqrt{-1}v$, podemos escribir

$$H(u,v,t)=Q\prod_{\ell}(w-\zeta_\ell)\in\mathbb{C}\{t\}[u,v]$$

de la forma $H=H_1+\sqrt{-1}H_2$, $H_1,H_2\in\mathbb{R}\{t\}[u,v]$, y $|H|^2=H_1^2+H_2^2$. La conclusión es que

$$h(u,v,t)=b(t)^2(H_1(u,v,t)^2+H_2(u,v,t)^2)$$

para $u^2+v^2=1$, t pequeño. A continuación, hacemos el cambio $u=x/z, v=y/z, t=z$ con lo que

$$f(x,y)+zg(x,y)=t^{2n}h(u,v,t)=z^{2n}b(z)^2(H_1(x/z,y/z,t)^2+H_2(x/z,y/z,t)^2).$$

Finalmente hay que observar que como H_1 y H_2 son polinomios en las variables u, v, si los multiplicamos por una potencia m de z suficientemente grande, obtenemos

$$z^m H_1(x/z, y/z, t), z^m H_2(x/z, y/z, t) \in \mathbb{R}\{t\}[x, y],$$

y así

$$z^{2m}(f(x,y) + zg(x,y)) = z^{2n} b(z)^2 \Big(\big(z^m H_1(x/z, y/z, t)\big)^2 + \big(z^m H_2(x/z, y/z, t)\big)^2 \Big)$$

es suma de dos cuadrados de funciones analíticas en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. ■

El siguiente paso es eliminar el denominador z^{2m} que aparece en la proposición anterior:

Proposición 1.3 *Supongamos que $z^{2m}(f + zg)$ es suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos en el cono. Entonces $f + zg$ es, también, suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos.*

Demostración. Por hipótesis, existen series $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\{x, y\}$ y $h \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tales que

$$(x^2 + y^2)^m (f + zg) = (a_1 + zb_1)^2 + (a_2 + zb_2)^2 - (z^2 - x^2 - y^2)h.$$

Por el Teorema División de Weierstrass, h debe ser un polinomio en z, y comparando los grados de ambos miembros de la igualdad, concluimos que, de hecho, $h \in \mathbb{R}\{x, y\}$, y por tanto

$$h = b_1^2 + b_2^2,\ (x^2 + y^2)^m g = 2a_1b_1 + 2a_2b_2,\ (x^2 + y^2)^m f - (x^2 + y^2)h = a_1^2 + a_2^2.$$

Ahora, haciendo cuentas, tenemos que:

$$\begin{aligned}\big((x^2 + y^2)^m f - (x^2 + y^2)h\big)h &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)^{2m} g^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2,\end{aligned}$$

con lo que $x^2 + y^2$ divide a $a_1b_2 - a_2b_1$. Como también divide a $a_1b_1 + a_2b_2$, deducimos que divide a

$$\begin{aligned}(a_1b_2 - a_2b_1)b_2 + (a_1b_1 + a_2b_2)b_1 &= a_1(b_1^2 + b_2^2) = a_1h \\ -(a_1b_2 - a_2b_1)b_1 + (a_1b_1 + a_2b_2)b_2 &= a_2(b_1^2 + b_2^2) = a_2h.\end{aligned}$$

Supongamos primero que $m \geq 2$, y que $x^2 + y^2$ no divide a h. Entonces divide a a_1 y a_2, por tanto $(x^2+y^2)^2$ divide a $a_1^2+a_2^2 = (x^2+y^2)^m f-(x^2+y^2)h$, con lo que x^2+y^2 divide a h, contradicción. Así, x^2+y^2 divide h, y entonces divide a $(a_1+zb_1)^2+(a_2+zb_2)^2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2$. Factorizando $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ en $\mathbb{C}\{x, y, z\}$ llegamos a la conclusión de que $x + \sqrt{-1}y$ divide a $\alpha_1 + \sqrt{-1}\alpha_2$ (o a su conjugado, pero entonces reemplazamos α_2 por $-\alpha_2$). De este modo, tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \sqrt{-1}\alpha_2 &= (x + \sqrt{-1}y)(\beta_1 + \sqrt{-1}\beta_2), \\ \alpha_1 - \sqrt{-1}\alpha_2 &= (x - \sqrt{-1}y)(\beta_1 - \sqrt{-1}\beta_2),\end{aligned}$$

donde $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$. Así en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ tenemos que

$$(x^2 + y^2)^m (f + zg) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (x^2 + y^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

y simplificando $x^2 + y^2$ vemos que $(x^2 + y^2)^{m-1}(f + zg)$ es suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos.

Repitiendo el argumento anterior, llegamos al final a que $f + zg$ es suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos o a que $m = 1$ y que $x^2 + y^2$ divide a a_1 y a_2. Si este es el caso, entonces $a_1 = (x^2 + y^2)a_1'$, $a_2 = (x^2 + y^2)a_2'$, y en el cono

$$\begin{aligned} z^2(f + zg) = (a_1 + zb_1)^2 + (a_2 + zb_2)^2 &= (z^2 a_1' + zb_1)^2 + (z^2 a_2' + zb_2)^2 \\ &= z^2\Big((za_1' + b_1)^2 + (za_2' + b_2)^2\Big). \end{aligned}$$

con lo que, de hecho, $f + zg$ es suma de dos cuadrados de funciones analíticas. ■

Combinando los dos resultados anteriores, hemos resuelto el problema para funciones de la forma $f + zg$ donde f, g son polinomios. Para el caso general, sólo necesitamos el siguiente lema de aproximación:

Lema 1.4 *Sea H un germen de función no negativo en el cono. Entonces, para cada $k \geq 0$ existe un germen de función no negativo en el cono $f + zg$, con f, g polinomios, tal que $H \equiv f + zg \mod (x, y, z)^k$.*

Supongamos este resultado cierto, por un momento. Lo que tenemos que demostrar es que la ecuación

$$H = \mathtt{h}_1^2 + \mathtt{h}_2^2 + (z^2 - x^2 - y^2)\mathtt{h}$$

tiene una solución $\mathtt{h}_1 = h_1, \mathtt{h}_2 = h_2, \mathtt{h} = h$ en $\mathbb{R}\{x, y, z\}$. Por el Teorema de Aproximación de M. Artin (0.10), la ecuación anterior tiene solución si existe una solución de la misma hasta orden k suficientemente grande, es decir, si la congruencia

$$H \equiv \mathtt{h}_1^2 + \mathtt{h}_2^2 + (z^2 - x^2 - y^2)\mathtt{h} \mod (x, y, z)^k$$

tiene solución para k grande. Pero la función psd $f + zg$ suministrada por II.1.4 es suma de dos cuadrados por el caso polinomial II.1.2: existen $h_1, h_2, h \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tales que $f + zg = h_1^2 + h_2^2 + (z^2 - x^2 - y^2)h$. Claramente h_1, h_2, h son las soluciones hasta orden k que necesitabamos, con lo que obtenemos el resultado deseado.

Terminamos la sección con la demostración del lema.

Demostración del lema 1.4. En primer lugar, reemplazando H por $(x^2 + y^2)^k + H$ podemos suponer que H sólo se anula en el origen. A continuación, escribimos $H = f + zg$ con $f, g \in \mathbb{R}\{x, y\}$. Si $f = 0$ contiene algún germen de curva plana Y, este germen Y se eleva a dos gérmenes de curva Y_+ e Y_- en el cono, correspondientes a $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. En estos gérmenes de curva $H = zg \geq 0$, y, z cambia de signo de Y_+ a Y_-, lo cual sólo es posible si g

se anula en Y, y entonces H se anula en Y_+ e Y_-, contra la hipótesis de que sólo se anulaba en el origen. De este modo, f sólo se anula en el origen. Ahora usamos de nuevo el truco de que el cambio $z = -z$ deja el cono invariante, con lo que $f + zg$ y $f - zg$ sólo se anulan en el origen, y lo mismo ocurre para el producto $f^2 - z^2g^2 = f^2 - (x^2+y^2)g^2 \in \mathbb{R}\{x, y\}$. Esto significa que todas las ramas complejas de f y $f^2 - (x^2 + y^2)g^2$ son imaginarias. Ahora, recordamos una consecuencia del algoritmo de Newton (véase [Wk]) para el cálculo de las ramas complejas de un germen de curva plana: los jets de orden r de estas ramas dependen de los jets de orden s del germen dado, o en otras palabras, si aproximamos el germen de curva hasta orden s, las ramas de la aproximación se aproximan a las ramas del germen dado hasta orden r. De esta forma, si tenemos un germen cuyas ramas son todas imaginarias, cualquier aproximación suficiente del germen tiene la misma propiedad. Aplicando todo esto a f y $f^2 - (x^2+y^2)g^2$ llegamos a que reemplazando f y g por sus jets de grado suficientemente alto (y $\geq k$), f y $f^2 - (x^2+y^2)g^2$ tienen sólo ramas imaginarias, y son ≥ 0. En consecuencia, después de reemplazarlas por sus jets seguimos teniendo

$$(f + zg) + (f - zg) = 2f \geq 0,$$
$$(f + zg)(f - zg) = f^2 - (x^2 + y^2)g^2 \geq 0.$$

Por tanto, $f + zg \geq 0$, y hemos terminado. ■

2 Reducción polinomial

Según hemos visto en el caso del cono, es bueno poder deducir el caso analítico del polinomial. En esta sección abordaremos este aspecto en general, y no sólo para el cono. Dado un germen de superficie analítica en el origen $X \subset \mathbb{R}^3$ con una ecuación del tipo $z^2 = F(x, y)$, $F \in \mathbb{R}[x, y]$, se define la superficie algebraica asociada a X por $S_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z^2 - F(x, y) = 0\}$ (que cumple que $(S_X)_0 = X$) y por $\mathcal{P}(S_X)$ el conjunto de polinomios del tipo $P(x, y) + zQ(x, y)$ que son ≥ 0 en todos los puntos de S_X.

Vamos a mostrar cómo el problema $\mathcal{P}(X) = \Sigma_k(X)$ se reduce a $\mathcal{P}(S_X) \subset \Sigma_k(X)$. Empezamos con el lema de densidad polinomial siguiente:

Lema 2.1 (Densidad polinomial) *Sea $Z \subset \mathbb{R}^2$ un germen semianalítico cerrado. Si $f \in \mathcal{O}(Z)$ es definido positivo o* pd *en Z, esto es, $f|_{Z\setminus\{0\}} > 0$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que cualquier $g \equiv f \mod (x, y)^r$ es asímismo pd en Z.*

Para abreviar las notaciones, $\mathcal{P}^+(Z)$ representa el conjunto de los gérmenes pd en Z. Recordamos que un polinomio $P \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ se llama *especial (con respecto a y)* si es distinguido con respecto a y, y cumple que $\omega(P) = \mathrm{grad}_y(P)$.

Proposición 2.2 *Sean $s \geq 0$ un entero y $P, Q \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ dos polinomios especiales de grado m. Sean $h \in (x, y)^{m+s+1} \subset \mathbb{R}\{x, y\}$ y $V \in \mathbb{R}\{x, y\}$ una unidad tales que $P = QV + h$.*

Entonces:

$$P \equiv Q \mod (x,y)^{m+s}, \quad V \equiv 1 \mod (x,y)^s$$

Demostración. Consideramos la descomposición en componentes homogéneas de P, Q, V como series:

$$\begin{aligned} P &= p_m + p_{m+1} + \cdots + p_{m+s} + \cdots \\ Q &= q_m + q_{m+1} + \cdots + q_{m+s} + \cdots \\ V &= v_0 + v_1 + \cdots + v_s + \cdots \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} p_m &= y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) \\ q_m &= y^m + b_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + b_1(x)y + b_0(x) \end{aligned}$$

y $\mathrm{grad}_y(p_{m+k}),\ \mathrm{grad}_y(q_{m+k}) \leq m-1$ para cada $k \geq 1$.
Como $P = QV + h$, para cada $k = 0, \ldots, s$ se tiene:

$$p_{m+k} = \sum_{i+j=m+k} q_i v_j.$$

Veamos por inducción sobre k que $p_{m+k} = q_{m+k}$ para cada $k = 0, \ldots, s$ y que $v_0 = 1$ y $v_k = 0$ si $k = 1, \ldots, s$.

- Para $k = 0$ es $p_m = q_m v_0$. Haciendo $x = 0$ obtenemos $y^m = v_0 y^m$, y por tanto $v_0 = 1$ y $p_m = q_m$.
- Supongamos que si $k < s$ se cumple que $p_{m+j} = q_{m+j}$ para cada $j = 0, \ldots, k$ y que $v_0 = 1$ y $v_j = 0$ si $j = 1, \ldots, k$. En estas hipótesis:

  $$p_{m+k+1} = q_{m+k+1}v_0 + q_{m+k}v_1 + \cdots + q_m v_{k+1} = q_{m+k+1} + p_m v_{k+1}$$

  De esta forma, como

  $$\begin{aligned} \mathrm{grad}_y(p_m v_{k+1}) &= \mathrm{grad}_y(p_{m+k+1} - q_{m+k+1}) \\ &\leq \max\{\mathrm{grad}_y(p_{m+k+1}), \mathrm{grad}_y(q_{m+k+1})\} \leq m-1, \end{aligned}$$

  sólo puede ser $p_{m+k+1} = q_{m+k+1}$ y $v_{k+1} = 0$.

Las congruencias del enunciado resultan inmediatamente de lo anterior. ∎

A continuación debemos entender el comportamiento de las raíces de los polinomios de $\mathbb{R}\{x\}[y]$. Recordemos que $\Omega_{\mathbb{K}}$ denota el anillo de series convergentes de Puiseux con coeficientes en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y $\Phi_{\mathbb{K}}$ su cuerpo de fracciones. El cuerpo $\Phi_{\mathbb{C}}$ es el cierre algebraico de $\mathbb{R}(\{x\})$, y el anillo $\Omega_{\mathbb{K}}$ es la clausura entera de $\mathbb{K}\{x\}$ en $\Phi_{\mathbb{K}}$. De este modo, si $Q \in \mathbb{K}\{x\}[y]$ es un polinomio mónico entonces sus raíces son elementos de $\Omega_{\mathbb{K}}$; aún más:

Proposición 2.3 *Si $P \in \mathbb{K}\{x\}[y]$ es un polinomio especial y $\alpha \in \Phi_{\mathbb{C}}$ una raíz de P, entonces $\omega(\alpha) \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que $P = y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x)$ y que $\alpha \in \Phi_{\mathbb{C}}$ es una raíz de P con $\omega(\alpha) < 1$. Como P es especial, $\omega(P) = m$ y así $\omega(a_k) \geq m-k$. Como $P(x,\alpha) = 0$, se tiene $\alpha^m = -\sum_{0\leq k<m} a_k\alpha^k$, luego

$$m\omega(\alpha) = \omega(\alpha^m) \geq \min_{0\leq k<m}\{\omega(a_k\alpha^k)\} = k_0\omega(\alpha) + \omega(a_{k_0}) \geq k_0\omega(\alpha) + m - k_0,$$

con lo que $(m-k_0)\omega(\alpha) \geq m - k_0 \geq 1$ y por tanto, $\omega(\alpha) \geq 1$. ■

Notación 2.4 Dada una serie $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$ regular con respecto a y de orden m existen, por el Teorema de Preparación de Weierstrass, un único polinomio distinguido $P \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ de grado m y una única unidad $U \in \mathbb{R}\{x,y\}^\star$ tal que $f = PU$. Denotaremos $P = P_f$ y $U = U_f$. Nótese que P_f es especial con respecto a y.

Lema 2.5 *Sean $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$ una serie regular con respecto a y de orden $\omega(f) = m$ y $r \in \mathbb{N}$. Si $h \in (x,y)^{rm+1}$ se cumple que:*

a) $f + h$ es una serie regular con respecto a y de orden $\omega(f+h) = m$.

b) $P_f \equiv P_{f+h} \mod (x,y)^{rm}$

c) Para cada raíz $\beta \in \Omega_{\mathbb{C}}$ de P_{f+h} existe una raíz $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}$ de P_f tal que $\omega(\beta - \alpha) \geq r$.

Demostración. Veamos en primer lugar que se cumple *a)*. Como $h \in (x,y)^{rm+1}$ y f es una serie regular con respecto a y de orden $\omega(f) = m$, entonces $\omega(f) = \omega(f+h)$ y $\omega(f(0,y)) = m < \omega(h(0,y))$ con lo que $\omega((f+h)(0,y)) = \omega(f(0,y)) = m$ y $f+h$ es una serie regular con respecto a y de orden $\omega(f+h) = m$.

Para demostrar *b)* procedemos del siguiente modo. Sabemos que:

$$\begin{aligned} f &= P_f U_f \\ f+h &= P_{f+h}U_{f+h}, \end{aligned}$$

con lo que deducimos que

$$P_f U_f + h = P_{f+h}U_{f+h}$$

y por tanto

$$P_f = P_{f+h}U_{f+h}U_f^{-1} - hU_f^{-1}$$

Por II.2.2 (para $s = (r-1)m$), como P_f y P_{f+h} son especiales con respecto a y, obtenemos que:

$$\begin{aligned} P_f &\equiv P_{f+h} \mod (x,y)^{rm} \\ U_f &\equiv U_{f+h} \mod (x,y)^{(r-1)m} \end{aligned}$$

Luego $P_f - P_{f+h} = g$, donde $g \in (x,y)^{rm} \subset \mathbb{R}\{x,y\}$ es un polinomio con respecto a y de grado $\leq m-1$.

Para demostrar *c)* procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que las series $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son las raíces de P_f en $\Omega_{\mathbb{C}}$ (repetidas cada una con su multiplicidad correspondiente) y que $\omega(\alpha_i - \beta) < r$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como β es raíz de $P_{f+h} = P_f + g$ entonces $0 = (P_f + g)(x,\beta) = P_f(x,\beta) + g(x,\beta)$ luego $\omega(g(x,\beta)) = \omega(P_f(x,\beta))$.

Pero, al ser $P_f + g$ especial se tiene (por II.2.3) $\omega(\beta) \geq 1$; y así, como

$$P_f = (y - \alpha_1) \cdots (y - \alpha_m),$$

deducimos que

$$\omega(g(x,\beta)) \geq \omega(g) \geq rm > \omega(\beta - \alpha_1) + \cdots + \omega(\beta - \alpha_m) = \omega(P_f(x,\beta)),$$

contradicción. ■

Notaciones 2.6 Para cada polinomio $P \in \mathbb{R}\{x\}[y]$, denotaremos por $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(P)$ (resp. $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P)$) el conjunto de las raíces de P en $\Phi_{\mathbb{C}}$ (resp. en $\Phi_{\mathbb{R}}$). Denotamos τ la simetría $(x,y) \mapsto (-x,y)$ y $P^\tau = P(-x,y)$.

Lema 2.7 *Sean $f, \varphi \in \mathbb{R}\{x,y\}$ tales que $\{f=0\} \setminus \{0\} \subset \{\varphi < 0\}$. Existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que si $g \equiv h \mod (x,y)^\lambda$ entonces $\{g=0\} \setminus \{0\} \subset \{\varphi < 0\}$.*

Demostración. Mediante un cambio lineal podemos suponer que f, φ son regulares con respecto a y de órdenes $\omega(f)$, $\omega(\varphi)$ respectivamente. De este modo, $f = P_f U_f$, $\varphi = P_\varphi U_\varphi$ siendo $P_f, P_\varphi \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ polinomios especiales y U_f, U_φ unidades de $\mathbb{R}\{x,y\}$. Además, dado que P_f es especial y U_φ es unidad, cambiando P_φ por $-P_\varphi$ (si es necesario), podemos suponer

$$\{P_f = 0,\ x \neq 0\} = \{f = 0\} \setminus \{0\} \subset \{P_\varphi < 0\}.$$

Es sabido que $\{P_f = 0,\ x \neq 0\}$ es una unión finita de semirramas de gérmen de curva $X_1, \ldots, X_r$ que admiten parametrizaciones primitivas

$$x = \varepsilon_i s^{q_i} u_i(s),\ y = g_i(s),\ s > 0,$$

con $q_i \geq 1$, $\varepsilon_i = +1$ ó -1, $u_i, g_i \in \mathbb{R}\{s\}$ y $u_i(0) > 0$. De esta forma, tomando en cada caso $t = s\sqrt{q_i}u_i$ obtenemos reparametrizaciones primitivas de cada X_i de la forma

$$x = \varepsilon_i t^{q_i},\ y = h_i(t),\ t > 0,$$

con $\varepsilon_i = +1$ ó -1, $q_i \geq 1$ y $h_i \in \mathbb{R}\{t\}$. Además, es claro que $h_i(x^{1/q_i}) \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f)$ (resp. $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f^\tau)$) si $\varepsilon = +1$ (resp. $\varepsilon = -1$). Recíprocamente, si $\xi = g(x^{1/q}) \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f)$ (resp.

$\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f^\tau)$) con $q = \mathrm{q}(\xi)$ y $g \in \mathbb{R}\{t\}$ entonces el germen $D_\xi:\ x = t^q,\ y = g(t), t > 0$ (resp. $\tau(D_\xi)$) está contenido en $P_f = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f)} D_\alpha &= \{P_f = 0,\ x > 0\}\\ \bigcup_{\beta\in\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f^\tau)} \tau(D_\beta) &= \{P_f = 0,\ x < 0\}.\end{aligned}$$

Veamos ya que existe $\lambda_1 \geq 1$ tal que $\{f + h = 0,\ x > 0\} \subset \{P_\varphi < 0\}$ para $h \in (x, y)^{\lambda_1}$.

En efecto, sea $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(P_f)$. Distinguiremos dos casos:

a) Si $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f)$, como $\{P_f = 0,\ x \neq 0\} \subset \{P_\varphi < 0\}$, entonces la serie $P_\varphi(x, \xi) < 0$ en $\Omega_{\mathbb{R}}$ y así se cumple que

$$P_\varphi(x, \xi) = c_r x^{r/q} + \cdots \quad \text{con } c_r < 0.$$

Veamos ahora que si $\eta \in \Omega_{\mathbb{R}}$ es tal que $\omega(\xi - \eta) \geq r/q + 1 = m(\xi)$, entonces $P_\varphi(x, \eta) < 0$. Como $P_\varphi(x, y+z) = P_\varphi(x, y) + zQ(x, y, z)$ con $Q \in \mathbb{R}\{x\}[y, z]$ entonces

$$P_\varphi(x, \eta) = P_\varphi(x, \xi + (\eta - \xi)) = P_\varphi(x, \xi) + (\eta - \xi)Q(x, \xi, (\eta - \xi)) = c_r x^{r/q} + \cdots$$

con $c_r < 0$, luego $P_\varphi(x, \eta) < 0$.

b) Si $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(P_f) \setminus \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_f)$ entonces $\xi \in \Omega_{\mathbb{C}} \setminus \Omega_{\mathbb{R}}$ y $\omega(\xi) \geq 1$ (pues P_f es especial) y así $\xi = g(t^{1/q}) = a_q t^{q/q} + a_{q+1} t^{(q+1)/q} + \cdots + a_{q+r} t^{(q+r)/q} + \cdots$ con $a_{q+r} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Sea ahora $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}}$ tal que $\omega(\xi - \eta) \geq \frac{q+r}{q} + 1 = m(\xi)$. Entonces $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}} \setminus \Omega_{\mathbb{R}}$, pues $\eta = a_q t^{q/q} + a_{q+1} t^{(q+1)/q} + \cdots + a_{q+r} t^{(q+r)/q} + b_{q+r+1} t^{(q+r+1)/q} + \cdots$ con $a_{q+r} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Tomamos, $M = \max\{m(\xi) : \xi \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(P_f)\}$. Como consecuencia de II.2.5, existe $\lambda_1 \geq 1$ tal que si $h \in (x, y)^{\lambda_1}$, entonces:

a) $f + h$ es una serie regular con respecto a y de orden $\omega(f + h) = \omega(f) = m$.

b) $P_f \equiv\ P_{f+h} \mod (x, y)^{\lambda_1}$

c) Para cada $\eta \in \Omega_{\mathbb{C}}$ raíz de P_{f+h} existe $\xi \in \Omega_{\mathbb{C}}$ raíz de P_f tal que $\omega(\eta - \xi) \geq M$,

y por tanto, se cumple que $P_\varphi(x, \eta) < 0$ para cada $\eta \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(P_{f+h})$; luego,

$$\{P_{f+h} = 0, x > 0\} \subset \{P_\varphi < 0\}.$$

Análogamente utilizando las raíces de P_f^τ, encontramos $\lambda_2 \geq 1$ tal que si $h \in (x, y)^{\lambda_2}$ entonces $\{P_{f+h} = 0,\ x < 0\} \subset \{P_\varphi < 0\}$.

Sea, finalmente, $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$; si $h \in (x, y)^\lambda$ se tiene que

$$\{f + h = 0\} \setminus \{0\} = \{P_{f+h} = 0\} \setminus \{0\} \subset \{P_\varphi < 0\} = \{\varphi < 0\}.$$

■

Ahora nos encontramos ya en la situación adecuada para probar el teorema II.2.1.

Demostración del teorema 2.1. Como un germen semianalítico de $\mathbb{R}^2$ es unión finita de semirramas cerradas y bandas conexas limitadas por semirramas cerradas, podemos suponer que $Z \setminus \{0\}$ es conexo.

Ahora, sea $f \in \mathcal{P}^+(Z)$. Entonces $Z \cap \{f = 0\} = \{0\}$, y por [Rz1], existe un polinomio separante $\varphi \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que $\varphi|_{Z\setminus\{0\}} > 0$ y $\varphi|_{\{f=0\}\setminus\{0\}} < 0$. Por II.2.7, existe $\lambda \geq 1$ tal que si $g \equiv f \mod (x, y)^\lambda$ entonces $\{g = 0\} \setminus \{0\} \subset \{\varphi < 0\}$, y de este modo, si $g \equiv f \mod (x, y)^\lambda$ entonces $\{g = 0\} \cap Z = \{0\}$, luego como $Z \setminus \{0\}$ es conexo, g tiene signo constante en $Z \setminus \{0\}$. Garantizamos que ese signo es positivo como sigue.

Por el Lema de Selección de Curvas ([AnBrRz, VIII.2.6]), Z contiene una semirrama que podemos parametrizar por

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t > 0.$$

Como $f \in \mathcal{P}^+(Z)$ entonces

$$0 < f(x(t), y(t)) = a_s t^s + a_{s+1} t^{s+1} + \cdots, \qquad a_s > 0.$$

Así, si $g \equiv f \mod (x, y)^r$ con $r \geq \lambda, s + 1$ resulta

$$g(x(t), y(t)) \equiv f(x(t), y(t)) \qquad \mod (x(t), y(t))^r.$$

Pero si $k + l \geq r$ resulta

$$\omega(x(t)^k y(t)^l) \geq k + l \geq r \geq s + 1$$

con lo que

$$g(x(t), y(t)) = a_s t^s + \cdots > 0,$$

y por tanto $g \in \mathcal{P}^+(Z)$. ■

Observaciones 2.8 Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ un germen analítico de ecuación $z^2 - F(x, y) = 0$, con $F \in \mathbb{R}[x, y]$. Entonces:

(a) El anillo $\mathcal{O}(X)$ es un $\mathbb{R}\{x, y\}$-módulo libre de rango 2, esto es, todo germen de función analítica en X está representado de forma única como $f(x, y) + zg(x, y)$, $f, g \in \mathbb{R}\{x, y\}$. En [Rz4], se caracterizaron los psd's de X mediante:

$$\mathcal{P}(X) = \{f + zg :\ f \in \mathcal{P}(F \geq 0), f^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)\}.$$

(b) Si consideramos los pd se tiene solo $\mathcal{P}^+(X) \supset \{f+zg : f \in \mathcal{P}^+(F \geq 0), f^2-Fg^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)\}$, y para el otro contenido tenemos: *si* $f+zg \in \mathcal{P}(X)$ *entonces* $(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$ *para* m *suficientemente grande.*

En efecto, como $f+(x^2+y^2)^m+zg \in \mathcal{P}^+(X)$ entonces para cada $m \geq 1$

$$(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{P}^+(X)$$

y por tanto,

$$(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{P}^+(F \geq 0).$$

De esta forma,

$$\{(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 = 0\} \subset \{F<0\} \cup \{0\},$$

con lo que $\{(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 = 0\} = \{f+(x^2+y^2)^m = 0, g = 0\}$. Pero, $\{f+(x^2+y^2)^m = 0\} \cap \{g=0\} \neq \{0\}$ a lo sumo para una cantidad finita de m's; y por tanto existe $m_0 \geq 1$ tal que si $m \geq m_0$ entonces $(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$.

A continuación enunciamos el teorema de reducción polinomial, que anunciábamos al principio de la sección.

Teorema 2.9 (Reducción polinomial) *Sea* $X \subset \mathbb{R}^3$ *un germen analítico de ecuación* $z^2 - F(x,y) = 0$, *con* $F \in \mathbb{R}[x,y]$, $F(0,0)=0$. *Dado* $k \geq 1$, *si* $\mathcal{P}(S_X) \subset \Sigma_k(X)$, *entonces* $\mathcal{P}(X) = \Sigma_k(X)$.

Demostración. En primer lugar, veamos que si $\varphi = f+zg \in \mathcal{P}(X)$ entonces para cada $m \geq 1$ existen $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$ tales que $h_m = P+zQ \in \mathcal{P}(S_X)$ y $\omega(\varphi - h_m) \geq m$.

Lo que vamos a hacer es aplicar de forma adecuada a f, f^2-Fg^2 el lema de densidad polinomial (II.2.1) y II.2.8 (a). Para ello, necesitaríamos que $f \in \mathcal{P}^+(F \geq 0), f^2-Fg^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$ por lo que tomamos la función $\varphi_m = f+(x^2+y^2)^m+zg \in \mathcal{P}^+(X)$ que cumple:

- $f+zg-\varphi_m = (x^2+y^2)^m \in (x,y)^{2m}$
- $\varphi_m(x,y,-z) \in \mathcal{P}^+(X)$
- $f+(x^2+y^2)^m \in \mathcal{P}^+(F \geq 0)$
- $(f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$ para m suficientemente grande, digamos $m \geq m_0$ (por II.2.8 (b)).

Ahora, por el lema de densidad polinomial (II.2.1), existe $r > 2m$ tal que:

$$\begin{aligned} f+(x^2+y^2)^m+(x,y)^r &\subset \mathcal{P}^+(F \geq 0) && \text{(i)} \\ (f+(x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 + (x,y)^r &\subset \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2) && \text{(ii)} \end{aligned}$$

Consideramos ahora el jet de grado $r-1$ de φ_m,

$$\varphi_m^{r-1} = f_{r-1} + (x^2+y^2)^m + zg_{r-2}$$

donde f_{r-1}, g_{r-2} son los jets de grados $r-1, r-2$ de f, g respectivamente.

Vemos que $\varphi_m^{r-1} \in \mathcal{P}^+(X)$, para lo cual basta comprobar que

$$f_{r-1} + (x^2+y^2)^m \in \mathcal{P}^+(F \geq 0), \; (f_{r-1} + (x^2+y^2)^m)^2 - Fg_{r-2}^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$$

lo que resulta de (i), (ii), pues tenemos:

$$f + (x^2+y^2)^m - \left[f_{r-1} + (x^2+y^2)^m\right] = f - f_{r-1} \in (x,y)^r, \tag{iii}$$

$$\begin{aligned}(f + (x^2+y^2)^m)^2 - Fg^2 - &\left[(f_{r-1} + (x^2+y^2)^m)^2 - Fg_{r-2}^2\right] \\ &= (f^2 - Fg^2) - (f_{r-1}^2 - Fg_{r-2}^2) + 2(x^2+y^2)^m(f - f_{r-1}) \in (x,y)^r. \end{aligned} \tag{iv}$$

Como $\varphi_m^{r-1} \in \mathcal{P}^+(X)$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $(x,y,z) \in S_X \cap B_\varepsilon(0)$ se cumple que $\varphi_m^{r-1}(x,y,z) \geq 0$ (y sólo vale 0 en el origen). Sea ahora $(x,y,z) \in \{z^2 - F(x,y) = 0\}$ tal que $\|(x,y,z)\| \geq \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}|\varphi_m^{r-1}(x,y,z)| = \Big|\sum_{i+j+k\leq r-1} a_{ijk}x^iy^jz^k\Big| &\leq \sum_{i+j+k\leq r-1} |a_{ijk}||x|^i|y|^j|z|^k \\ \leq \sum_{i+j+k\leq r-1} |a_{ijk}|\|(x,y,z)\|^{i+j+k} &\leq \sum_{i+j+k\leq r-1} \frac{|a_{ijk}|}{\varepsilon^{2r-i+j+k}}\|(x,y,z)\|^{2r} \\ &\leq M\|(x,y,z)\|^{2r} = M(x^2+y^2+z^2)^r\end{aligned}$$

para cierto $M > 0$.

Por todo esto, $h_m = \varphi_m^{r-1} + M(x^2+y^2+F)^r \in \mathcal{P}(S_X)$ y

$$h_m - (f + zg) = M(x^2+y^2+F)^r + \varphi_m^{r-1} - (f+zg) \in (x,y)^{2m}.$$

De esta forma, para cada $m \geq 1$ existe $h_m \in \mathcal{P}(S_X)$ tal que $\omega(\varphi - h_m) > m$, y por tanto, si $\mathcal{P}(S_X) \subset \Sigma_k(X)$ existen $\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{km}, q_m \in \mathbb{R}\{x,y,z\}$ tales que

$$h_m = \alpha_{1m}^2 + \cdots + \alpha_{km}^2 + (z^2 - F)q_m.$$

Ahora, por el Teorema de Aproximación de M. Artin (0.10), se tiene que la ecuación

$$\varphi = f + zg = X_1^2 + \cdots + X_k^2 + (z^2 - F)Y$$

tiene solución en $\mathbb{R}\{x,y,z\}$. ■

Terminamos esta sección con un resultado que nos facilitará la demostración del *caso polinomial* en los gérmenes de superficie que son sujeto de estudio.

Proposición 2.10 *Sean $P \in \mathbb{R}\{x,y\}[z]$ un polinomio distinguido con respecto a z de grado m y $F, A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}\{x,y\}[z]$ polinomios de grado $\leq m-1$ tales que $F = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2 + PQ$ siendo $Q \in \mathbb{R}\{x,y,z\}$. Entonces $Q \in \mathbb{R}\{x,y\}[z]$ y $\operatorname{grad}_z(Q) \leq m-2$.*

Demostración. Dividimos el polinomio $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2$ de grado $\leq 2m-2$ entre P en $\mathbb{R}\{x,y\}[z]$ y obtenemos que

$$A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2 = PQ_1 + R_1$$

siendo $Q_1, R_1 \in \mathbb{R}\{x,y\}[z]$ y $\operatorname{grad}_z(Q_1) \leq m-2, \operatorname{grad}_z(R_1) \leq m-1$. Por tanto $F = (Q_1+Q)P + R_1$, que es una división de Weierstrass. Pero, como $\operatorname{grad}_y(F) < \operatorname{grad}_y(P)$ también lo es $F = 0P + F$, luego por la unicidad de ésta, $Q = -Q_1 \in \mathbb{R}\{x,y\}[z]$ y $\operatorname{grad}_z(Q) \leq m-2$. ■

3 La singularidad de Brieskorn y sus explosiones

El objetivo de esta sección es demostrar que $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para los dos gérmenes de superficie:

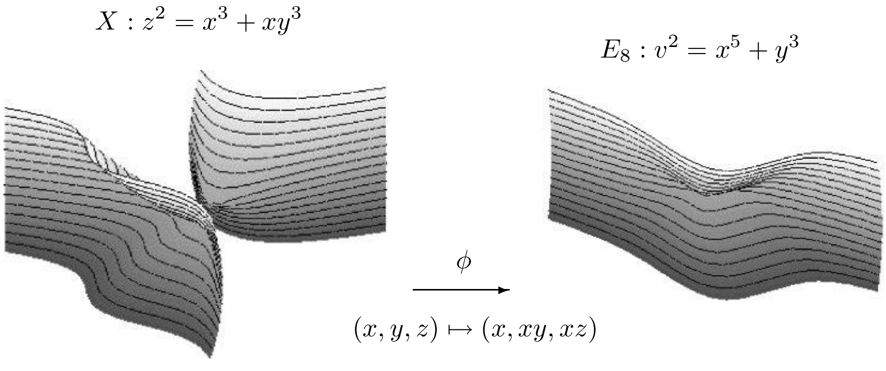
$$\begin{array}{rcl} X & : & z^2 - x^3 - xy^3 = 0 \\ Y & : & z^2 - x^3 - y^4 = 0 \end{array}$$

Empezaremos por X. Como consecuencia del Teorema de Reducción Polinomial (II.2.9) es suficiente demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.1 $\mathcal{P}(S_X) \subset \Sigma_2(X)$

Demostración. En primer lugar, sea

$$\begin{array}{rcl} \phi : \{z^2 - x^3 - xy^3 = 0\} \setminus \{x=0\} & \longrightarrow & \{v^2 - x^5 - u^3 = 0\} \setminus \{x=0\} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, xy, xz) = (x,u,v) \end{array}$$



que es una equivalencia birregular entre las dos superficies anteriores, cuya inversa es

$$\begin{array}{rcl} \psi : \{v^2 - x^5 - u^3 = 0\} \setminus \{x=0\} & \longrightarrow & \{z^2 - x^3 - xy^3 = 0\} \setminus \{x=0\} \\ (x,u,v) & \longmapsto & \left(x, \dfrac{u}{x}, \dfrac{v}{x}\right) \end{array}$$

Sea ahora $T \in \mathcal{P}(S_X)$; como la ecuación de S_X es $z^2 - x^3 - xy^3 = 0$ podemos suponer que $T = P + zQ$. Consideramos

$$T \circ \psi = P\Big(x, \frac{u}{x}\Big) + \frac{v}{x} Q\Big(x, \frac{u}{x}\Big) = \frac{F(x,u) + vG(x,u)}{x^{2r}}$$

donde $F + vG \in \mathbb{R}[x,u,v]$, $r \in \mathbb{N}$. Es claro que $F + vG$ es ≥ 0 sobre $v^2 - x^5 - u^3 = 0,\ x \neq 0$, y por continuidad, sobre $v^2 - x^5 - u^3 = 0$. Como ésta es la superficie de Brieskorn, cuyo germen en el origen posee la propiedad $\mathcal{P} = \Sigma_2$ ([Rz4]), existen $\alpha, \beta, q \in \mathbb{R}\{x,u,v\}$ tales que

$$x^{2r}(P + zQ) \circ \psi = F + vG = \alpha^2 + \beta^2 + q(v^2 - x^5 - u^3),$$

y así obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{R}\{x,y,z\}$

$$x^{2r}(P + zQ)(x,y,z) = \alpha^2(x,xy,xz) + \beta^2(x,xy,xz) + q(x,xy,xz)x^2(z^2 - x^3 - xy^3)$$

Dividimos $\alpha(x,xy,xz), \beta(x,xy,xz), q(x,xy,xz)$ entre $z^2 - x^3 - xy^3$ (división de Weierstrass) y aplicando II.2.10, nos queda una igualdad del tipo

$$x^{2r}(P + zQ) = (\alpha_0 + z\alpha_1)^2 + (\beta_0 + z\beta_1)^2 - (z^2 - x^3 - xy^3)q_0 \tag{i}$$

siendo $\alpha_i, \beta_i, q_0 \in \mathbb{R}\{x,y\}$. Veamos que $x^2 | q_0$ y $x | \alpha_i, \beta_i$, de modo que después de dividir la expresión anterior por x^2 podremos reiterar el proceso hasta que

$$P + zQ = (a_0 + za_1)^2 + (b_0 + zb_1)^2 - (z^2 - x^3 - xy^3)h_0 \tag{ii}$$

con $a_i, b_i, h_0 \in \mathbb{R}\{x,y\}$. En primer lugar si igualamos coeficientes en (i) obtenemos que:

(0) $x^{2r}P = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + q_0(x^3 + xy^3)$

(1) $x^{2r}Q = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1)$

(2) $q_0 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$

Ahora por la ecuación (0) se obtiene que $x | \alpha_0^2 + \beta_0^2$, con lo que $x | \alpha_0, \beta_0$ y como consecuencia $x | q_0$. Finalmente, de la ecuación (2), se deduce que $x | \alpha_1^2 + \beta_1^2$ y por tanto $x | \alpha_1, \beta_1$ y $x^2 | q_0$. ■

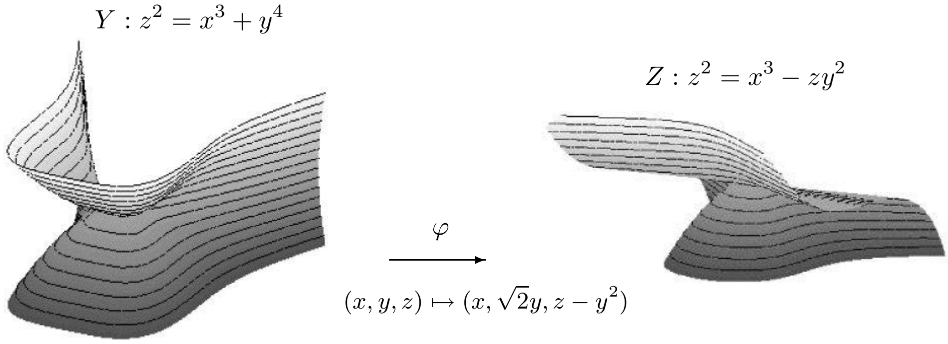
De esta forma, ya tenemos $\mathcal{P}(X) = \Sigma_2(X)$.

Trataremos Y de igual manera, viendo que:

Teorema 3.2 $\mathcal{P}(S_Y) \subset \Sigma_2(Y)$

Demostración. Consideramos el germen analítico $Z : z^2 + zy^2 - x^3 = 0$ y la equivalencia polinomial $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (x, \sqrt{2}y, z - y^2)$, que cumple:

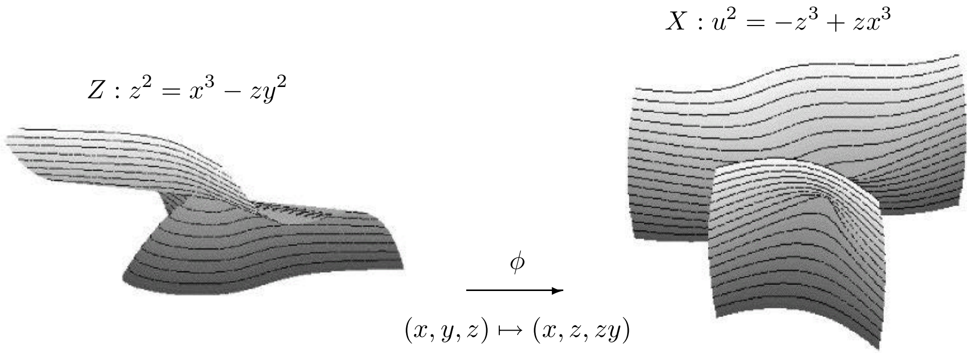
$$\varphi(S_Y) = S_Z, \quad \varphi(Y) = Z.$$



Así $\mathcal{P}(S_Y) \subset \Sigma_2(Y)$ es equivalente a $\mathcal{P}(S_Z) \subset \Sigma_2(Z)$, y comprobaremos esta última condición.

Consideramos la equivalencia birregular:

$$\begin{array}{rcl}\phi : \{z^2 + zy^2 - x^3 = 0\} \setminus \{z = 0\} & \longrightarrow & \{u^2 + z^3 - zx^3 = 0\} \setminus \{z = 0\} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, z, zy) = (x, z, u)\end{array}$$



cuya inversa es

$$\begin{array}{rcl}\psi : \{u^2 + z^3 - zx^3 = 0\} \setminus \{x = 0\} & \longrightarrow & \{z^2 + zy^2 - x^3 = 0\} \setminus \{x = 0\} \\ (x, z, u) & \longmapsto & \Big(x, \dfrac{u}{z}, z\Big)\end{array}$$

Sea ahora $P \in \mathcal{P}(S_Z)$, y consideramos

$$P \circ \psi = P\Big(x, \frac{u}{z}, z\Big) = \frac{F(x, u, z)}{z^{2r}}$$

donde $F(x, z, u) \in \mathbb{R}[x, z, u]$, $r \geq 0$. Como F es ≥ 0 sobre $u^2 + z^3 - zx^3 = 0, x \neq 0$, por continuidad lo es también sobre $u^2 + z^3 - zx^3 = 0$. Pero esta superficie es equivalente a X, ya discutida, luego existen $\alpha, \beta, q \in \mathbb{R}\{x, z, u\}$ tales que

$$z^{2r} P \circ \psi = F = \alpha^2 + \beta^2 + q(u^2 + z^3 - zx^3)$$

y así obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{R}\{x, y, z\}$

$$z^{2r}P(x, y, z) = \alpha^2(x, z, zy) + \beta^2(x, z, zy) + q(x, z, zy)z(zy^2 + z^2 - x^3)$$

Dividimos $\alpha(x, z, zy), \beta(x, z, zy), q(x, z, zy)$ entre $x^3 - z^2 - zy^2$ (división de Weierstrass) y aplicando II.2.10, nos queda una expresión del tipo

$$\begin{aligned} z^{2r}(p_0 + p_1x + p_2x^2) &= (\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2)^2 \\ &\quad + (\beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2)^2 - (q_0 + q_1x)(x^3 - z^2 - zy^2) \quad \text{(i)} \end{aligned}$$

siendo $\alpha_i, \beta_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}\{y, z\}$. Veamos que $z^2|q_i$ y $z|\alpha_i, \beta_i$, de modo que podremos dividir la expresión anterior por z^2 y reiterando el proceso tendremos

$$\begin{aligned} &(p_0 + p_1x + p_2x^2) \\ &\quad = (a_0 + a_1x + a_2x^2)^2 + (b_0 + b_1x + b_2x^2)^2 - (h_0 + h_1x)(x^3 - z^2 - zy^2) \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

siendo $a_i, b_i, h_i \in \mathbb{R}\{y, z\}$. Igualando coeficientes en (i) obtenemos:

(0) $z^{2r}p_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + q_0(z^2 + zy^2)$

(1) $z^{2r}p_1 = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) + q_1(z^2 + zy^2)$

(2) $z^{2r}p_2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2(\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2)$

(3) $q_0 = 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)$

(4) $q_1 = \alpha_2^2 + \beta_2^2$

Ahora de (0) se sigue que $z|\alpha_0^2+\beta_0^2$, con lo que $z|\alpha_0, \beta_0$ y como consecuencia $z|q_0$. Aplicando esto a (2) se deduce que $z|\alpha_1^2+\beta_1^2$, con lo que $z|\alpha_1, \beta_1$ y como consecuencia de (1) $z|q_1$. De (4) resulta que $z|\alpha_2^2 + \beta_2^2$, luego $z|\alpha_2, \beta_2$ y $z^2|q_1$. Finalmente, de (3) deducimos que $z^2|q_0$.
■

Así pues, como decíamos, se tiene $\mathcal{P}(Y) = \Sigma_2(Y)$.

4 El par de planos y sus deformaciones

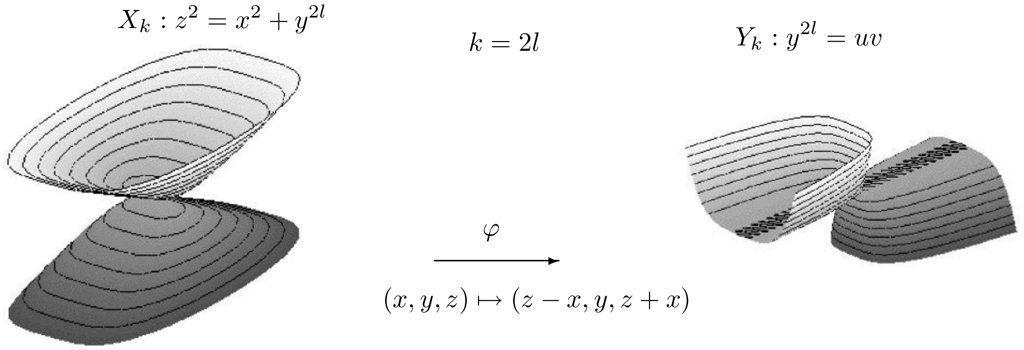
Denotaremos por X_k al germen en el origen de ecuación $z^2 - x^2 - y^k = 0$ para $k \geq 2$. En esta sección demostramos que $\mathcal{P}(X_k) = \Sigma_2(X_k)$. Además, demostraremos que $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para el germen en el origen del par de planos, cuya ecuación es $z^2 - x^2 = 0$.

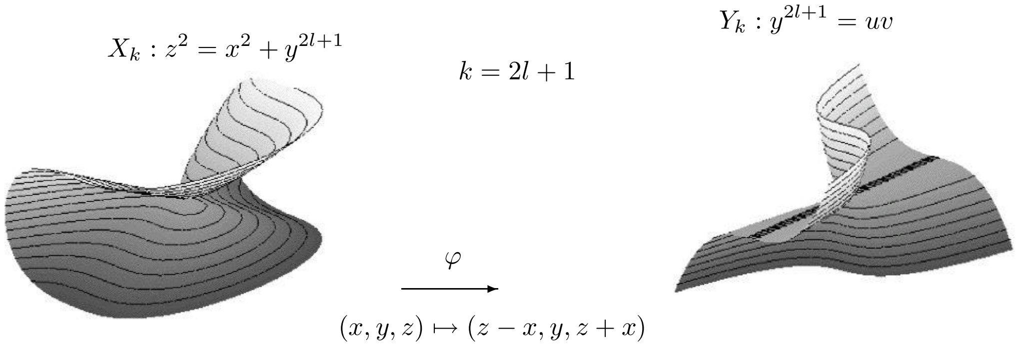
Como consecuencia del teorema de reducción polinomial (II.2.9), para probar $\mathcal{P}(X_k) = \Sigma_2(X_k)$ es suficiente demostrar el siguiente resultado:

Teorema 4.1 $\mathcal{P}(S_{X_k}) \subset \Sigma_2(X_k)$.

Demostración. Consideramos el germen en el origen Y_k de ecuación $y^k - uv = 0$ y el isomorfismo lineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (z - x, y, z + x) = (u, y, v)$, que cumple:

$$\varphi(S_{X_k}) = S_{Y_k}, \quad \varphi(X_k) = Y_k.$$





De esta forma para demostrar que $\mathcal{P}(S_{X_k}) \subset \Sigma_2(X_k)$, basta demostrar que $\mathcal{P}(S_{Y_k}) \subset \Sigma_2(Y_k)$.

Para hacer esto, consideramos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^2 - \{v = 0\} & \longrightarrow & S_{Y_k} - \{v = 0\} \\ (y, v) & \longmapsto & \Big(\dfrac{y^k}{v}, y, v\Big) = (u, y, v) \end{array}$$

que es una equivalencia birregular entre las dos superficies abiertas anteriores. Dado ahora $P \in \mathcal{P}(S_{Y_k})$ tomamos

$$P \circ \phi(y, v) = P\Big(\frac{y^k}{v}, y, v\Big) = \frac{Q(y, v)}{v^{2r}}$$

con $r \geq 0$, y $Q(y, v) \in \mathbb{R}[y, v]$ que es ≥ 0 sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{v = 0\}$, y, por continuidad, sobre $\mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2_o) = \Sigma_2(\mathbb{R}^2_o)$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\{y, v\}$ tales que

$$v^{2r} P \circ \phi = Q = \alpha^2 + \beta^2$$

y así obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{R}\{u,y,v\}$

$$v^{2r}P(u,y,v) = \alpha^2(y,v) + \beta^2(y,v) + (y^k - uv)q(u,y,v)$$

con $q \in \mathbb{R}\{u,y,v\}$.

Dividimos P, α, β entre $y^k - uv$ (división de Weierstrass) y aplicando II.2.10, nos queda una expresión del tipo

$$\begin{aligned} v^{2r}(p_0 + p_1 y + \cdots + p_{k-1}y^{k-1}) &= (\alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_{k-1}y^{k-1})^2 \\ &+ (\beta_0 + \beta_1 y + \cdots + \beta_{k-1}y^{k-1})^2 - (y^k - uv)(q_0 + q_1 y + \cdots + q_{k-2}y^{k-2}) \quad \text{(i)} \end{aligned}$$

donde $\alpha_i, \beta_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}\{u,v\}$. Afirmamos que $v^2|q_0, \dots, q_{k-2},\ v|\alpha_i, \beta_i$ para $0 \le i \le k-1$, de modo que simplificando la expresión anterior por v^2 y reiterando el proceso tendremos lo que queríamos:

$$\begin{aligned} (p_0 + p_1 y + \cdots + p_{k-1}y^{k-1}) &= (a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-1}y^{k-1})^2 \\ &+ (b_0 + b_1 y + \cdots + b_{k-1}y^{k-1})^2 - (y^k - uv)(h_0 + h_1 y + \cdots + h_{k-2}y^{k-2}) \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

con $a_i, b_i, h_i \in \mathbb{R}\{u,v\}$.

Para probar nuestra afirmación, igualamos coeficientes en (i) y obtenemos:

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & v^{2r}p_0 - uvq_0 & = & \alpha_0^2 + \beta_0^2 \\
(2) & v^{2r}p_1 - uvq_1 & = & 2\alpha_0\alpha_1 + 2\beta_0\beta_1 \\
 & & \vdots & \\
(l) & v^{2r}p_l - uvq_l & = & \sum_{i+j=l}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) \\
 & & \vdots & \\
(k-1) & v^{2r}p_{k-1} - uvq_{k-1} & = & \sum_{i+j=k-1}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) \quad (\text{donde } q_{k-1} = 0) \\
(k) & q_0 & = & \sum_{i+j=k}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) \\
 & & \vdots & \\
(k+l) & q_l & = & \sum_{i+j=k+l}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) \\
 & & \vdots & \\
(2k-2) & q_{k-2} & = & \alpha_{k-1}^2 + \beta_{k-1}^2
\end{array}$$

Ahora, veamos por inducción que $v|\alpha_l, \beta_l, q_l$ para cada $l = 0, \dots, k-1$

- Para $l = 0$ tenemos que
$$v^{2r}p_0 - uvq_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2$$
y por tanto, $v|\alpha_0^2 + \beta_0^2$, de donde se deduce que $v|\alpha_0, \beta_0$ y en consecuencia $v|q_0$.

- Supongamos que $v|\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_{l-1}, \beta_{l-1}, q_0, \dots, q_{l-1}$ para $l \le k-1$ y veamos que $v|\alpha_l, \beta_l, q_l$. Para ello vamos a distinguir dos casos:

i) Si $2l \leq k-1$ entonces:

$$v^{2r}p_{2l} - uvq_{2l} = \sum_{i+j=2l, i\neq j} (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) + \alpha_l^2 + \beta_l^2$$

Como $v|\alpha_0, \beta_0, \ldots, \alpha_{l-1}, \beta_{l-1}$, resulta $v|\alpha_l, \beta_l$, y de la ecuación (l) se deduce que $v|q_l$.

ii) Si $2l > k-1$ entonces:

$$q_{2l-k} = \sum_{i+j=2l, i\neq j} (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) + \alpha_l^2 + \beta_l^2$$

Como $l \leq k-1$, es $2l - k \leq l-1$ y por hipótesis de inducción $v|q_{2l-k}$. Como, también por hipótesis de inducción $v|\alpha_0, \beta_0, \ldots, \alpha_{l-1}, \beta_{l-1}$ concluimos que $v|\alpha_l, \beta_l$. De nuevo, de la ecuación (l) resulta que $v|q_l$.

Finalmente, de las ecuaciones $(k), \ldots, (2k-2)$ se deduce que $v^2|q_l$ si $0 \leq l \leq k-2$. ■

De este modo, queda demostrado que $\mathcal{P}(X_k) = \Sigma_2(X_k), \quad k \geq 2$.

Terminamos la sección deduciendo la propiedad $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para el par de planos:

Corolario 4.2 $\mathcal{P}(z^2 - x^2 = 0) = \Sigma_2(z^2 - x^2 = 0)$

Demostración. Sea $f + zg \in \mathcal{P}(z^2 - x^2 = 0)$; entonces por II.2.8 (b) existe $m_0 \geq 1$ tal que si $m \geq m_0$ entonces:

- $f + (x^2+y^2)^m \in \mathcal{P}^+(x^2 \geq 0) = \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$
- $(f + (x^2+y^2)^m)^2 - x^2g^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$

Por el lema de densidad polinomial (II.2.1), si $m \geq m_0$, existe $r \geq 2m$ tal que $(f+(x^2+y^2)^m)^2 - x^2g^2 + (x,y)^r \subset \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$, y consideramos la función $f + (x^2+y^2)^m + zg \in \mathcal{O}(X_{2r})$. Se cumple:

- $f + (x^2+y^2)^m \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}^+(x^2 + y^{2r} \geq 0)$
- $(f + (x^2+y^2)^m)^2 - (x^2 + y^{2r})g^2 = (f + (x^2+y^2)^m)^2 - x^2g^2 - y^{2r}g^2 \in (f + (x^2 + y^2)^m)^2 - x^2g^2 + (x,y)^r \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$,

con lo que, $f + (x^2+y^2)^m + zg \in \mathcal{P}^+(X_{2r})$. Por lo que ya sabemos, existen $\alpha, \beta, h \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tales que :

$$f + (x^2+y^2)^m + zg = \alpha^2 + \beta^2 - (z^2 - x^2 - y^{2r})h$$

Por tanto,

$$f + zg \equiv \alpha^2 + \beta^2 - (z^2 - x^2)h \qquad \mathrm{mod}\ (x, y)^{2m}$$

Como esto lo podemos hacer cualquier $m \geq m_0$, el Teorema de Aproximación de M. Artin (0.10) garantiza la existencia de $a, b, q \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tales que

$$f + zg = a^2 + b^2 - (z^2 - x^2)q.$$

Esto concluye la demostración. ∎

5 El paraguas de Whitney y sus deformaciones

En esta sección consideramos los gérmenes

$$\begin{array}{ll} X_k: & z^2 - x^2y + y^{2k+1} = 0,\ k \geq 1 \\ Y_k: & z^2 - x^2y - y^{2k} = 0,\ k \geq 2. \end{array}$$

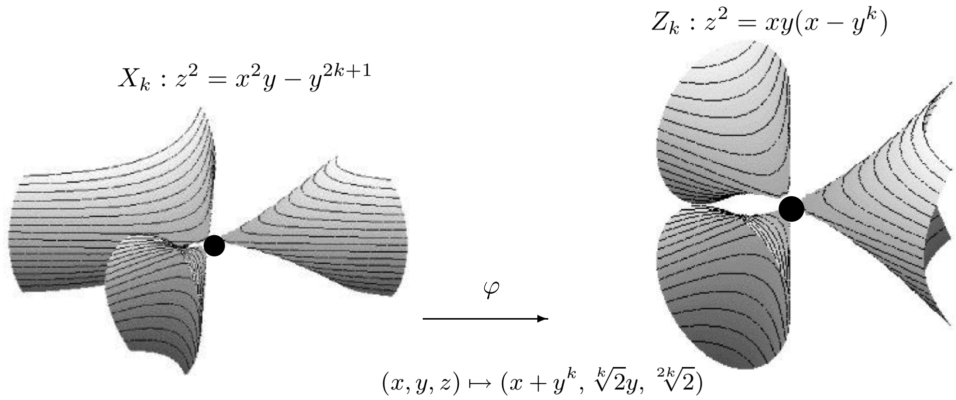
Vamos a demostrar que se cumple $\mathcal{P}(X_k) = \Sigma_2(X_k)$ y $\mathcal{P}(Y_k) = \Sigma_2(Y_k)$. Además, deduciremos que $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para el paraguas de Whitney, $z^2 - x^2y = 0$.

Trataremos primero el germen X_k. Como siempre, el problema se reduce a lo siguiente:

Teorema 5.1 $\mathcal{P}(S_{X_k}) \subset \Sigma_2(X_k)$.

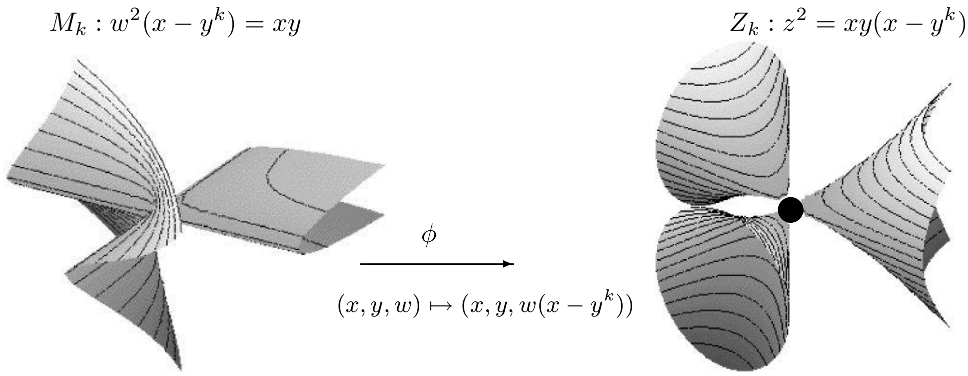
Demostración. Consideramos el germen $Z_k:\ z^2 - xy(x - y^k) = 0$ y la equivalencia polinomial $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x + y^k, \sqrt[k]{2}y, \sqrt[2k]{2}z)$, que cumple:

$$\varphi(S_{X_k}) = S_{Z_k}, \quad \varphi(X_k) = Z_k$$



Así $\mathcal{P}(S_{X_k}) \subset \Sigma_2(X_k)$ equivale a $\mathcal{P}(S_{Z_k}) \subset \Sigma_2(Z_k)$. Para comprobar esto último, consideramos la superficie algebraica $M_k:\ w^2(x - y^k) - xy = 0$ y la equivalencia birregular:

$$\begin{array}{rcl} \phi : M_k \setminus \{x - y^k = 0\} & \longrightarrow & S_{Z_k} \setminus \{x - y^k = 0\} \\ (x, y, w) & \longmapsto & (x, y, w(x - y^k)) = (x, y, z) \end{array}$$



cuya inversa es

$$\begin{array}{rcl} \psi : S_{Z_k} \setminus \{x - y^k = 0\} & \longrightarrow & M_k \setminus \{x - y^k = 0\} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \Big(x, y, \dfrac{z}{x - y^k}\Big) \end{array}$$

Sea ahora $T \in \mathcal{P}(S_{Z_k})$. Como la ecuación de S_{Z_k} es $z^2 - xy(x - y^k)$ podemos suponer que $T = P + zQ$. Componiendo con ϕ_k obtenemos la función

$$T \circ \phi = P(x, y) + w(x - y^k)Q(x, y)$$

que es ≥ 0 en M_k. Consideramos, a continuación, la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \chi : \mathbb{R}^2 \setminus \{w^2 - y = 0\} & \longrightarrow & M_k \setminus \{y = w = 0\} \\ (y, w) & \longmapsto & \Big(\dfrac{w^2 y^k}{w^2 - y}, y, w\Big) \end{array}$$

que es una equivalencia analítica entre las dos superficies anteriores. La aplicación

$$T \circ \phi \circ \chi = P\Big(\frac{w^2 y^k}{w^2 - y}, y\Big) + w\Big(\frac{w^2 y^k}{w^2 - y} - y^k\Big)Q\Big(\frac{w^2 y^k}{w^2 - y}, y\Big) = \frac{H_k(y, w)}{(w^2 - y)^{2r}}$$

con $2r \geq \mathrm{grad}_x(T \circ \phi)$, y $H_k(y, w) \in \mathbb{R}[y, w]$ que es ≥ 0 en $w^2 - y \neq 0$, y, por continuidad, en todo $\mathbb{R}^2$.

Por I.1.6, existen $F_1, F_2 \in \mathbb{R}\{y\}[w]$, tales que

$$(w^2 - y)^{2r}(T \circ \phi \circ \chi) = F_1^2 + F_2^2,$$

y por tanto, se tiene que

$$(w^2 - y)^{2r} T \circ \phi = F_1^2 + F_2^2 + \big((w^2 - y)x - w^2 y^k\big)q(x, y, w)$$

siendo $q \in \mathbb{R}[x, y, w]$ (ya que es el cociente de dividir el polinomio $(w^2 - y)^{2r}(T \circ \phi)$ entre $(w^2 - y)x - w^2 y^k$ en el anillo $\mathbb{R}[x, y, w]$).

Ahora, componiendo con $\phi^{-1} = \psi$ obtenemos que

$$\Big(\Big(\frac{z}{x - y^k}\Big)^2 - y\Big)^{2r} T = F_1^2\Big(y, \frac{z}{x - y^k}\Big) + F_2^2\Big(y, \frac{z}{x - y^k}\Big) + \Big[\frac{z^2}{x - y^k} - xy\Big]q\Big(x, y, \frac{z}{x - y^k}\Big)$$

y multiplicando por una potencia suficientemente alta de $(x-y^k)^2$, resulta

$$(x-y^k)^{2m}\big(z^2-y(x-y^k)^2\big)^{2r}T=\alpha^2+\beta^2+(z^2-xy(x-y^k))q'$$

siendo $\alpha,\beta,q'\in\mathbb{R}\{x,y,z\}$.

Dividimos $\alpha,\beta,\big(z^2-y(x-y^k)^2\big)^{2r}T$ entre $z^2-xy(x-y^k)$ (división de Weierstrass) y aplicando II.2.10, nos queda

$$\begin{aligned}(x-y^k)^{2m}((x-y^k)y^{k+1})^{2r}(P+zQ)&=(x-y^k)^{2m+2r}y^{2r(k+1)}(P+zQ)\\&=(A_0+zA_1)^2+(B_0+zB_1)^2-(z^2-xy(x-y^k))p_0\quad\text{(i)}\end{aligned}$$

para ciertos $A_i,B_i,p_0\in\mathbb{R}\{x,y\}$. Ahora, multiplicamos la ecuación (i) por $(x-y^k)^{2rk}y^{2m}$ y tenemos

$$\begin{aligned}((x-y^k)y)^{2m+2r(k+1)}(P+zQ)&=((x-y^k)y)^{2n}(P+zQ)\\&=(\alpha_0+z\alpha_1)^2+(\beta_0+z\beta_1)^2-(z^2-xy(x-y^k))q_0\quad\text{(ii)}\end{aligned}$$

con $\alpha_i,\beta_i,q_0\in\mathbb{R}\{x,y\}$ y $n=m+r(k+1)$. Afirmamos que $(x-y^k)y|\alpha_i,\beta_i$ y que $((x-y^k)y)^2|q_0$, de modo que podremos simplificar $((x-y^k)y)^2$ y reiterando el proceso concluiremos como se quería:

$$(P+zQ)=(a_0+za_1)^2+(b_0+zb_1)^2-(z^2-xy(x-y^k))h$$

con $a_i,b_i,h\in\mathbb{R}\{x,y\}$.

Para ver que efectivamente se tiene esas relaciones de divisiblidad, igualamos coeficientes en (ii) y obtenemos que:

(0) $((x-y^k)y)^{2n}P=\alpha_0^2+\beta_0^2+xy(x-y^k)q_0$

(1) $((x-y^k)y)^{2n}Q=2(\alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1)$

(2) $q_0=\alpha_1^2+\beta_1^2$

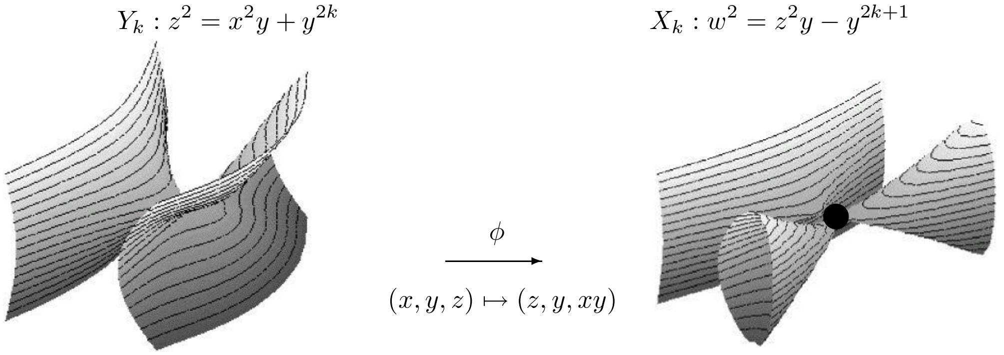
Ahora, de (0) se sigue $(x-y^k)y|\alpha_0^2+\beta_0^2$, con lo que $(x-y^k)y|\alpha_0,\beta_0$ y como consecuencia $(x-y^k)y|q_0$. Finalmente, de (2), se deduce que $(x-y^k)y|\alpha_1^2+\beta_1^2$ y por tanto $(x-y^k)y|\alpha_1,\beta_1$ y $((x-y^k)y)^2|q_0$. ■

Una vez estudiado X_k, tratamos Y_k del mismo modo, demostrando el siguiente resultado:

Teorema 5.2 $\mathcal{P}(S_{Y_k})\subset\Sigma_2(Y_k)$.

Demostración. Consideramos la equivalencia birregular,

$$\begin{array}{rcl} \phi : \{z^2 - x^2y - y^{2k}\} \setminus \{y=0\} & \longrightarrow & \{w^2 - z^2y + y^{2k+1} = 0\} \setminus \{y = 0\} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z,y,xy) = (z,y,w) \end{array}$$



con inversa

$$\begin{array}{rcl} \psi : \{w^2 - z^2y + y^{2k+1} = 0\} \setminus \{y=0\} & \longrightarrow & \{z^2 - x^2y - y^{2k}\} \setminus \{y = 0\} \\ (z,y,w) & \longmapsto & \Big(\dfrac{w}{y}, y, z\Big) \end{array}$$

Sea ahora $T \in \mathcal{P}(S_{Y_k})$, que podemos suponer de la forma $T = P + zQ$. Consideramos

$$T \circ \psi = P\Big(\frac{w}{y}, y\Big) + zQ\Big(\frac{w}{y}, y\Big) = \frac{F(w,y) + zG(w,y)}{y^{2r}}$$

con $r \geq 0$, y $F + zG \in \mathbb{R}[x,y,w]$ que es ≥ 0 en $w^2 - z^2y + y^{2k+1} = 0, y \neq 0$, y, por continuidad, en $w^2 - z^2y + y^{2k+1} = 0$. Como esta superficie es X_k, existen $\alpha, \beta, q \in \mathbb{R}\{x,u,v\}$ tales que

$$y^{2r}(P + zQ) \circ \psi = F + zG = \alpha^2 + \beta^2 + q(w^2 - z^2y + y^{2k+1})$$

y así obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{R}\{x,y,z\}$

$$y^{2r}(P + zQ) = \alpha^2(z,y,xy) + \beta^2(z,y,xy) + q(z,y,xy)((xy)^2 - z^2y + y^{2k+1})$$

Dividimos $\alpha(z,y,xy), \beta(z,y,xy), q(z,y,xy)$ entre $z^2 - x^2y - y^{2k}$ (división de Weierstrass) y aplicando II.2.10, nos queda

$$y^{2r}(P + zQ) = (\alpha_0 + z\alpha_1)^2 + (\beta_0 + z\beta_1)^2 - (z^2 - x^2y - y^{2k})q_0 \tag{i}$$

con $\alpha_i, \beta_i, q_0 \in \mathbb{R}\{x,y\}$. Veremos que $y^2|q_0, y|\alpha_i, \beta_i$, para poder eliminar y^2 y reiterar el proceso hasta que

$$(P + zQ) = (a_0 + za_1)^2 + (b_0 + zb_1)^2 - (z^2 - x^2y - y^{2k})h_0 \tag{ii}$$

con $a_i, b_i, h_0 \in \mathbb{R}\{x,y\}$, que es lo que se requiere. Para ver lo dicho, igualando coeficientes en (i) resulta:

(0) $y^{2r}P = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + q_0(x^2y + y^{2k})$

(1) $y^{2r}Q = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1)$

(2) $q_0 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$

Ahora de (0) resulta $y|\alpha_0^2 + \beta_0^2$, con lo que $y|\alpha_0, \beta_0$ y como consecuencia $y|q_0$. Por (2), se tiene $y|\alpha_1^2 + \beta_1^2$ y por tanto $y|\alpha_1, \beta_1$ y $y^2|q_0$. ■

Finalmente veamos que $\mathcal{P} = \Sigma_2$ para el paraguas de Whitney, como consecuencia de cumplirse lo mismo para sus deformaciones.

Corolario 5.3 $\mathcal{P}(z^2 - x^2y = 0) = \Sigma_2(z^2 - x^2y = 0)$

Demostración. Sea $f + zg \in \mathcal{P}(z^2 - x^2y = 0)$. Como consecuencia de II.2.8 (b) existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces:

$$\begin{aligned} f + (x^2+y^2)^m &\in \mathcal{P}^+(x^2y \geq 0) = \mathcal{P}^+(\{y \geq 0\} \cup \{x = 0\}) && \text{(i)} \\ (f + (x^2+y^2)^m)^2 - x^2yg^2 &\in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2) && \text{(ii)} \end{aligned}$$

Por el lema de densidad polinomial (II.2.1), dado $m \geq m_0$ existe $r \geq 1$ tal que

$$(f + (x^2+y^2)^m)^2 - x^2yg^2 + (x,y)^r \subset \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2) \qquad \text{(iii)}$$

Sea $k = \max\{r, 2(m+1)\}$, y consideremos la aplicación $f + (x^2+y^2)^m + zg \in \mathcal{O}(Y_k)$; que, de hecho, está en $\mathcal{P}(Y_k)$.

En efecto, por (iii)

$$(f + (x^2+y^2)^m)^2 - (x^2y + y^{2k})g^2 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2)$$

y por (i)

$$f + (x^2+y^2)^m \in \mathcal{P}^+(\{y \geq 0\});$$

luego sólo nos falta probar que $f + (x^2+y^2)^m \in \mathcal{P}^+(-x^2 - y^{2k-1} \geq 0)$. De nuevo por (i),

$$f(0,y) + y^{2m} = y^{2s}u(y)$$

con $u \in \mathbb{R}\{y\}$, $u(0) > 0$ y $s \leq m$. De este modo,

$$f + (x^2+y^2)^m = y^{2s}u(y) + xh(x,y) \geq y^{2s}u(y) - |x||h(x,y)| \geq y^{2s}u(y) - c|x|,$$

con $h \in \mathbb{R}\{x,y\}$ y $c = |h(0,0)| + 1$.

Ahora, si $-x^2 - y^{2k-1} \geq 0$ se cumple

$$|x| \leq |y|^{k-1} \leq |y|^{2m+1} \leq |y|^{2s+1} = -y^{2s+1}$$

y por tanto

$$f + (x^2 + y^2)^m \geq y^{2s}(u(y) + cy) \geq 0.$$

Como $f + (x^2 + y^2)^m + zg \in \mathcal{P}^+(Y_k)$ existen $\alpha, \beta, h \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tales que :

$$f + (x^2 + y^2)^m + zg = \alpha^2 + \beta^2 - (z^2 - x^2y - y^{2k})h$$

y por tanto,

$$f + zg = \alpha^2 + \beta^2 - (z^2 - x^2y)h \qquad \mathrm{mod}\ (x, y)^{2m}.$$

Como esto vale para cualquier $m \geq m_0$ el Teorema de Aproximación de M. Artin proporciona $a, b, q \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tales que

$$f + zg = a^2 + b^2 - (z^2 - x^2y)q.$$

■

6 Gérmenes de codimensión mayor

En esta sección vamos a demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un germen de superficie con dimensión de inmersión $n + 1$ tal que $\mathcal{P} = \Sigma_2$. Utilizaremos el *cono real de Veronese* $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que es la superficie algebraica irreducible de ecuaciones cuadráticas

$$F_{ij} = x_ix_j - x_{i-1}x_{j+1}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq n - 1$$

y cuya complexificación está parametrizada por

$$\gamma(z, w) = (z^n, z^{n-1}w, \ldots , zw^{n-1}, w^n)$$

(véase [Ha]).

Sea X_n el germen en el origen de la superficie S_n. Es sencillo comprobar que $I(X_n)$ es el ideal generado por los mismos polinomios homogéneos F_{ij} y que $\mathrm{mult}(X_n) = n$. Se verifica:

Proposición 6.1 $\mathcal{P}(X_n) = \Sigma_2(X_n)$.

La prueba de este hecho ocupa el resto de la sección. En primer lugar:

Lema 6.2 *Sea* $f \in \mathbb{R}\{x_0, x_1, \ldots , x_n\}$*, entonces existen* $f_0, f_1, \ldots , f_{n-1} \in \mathbb{R}\{x_n\}$ *y* $g \in \mathbb{R}\{x_0, x_1, \ldots , x_n\}$ *tales que* $f - (f_0(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_n)x_i + x_0g) \in I(X_n)$.

Demostración. Consideramos para cada $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ el polinomio homogéneo

$$G_\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_{n-1}^{\nu_{n-1}} - x_0^{d-1-k} x_n^k x_i$$

siendo $d = |\nu|$, $0 \le i < n$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{j=1}^{n-1} j\nu_j = nk + i$. Veamos que $G_\nu \in I(X_n)$; para ello, basta observar que:

$$G_\nu \circ \gamma = \prod_{j=1}^{n-1} (z^{n-j} w^j)^{\nu_j} - z^{n(d-1-k)} w^{nk} z^{n-i} w^i = z^{nd-nk-i} w^{nk+i} - z^{n(d-k)-i} w^{nk+i} = 0$$

En particular, para $u_i = (0, \dots, \overset{(i)}{n+1}, \dots, 0)$ deducimos que $x_i^n - x_n^i x_0^{n-i} \in I(X_n)$. De este modo, cualquier $f \in \mathbb{R}\{x_0, \dots, x_n\}$ se puede dividir sucesivamente entre estos polinomios hasta obtener

$$f = \sum_{0 \le \nu_1, \dots, \nu_{n-1} < n} a_\nu(x_0, x_n) x_1^{\nu_1} \cdots x_{n-1}^{\nu_{n-1}} \qquad \mathrm{mod}\ I(X_n).$$

Además, como los $G_\nu \in I(X_n)$, resulta $x_1^{\nu_1} \cdots x_{n-1}^{\nu_{n-1}} = x_0^{d-1-k} x_n^k x_i \quad \mathrm{mod}\ I(X_n)$, y obtenemos $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}\{x_0, x_n\}$ tales que

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x_0, x_n) x_i + b_0(x_0, x_n) \qquad \mathrm{mod}\ I(X_n).$$

Finalmente, como $b_i(x_0, x_n) = f_i(x_n) + x_0 g_i(x_0, x_n)$, existe $g \in \mathbb{R}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que

$$f = f_0(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_n) x_i + x_0 g \qquad \mathrm{mod}\ I(X_n).$$

■

Para probar $\mathcal{P}(X_n) = \Sigma_2(X_n)$ procederemos según nuestra estrategia habitual. Así, necesitamos una forma de reducción polinomial, que es la que sigue:

Lema 6.3 *Para cada $f \in \mathcal{P}(X_n)$ y cada $k \ge 1$ existe un polinomio $f_k \in \mathcal{P}(S_n)$ tal que $\omega(f - f_k) > k$.*

Demostración. Empezamos parametrizando S_n. Si n es impar, la misma parametrización compleja γ aplica $\mathbb{R}^2$ sobre S_n. Denotamos $\gamma_+ = \gamma|_{\mathbb{R}^2}$. Por el contrario, si n es par así sólo obtenemos $S_n \cap \{x_0 \ge 0\}$ y para parametrizar $S_n \cap \{x_0 < 0\}$ necesitamos usar $\gamma_- = -\gamma_+$. Pero como para n impar $-\gamma(s,t) = \gamma(-s,-t)$, concluimos que en todo caso $f|_{S_n} \ge 0$ si y sólo si $f \circ \gamma_+$ y $f \circ \gamma_-$ son ≥ 0 en $\mathbb{R}^2$ (todo esto resulta fácilmente de ser S_n un cono sobre $S_n \cap \{x_0 = 1\}$ y ser γ una parametrización compleja).

Sean, ahora, $k \ge 1$ y $f \in \mathcal{P}(X_n)$, y consideramos $g_k = f + (x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k$. Tenemos:

(i) $g_k \in \mathcal{P}^+(X_n)$

(ii) $\omega(f - g_k) = 2k > k$

Veamos que existe $r \geq 2k$ tal que

$$g_k + (x_0, x_1, \ldots, x_n)^r \subset \mathcal{P}^+(X_n).$$

Para ello, consideramos los gérmenes $g_k \circ \gamma_+, g_k \circ \gamma_-$, que son definidos positivos en $\mathbb{R}^2$. Por el lema de densidad polinomial (II.2.1) existe $r \geq 2k$ tal que

$$g_k \circ \gamma_+ + (s,t)^{rn}, g_k \circ \gamma_- + (s,t)^{rn} \subset \mathcal{P}^+(\mathbb{R}^2).$$

Y así, es claro que $g_k + (x_0, x_1, \ldots, x_n)^r \subset \mathcal{P}^+(X_n)$.

Consideramos ahora el jet h_k de g_k de grado $r-1$, que como consecuencia de lo anterior, es pd en X_n. De este modo, existe $\varepsilon > 0$ tal que h_k es ≥ 0 en $S_n \cap B_\varepsilon(0)$. Por otra parte, si $y \in S_n \cap \mathbb{R}^{n+1} \setminus B_\varepsilon(0)$, entonces $\|y\| \geq \varepsilon$ y así,

$$\begin{aligned}|h_k(y)| = \Big| \sum_{0 \leq |\nu| \leq r-1} a_\nu y^\nu \Big| &\leq \sum_{0 \leq |\nu| \leq r-1} |a_\nu| |y_0^{\nu_0}| |y_1^{\nu_1}| \ldots |y_n^{\nu_n}| \\ &\leq \sum_{0 \leq |\nu| \leq r-1} |a_\nu| \|y\|^{|\nu|} \leq \sum_{0 \leq |\nu| \leq r-1} \frac{|a_\nu|}{\varepsilon^{2r-|\nu|}} \|y\|^{2r} \leq M \|y\|^{2r}\end{aligned}$$

De esta forma, el polinomio $f_k = h_k + M(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^r$ es ≥ 0 en S_n y $\omega(f - f_k) > k$. ■

Combinando como siempre el lema anterior con el Teorema de Aproximación de M. Artin resulta una vez más que II.6.1 se deduce de lo siguiente:

Proposición 6.4 $\mathcal{P}(S_n) \subset \Sigma_2(X_n)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{P}(S_n)$. Consideramos la equivalencia birregular

$$\begin{aligned}\phi_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0 = 0\} \quad &\to \quad S_n \setminus \{x_0 = 0\} \\ (x_0, x_1) \quad &\mapsto \quad \Big(x_0, x_1, \frac{x_1^2}{x_0}, \ldots, \frac{x_1^k}{x_0^{k-1}}, \ldots, \frac{x_1^n}{x_0^{n-1}}\Big)\end{aligned}$$

cuya inversa π es la proyección sobre las dos primeras variables. Sea ahora,

$$g = f \circ \phi_n = f\Big(x_0, x_1, \frac{x_1^2}{x_0}, \ldots, \frac{x_1^k}{x_{k-1}}, \ldots, \frac{x_1^n}{x_0^{n-1}}\Big) = \frac{P(x_0, x_1)}{x_0^{2r}}$$

con $r \geq 0$, y $P \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ que es ≥ 0 en $x_0 \neq 0$, y por continuidad, en todo $\mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2_o) = \Sigma_2(\mathbb{R}^2_o)$, existen $a, b \in \mathbb{R}\{x_0, x_1\}$ tales que

$$x_0^{2r} g = P = a^2 + b^2,$$

y así, componiendo con π obtenemos que

$$x_0^{2r} f - (a^2 + b^2) \in I(X_n). \tag{i}$$

Por II.6.2 existen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}\{x_n\}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tales que

$$\begin{aligned} a - (a_0(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x_n) x_i + x_0\alpha) &\in I(X_n), \\ b - (b_0(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x_n) x_i + x_0\beta) &\in I(X_n), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$h = x_0^{2r} f - \left(\Big(a_0(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x_n) x_i + x_0\alpha\Big)^2 + \Big(b_0(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x_n) x_i + x_0\beta\Big)^2 \right) \in I(X_n).$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} &0 = h \circ \gamma_+ = s^{2rn}(f \circ \gamma_+) \\ &-\left(a_0(t^n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t^n) s^{n-i} t^i + s^n(\alpha \circ \gamma_+) \right)^2 - \left(b_0(t^n) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t^n) s^{n-i} t^i + s^n(\beta \circ \gamma_+) \right)^2 \end{aligned}$$

y contando órdenes con respecto a s

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_s \left(a_0(t^n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t^n) s^{n-i} t^i + s^n(\alpha \circ \gamma_+) \right) &\geq rn, \\ \operatorname{ord}_s \left(b_0(t^n) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t^n) s^{n-i} t^i + s^n(\beta \circ \gamma_+) \right) &\geq rn. \end{aligned}$$

Así se deduce que $a_i(t^n), b_i(t^n) = 0$ para $0 \leq i \leq n-1$ y en consecuencia $a_i, b_i = 0$ para $0 \leq i \leq n-1$. Por tanto, $x_0^{2r} f - x_0^2(\alpha^2 + \beta^2) \in I(X_n)$ y como $x_0 \notin I(X_n)$ que es primo, concluimos

$$x_0^{2r-2} f - (\alpha^2 + \beta^2) \in I(X_n).$$

Así, podemos recomenzar el argumento desde (i) y al final obtendremos que $f \in \Sigma_2(X_n)$. ■

Bibliografía

[AnBrRz] C. Andradas, L. Bröcker, J.M. Ruiz: Constructible sets in real geometry. *Ergeb. Math.* **33**. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 1996.

[E.Ar] E. Artin: Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. *Hamb. Abh.* **5**, 100-115 (1927). The collected papers of Emil Artin, 273-288. Reading: Addison-Wesley 1965.

[M.Ar] M. Artin: On the solution of analytic equations, *Invent. Math.* **5**, 227-291 (1968).

[AtMc] M.F. Atiyah, I. G. Macdonald: Introducción al Algebra Conmutativa. Barcelona: Reverté 1989.

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy: Real Algebraic Geometry, *Ergeb. Math.* **36** Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1998.

[BoKuSh] J. Bochnak, W. Kucharz, M. Shiota: On equivalence of ideals of real global analytic functions and the 17th Hilbert problem, *Invent. Math.* **63**, 403-421 (1981).

[BoRi] J. Bochnak, J.-J. Risler: Le théorème des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* 4^e serie, **8** (1975) 353-364.

[Br] E. Brieskorn: Rationale Singularitäten komplexer Flachen, *Invent. Math.* **4**, 336-358 (1968).

[Ca *et al*] J.W.S. Cassels, W.S. Ellison, A. Pfister: On sums of squares and on elliptic curves over functions fields, *J. Number Theory* **3**, 125-149 (1971).

[CaRz] A. Campillo, J.M. Ruiz: Some Remarks on Pythagorean Real Curve Germs, *J. Algebra* **128**, No. 2, 271-275 (1990).

[Che] A. Chenciner: Courbes algebriques planes, *Publ. Math. Univ. Paris VII* , 1979.

[Ch *et al*] M.D. Choi, Z.D. Dai, T.Y. Lam, B. Reznick: The Pythagoras number of some affine algebras and local algebras, *J. reine Angew. Math.* **336**, 45-82(1982).

[Dj] D.Z. Djoković: Hermitian matrix over polynomial rings, *J.Algebra* **43**, 359-374(1976).

[Ei] D. Eisenbud: Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. New York Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1999.

[Ha] J. Harris: Algebraic Geometry, A First Course, *Graduate Text in Math.* **133**. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 1992.

[Hu] T.W. Hungerford: Algebra, *Graduate Text in Math.* **73**. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 1974.

[Jw] P. Jaworski: About estimates on number of squares necessary to represent a positive-semidefinite analytic function, *Arch. Math.* **58**, 276-279(1992).

[Kz] E. Kunz: Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser, 1985.

[Ku *et al*] H. Kurke, T. Mostowski, G. Pfister, D. Popescu, M. Roczen: Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, *Lecture Notes in Math.* **634**. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

[La] S. Lang: Algebra. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1965.

[Ms] T. Mostowski: Some properties of the ring of Nash functions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci* **3**, No. 2, 245-266 (1976).

[Or] J. Ortega: On the Pythagoras number of a real irreducible algebroid curve, *Math. Ann.* **289**, 111-123(1991).

[Pf] A. Pfister: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.* **4**, 229-237 (1967).

[PoSz] G. Pólya, G. Szegö: Problems and theorems in analysis I&II, *Springer Study Edition.* New York Heidelberg Berlin: Springer Verlag, 1976.

[Qz] R. Quarez: Pythagoras numbers of real algebroid curves and Gram matrices, *J. of Algebra* **238**, 139-158 (2001).

[Rz1] J.M. Ruiz: A note on a separation problem, *Arch. Math.*, **43**, 422-426 (1984).

[Rz2] J.M. Ruiz: On Hilbert's 17th problem and real nullstellensatz for global analytic functions, *Math. Z.* **190**, 447-459 (1985).

[Rz3] J.M. Ruiz: The basic theory of power series, *Advanced Lectures in Mathematics.* Braunschweig Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1993.

[Rz4] J.M. Ruiz: Sums of two squares in analytic rings, *Math. Z.* **230**, 317-328 (1999).

[Sch1] C. Scheiderer: Sums of squares of regular functions on real algebraic varieties, *Trans. A.M.S.* **352** number 3, 1039-1069 (1999).

[Sch2] C. Scheiderer: On sums of squares in local rings, *Preprint Univ. Duisburg* 2000.

[Wk] R.J. Walker: Algebraic curves. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 1996.

[ZaSa] O. Zariski, P. Samuel: Conmutative Algebra, Vol II. *Graduate Text in Math.* New York Heildelberg Berlin: Springer-Verlag, 1960.