UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Análisis Matemático

GRUPOS ABELIANOS TOPOLÓGICOS Y SUMABILIDAD

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Xabier E. Domínguez Pérez

Madrid, 2002

ISBN: 84-669-1861-2

Grupos abelianos topológicos y sumabilidad

Memoria presentada por Xabier E. Domínguez Pérez para optar
al grado de Doctor en Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid

Índice General

Introducción 1

Capítulo I. Preliminares 13
1. Notaciones, definiciones y resultados básicos 13

Capítulo II. Grupos abelianos topológicos 27
2. Definiciones y resultados previos 27
3. Desigualdades en $\mathbb{T}$ 28
4. Pseudonormas. Grupos pseudonormados 32
5. El funcional k_U 34
6. n-grupos 38
7. k-grupos 40
8. Grupos de homomorfismos continuos 41
9. Teoremas de Ascoli-Arzelà 44
10. Teoremas del grafo cerrado y de la aplicación abierta 48
11. Topologías iniciales y finales 52
12. Topologías en la suma directa 58

Capítulo III. Dualidad 67
13. Resultados generales 67
14. Las pseudonormas $|| \cdot ||_V$ 79
15. Resultados de dualidad para sumas directas 82
16. Dualidad de cuerpos valuados localmente compactos 86
17. Dualidad de espacios y grupos vectoriales topológicos 90
18. Relación entre convexidad y cuasiconvexidad local 94
19. La propiedad de Schur en grupos 99

Capítulo IV. Sumabilidad en grupos abelianos topológicos 107
20. Familias sumables, presumables, hereditariamente sumables 107
21. Sucesiones sumables, presumables, hereditariamente sumables 112
22. Sumabilidad y compacidad del conjunto de sumas 116
23. Grupos de familias sumables 122
24. El lema de Schur en grupos topológicos 127
25. Sumabilidad absoluta en grupos 130
26. Homomorfismos sumantes 141

Capítulo V. Grupos GP-nucleares 145

27. Definiciones y resultados previos 145
28. Espacios y grupos nucleares 148
29. Grupos GP-nucleares: definición y propiedades generales 152
30. Grupos vectoriales topológicos GP-nucleares 163
31. Grupos nucleares y GP-nucleares 168

Bibliografía 171

Introducción

Como es sabido, el desarrollo de la teoría de grupos topológicos debe buena parte de su impulso inicial a la necesidad de generalizar el análisis armónico clásico. En esa línea el hecho de que el grupo en estudio sea localmente compacto constituye una hipótesis fundamental, debido a que fuera de esa clase no se puede garantizar la existencia de una medida invariante por traslaciones. Los problemas y conceptos que surgieron al realizar este programa han servido de guía primero, y de motivación más tarde, para una exhaustiva investigación de la estructura y propiedades de los grupos localmente compactos, como queda claro en las monografías [**41**] o [**76**]. Como hitos fundamentales en este camino podemos señalar el teorema de Peter-Weyl sobre existencia de representaciones unitarias irreducibles, y el teorema de Pontryagin y Van Kampen que dio origen al estudio de la dualidad en grupos topológicos. La simple consideración del objeto "grupo dual" de un grupo topológico limita el análisis al caso abeliano, en el que se puede asegurar que las representaciones unitarias irreducibles son unidimensionales y por lo tanto su estudio es el de los caracteres del grupo, es decir, los homomorfismos continuos con valores en el grupo multiplicativo $\mathbb{T}$ de los números complejos de módulo 1.

Estas restricciones, junto con otras muchas propiedades favorables, convirtieron la clase de los grupos localmente compactos y abelianos en objeto privilegiado de investigación, orientada a plantear y resolver cuestiones análogas a las estudiadas en análisis armónico real o bien surgidas del desarrollo de la propia teoría.

Existe sin embargo otro punto de vista desde el que el Análisis puede inspirar direcciones de investigación en grupos abelianos topológicos. Algunos de los resultados que se revelan como herramientas básicas en Análisis Funcional, o bien son directamente de carácter topológico (como el Teorema de Ascoli) o bien pueden enunciarse, sin dejar de ser significativos, en contextos más generales que el de los espacios de Banach o incluso el de los espacios vectoriales topológicos, que constituyen los marcos habituales para su presentación. Este último es el caso, por ejemplo, del teorema del grafo cerrado y sus variantes; su formulación para grupos abelianos topológicos y homomorfismos continuos no le hace perder aplicabilidad y al mismo tiempo resulta reveladora del carácter esencial o accesorio de las hipótesis asumidas en sus enunciados más frecuentes.

Tiene sentido preguntarse hasta qué punto esa generalización puede llevarse a cabo sobre otros resultados y construcciones del Análisis Funcional, y de hecho en esa línea apunta parte de la investigación reciente en grupos topológicos. Aunque en algunos casos no se haya insistido en esta interpretación, en otros se toma explícitamente como modelo un resultado conocido en el contexto de los espacios vectoriales topológicos.

Uno de los primeros y más importantes ejemplos de este planteamiento lo constituye la generalización del teorema de Orlicz-Pettis llevada a cabo por Kalton en 1971. En cualquier caso, es claro que desde este punto de vista la hipótesis de compacidad local pasa a ser excesivamente restrictiva.

Evidentemente, en muchos casos la abstracción del cuerpo base y de la operación externa que implica este proceso hace que muchas definiciones y teoremas sean intraducibles a grupos, o bien que admitan análogos falsos. Por ejemplo, cualquier afirmación sobre espacios vectoriales topológicos que sólo dependa de la estructura subyacente de grupo abeliano topológico, ha de ser en particular aplicable por igual a los casos de cuerpo base arquimediano y no arquimediano, y es sabido que las dos teorías son divergentes en la mayoría de sus aspectos esenciales.

El ejemplo del teorema de Kalton citado arriba es muy representativo de los casos en los que tiene sentido y resulta fructífero el paso a grupos. Como es sabido, el teorema original de Orlicz-Pettis establece que en un espacio localmente convexo, las sucesiones (a_n) hereditariamente sumables (en el sentido de que todas las subseries de $\sum a_n$ son convergentes) son las mismas con respecto a la topología original y a la topología débil del espacio. Todos los conceptos que intervienen en este enunciado tienen equivalentes naturales en grupos, cuyas particularizaciones al caso vectorial son exactamente los conceptos de partida, y el resultado de hacer la extrapolación es un enunciado que resulta ser cierto y que por supuesto, incluye el teorema original como caso particular. El que, por ejemplo, la dualidad de grupos abelianos topológicos sea hasta este punto compatible con la de espacios vectoriales puede resultar contrario a la intuición, si tenemos en cuenta que el grupo compacto $\mathbb{T}$ juega en esta teoría el papel del cuerpo base (habitualmente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Sin embargo, parece esperable que las definiciones y propiedades relacionadas con la sumabilidad de sucesiones o familias de elementos del espacio admitan en muchos casos una versión válida en grupos. Este trabajo viene a corroborar esta afirmación, de la que por lo demás existen ya suficientes pruebas en las referencias; concretamente, nuestro objetivo principal es generalizar a grupos, hasta donde sea posible, la caracterización existente de los espacios nucleares en términos de sumabilidad.

Para situar el problema, recordemos que los espacios nucleares son una clase de espacios localmente convexos que comparten un buen número de propiedades con los espacios de dimensión finita (si E es nuclear, entonces todo subconjunto acotado de E es precompacto, la topología de E puede generarse a partir de una familia de seminormas prehilbertianas, las sucesiones débilmente convergentes en E coinciden con las convergentes, etc.) y es invariante respecto a las operaciones de tomar subespacios y formar productos arbitrarios, sumas directas numerables y cocientes de Hausdorff. Los espacios nucleares fueron definidos por Grothendieck en términos de productos tensoriales topológicos; posteriormente se llegó a caracterizaciones alternativas, basadas en ideales de operadores (Pietsch), en diámetros de Kolmogorov de entornos de cero (Mitiagin), o en condiciones de sumabilidad (Grothendieck y Pietsch).

Motivado por el estudio de subgrupos y grupos cociente de espacios de Fréchet nucleares, Banaszczyk introdujo en [**7**] el concepto de grupo nuclear. Lo hizo adaptando la caracterización de los espacios nucleares debida a Mitiagin de una forma necesariamente indirecta, ya que en la definición de los diámetros de Kolmogorov interviene de forma esencial la estructura de espacio vectorial. La idea que subyace al teorema de caracterización de Mitiagin (y por lo tanto a la definición de grupo nuclear) es la de que, dado un entorno arbitrario de cero, sea posible encontrar otro considerablemente "menor" que él, en un sentido definido por los diámetros de Kolmogorov.

La definición de Banaszczyk, aunque intrincada, resultó ser enormemente operativa y le permitió demostrar para la clase de grupos determinada por ella propiedades intrínsecas y de permanencia análogas a las establecidas para los espacios nucleares. El propio Banaszczyk y otros autores han trabajado desde entonces sobre esta clase ([**8**], [**4**], [**9**], [**35**]), conformando una teoría que a día de hoy es de una considerable riqueza y contiene resultados de gran alcance e importancia.

Teniendo en cuenta que existen distintas aproximaciones al concepto de espacio nuclear, cabe plantearse la búsqueda de definiciones equivalentes también en el caso de los grupos; especialmente, de alguna en la que no intervenga la estructura de espacio vectorial, para reducir el carácter nuclear a condiciones intrínsecas a la clase de los grupos topológicos. De hecho, ya en [**7**, 7.12] podemos leer "[...] it would be interesting to give a characterization of nuclear groups similar to some characterization of nuclear spaces. Naturally, tensor products and bilinear mappings do not make much sense for topological groups. Nevertheless, one may speak of summable and absolutely summable families of elements of abelian topological groups."

La caracterización de los espacios nucleares en términos de sumabilidad puede resumirse en los dos resultados siguientes: un espacio localmente convexo metrizable E es nuclear si y sólo si toda serie incondicionalmente de Cauchy en E es absolutamente convergente (Grothendieck); un espacio localmente convexo arbitrario E es nuclear si y sólo si coinciden algebraica y topológicamente los espacios formados por las sucesiones en E que son término general de series incondicionalmente de Cauchy, por un lado, y absolutamente convergentes, por otro, dotados de topologías localmente convexas naturales (Pietsch). El propósito de mostrar que existen buenas generalizaciones a grupos de los conceptos involucrados en estos enunciados y el de decidir la verdad o falsedad de las dos afirmaciones llevadas a este contexto general fueron las motivaciones con las que se inició el presente trabajo. Ambas cuestiones habían sido parcialmente tratadas por Banaszczyk, quien en [**7**] le dio un sentido a la expresión "serie absolutamente convergente" en grupos, y en [**8**] demostró que en cualquier grupo nuclear las series incondicionalmente de Cauchy son absolutamente convergentes según esa definición. En esta memoria

(a) se resuelve el problema de dotar de topologías naturales a los grupos formados por las sucesiones con las condiciones de sumabilidad mencionadas arriba,
(b) se demuestra que en cualquier grupo nuclear los dos grupos topológicos así definidos coinciden,
(c) se deja abierta la cuestión de si esa coincidencia algebraica y topológica es, como en el caso vectorial, suficiente para asegurar el carácter nuclear de un grupo abeliano

topológico general, aunque se determina una clase amplia de grupos en la que sí lo es y

(d) como consecuencia de (c) se estudia la clase de los grupos abelianos topológicos en los que se da esa identificación, y otras relacionadas.

Aunque estos cuatro puntos (de cuyo estudio se ocupan también los artículos [**27**] y [**28**]) forman el núcleo del presente trabajo, hemos tenido ocasión de detenernos en otras cuestiones. En algunos casos (el desarrollo de una teoría básica de sumabilidad y sumabilidad absoluta en grupos, o la introducción de los homomorfismos sumantes) se trata de preparar el terreno para el planteamiento de los problemas principales. También se han tocado ciertos temas que surgen en el contexto de la sumabilidad, aunque su estudio no forma parte, en un sentido estricto, del camino hacia las condiciones de Grothendieck y Pietsch; es el caso del lema de Schur (y con más generalidad, de la propiedad de Schur) en grupos abelianos topológicos, o de la relación entre sumabilidad y compacidad del conjunto de sumas. Asimismo, algunas clases de grupos topológicos se estudian con cierta profundidad, como parte de la propia teoría o para proporcionar ejemplos y analizar en determinados contextos las distintas nociones que se introducen: el lector encontrará una presencia constante de los espacios vectoriales definidos sobre cuerpos valuados generales y dotados de diferentes tipos de topologías de grupo, o de las sumas directas de familias de grupos abelianos topológicos. Los teoremas de Ascoli, de la aplicación abierta y del grafo cerrado, y algunos corolarios y variantes que no hemos encontrado en las referencias, son objeto de estudio específico, además de, por supuesto, herramientas necesarias en lo que sigue. Finalmente, se ha hecho un esfuerzo para que el texto resultara hasta cierto punto autocontenido, no sólo en lo que respecta a la necesidad evidente de explicitar las notaciones y recordar las definiciones básicas, sino también en el sentido de incluir desarrollos breves de partes de la teoría estándar que el lector podría encontrar en multitud de referencias pero que aquí se presentan orientadas a su aplicación posterior, como las topologías iniciales y finales o los conceptos fundamentales de la dualidad.

A continuación haremos un breve recorrido por los contenidos de cada uno de los capítulos de la tesis:

El **Capítulo I** es de naturaleza preliminar. Recoge las notaciones, definiciones y resultados básicos de carácter general que se utilizan a lo largo del texto, y que en su mayor parte resultarán familiares para el lector.

El **Capítulo II** tiene también un carácter introductorio y la mayor parte del material que se recoge en él es conocido. Incluye resultados de la teoría general de grupos abelianos topológicos que se utilizan más adelante, y también algunas elaboraciones de carácter más técnico o definiciones que no ocupan un lugar central en la teoría pero que también son necesarias.

La Sección 3 se dedica al grupo $\mathbb{T}$: se demuestran algunas propiedades, en su mayor parte conocidas, de una base natural de entornos del neutro, y se desarrollan ciertas "desigualdades triangulares inversas" que cumple la restricción de la distancia usual en $\mathbb{C}$ al círculo unidad. A estas desigualdades se reducirán las demostraciones de diversas propiedades de dualidad.

En la Sección 5 se define el funcional k_U, que se asociará habitualmente a un entorno de cero U en un grupo abeliano topológico. Se trata de un análogo del funcional de Minkowski válido en grupos, y que es necesario, entre otras cosas, para dar una definición generalizada de serie absolutamente convergente. Funcionales similares a k_U habían sido introducidos por Banaszczyk en [**7**], y mucho antes por Kaplan en [**53**], este último con distinto propósito. Se hace un breve estudio de las propiedades de k_U, algunas de las cuales -como el carácter inferiormente semicontinuo- no se habían demostrado explícitamente para sus antecesores.

En la Sección 6 introducimos la denominación de n-grupos para aquellos grupos abelianos topológicos cuya topología viene caracterizada (en el sentido natural) por el funcional k_U de *un solo* entorno de cero; se trata por lo tanto de una generalización natural de los conceptos de espacio normado o espacio vectorial topológico localmente acotado.

Las Secciones 9, 10 y 11 se han dedicado a presentar de forma sistemática y autocontenida la relación entre compacidad y equicontinuidad en grupos de homomorfismos continuos, los teoremas del grafo cerrado y de la aplicación abierta y la construcción de topologías de grupo iniciales y finales, respectivamente. Se trata de temas que han sido abordados y expuestos en múltiples ocasiones y por ello en este caso la motivación de aportar nuevos contenidos ha sido menos importante que la de escoger un enfoque que responda al interés que en sí mismos tienen estas construcciones y a su aplicación dentro de la propia memoria. A pesar de esto, hemos llegado a algunas formulaciones de los teoremas principales, o a corolarios de éstos, que aparentemente no figuran en las referencias. En la parte correspondiente a los resultados del tipo del teorema de Ascoli hemos hecho uso del concepto de k-grupo, introducido por Noble; el Teor. 9.8 es una generalización a rango arbitrario del conocido resultado de dualidad, debido a este autor, que establece que para la mencionada clase de grupos los subconjuntos compactos del dual con respecto a la topología compacto-abierta son equicontinuos. Al igual que éste, el Teor. 10.14 es un "principio de equicontinuidad", aunque se ha obtenido como una aplicación del teorema del grafo cerrado y por lo tanto sus hipótesis topológicas son diferentes. También hemos adaptado a grupos (Prop. 11.10) y completado (Prop. 11.11) una caracterización mediante entornos de cero de la topología final con respecto a una familia de homomorfismos que era conocida para el caso de espacios vectoriales topológicos.

En la Sec. 12 se describen la topología coproducto, la asterisco y la rectangular en la suma directa de una familia de grupos abelianos topológicos, con el propósito de poder investigar más tarde su comportamiento con respecto a las distintas propiedades que se tratan en el trabajo. Las tres topologías, que coinciden en el caso numerable, han sido definidas y analizadas con anterioridad: la coproducto no es más que la topología final con respecto a las inclusiones canónicas, y la asterisco, introducida por Kaplan en [**53**], tiene la propiedad de hacer topológica la dualidad algebraica natural entre la suma directa y el producto, y en su definición interviene el funcional k_U o los análogos escogidos por los diferentes autores. Aquí se demuestra que de hecho esta elección no es indiferente, ya que la topología asterisco a la que da lugar el funcional de Minkowski generalizado introducido por Kaplan no es la misma que la que surge al considerar en su lugar la definición de Banaszczyk (Prop. 12.17), que por otra parte sí es equivalente a la nuestra. Sin embargo, las dos topologías asterisco cumplen la propiedad de dualidad reseñada arriba, como demuestran ambos autores y recordamos nosotros más adelante, y además de hecho coinciden bajo condiciones muy generales impuestas sobre los grupos de la familia considerada (Prop. 12.13(b)), que se cumplen por ejemplo en el caso de que éstos sean localmente cuasiconvexos, aunque para presentar este último hecho en la memoria se espera a introducir, en el capítulo siguiente, ésta y otras nociones de dualidad en grupos.

El **Capítulo III** consta de dos partes bien diferenciadas. La primera es un resumen de los principios fundamentales de la dualidad de grupos abelianos topológicos, especialmente centrado en aquéllos que resultan más necesarios a partir de este momento, y ocupa la extensa Sec. 13. La segunda se refiere a aspectos más concretos relacionados con la dualidad a los que hemos dirigido nuestro estudio, e incluye el resto de las secciones del capítulo.

En la parte dedicada a exponer la teoría básica se introduce la topología de Bohr (la inicial con respecto a todos los caracteres continuos) y se estudian algunas de sus propiedades. También se analiza la noción de cuasiconvexidad local, generalización natural y hoy ampliamente conocida de la propiedad que expresa en espacios vectoriales topológicos la existencia de una base de entornos de cero que coinciden con sus bipolares y que debido al teorema de Hahn-Banach, equivale en este contexto a la convexidad local. Se definen la topología compacto-abierta y otras topologías naturales en el grupo dual, y se recogen también el concepto de grupo reflexivo en el sentido de Pontryagin, y el enunciado del teorema de Pontryagin-Van Kampen. Finalmente, se estudian las propiedades básicas del grupo de caracteres reales de un grupo abeliano topológico.

En la Sec. 15 se llega a diferentes resultados sobre propiedades de dualidad de las distintas topologías consideradas en la suma directa de grupos abelianos topológicos. Entre ellos podemos destacar el hecho de que si los grupos de partida son localmente cuasiconvexos, entonces la topología asterisco es la topología localmente cuasiconvexa más fina que hace las inclusiones continuas (Teor. 15.4); dicho de otra forma, es la topología localmente cuasiconvexa asociada a la topología coproducto en la suma directa, y en particular, bajo esa hipótesis sobre los grupos de la familia la topología coproducto es localmente cuasiconvexa si y sólo si coincide con la asterisco.

Las secciones 16, 17 y 18 se dedican a estudiar propiedades de dualidad de los cuerpos valuados localmente compactos y de diferentes clases de grupos abelianos topológicos cuyo grupo abeliano subyacente tiene estructura de espacio vectorial sobre uno de estos cuerpos. En la primera de estas secciones se da una demostración de que todo cuerpo valuado localmente compacto no discreto es autodual, es decir, se puede definir de forma natural un isomorfismo topológico entre él y su grupo dual dotado de la topología compacto-abierta. A pesar de que la aplicación de este enunciado a $\mathbb{R}$ es mucho más conocida que el resultado general, éste se probó ya en los 60 y la demostración que aquí damos es del tipo de las que se pueden encontrar en diversas referencias posteriores.

Es sabido que el grupo dual de un espacio vectorial topológico real o complejo y el grupo subyacente al espacio dual del mismo, dotados de las topologías compacto-abiertas respectivas, son topológicamente isomorfos de forma natural; en la Sec. 17 se generaliza este resultado a espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos valuados localmente compactos y no discretos.

También es conocido que el grupo abeliano topológico subyacente a un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es localmente cuasiconvexo si y sólo si el espacio es localmente convexo. En la Sec. 18 se generalizan las dos direcciones de esta equivalencia a estructuras más generales que la de espacio vectorial topológico, en el caso de cuerpo base $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y también se da una versión no arquimediana de la misma (Teor. 18.16). Con respecto al caso arquimediano, los resultados se formulan en el contexto de los grupos vectoriales topológicos (Raĭkov dio este nombre a los espacios vectoriales dotados de una topología que hace continuos la suma y el producto por cada uno de los escalares del cuerpo): se da una demostración alternativa del hecho, demostrado en [**4**], de que cualquier grupo vectorial topológico localmente convexo es localmente cuasiconvexo como grupo (Teor. 18.13), y se prueba además que un grupo vectorial topológico que sea localmente equilibrado y localmente cuasiconvexo como grupo es necesariamente un grupo vectorial topológico localmente convexo (Teor. 18.6).

La Sec. 19 está dedicada a estudiar la propiedad de Schur en grupos. Decimos que un grupo abeliano topológico tiene la propiedad de Schur cuando verifica el análogo natural de la propiedad así denominada en el contexto de los espacios vectoriales topológicos, es decir, cuando las sucesiones convergentes en la topología de Bohr del grupo coinciden con las convergentes en la topología original. El principal resultado sobre la propiedad de Schur contenido en esta memoria se presenta en la Sec. 24; en ésta que nos ocupa demostramos algunos hechos básicos en relación con esta propiedad y damos cuenta de una serie de resultados de las referencias que también, de forma explícita o implícita, aluden a ella. En espacios vectoriales topológicos, la equivalencia de las dos posibles definiciones de la propiedad de Schur es una consecuencia inmediata de que los conjuntos débilmente compactos y Bohr-compactos coinciden ([**71**]); nosotros (Prop. 19.14) generalizamos este resultado al caso de un cuerpo base valuado, localmente compacto y no discreto. Finalmente damos un ejemplo (Ej. 19.19) de un grupo con suficientes caracteres continuos (concretamente, un espacio localmente convexo) que a pesar de cumplir la propiedad de Schur, tiene estrictamente más subconjuntos compactos en la topología de Bohr que en la original.

Puede decirse que el **Capítulo IV,** con la excepción del material incluido en las secciones 24 y 22, se dedica a presentar y analizar los conceptos que intervienen en los resultados principales de esta memoria, contenidos en el capítulo siguiente. Al generalizar de forma natural los conceptos de serie incondicionalmente de Cauchy, incondicionalmente convergente y subseries convergente a un conjunto de índices arbitrario, surgen lo que aquí hemos llamado familias presumables, sumables y hereditariamente sumables, respectivamente. Por otra parte, la definición de familia absolutamente sumable en un grupo abeliano topológico general es fácil de plantear una vez que se dispone del funcional k_U que hace las veces de funcional de Minkowski: una familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ será absolutamente sumable cuando sea sumable la familia de números reales $(k_U(x_\alpha))_{\alpha\in A}$, para todo entorno de cero U en G. Estos conceptos eran conocidos, pero el problema de definir de una forma natural los grupos abelianos topológicos de las familias presumables (y en particular de las sumables y hereditariamente sumables) por un lado, y las absolutamente sumables por otro, no parecía haberse planteado en toda su generalidad hasta el momento.

En las dos primeras secciones de este capítulo se definen los conceptos de familia presumable, sumable y hereditariamente sumable, se aportan ejemplos, se estudian sus propiedades básicas y se analiza separadamente el caso en el que el conjunto de índices es $\mathbb{N}$, relacionando estas definiciones con las habituales en términos de series: incondicionalmente convergentes, subseries convergentes, incondicionalmente de Cauchy, etc. Son resultados sobradamente conocidos, aunque resulta necesario enunciarlos y demostrarlos en este contexto general.

En la Sec. 23 se dota de una topología natural al grupo de las familias presumables en un grupo abeliano topológico G, que denotamos $\ell_1(A, G)$, donde A es el conjunto de índices. La topología considerada resulta ser una generalización de la definida por Constantinescu en [**18**] para el grupo de las familias que nosotros denominamos hereditariamente sumables. Se estudian ciertas características de ambos grupos topológicos, como su carácter completo, metrizable o separable supuestas estas propiedades en G, se aportan diversos ejemplos y se comprueba que al aplicarle esta definición al grupo subyacente a un espacio localmente convexo se recupera la topología originalmente definida por Pietsch para plantear la caracterización de los espacios nucleares mencionada arriba.

El mismo programa se desarrolla para las familias absolutamente sumables en la Sec. 25. Denotamos por $\ell_1\{A, G\}$ el grupo de las familias $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ absolutamente sumables en G. Aquí conviene mencionar que, análogamente a la definición de la topología asterisco en la suma directa, se obtiene la misma definición de familia absolutamente sumable sustituyendo k_U por el funcional introducido por Banaszczyk, mientras que no ocurre lo mismo con el funcional de Kaplan, aunque en una amplia clase de grupos, que incluye a los localmente cuasiconvexos, las dos determinaciones son equivalentes. Como en el caso de las presumables, se comprueba que en el caso del grupo subyacente a un espacio vectorial topológico la definición habitual de familia absolutamente sumable es equivalente a ésta, y que la topología que definimos para el caso de grupos coincide con la topología localmente convexa introducida por Pietsch en el espacio de las familias absolutamente sumables.

En la Sec. 26 se introduce el concepto de homomorfismo sumante, que es la generalización natural del de operador absolutamente sumante para espacios localmente convexos. Un homomorfismo es sumante si lleva sucesiones presumables en sucesiones absolutamente sumables, y en esta sección se demuestra que si $u : G \to H$ es sumante y G metrizable, entonces el homomorfismo natural $u^s : \ell_1(\mathbb{N}, G) \to \ell_1\{\mathbb{N}, G\}$ asociado a u es continuo (Teor. 26.8), lo que generaliza el caso conocido de espacios localmente convexos y tiene importantes consecuencias para lo que sigue: tomando en particular $G = H$ metrizable y u la identidad, de este resultado se deduce que para cualquier grupo metrizable en el que toda sucesión presumable sea absolutamente sumable, la inclusión correspondiente es un homomorfismo continuo.

En las secciones 22 y 24 se recogen problemas que tiene sentido plantear al hilo de estas definiciones de distintos conceptos de sumabilidad y los grupos de familias sumables asociados, aunque estrictamente no forman parte del desarrollo lógico que conduce a los resultados del capítulo siguiente.

En la primera de ellas se presenta el problema de la relación entre el carácter hereditariamente sumable (resp. presumable) de una familia y el hecho de que el conjunto de sumas de subfamilias finitas de ésta sea relativamente compacto (resp. precompacto). En lo referente a las familias hereditariamente sumables la cuestión está resuelta en las referencias: en cualquier grupo abeliano topológico el conjunto de sumas de una familia hereditariamente sumable es compacto, y si una familia de elementos de un grupo sin subgrupos compactos no triviales admite un conjunto de sumas finitas relativamente compacto, entonces la familia es hereditariamente sumable. El análogo de la primera implicación para familias presumables es trivialmente cierto; el de la segunda no lo es en general, como mostramos con un ejemplo (Ej. 22.8). Surge así el problema de buscar condiciones suficientes sobre un grupo para que en él sean presumables todas las familias de elementos cuyo conjunto de sumas finitas sea precompacto. Nosotros damos una serie de resultados en esta línea, en los que interviene el grupo de caracteres reales asociado al de partida.

En la Sec. 24 se enuncia y demuestra una versión (Teor. 24.3), válida en grupos abelianos topológicos generales, del Lema de Schur (que en términos modernos establece la coincidencia en l_1 de las sucesiones débilmente convergentes y las convergentes en norma). No es la primera vez que se aborda esta cuestión, pero en nuestro caso el objetivo era dar una demostración en la que se utilizara el mismo método de "joroba deslizante" que sirve para probar el enunciado original del Lema. Del resultado obtenido se deduce que si G es un grupo con la propiedad de Schur y A es un conjunto de índices arbitrario, entonces el grupo de las familias hereditariamente sumables $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ de elementos de G, dotado de su topología natural, también tiene la propiedad de Schur.

Ya hemos indicado al principio de esta introducción la motivación y los resultados principales del **Capítulo V,** que es tanto como decir de la tesis en su conjunto.

En la Sec. 28 se recuerdan las definiciones y las propiedades principales de los espacios nucleares y los grupos nucleares, así como de los grupos vectoriales nucleares. Esta última es la denominación que Banaszczyk les dio a los grupos vectoriales topológicos localmente convexos que cumplen una condición similar a la que caracteriza los espacios nucleares en términos de diámetros de Kolmogorov de entornos de cero. La importancia de esta clase viene dada por el hecho de que todo grupo nuclear puede expresarse como un subgrupo de un cociente adecuado de un grupo vectorial nuclear, como demostró el propio Banaszczyk ([**8**, Th. 9.6]). En esta sección se muestra que la caracterización de los espacios nucleares en términos de ideales de operadores se puede extender a los grupos vectoriales nucleares.

Las secciones 29, 30 y 31 son casi enteramente nuevas y en ellas están contenidas las principales conclusiones de esta memoria.

En la Sec. 29 se introducen y estudian los grupos GP-nucleares y débilmente GP-nucleares, que son aquéllos en los que se da respectivamente la coincidencia algebraica y topológica, o sólo algebraica, entre los grupos de sucesiones presumables y absolutamente sumables asociados. Se demuestra que en estas definiciones se puede sustituir $\mathbb{N}$ por un conjunto infinito de índices arbitrario, que dos grupos localmente isomorfos cumplen o carecen de cualquiera de estas dos propiedades simultáneamente, y que ambas se conservan al formar productos o tomar subgrupos de grupos que las verifiquen.

Entre las clases de operadores que podemos hacer intervenir en la definición de espacio nuclear, la de los absolutamente sumantes admite una generalización a grupos. Recordemos que un espacio localmente convexo E es nuclear si y sólo si para todo entorno de cero convexo y equilibrado U existe otro V tal que el operador canónico entre los espacios normados asociados a ambos, $E_{(V)}$ y $E_{(U)}$, es absolutamente sumante. En el caso de U cuasiconvexo es posible generalizar a grupos la construcción de los espacios normados $E_{(U)}$, y los grupos localmente cuasiconvexos para los cuales, dado un entorno de cero cuasiconvexo U existe otro V tal que el homomorfismo canónico entre los n-grupos G_V y G_U es sumante, son exactamente los GP-nucleares, como se demuestra en el Teor. 29.12. Otra característica de los grupos localmente cuasiconvexos en relación a las propiedades de Grothendieck-Pietsch es el hecho de que en ellos siempre se da la inclusión continua del grupo asociado de las sucesiones absolutamente sumables en el de las presumables (Prop. 29.8). La parte algebraica de este último resultado había sido obtenida previamente por Banaszczyk en [**8**].

También es posible simplificar la condición de GP-nuclear dentro de la clase de los grupos abelianos topológicos metrizables: en tales grupos la condición débil de Grothendieck-Pietsch implica la fuerte (Teor. 29.13).

La última parte de esta sección se dedica a estudiar el carácter GP-nuclear y débilmente GP-nuclear de las sumas directas de grupos abelianos topológicos, dotadas de distintas topologías. Es conocido que la suma directa localmente convexa (es decir, dotada de la topología asterisco) de una cantidad numerable de espacios nucleares es un espacio nuclear, y que la suma directa localmente convexa de una cantidad no numerable de copias de $\mathbb{R}$ no lo es, aunque en este último espacio coinciden las sucesiones absolutamente sumables con las presumables. Aquí se generalizan estos resultados demostrando que la suma directa arbitraria de grupos débilmente GP-nucleares, dotada de cualquiera de las tres topologías principales previamente definidas sobre este grupo, es débilmente GP-nuclear (Teor. 29.17(a)), que en el caso numerable (en el que las tres topologías coinciden) se conserva en la suma el carácter GP-nuclear de los sumandos (Teor. 29.17(b)), y que la afirmación referente a la topología asterisco en una suma directa no numerable de copias de $\mathbb{R}$ es cierta también para la rectangular (Ej. 29.19). En el caso de este último ejemplo, se da una demostración que reduce el problema a la aplicación del teorema de Dvoretzky-Rogers en el espacio normado c_{00} dotado respectivamente de las normas $||\cdot||_\infty$ y $||\cdot||_1$.

En la Sec. 30 se analiza la propiedad de Grothendieck-Pietsch en espacios vectoriales con estructura topológica compatible. Como los conceptos de familia presumable y absolutamente sumable y las topologías introducidas sobre los grupos asociados son buenas generalizaciones del caso de los espacios localmente convexos, en el sentido de que al aplicarlas a éstos obtenemos las definiciones originales, los resultados de Grothendieck y Pietsch referidos arriba implican que los espacios localmente convexos que como grupos son GP-nucleares son exactamente los espacios nucleares, y que un espacio localmente convexo y metrizable es nuclear si y sólo si es débilmente GP-nuclear como grupo. El objetivo principal de esta sección es demostrar que en estas dos afirmaciones podemos sustituir "espacio localmente convexo" por "grupo vectorial localmente convexo" (de hecho, localmente equilibrado) y "espacio nuclear" por "grupo vectorial nuclear" (Teor. 30.10, Prop. 30.12). También se estudian condiciones bajo las cuales el hecho de que en un grupo vectorial topológico todas las sucesiones absolutamente sumables sean presumables, con o sin inclusión continua, es condición suficiente para el carácter localmente convexo del mismo (Props. 30.1 y 30.3).

Finalmente, la Sec. 31 pone en relación los conceptos de grupo GP-nuclear y grupo nuclear. Utilizando las mismas herramientas que Banaszczyk introdujo en [**8**] para probar que (en nuestra nomenclatura) los grupos nucleares son débilmente GP-nucleares, se demuestra que de hecho cumplen la versión fuerte de la propiedad de Grothendieck-Pietsch (Teor. 31.2). Como hemos explicado anteriormente, la implicación inversa queda abierta, aunque reuniendo la información disponible en este punto se muestra (Teor. 31.4) que en la clase de los grupos vectoriales topológicos localmente equilibrados los conceptos de grupo nuclear, grupo GP-nuclear y grupo vectorial nuclear son equivalentes.

Ni la concepción ni la realización de este trabajo habrían sido posibles sin el impulso inicial y el constante apoyo de los dos codirectores del mismo, María Jesús Chasco y Vaja Tarieladze. En todas las etapas de la elaboración de la memoria, su papel ha trascendido con mucho el que formalmente se le asigna a la figura de un director, y ha incluido siempre un seguimiento atento y en las numerosas ocasiones en las que se hizo necesaria, una intervención directa y entusiasta.

Quiero agradecer también al Departamento de Métodos Matemáticos y a la Escuela de Caminos de la Universidad de A Coruña, que han acogido la parte principal de la elaboración de esta memoria, así como mi trabajo, simultáneo a la misma, como profesor asociado, el haberme proporcionado todos los medios necesarios y haberme facilitado los numerosos desplazamientos que ocasionó la realización de esta tesis.

Ha sido también fundamental para llevar a buen término este trabajo el apoyo recibido por todo el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense, y especialmente de mi tutor, José María Martínez Ansemil, a quien le debo la mejor disposición imaginable a colaborar en todas las etapas del camino, a veces accidentado, que emprendí al comenzar allí los estudios de tercer ciclo.

La hospitalidad de la que disfruté en mis visitas casi semanales al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Vigo, y también en las estancias realizadas en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra y el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad Complutense de Madrid, se ha mantenido durante todo este tiempo como una de las razones más importantes por las que la dedicación a este trabajo ha merecido la pena.

CAPíTULO I

Preliminares

1. Notaciones, definiciones y resultados básicos

1.1. Conjuntos. Dado un conjunto A, denotamos mediante $\mathfrak{P}(A)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos de A y mediante $\mathfrak{F}(A)$, el de todos los subconjuntos finitos de A.

$\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales, que no incluye el 0. Las notaciones $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ tienen el significado usual. Usaremos el símbolo $\mathbb{T}$ para designar el subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por los números complejos de módulo unidad.

Dados dos conjuntos A y B y una aplicación $f : A \to B$, los términos "inyectiva", "sobreyectiva", "biyectiva" aplicados a f se utilizan con el significado habitual. El conjunto imagen de una aplicación $f : A \to B$ se denota $f(A)$. La aplicación $h : A \to C$ que resulta de componer $f : A \to B$ con $g : B \to C$ se escribe $g \circ f$. Entendemos por un conjunto *numerable* aquél que es finito o bien se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.

Dada una familia de conjuntos A_i, $i \in I$ denotaremos mediante $\prod_{i\in I} A_i$ el producto cartesiano de la familia, es decir

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i : f(i) \in A_i \ \forall i \in I\}.$$

Si $A_i = A$ para todo $i \in I$, utilizaremos el símbolo A^I para denotar $\prod_{i\in I} A_i$, que en este caso coincide con el conjunto de aplicaciones de I en A.

Si $x \in \prod_{i\in I} A_i$, escribiremos a menudo el elemento $x(i)$ como x_i, y la propia x como $(x_i)_{i\in I}$ o bien $(x(i))_{i\in I}$.

Para el producto cartesiano de dos conjuntos A_1 y A_2 usaremos el símbolo $A_1 \times A_2$, y (x_1, x_2) para el elemento $x \in A_1 \times A_2$ tal que $x(1) = x_1$, $x(2) = x_2$. Necesitaremos las siguientes definiciones:

- dados dos conjuntos A y B y un subconjunto U del producto $A \times B$, U^{-1} denota el subconjunto de $B \times A$ formado por aquellos pares (y, x) tales que $(x, y) \in A$.
- dado un conjunto A, la *diagonal* de $A \times A$ es el subconjunto de este producto definido por $\mathcal{D}_A = \{(x, x) : x \in A\}$.
- (composición de correspondencias) dados tres conjuntos A, B y C y subconjuntos U de $A \times B$ y V de $B \times C$, $V \circ U$ denota el subconjunto de $A \times C$ formado por aquellos pares (a, c) para los que existe un $b \in B$ con $(a, b) \in U$ y $(b, c) \in V$.

Recordamos a continuación el concepto de conjunto dirigido. Sea I un conjunto y D una relación en I (es decir, un subconjunto de $I \times I$). De acuerdo con la notación habitual escribiremos $i \leq j$ para indicar que el par (i, j) pertenece a D. Se dice que D *dirige* I, o que $(I, \leq)$ es un conjunto dirigido, cuando D es reflexiva (es decir, $\mathcal{D}_I \subset D$), transitiva (es decir, $D \circ D \subset D$) y además para todos $i,\ j \in I$ existe un $k \in I$ tal que $i \leq k,\ j \leq k$ (es decir, $I \times I \subset D^{-1} \circ D$).

Un elemento $x = (x_i)_{i \in I}$ de A^I, donde A es un conjunto e $(I, \leq)$ un conjunto dirigido, se llama *red* en A. Si el conjunto I es $\mathbb{N}$ y la relación $\leq$ es la de orden usual, obtenemos una sucesión en A.

Si $(x_i)_{i \in I}$ es una red, una *subred* de $(x_i)_{i \in I}$ es una red $(y_j)_{j \in J}$ donde $(J, \leq)$ es un conjunto dirigido e $y_j = x_{f(j)}$ para todo $j \in J$, siendo $f : J \to I$ una aplicación con la siguiente propiedad:

$$\forall i \in I \quad \exists j_0 \in J, \quad [j \geq j_0 \Rightarrow f(j) \geq i].$$

Un caso particular de subredes lo constituyen las subsucesiones.

1.2. Topología. Las notaciones y definiciones que no recogemos a continuación se consideran conocidas y/o utilizadas comúnmente; como referencia básica tomamos [**11**].

Denotaremos habitualmente una topología definida sobre un conjunto X como τ ó τ_X. Si el contexto define τ sin ambigüedad, nos referiremos al espacio topológico (X, τ) simplemente como X. Si A es un subconjunto de X, τ induce en A una topología τ_A de acuerdo con la definición habitual; se dirá que el par (A, τ_A) constituye un subespacio topológico de (X, τ). El axioma de separación tiene el significado estándar; llamaremos indistintamente a los espacios que lo cumplen espacios separados o de Hausdorff. Para la clausura de un conjunto A en un espacio topológico (X, τ) usaremos la notación $\mathrm{Cl}(A)$ o bien $\mathrm{Cl}_X(A)$ en casos de posible ambigüedad. Para el interior de un conjunto A se escribirá $\mathrm{Int}(A)$ o bien $\mathrm{Int}_X(A)$.

Una *base* de la topología τ en X es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos en (X, τ) tal que todo abierto en este espacio se puede escribir como unión de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{B}$. Diremos que un espacio *satisface el segundo axioma de numerabilidad,* o abreviadamente que es *II-numerable,* cuando su topología admite una base numerable.

Un *entorno* de un punto x en un espacio topológico (X, τ) es un conjunto $U \subset X$ tal que $x \in \mathrm{Int}_X U$. Denotaremos el conjunto de todos los entornos de x en X por $\mathcal{N}_x(X)$. Se dirá que una familia $\mathcal{U}$ de entornos de x es una *base de entornos* de x cuando para cualquier entorno U de x en X existe un $V \in \mathcal{U}$ con $V \subset U$. Diremos que un espacio topológico (X, τ) *satisface el primer axioma de numerabilidad,* o abreviadamente que es *I-numerable,* cuando todo elemento de X admite una base de entornos numerable. Diremos que (X, τ) es *cerodimensional* cuando todo punto $x \in X$ admite una base de entornos formada por conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados.

Una *subbase* de entornos de un punto x en un espacio topológico (X, τ) es una familia $\mathcal{U}$ de entornos de x tal que la familia de las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{U}$ es una base de entornos de x.

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice *diseminado* cuando $\mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X A) = \emptyset$. Los conjuntos expresables como unión numerable de diseminados se llaman *conjuntos de primera categoría;* el resto de los subconjuntos de X se denominan *conjuntos de segunda categoría.*

Un espacio topológico X se dice *de Lindelöf* cuando todo recubrimiento de X formado por conjuntos abiertos admite un subrecubrimiento numerable.

Si $(x_i)_{i\in I}$ es una red en el espacio topológico (X,τ) y $x \in X$, se dice que $(x_i)_{i\in I}$ converge a x, o que x es límite de la red (x_i), cuando para todo entorno U de x existe un $i_0 \in I$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geq i_0$. El espacio X es de Hausdorff si y sólo si toda red convergente tiene un único límite. Una topología viene caracterizada por sus redes convergentes: un subconjunto de X es cerrado si y sólo si contiene los límites de todas las redes convergentes contenidas en él.

Se dice que un punto x es de aglomeración de la red $(x_i)_{i\in I}$ cuando para todo entorno U de x y todo $i_0 \in I$ existe un $i \geq i_0$ en I tal que $x_i \in U$. Un punto x es de aglomeración de $(x_i)_{i\in I}$ si y sólo si existe una subred de (x_i) que converge a x.

1.1. Las distintas caracterizaciones y propiedades elementales de los espacios topológicos compactos se suponen conocidas. Recordemos que un espacio topológico (X,τ) es compacto si y sólo si cualquier red en X tiene algún punto de aglomeración, y que las topologías compactas consideradas sobre un conjunto X son minimales en el sentido de que si en X se consideran dos topologías τ_1 y τ_2 tales que $\tau_1 \subset \tau_2$, el espacio (X,τ_2) es compacto y (X,τ_1) es de Hausdorff, entonces las dos topologías coinciden.

1.2. Si $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, la *topología producto* en $\prod_{i\in I} X_i$ es la que admite como base la familia de conjuntos de la forma

$$\bigcap_{n=1}^{N} p_{i_n}^{-1}(U_n), \qquad \{i_1,\ldots,i_N\} \subset I, \quad U_n \in \tau_{i_n} \ \forall n \in \{1,\ldots,N\},$$

donde $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ es la j-sima proyección canónica, para todo $j \in I$.

Los conceptos de aplicación continua y de homeomorfismo entre espacios topológicos son conocidos. Diremos que una aplicación $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ es *abierta* cuando $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y para todo abierto U de X. Diremos que f es *abierta sobre la imagen* cuando la aplicación asociada $x \mapsto f(x)$, definida de X en $f(X)$, es abierta considerando en $f(X)$ la topología inducida por τ_Y. Diremos que f es un *encajamiento* si es inyectiva, continua y abierta sobre la imagen; equivalentemente, si la aplicación asociada a f, $x \in X \mapsto f(x) \in f(X)$, es un homeomorfismo entre los espacios X (con la topología de partida) y $f(X)$ (con la topología inducida por la de Y); se dirá además que f es un encajamiento abierto (denso) si $f(X)$ es abierto (denso) en Y. Es claro que un encajamiento abierto es una aplicación abierta según la definición anterior.

Si X e Y son espacios topológicos, para el conjunto de todas las aplicaciones continuas $f : X \to Y$ utilizaremos la notación $C(X,Y)$.

Sea X un espacio topológico y $f : X \to [-\infty,\infty]$ una función (consideramos en $[-\infty,\infty]$ las operaciones y el orden habituales). Dado $a \in X$, se define el límite inferior de f en a de la siguiente forma:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}_a(X)} \inf_{x\in U} f(x) \in [-\infty,\infty].$$

Se dice que f es *semicontinua inferiormente* en $a \in X$ cuando $\liminf_{x\to a} f(x) \geq f(a)$ (equivalentemente, cuando $\liminf_{x\to a} f(x) = f(a)$). Esta condición se puede escribir como sigue:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists U \in \mathcal{N}_a(X), \quad [x \in U \Rightarrow f(x) \geq f(a) - \varepsilon].$$

Análogamente al caso de las funciones continuas, también se puede caracterizar el carácter inferiormente semicontinuo mediante redes: Dada una red $(t_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en $[-\infty,\infty]$, se define el límite inferior de (t_γ) como

$$\liminf_{\gamma\in\Gamma} t_\gamma := \sup_{\alpha\in\Gamma} \inf_{\gamma\geq\alpha} t_\gamma.$$

La función $f : X \to [-\infty,\infty]$ es semicontinua inferiormente en a si y sólo si para toda red $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ convergente a a en X, se cumple $\liminf_{\gamma\in\Gamma} f(x_\gamma) \geq f(a)$.

Se dice que $f : X \to [-\infty,\infty]$ es semicontinua inferiormente en X cuando es semicontinua inferiormente en todos los puntos de X. Se puede demostrar que f es semicontinua inferiormente si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(]\alpha,\infty])$ es abierto en X.

Es sencillo deducir las definiciones y propiedades de los conceptos duales de límite superior y función semicontinua superiormente, pero no los necesitaremos a lo largo de esta memoria. Un tratamiento detallado de los límites inferiores y superiores de funciones reales y las funciones semicontinuas puede encontrarse en [**11**, Ch. IV, §5 y §6]

Una *pseudométrica* definida en un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to [0,\infty)$ tal que

(a) $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$
(b) $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x, y \in X$
(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todos $x,\ y,\ z \in X$.

Un par (X,d), donde X es un conjunto y d una pseudométrica definida en X, se denomina *espacio pseudométrico.* Todo espacio pseudométrico es de forma natural un espacio topológico; para cada $x \in X$, las bolas de centro x

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

forman una base de entornos de x para una topología en X. Esta topología es separada si y sólo si d verifica el axioma suplementario

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

En este caso se dice que d es una *métrica* o *distancia,* y que (X,d) es un *espacio métrico.*

Si (X_1,d_1) y (X_2,d_2) son espacios pseudométricos, se dice que una aplicación $f : (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$ es una *isometría* cuando $d_1(x,y) = d_2(f(x),f(y))$ para todos $x,\ y \in X_1$. Notar que toda isometría es continua y abierta sobre la imagen, y que una isometría cuyo dominio es un espacio métrico es necesariamente inyectiva.

1.3. Espacios uniformes. Una *uniformidad* en un conjunto X es una familia $\mathfrak{U}$ de subconjuntos del producto $X \times X$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) Si $U \in \mathfrak{U}$, todo $V \subset X \times X$ con $U \subset V$ pertenece también a $\mathfrak{U}$.
(b) Si U y V pertenecen a $\mathfrak{U}$, entonces $U \cap V$ también pertenece a $\mathfrak{U}$.
(c) Para todo $U \in \mathfrak{U}$ se cumple $\mathcal{D}_X \subset U$.
(d) Para todo $U \in \mathfrak{U}$, se cumple $U^{-1} \in \mathfrak{U}$.
(e) Para todo $U \in \mathfrak{U}$, existe un $V \in \mathfrak{U}$ tal que $V \circ V \subset U$.

Si $\mathfrak{U}$ es una uniformidad definida en X, llamaremos *espacio uniforme* al par $(X, \mathfrak{U})$.

1.3. Una *base* de la uniformidad $\mathfrak{U}$ en X es una subfamilia $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ tal que todo elemento de $\mathfrak{U}$ contiene alguno de $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{B}$ es una base de $\mathfrak{U}$, se cumple que $\mathfrak{U}$ está formada exactamente por todos los subconjuntos de $X \times X$ que contienen algún conjunto de $\mathfrak{B}$. Es de comprobación inmediata que una familia $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ es la base de alguna uniformidad en X si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

(a) Para todos U y U' pertenecientes a $\mathfrak{U}$ existe un $V \in \mathfrak{U}$ tal que $V \subset U \cap U'$.
(b) Para todo $U \in \mathfrak{B}$ se cumple $\mathcal{D}_X \subset U$.
(c) Para todo $U \in \mathfrak{B}$, existe un $V \in \mathfrak{B}$ tal que $V^{-1} \subset U$.
(d) Para todo $U \in \mathfrak{B}$, existe un $V \in \mathfrak{B}$ tal que $V \circ V \subset U$.

Si $(X, \mathfrak{U})$ es un espacio uniforme e Y es un subconjunto de X, la familia de subconjuntos de $Y \times Y$

$$\{U \cap (Y \times Y) : U \in \mathfrak{U}\}$$

es una uniformidad en Y que llamaremos *uniformidad inducida* por $\mathfrak{U}$ en Y.

En todo espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ se puede definir de forma canónica una topología asociada a $\mathfrak{U}$ y que denotaremos por $\tau_{\mathfrak{U}}$. Un conjunto A es abierto para esta topología cuando para todo $x \in A$, existe un $U \in \mathfrak{U}$ tal que $U[x] \subset A$, siendo

$$U[x] := \{y \in X : (x, y) \in U\}.$$

Es claro por la propia definición que para cada $x \in X$, la familia $\{U[x] : U \in \mathfrak{U}\}$ es una base de entornos de x para esta topología.

Un espacio pseudométrico (X, d) tiene estructura natural de espacio uniforme si tomamos como base de uniformidad la familia formada por los conjuntos

$$\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Claramente la topología asociada a esta uniformidad coincide con la generada por la pseudométrica de partida. Si en un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ se puede definir una pseudométrica cuya uniformidad asociada, en este sentido, es $\mathfrak{U}$, se dirá que $(X, \mathfrak{U})$ es *pseudometrizable.* Se puede demostrar ([**55**, 6.13]) que un espacio uniforme es pseudometrizable si y sólo si su uniformidad admite una base numerable.

Un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ se dice *precompacto* cuando para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe un subconjunto finito Δ de X tal que $X = \bigcup_{x \in \Delta} U[x]$.

Un subconjunto Y de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ se dice precompacto cuando Y, dotado de la uniformidad inducida por $\mathfrak{U}$, es un espacio uniforme precompacto. Es sencillo demostrar que para ello es suficiente que se cumpla la siguiente condición: *para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe un subconjunto finito Δ de X tal que $Y \subset \bigcup_{x\in\Delta} U[x]$.*

Sea $(x_i)_{i\in I}$ una red en el espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$. Se dice que (x_i) es una red *de Cauchy* cuando para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe un $i_0 \in I$ tal que si $i, j \in I$ verifican $i \geq i_0$, $j \geq i_0$, entonces $(x_i, x_j) \in U$. Todo punto de aglomeración de una red de Cauchy es un límite de la red.

Los espacios uniformes $(X, \mathfrak{U})$ en los que toda red de Cauchy es convergente para la topología $\tau_{\mathfrak{U}}$ se dicen *completos.* Un subconjunto de un espacio uniforme se dice completo cuando lo es con respecto a la uniformidad inducida.

Análogamente, un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ en el que toda *sucesión* de Cauchy es convergente se dice *secuencialmente completo.* Si $(X, \mathfrak{U})$ es pseudometrizable y secuencialmente completo, entonces es completo ([**55**, 6.24]).

Si $(X_1, \mathfrak{U}_1)$ y $(X_2, \mathfrak{U}_2)$ son dos espacios uniformes, una aplicación $f : X_1 \to X_2$ se dice *uniformemente continua* cuando para todo $V \in \mathfrak{U}_2$ existe un $U \in \mathfrak{U}_1$ tal que $[(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V]$. Toda aplicación uniformemente continua es continua con respecto a las topologías asociadas $\tau_{\mathfrak{U}_1}$ y $\tau_{\mathfrak{U}_2}$. Diremos que una aplicación $f : X_1 \to X_2$ es un *isomorfismo uniforme* cuando es biyectiva y ella y su inversa son uniformemente continuas; y que es un *encajamiento uniforme* cuando la aplicación asociada $x \mapsto f(x)$, definida de X_1 en $f(X_1)$, es un isomorfismo uniforme, considerando en X_1 la uniformidad $\mathfrak{U}_1$ y en $f(X)$ la inducida por $\mathfrak{U}_2$. Esta última condición es claramente equivalente a que f sea inyectiva, uniformemente continua y verifique además que

$$\forall U \in \mathfrak{U}_1 \quad \exists V \in \mathfrak{U}_2, \quad (f(x), f(y)) \in V \Rightarrow (x, y) \in U.$$

1.4. (Extensión por densidad) Si $(X_1, \mathfrak{U}_1)$ y $(X_2, \mathfrak{U}_2)$ son dos espacios uniformes, el segundo de ellos completo y de Hausdorff, A es un subconjunto de X_1 y $f : A \to X_2$ es una aplicación uniformemente continua, entonces existe una única aplicación uniformemente continua $\overline{f} : \mathrm{Cl}_{X_1}(A) \to X_2$, tal que $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ ([**55**, 6.26], [**11**, Ch. II, §3.6, Théor. 2]).

1.5. (Compleciones; [**11**, Ch. II, §3.7], [**55**, 6.27, 6.28], [**15**, 8.4])

- Si (X, d) es un espacio pseudométrico, existen un espacio pseudométrico completo $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ y un encajamiento isométrico y denso $i : (X, d) \to (\widetilde{X}, \widetilde{d})$. Al par formado por el espacio $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ y el encajamiento i lo denominaremos una *compleción* de (X, d).

  Si d es una métrica, entonces existe una compleción de (X, d) tal que la pseudométrica asociada $\widetilde{d}$ es también una métrica. Además esta compleción es única en el sentido de que dadas dos compleciones separadas de (X, d), $i_1 : (X, d) \to (\widetilde{X}_1, \widetilde{d}_1)$ e $i_2 : (X, d) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{d}_2)$, existe un isomorfismo isométrico $f : (\widetilde{X}_1, \widetilde{d}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{d}_2)$ tal que $f \circ i_1 = i_2$.
- Si $(X, \mathfrak{U})$ es un espacio uniforme, existen un espacio uniforme completo $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathfrak{U}})$ y un encajamiento uniforme y denso $i : (X, \mathfrak{U}) \to (\widetilde{X}, \widetilde{\mathfrak{U}})$. Al par formado por el espacio $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathfrak{U}})$ y el encajamiento i lo denominaremos una compleción de $(X, \mathfrak{U})$.

Si $(X, \mathfrak{U})$ es de Hausdorff, entonces existe una compleción de $(X, \mathfrak{U})$ tal que el espacio uniforme completado también es de Hausdorff. Además esta compleción es única en el sentido de que dadas dos compleciones separadas de $(X, \mathfrak{U})$, $i_1 : (X, \mathfrak{U}) \to (\widetilde{X}_1, \widetilde{\mathfrak{U}}_1)$ e $i_2 : (X, \mathfrak{U}) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{\mathfrak{U}}_2)$, existe un isomorfismo uniforme $f : (\widetilde{X}_1, \widetilde{\mathfrak{U}}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{\mathfrak{U}}_2)$ tal que $f \circ i_1 = i_2$.

1.6. Sean (X, τ) un espacio topológico e $(Y, \mathfrak{U})$ un espacio uniforme. Sea A un conjunto de aplicaciones definidas de X en Y. Se dice que A es *equicontinuo* en un punto $x \in X$ cuando para todo $U \in \mathfrak{U}$ existe un $V \in \mathcal{N}_x(X)$ tal que $[y \in V,\ f \in A \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U]$. Es claro que si A es equicontinuo en $x \in X$, entonces todas las aplicaciones de A son continuas en x.

Si $(X_1, \mathfrak{U}_1)$ y $(X_2, \mathfrak{U}_2)$ son espacios uniformes, se dice que $A \subset Y^X$ es *uniformemente equicontinuo* cuando para todo $V \in \mathfrak{U}_2$ existe un $U \in \mathfrak{U}_1$ tal que $[(x, y) \in U,\ f \in A \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V]$.

1.4. Propiedades básicas de los grupos abelianos topológicos. Suponemos conocida la definición de grupo abeliano y los conceptos de subgrupo, grupo cociente, homomorfismo e isomorfismo de grupo. (Buena parte de las afirmaciones y definiciones que siguen son válidas o tienen sentido en el caso no necesariamente abeliano, que no vamos a considerar en ningún momento a lo largo de esta memoria.) Como regla general usaremos notación aditiva para la operación definida en el grupo (y como consecuencia designaremos al elemento neutro como 0), con importantes excepciones como es el caso del subgrupo $\mathbb{T}$ del grupo multiplicativo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Usaremos la notación nx para representar el elemento $x + \overset{n}{\ldots} + x$, en coherencia con el hecho de que G es un $\mathbb{Z}$-módulo. Si G es un grupo abeliano y A es un subconjunto de G, gp$A$ denotará el subgrupo de G generado por A.

Las nociones de la teoría algebraica de grupos que manejaremos a lo largo de esta memoria son en su mayor parte elementales. Recordemos que un grupo G se dice *divisible* cuando para todos $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $y \in G$ con $ny = x$. El Lema de Zorn permite demostrar directamente el siguiente resultado fundamental:

1.7. ([**41**, Th. A.7]) Si G y H son grupos abelianos, y además H es divisible, dado cualquier subgrupo G_0 de G y cualquier homomorfismo de grupos $\phi_0 : G_0 \to H$, existe un homomorfismo $\phi : G \to H$ que extiende ϕ_0.

Sea G un grupo abeliano y τ una topología en G. Diremos que (G, τ) es un *grupo abeliano topológico* cuando las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} (G \times G, \tau \times \tau) & \to & (G, \tau) \\ (x, y) & \mapsto & x + y, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (G, \tau) & \to & (G, \tau) \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

son continuas ($\tau \times \tau$ denota la topología producto en $G \times G$). En ocasiones no haremos explícita la topología fijada en G, al considerar un grupo abeliano topológico general, o si aquélla queda determinada por el contexto.

Dado un grupo abeliano topológico G, denotaremos mediante $\mathcal{N}_0(G)$ la familia de todos los entornos de 0 en G. La topología de G puede ser descrita en términos de dichos entornos, ya que las traslaciones $x \in G \mapsto x + a \in G$, $a \in G$ son homeomorfismos: para cada $x \in G$, los conjuntos de la forma $x + U := \{x + u : u \in U\}$, $U \in \mathcal{N}_0(G)$ forman una base de entornos de x en G. Consecuentemente, si G y H son grupos abelianos topológicos y $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, f es continuo si y sólo si es continuo en 0.

Si H es un subgrupo del grupo abeliano topológico G, la topología inducida en H como subespacio topológico de G es una topología de grupo, que admite como base de entornos de cero $\{U \cap H : U \in \mathcal{N}_0(G)\}$. De la misma forma la topología cociente asociada a la aplicación canónica $\varphi : G \to G/H$ es una topología de grupo que admite como base de entornos de cero $\{\varphi(U) : U \in \mathcal{N}_0(G)\}$.

1.8. ([**11**, §1.2]) Una familia no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos no vacíos de un grupo abeliano G es base de entornos de cero para una topología de grupo en G si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\forall U,\ U' \in \mathcal{B}\ \exists V \in \mathcal{B},\ \ V \subset U \cap U'$
(b) $\forall U \in \mathcal{B}\ \exists V \in \mathcal{B},\ \ V + V \subset U$
(c) $\forall U \in \mathcal{B}\ \exists V \in \mathcal{B},\ \ -V \subset U$

(En este enunciado hemos utilizado las notaciones habituales

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}, \quad -A = \{-a : a \in A\},$$

siendo A y B subconjuntos de un grupo abeliano G.) La topología que determina una familia $\mathcal{B}$ bajo las hipótesis de 1.8 está únicamente determinada por admitir en cada punto $x \in G$ la base de entornos $\{x + U : U \in \mathcal{B}\}$.

1.9. Si en el enunciado de 1.8 eliminamos la hipótesis (a) obtenemos una caracterización de *subbase* de entornos de cero para una topología de grupo, es decir, de una familia de conjuntos tales que sus intersecciones finitas forman una base de entornos de cero para una topología de grupo.

Si la topología de un grupo abeliano topológico puede generarse mediante una pseudométrica d, entonces ésta puede escogerse invariante por traslaciones (es decir, tal que $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ para todos $x,\ y,\ z$). Trataremos esta cuestión con más detalle en la Sec. 4.

Si $(G_i)_{i \in I}$ es una familia de grupos abelianos topológicos, la topología producto (1.2) en $\prod_{i \in I} G_i$ es una topología de grupo, que se puede describir como la que admite la familia de conjuntos $p_i^{-1}(U_i)$, $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ como subbase de entornos de cero.

Todo grupo abeliano topológico es canónicamente un espacio uniforme. La uniformidad asociada es la que admite como base la familia de conjuntos

$$\{(x, y) \in G \times G : x - y \in U\}, \qquad U \in \mathcal{N}_0(G).$$

Los conceptos propios de espacios uniformes que se utilicen en grupos abelianos topológicos se entenderán referidos a esta uniformidad.

Los homomorfismos continuos de grupos son aplicaciones uniformemente continuas. Si G y H son grupos abelianos topológicos, un conjunto A de homomorfismos de G en

H es uniformemente equicontinuo en G si y sólo si es equicontinuo en 0, es decir, si para todo $V \in \mathcal{N}_0(H)$ existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $f(U) \subset V$ para todo $f \in A$.

1.10. Se demuestra que la extensión por densidad (en los términos descritos en 1.4) de un homomorfismo de grupos es de nuevo un homomorfismo de grupos, y que la compleción de un grupo abeliano topológico (pseudometrizable) tiene estructura natural de grupo abeliano topológico (pseudometrizable), siendo además un homomorfismo el encajamiento asociado. En el caso separado, dos compleciones de Hausdorff de un grupo abeliano topológico son topológicamente isomorfas como grupos. En definitiva, son válidas las afirmaciones análogas a las contenidas en 1.4 y 1.5 en la categoría de grupos abelianos topológicos y homomorfismos continuos.

En todo grupo abeliano topológico existe una base de entornos de cero formada por conjuntos cerrados y simétricos (un conjunto A es simétrico si $A = -A$). En particular todo grupo abeliano topológico es un espacio topológico regular, de donde se deduce la siguiente propiedad:

1.11. Para que un grupo abeliano topológico admita una base de entornos compactos de cero es suficiente con que tenga un entorno compacto.

Los grupos que verifican esta propiedad se denominan localmente compactos. La estructura y propiedades de los grupos topológicos localmente compactos ha sido objeto desde los años 30 de exhaustiva investigación, motivada en un primer momento por el hecho de que constituyen un marco natural para la generalización del análisis armónico real.

1.12. Para que un grupo abeliano topológico G sea separado es suficiente que $\{0\}$ sea un subconjunto cerrado de G, es decir, que para todo $x \in G$ no nulo exista un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ con $x \notin U$.

Si G es un grupo abeliano topológico y H un subgrupo de G, el grupo G/H, dotado de la topología cociente, es de Hausdorff si y sólo si H es cerrado. En particular $G/\mathrm{Cl}\{0\}$ es de Hausdorff para todo grupo abeliano topológico G; el recurso a este cociente facilita frecuentemente la reducción al caso separado. Llamaremos a $G/\mathrm{Cl}\{0\}$ el *grupo de Hausdorff asociado a G*.

1.13. Si, con las notaciones de arriba, $\varphi : G \to G/\mathrm{Cl}\{0\}$ denota la aplicación canónica y U es un entorno *abierto* de 0 en G, se cumple $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U + \mathrm{Cl}\{0\} = U$, ya que para todos $u \in U$ y $x \in \mathrm{Cl}\{0\}$, x ha de pertenecer al entorno de cero $U - u$.

1.5. Espacios vectoriales topológicos.

1.5.1. *Cuerpos valuados.*

1.14. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo conmutativo. Una *valuación* en $\mathbb{F}$ es una aplicación $|\cdot| : \mathbb{F} \to [0, \infty[$ que verifica las siguientes propiedades:

(a) $|t| = 0$ si y sólo si $t = 0$.
(b) $|ts| = |t||s|$ para todos $t,\ s \in \mathbb{F}$.

(c) $|t+s| \leq |t| + |s|$ para todos $t,\ s \in \mathbb{F}$.

Al par $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ lo denominaremos *cuerpo valuado.*

En cualquier cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$ podemos definir la *valuación trivial*

$$|t| = \begin{cases} 1 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}.$$

El ejemplo no trivial más familiar de cuerpo valuado lo constituyen los subcuerpos $\mathbb{F}$ de $\mathbb{C}$ con la restricción a $\mathbb{F}$ del módulo $|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y en particular, $\mathbb{R}$ con el valor absoluto y el propio $\mathbb{C}$. En la Sec. 16 y en las referencias allí mencionadas se presentan ejemplos de distinta naturaleza.

Todo cuerpo valuado es en particular un grupo abeliano pseudonormado de Hausdorff; la topología dada por la valuación es la discreta si y sólo si la valuación es la trivial.

1.5.2. *Espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos valuados.* Buena parte de las definiciones elementales de la teoría de espacios vectoriales topológicos con cuerpo base $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ tienen sentido para cuerpos valuados generales, y ésta es la forma en la que presentaremos algunas de ellas a continuación, ya que a lo largo de esta memoria constituyen una clase de interés los grupos abelianos topológicos que algebraicamente tienen estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo con valuación no necesariamente arquimediana.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo no trivialmente valuado $(\mathbb{F}, |\cdot|)$. Se dice que un subconjunto $A \subset E$ es *equilibrado* cuando $tA = \{ta : a \in A\} \subset A$ para todo $t \in \mathbb{F}$ con $|t| \leq 1$. Se dice que un subconjunto $A \subset E$ *absorbe* a $B \subset E$ cuando existe un $\lambda > 0$ tal que $B \subset tA$ para todo $t \in \mathbb{F}$ con $|t| \geq \lambda$. Se dice que $A \subset E$ es *absorbente* cuando absorbe cualquier subconjunto de E formado por un único elemento.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo no trivialmente valuado $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ y τ una topología en E tal que las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} (E,\tau)\times(E,\tau) & \to & (E,\tau) \\ (x,y) & \mapsto & x+y, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (\mathbb{F},\tau_{\mathbb{F}})\times(E,\tau) & \to & (E,\tau) \\ (t,x) & \mapsto & tx \end{array}$$

son continuas, donde $\tau_{\mathbb{F}}$ es la topología en $\mathbb{F}$ asociada a su valuación. En estas condiciones se dice que (E,τ) es un *espacio vectorial topológico* sobre $\mathbb{F}$.

Un subconjunto A de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico E se dice *acotado* cuando es absorbido por cualquier entorno de cero.

Es claro que si en un espacio vectorial topológico E consideramos únicamente su operación interna y su topología, obtenemos un grupo abeliano topológico que describiremos muchas veces como *subyacente* a E.

1.15. Si E es un espacio vectorial topológico, los entornos de cero cerrados y equilibrados forman una base de entornos en E : dado $W \in \mathcal{N}_0(E)$, existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ cerrado tal que $V \subset W$; como la aplicación $(t,x) \in \mathbb{F}\times E \mapsto tx \in E$ es continua en $(0,0)$, existen $\varepsilon > 0$ y $U \in \mathcal{N}_0(E)$ tales que $B_\varepsilon U \subset V$; finalmente, como en un espacio vectorial topológico la adherencia de un subconjunto equilibrado es equilibrada, la adherencia de $B_\varepsilon U$ es un entorno de cero equilibrado y cerrado contenido en W.

Si E es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$, denotaremos por E^* el $\mathbb{F}$-espacio vectorial de las formas lineales y continuas $f : E \to \mathbb{F}$, donde la suma y el producto por escalares se definen puntualmente. Dado un subconjunto A de E, se definen el subconjunto de E^*

$$A^{\mathrm{o}} = \{f \in E^* : |f(a)| \leq 1 \ \ \forall a \in A\},$$

y el subconjunto de E

$$A^{\mathrm{oo}} = \{x \in E : |f(x)| \leq 1 \ \ \forall f \in A^{\mathrm{o}}\}.$$

1.5.3. *Espacios vectoriales topológicos sobre* $\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$. A continuación recordamos algunas definiciones y resultados conocidos para espacios vectoriales reales o complejos cuya generalización al caso de un cuerpo valuado general es más problemática o no será necesaria en lo que sigue.

Todo $\mathbb{C}$-espacio vectorial E tiene asociado de forma natural un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (el propio E con la misma operación interna y la externa restringida a escalares reales) al que nos referiremos como el espacio vectorial real subyacente a E.

Si E es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o el de los complejos, un subconjunto C de E se dice *convexo* cuando $tC + (1-t)C \subset C$ para todo $t \in [0,1]$. En la definición de conjunto convexo sólo está implicada la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial: un subconjunto de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial es convexo si y sólo si lo es como subconjunto del espacio vectorial real subyacente.

Dado un subconjunto B de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), el menor subconjunto convexo que contiene a B (que designaremos por co$B$) se llama envolvente convexa de B. Es sabido que co$B$ se puede obtener como el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de B, es decir,

$$\mathrm{co}B = \{t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n : \ n \in \mathbb{N}, \ t_1, \ldots, t_n \in [0,1], \ t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

1.16. Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y U un subconjunto de E tal que $0 \in U$, el *funcional de Minkowski* asociado a U se define de la siguiente forma:

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\},$$

tomando ∞ como el ínfimo del conjunto vacío. En general, p_U es un funcional con valores en $[0, \infty]$. Si U es absorbente, p_U toma valores en $[0, \infty[$. En todo caso $U \subset \{x \in X : p_U(x) \leq 1\}$ y si se cumple $[0,1]U \subset U$ (es decir, si U es lo que llamaremos un conjunto *estrellado*), entonces $\{x \in X : p_U(x) < 1\} \subset U$. Si U es convexo, cerrado y equilibrado entonces $U = \{x \in E : p_U(x) \leq 1\}$. Si U es convexo, equilibrado y absorbente entonces p_U es una *seminorma* en E. Recordemos que una seminorma es una aplicación p definida en E, con valores en $[0, \infty[$ y tal que para todos $x, \ y \in E$ y $t \in \mathbb{F}$,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(tx) = |t| p(x).$$

Si E es un espacio vectorial y p es una seminorma definida en E, denotaremos por B_p el conjunto de los $x \in E$ con $p(x) \leq 1$.

Un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ se dice *localmente convexo* cuando admite una base de entornos de cero convexos. Es sabido que un espacio vectorial topológico es localmente convexo si y sólo si su topología viene determinada por una familia de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$, en el sentido de que los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}[0,\varepsilon], \quad n\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0,\ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset A$$

forman una base de entornos de cero para la topología de E.

Las definiciones de *espacio normado* y *espacio de Banach* son sobradamente conocidas. Usaremos las notaciones c_0, l_p, l_∞ para designar los espacios de Banach de las sucesiones de números reales o complejos convergentes a 0, sumables en potencia p y acotadas, respectivamente, con las normas usuales. La noción de norma admite generalizaciones naturales al caso de un cuerpo valuado general (cf. Ej. 18.17).

De acuerdo con la nomenclatura habitual, llamaremos *espacio prehilbertiano* a un par (E,f) donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ y $f:(x,y)\in E\times E\mapsto f(x,y)=x\cdot y\in\mathbb{F}$ es un producto escalar, es decir, una aplicación sesquilineal (bilineal en el caso real), hermitiana, positiva y no degenerada. Es sabido que dado un espacio normado $(E,||\cdot||)$, existe un producto escalar f en E tal que $||x||=f(x,x)^{1/2}$ para todo $x\in E$ si y sólo si $||\cdot||$ verifica la *identidad del paralelogramo*

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2||x||^2+2||y||^2 \quad \forall x,\ y\in E$$

Un *espacio de Hilbert* es un espacio prehilbertiano completo con respecto a la norma definida por su producto escalar.

En las Sec. 17 y 18 se estudian con más detalle algunas propiedades de los espacios vectoriales topológicos, tanto reales y complejos como sobre cuerpos valuados generales, así como otras topologías de grupo más generales que es posible definir sobre un espacio vectorial.

1.5.4. *Teoremas de separación.* El siguiente enunciado y otros similares se presentan habitualmente ([**10**, Ch. II, §5.2, Th. 1], [**78**, II, Th. 3.1], [**50**, 7.3.1]) como la *forma geométrica del teorema de Hahn-Banach:*

TEOREMA 1.17. *Sea E un espacio vectorial topológico real, A un subconjunto abierto y convexo de E, y S un subespacio vectorial de E tal que $S\cap A=\emptyset$. Entonces S está contenido en un subespacio maximal cerrado que no corta a A (es decir, existe una forma lineal y continua $f:E\to\mathbb{R}$ tal que $f(S)=\{0\}$, $f(a)<0$ para todo $a\in A$).*

A continuación recogemos algunos corolarios de este resultado, enunciados de forma conveniente para su utilización posterior.

COROLARIO 1.18. *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo de los números reales o el de los complejos. Sea U un entorno de cero convexo y equilibrado en E. Entonces se tiene*

$$p_U(x)=\sup_{x^*\in U^\circ}|x^*(x)| \quad \forall x\in E.$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo $\lambda>0$ tal que $x\in\lambda U$ y todo $x^*\in U^\circ$ se verifica $\frac{1}{\lambda}|x^*(x)|=|x^*(\frac{1}{\lambda}x)|\le 1$ y por lo tanto $\sup_{x^*\in U^\circ}|x^*(x)|\le p_U(x)$. Para demostrar la desigualdad opuesta podemos suponer $p_U(x) > 0$. Fijamos λ arbitrario tal que $0 < \lambda < p_U(x)$; demostraremos que existe un $x^* \in U^{\circ}$ con $|x^*(x)| \geq \lambda$. Distinguiremos dos casos:

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: Sea $V = \mathrm{Int}(U)$; V es un subconjunto abierto y convexo de E [para todo $t \in [0,1]$, $tV + (1-t)V$ es un subconjunto abierto contenido en U, luego en V] y además $U \subset \mathrm{Cl}(V)$ ([**10**, Ch. II, §2.6, Cor. 1]). Se tiene $\frac{1}{\lambda}x \notin U \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x \notin V$ y podemos aplicar el Teor. 1.17 con $S = \{0\}$ y $A = -\frac{1}{\lambda}x + V$: existe $f \in E^*$ con $f(-\frac{1}{\lambda}x + v) < 0$ para todo $v \in V$. Si llamamos $\alpha = \sup_{u \in U} f(u) = \sup_{u \in V} f(u)$, es claro que $\alpha > 0$ y definiendo $x^* = \frac{1}{\alpha}f$, se cumple $|x^*(u)| \leq 1$ para todo $u \in U$, $x^*(x) \geq \lambda$.
- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: Por el caso anterior, existe $g \in E^*_{\mathbb{R}}$ tal que $g(U) \subset [-1,1]$, $g(x) \geq \lambda$. Sea $x^*(y) = g(y) - ig(iy)$ el elemento de $E^*_{\mathbb{C}}$ cuya parte real es g. Es claro que $|x^*(x)| \geq |g(x)| \geq \lambda$; veamos que $|g(u)| \leq 1 \; \forall u \in U$: Sean $u \in U$ y $t \in \mathbb{C}$, $|t| = 1$ tal que $tx^*(u) = |x^*(u)|$. Se tiene $x^*(tu) = tx^*(u) \in \mathbb{R}$, luego $x^*(tu) = g(tu)$ pero por ser U $\mathbb{C}$-equilibrado, $tu \in U$ y por lo tanto $|g(tu)| \leq 1$. Luego $|g(u)| \leq 1$.

$\square$

COROLARIO 1.19. *Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$, siendo $\mathbb{F}$ el cuerpo de los números reales o el de los complejos. Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$ cerrado, convexo y equilibrado. Entonces $U = U^{\circ\circ}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser U cerrado, convexo y equilibrado se tiene la igualdad $U = \{x \in E : p_U(x) \leq 1\}$. Basta aplicar el Cor. 1.18. $\square$

CAPíTULO II

Grupos abelianos topológicos

2. Definiciones y resultados previos

2.1. Subgrupos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$. Con las topologías usuales, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ son grupos abelianos topológicos localmente compactos a los que nos referiremos continuamente. Recogemos a continuación algunas observaciones útiles acerca de la estructura de estos grupos:

- El homomorfismo de grupos $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(2\pi i x) \in \mathbb{T}$, que en lo sucesivo denotaremos por ρ, es continuo, sobreyectivo y abierto; su núcleo es $\mathbb{Z}$. Consecuentemente, los grupos abelianos topológicos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}$ son topológicamente isomorfos.
- Un subgrupo cerrado propio de $\mathbb{R}$ es necesariamente del tipo $a\mathbb{Z}$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Un subgrupo cerrado propio de $\mathbb{T}$ es necesariamente el grupo de las raíces n-simas de la unidad, para algún $n \in \mathbb{N}$. En particular los subgrupos propios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ son, o bien discretos, o bien densos. ([**61**, Ch. 2], [**2**, P. 18])

2.2. Los conjuntos $V_{(n)}$. Si G es un grupo abeliano, V es un subconjunto de G y $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$V_{(n)} = \{x \in G : kx \in V \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Notar que si G es un grupo abeliano topológico y V un entorno de cero en G, los conjuntos $V_{(n)}$ son también entornos de cero, ya que para todo $k \in \mathbb{N}$, el homomorfismo de grupos $h_k : x \in G \mapsto kx \in G$ es continuo, y se cumple $V_{(n)} = \bigcap_{k=1}^{n} h_k^{-1}(V)$.

2.3. Grupos localmente isomorfos. Sean G y H grupos abelianos topológicos. Un *isomorfismo local* entre G y H ([**11**, III, §1.3]) es un homeomorfismo $\varphi : U \to V$ donde $U \in \mathcal{N}_0(G)$, $V \in \mathcal{N}_0(H)$ y se cumplen las condiciones

(a) Para todos x, y en U tales que $x + y \in U$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
(b) Para todos x', y' en V tales que $x' + y' \in V$, $\varphi^{-1}(x' + y') = \varphi(x') + \varphi(y')$.

Es evidente que el inverso de un isomorfismo local es a su vez un isomorfismo local. Se dice que G y H son *localmente isomorfos* cuando existeun isomorfismo local $\varphi : U \to V$, donde U y V son entornos de cero en G y en H, respectivamente.

Si φ es un homeomorfismo entre un entorno de cero U en G y un entorno de cero V en H que cumple la condición (a), no tiene por qué cumplir (b) ([**11**, III,§1, Exerc. 7]) pero es inmediato que la restricción de φ a U' y $\varphi(U')$, donde U' es un entorno de cero en G tal que $U' + U' \subset U$, sí es un isomorfismo local ([**11**, III,§1.3, Prop. 3]). Por lo tanto, se puede decir que *dos grupos G y H son localmente isomorfos si y sólo si existen*

$U \in \mathcal{N}_0(G)$, $V \in \mathcal{N}_0(H)$ y un homeomorfismo $\varphi : U \to V$ tal que $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ para todos x, $y \in U$ tales que $x + y \in U$.

2.1. Si G es un grupo abeliano topológico y H es un subgrupo discreto de G, entonces G y G/H son localmente isomorfos (Ex. 20.29 en [**4**]).

2.4. Grupos TNA.

Definición 2.2. Se dice que un grupo abeliano topológico es *topológicamente no arquimediano* (brevemente TNA) cuando admite una base de entornos de cero formada por subgrupos.

Esta terminología procede de [**80**].

Notar que si un subgrupo es un entorno de cero, entonces es abierto y por lo tanto, cerrado ([**41**, Th. 5.5]); en particular todo grupo TNA es un espacio topológico cerodimensional. A continuación veremos que, de hecho, todo grupo TNA de Hausdorff es topológicamente isomorfo a un subgrupo de un producto de grupos discretos.

Proposición 2.3. *Sea G un grupo TNA de Hausdorff y $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ una base de entornos de cero en G formada por subgrupos. Para cada $\alpha \in A$, sea $\varphi_\alpha : G \to G/H_\alpha$ la aplicación canónica. El homomorfismo de grupos*

$$\Phi : G \to \prod_{\alpha \in A} G/H_\alpha, \qquad \Phi(x)(\alpha) = \varphi_\alpha(x)$$

es un encajamiento.

Demostración. Es claro que Φ es continua. El hecho de que es inyectiva se deduce de que $\bigcap_{\alpha\in A} H_\alpha = \{0\}$, debido al carácter separado de G. Finalmente, para todo $\beta \in A$ es inmediato que

$$\Phi(G) \cap (\{\varphi_\beta(0)\} \times \prod_{\alpha\neq\beta} G/H_\alpha) \subset \Phi(H_\beta),$$

lo que, teniendo en cuenta que G/H_β es un grupo discreto, demuestra que Φ es abierta sobre su imagen. □

Nota 2.4. La construcción recogida en la Prop. 2.3 es conocida ([**89**, §5], [**47**, Theor. 1.18]). Habitualmente se presenta una versión más completa de este resultado en la que interviene el concepto de límite proyectivo, que no utilizaremos aquí.

3. Desigualdades en $\mathbb{T}$

En lo que sigue el grupo $\mathbb{T}$ va a jugar un papel muy destacado, comparable en muchos aspectos al del cuerpo $\mathbb{R}$ en la teoría de espacios vectoriales topológicos. A continuación definiremos una base conveniente de entornos de 1 en $\mathbb{T}$ (Cor. 3.7) y estableceremos algunas desigualdades métricas que aplicaremos más adelante.

Para un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ en $\mathbb{R}$, denotamos $\mathbb{T}[\alpha, \beta] = \{\exp(i\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta\}$. Para describir los entornos de 1 en $\mathbb{T}$ en función de la distancia inducida por la euclídea en $\mathbb{C}$, utilizaremos en lo sucesivo la identidad elemental

$$|1 - \exp(i\theta)| = 2|\mathrm{sen}(\theta/2)| \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

que implica que, para todo $\beta \in [0, \pi]$,

$$\mathbb{T}[-\beta, \beta] = \{t \in \mathbb{T} : |1 - t| \leq 2\mathrm{sen}\frac{\beta}{2}\}. \tag{3.1}$$

3.1. Utilizaremos la notación específica

$$\mathbb{T}_+ := \mathbb{T}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = \{t \in \mathbb{T} : |1 - t| \leq \sqrt{2}\}$$

debido a que nos referiremos con mucha frecuencia a este entorno concreto de 1 en $\mathbb{T}$.

LEMA 3.2. (a) *Sea* $\beta \in [0, \pi)$. *Si* $t,\ s,\ ts \in \mathbb{T}[0, \beta]$ *siendo* $t = \exp(i\alpha_1)$ *y* $s = \exp(i\alpha_2)$ *con* $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0, \beta]$, *entonces* $\alpha_1 + \alpha_2 \in [0, \beta]$.
(b) *Sea* $\beta \in [0, \frac{2\pi}{3})$. *Si* $t,\ s \in \mathbb{T}[0, \beta]$ *y* $ts \in \mathbb{T}[-\beta, \beta]$ *entonces* $ts \in \mathbb{T}[0, \beta]$.

DEMOSTRACIÓN. (a) $\alpha_1 + \alpha_2 \in [0, 2\pi) \cap ([0, \beta] + 2\pi\mathbb{Z}) = [0, \beta]$.
(b) Si $t = \exp(i\alpha_1)$ y $s = \exp(i\alpha_2)$ con $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0, \beta]$, se tiene $\alpha_1 + \alpha_2 \in [0, 2\beta] \cap ([-\beta, \beta] + 2\pi\mathbb{Z}) = [0, \beta]$.

□

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ *y* $0 < \beta < \pi$. *Son equivalentes:*
(a) $\prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \quad \forall\Delta \subset \{1, \ldots, n\}$
(b) $\prod_{j=1}^{k} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$
(c) $t_j \in \mathbb{T}[0, \beta]\ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ *y si* $t_j = \exp(i\theta_j)$ *con* $\theta_j \in [0, \beta]$ *entonces* $\theta_1 + \cdots + \theta_n \in [0, \beta]$.

DEMOSTRACIÓN. • (a)$\Rightarrow$ (b) es claro.
- (b)$\Rightarrow$ (c): Aplicamos inducción en n. Para $n = 1$ es trivial; suponiendo la implicación cierta para conjuntos de $n - 1$ elementos podemos deducir fácilmente que $t_j \in \mathbb{T}[0, \beta]\ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ del hecho de que $\prod_{j=1}^{k} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Por otra parte, dado que $\prod_{j=1}^{n-1} t_j = \exp(i(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}))$ siendo $\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1} \in [0, \beta]$ por hipótesis de inducción, $t_n = \exp(i\theta_n)$ con $\theta_n \in [0, \beta]$ y $\prod_{j=1}^{n} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta]$, se deduce del Lema 3.2(a) que $\theta_1 + \cdots + \theta_n \in [0, \beta]$.
- (c)$\Rightarrow$ (a) es inmediato: $0 \leq \sum_{j\in\Delta} \theta_j \leq \sum_{j=1}^{n} \theta_j \leq \beta$.

□

COROLARIO 3.4. *Sean* $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $\beta \in [0, \pi[$. *Se tiene*

$$t, t^2, \ldots, t^n \in \mathbb{T}[0, \beta] \Rightarrow t \in \mathbb{T}[0, \frac{\beta}{n}].$$

PROPOSICIÓN 3.5. *Sean* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $\quad \beta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$. *Se tiene*

$$\left.\begin{array}{r} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \\ \prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[-\beta, \beta] \quad \forall\Delta \subset \{1, \ldots, n\} \end{array}\right\} \Rightarrow \prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \quad \forall\Delta \subset \{1, \ldots, n\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se demuestra por inducción en n. Para $n = 1$ es trivial, y lo único que no da directamente la hipótesis de inducción sobre conjuntos de $n-1$ elementos es el hecho de que $\prod_{j=1}^{n} t_j \in \mathbb{T}[0,\beta]$, pero esto se deduce del Lema 3.2(b) teniendo en cuenta que

$$\prod_{j=1}^{n-1} t_j \in \mathbb{T}[0,\beta], \quad t_n \in \mathbb{T}[0,\beta], \quad \prod_{j=1}^{n} t_j \in \mathbb{T}[-\beta,\beta].$$

$\square$

Corolario 3.6. *Sean* $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $\beta \in [0, 2\pi/3[$. *Se tiene*

$$t \in \mathbb{T}[-\frac{\beta}{n}, \frac{\beta}{n}] \Leftrightarrow t, t^2, \ldots, t^n \in \mathbb{T}[-\beta,\beta].$$

Demostración. La condición es claramente necesaria. Para demostrar que es suficiente, supongamos primero que $t \in \mathbb{T}[0,\beta]$. Por la Prop. 3.5, $t,\ t^2, \ldots,\ t^n \in \mathbb{T}[0,\beta]$; por el Cor. 3.4, $t \in \mathbb{T}[0, \frac{\beta}{n}]$. Si $t \in \mathbb{T}[-\beta, 0]$, hacemos el mismo razonamiento para $\bar{t} \in \mathbb{T}[0,\beta]$ y deducimos que $t \in \mathbb{T}[-\frac{\beta}{n}, 0]$. $\square$

Corolario 3.7. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$T_n := \mathbb{T}[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}] = \{t \in \mathbb{T} : |1-t| \leq 2sen\frac{\pi}{4n}\} = (\mathbb{T}_+)_{(n)}.$$

Demostración. La igualdad $\mathbb{T}[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}] = \{t \in \mathbb{T} : |1-t| \leq 2\text{sen}\frac{\pi}{4n}\}$ es un caso particular de la relación (3.1) y el hecho de que $\mathbb{T}[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}] = (\mathbb{T}_+)_{(n)}$, del Cor. 3.6. $\square$

Se puede enunciar un resultado similar al Cor. 3.6 en el que la sucesión finita de exponentes no recorra todos los números naturales menores que uno dado:

Proposición 3.8. *Sean* $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $\beta \in [0, 2\pi/3[$. *Se tiene*

$$t \in \mathbb{T}[-\frac{\beta}{2^n}, \frac{\beta}{2^n}] \ \Leftrightarrow \ t, t^2, t^{2^2}, \ldots, t^{2^n} \in \mathbb{T}[-\beta,\beta].$$

Demostración. De nuevo es trivial que la condición es necesaria. Demostramos la otra parte por inducción. Para $n=1$ la propiedad es un caso particular del Cor. 3.6. Suponemos el enunciado cierto para n y lo demostramos para $n+1$: Si se cumple que $t, t^2, t^{2^2}, \ldots, t^{2^n}, t^{2^{n+1}} \in \mathbb{T}[-\beta,\beta]$, podemos aplicar la hipótesis de inducción a t y a t^2, ya que

$$t, t^2, t^{2^2}, \ldots, t^{2^n} \in \mathbb{T}[-\beta,\beta]$$
$$t^2, (t^2)^2, (t^2)^{2^2}, \ldots, (t^2)^{2^n} \in \mathbb{T}[-\beta,\beta]$$

y por lo tanto t y t^2 pertenecen a $\mathbb{T}[-\frac{\beta}{2^n}, \frac{\beta}{2^n}]$. Del Cor. 3.6 se deduce que $t \in \mathbb{T}[-\frac{\beta}{2^{n+1}}, \frac{\beta}{2^{n+1}}]$. $\square$

3.9. Si en la Prop. 3.8 hacemos $\beta = \frac{\pi}{2m}$ para un $m \in \mathbb{N}$ arbitrario obtenemos que

$$t, t^2, t^{2^2}, \ldots, t^{2^n} \in T_m \ \Leftrightarrow \ t \in T_{m2^n}.$$

En particular $T_{2^n} = \{t \in \mathbb{T} : t, t^2, t^{2^2}, \ldots, t^{2^n} \in \mathbb{T}_+\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sean* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $\beta \in]0, \pi[$. *Si* $\prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[0,\beta] \quad \forall \Delta \subset \{1, \ldots, n\}$ *(equivalentemente, si se cumple cualquiera de las condiciones del enunciado de la Prop. 3.3), entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| \leq \frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} |1 - \prod_{j=1}^{n} t_j| \ \ (\leq \beta)$$

DEMOSTRACIÓN. En la demostración utilizaremos las desigualdades

- $\operatorname{sen}\theta \leq \theta$ para todo $\theta \geq 0$
- $\xi_1/\operatorname{sen}\xi_1 \leq \xi_2/\operatorname{sen}\xi_2$ si $0 < \xi_1 \leq \xi_2 < \pi$.

Sea $t_j = \exp(i\theta_j)$ con $\theta_j \in [0, \beta]$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Por la Prop. 3.3 sabemos que $\theta = \theta_1 + \cdots + \theta_n \in [0, \beta]$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| &= 2\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{sen}(\theta_j/2)| = 2\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}(\theta_j/2) \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j}{2} = 2\frac{\theta}{2} \leq 2\frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} |1 - \prod_{j=1}^{n} t_j|
\end{aligned}$$

□

NOTA 3.11. Si escribimos el enunciado de la Prop. 3.10 para elementos t_k iguales, obtenemos la relación

$$t,\ t^2, \ldots,\ t^n \in \mathbb{T}[0,\beta] \ \Rightarrow\ |1 - t| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}n} |1 - t^n| \ (\leq \frac{\pi}{2n}),$$

que es una cota menos ajustada que la obtenida en el Cor. 3.6, aunque coincide asintóticamente con ésta.

PROPOSICIÓN 3.12. *Sean* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $\beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$. *Supongamos que para todo* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$, *se tiene* $\prod_{j=1}^{n} t_j^{\varepsilon_j} \in \mathbb{T}[-\beta, \beta]$. *Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| \leq \frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} \max_{(\varepsilon_i)\in\{-1,0,1\}^n} |1 - \prod_{j=1}^{n} t_j^{\varepsilon_j}| \ \ (\leq \beta)$$

DEMOSTRACIÓN. Suponemos primero que $\operatorname{Im} t_j \geq 0$ (es decir, $t_j \in \mathbb{T}[0,\beta]$) para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. En particular la Prop. 3.5 implica $\prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[0,\beta] \quad \forall \Delta \subset \{1, \ldots, n\}$ y por la Prop. 3.10,

$$\sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| \leq \frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} |1 - \prod_{j=1}^{n} t_j| \leq \frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} \max_{(\varepsilon_i)\in\{-1,0,1\}^n} |1 - \prod_{j=1}^{n} t_j^{\varepsilon_j}|.$$

En el caso general sustituimos t_j por $\tilde{t}_j = t_j$ ó $\tilde{t}_j = \bar{t}_j$ de forma que $\operatorname{Im}\tilde{t}_j \geq 0$. Las desigualdades referidas al conjunto $\{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n\}$ y al $\{t_1, \ldots, t_n\}$ son equivalentes. □

PROPOSICIÓN 3.13. *Sean* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $\beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$. *Supongamos que* $\prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[-\beta, \beta]$ $\forall \Delta \subset \{1, \ldots, n\}$. *Entonces se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| \leq \frac{\beta}{\operatorname{sen}(\beta/2)} \max_{\Delta \subset \{1,\ldots,n\}} |1 - \prod_{j\in\Delta} t_j| \quad (\leq 2\beta)$$

DEMOSTRACIÓN. Ponemos

$$\sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| = \sum_{j\in J_+} |1 - t_j| + \sum_{j\in J_-} |1 - t_j|$$

siendo $J_+ = \{j \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Im} t_j \geq 0\}$, $J_- = \{j \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Im} t_j < 0\}$. Por la Prop. 3.5,

$$\prod_{j\in\Delta} t_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \ \ \forall \Delta \subset J_+, \quad \prod_{j\in\Delta} \bar{t}_j \in \mathbb{T}[0, \beta] \ \ \forall \Delta \subset J_-.$$

Aplicamos ahora la Prop. 3.10, obteniendo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |1 - t_j| &\leq \frac{\beta/2}{\operatorname{sen}(\beta/2)} (|1 - \prod_{j\in J_+} t_j| + |1 - \prod_{j\in J_-} t_j|) \\ &\leq \frac{\beta}{\operatorname{sen}(\beta/2)} \max_{\Delta \subset \{1,\ldots,n\}} |1 - \prod_{j\in\Delta} t_j|. \end{aligned}$$

□

NOTA 3.14. Una desigualdad similar a la que hemos establecido en la Prop. 3.13 se puede encontrar en [**11**, Ch. VIII, §3, Lem. 2]. La de esta referencia es menos ajustada pero válida para números complejos t_k arbitrarios.

4. Pseudonormas. Grupos pseudonormados

DEFINICIÓN 4.1. Sea G un grupo abeliano. Una aplicación $q : G \to [0, \infty[$ se dice una *pseudonorma*[1] cuando verifica las siguientes propiedades:

(a) $q(0) = 0$
(b) $q(x + y) \leq q(x) + q(y) \qquad \forall x, y \in G$
(c) $q(-x) = q(x) \qquad \forall x \in G$

Si q es una pseudonorma definida en un grupo abeliano G, se tiene para todos $x, y \in G$ la desigualdad $|q(x) - q(y)| \leq q(x - y)$. Una consecuencia inmediata es que, si G es un grupo abeliano topológico, una pseudonorma $q : G \to [0, \infty[$ es continua si y sólo si es continua en $x = 0$.

4.2. Supongamos que q es una pseudonorma definida en el grupo abeliano G. Es inmediato que la familia de conjuntos $\{q^{-1}[0, \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$ (equivalentemente, $\{q^{-1}[0, \varepsilon_n] : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$) es una base de entornos de cero para una topología de grupo en G, que llamaremos topología asociada a la pseudonorma q.

[1] *quasinorm* en [**1**]

EJEMPLO 4.3. *Las pseudonormas*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in [0, \infty[, \qquad t \in \mathbb{T} \mapsto |1-t| \in [0, \infty[$$

definen las topologías usuales de los grupos abelianos $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{T}$*, respectivamente.*

Se tiene por 4.2 que todo grupo pseudonormado es I-numerable; para demostrar la implicación inversa necesitamos una construcción estándar recogida en el siguiente resultado (adaptación sencilla de [**78**, Theor. I.6.1], planteado originalmente en espacios vectoriales topológicos; un enunciado similar para grupos topológicos se presenta y demuestra en [**84**]):

LEMA 4.4. *Sea* G *un grupo abeliano,* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de subconjuntos simétricos y no vacíos de* G *tales que* $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces existe* $q : G \to [0, \infty[$ *pseudonorma tal que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad q^{-1}[0, \frac{1}{2^{n+1}}] \subset V_n \subset q^{-1}[0, \frac{1}{2^n}]$$

TEOREMA 4.5. *Sea* G *un grupo abeliano topológico I-numerable. Entonces existe una pseudonorma* q *que genera la topología de* G*.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata del Lema 4.4, ya que en G se puede tomar una sucesión fundamental de entornos de cero $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por conjuntos simétricos y tales que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Es claro que si $q : G \to [0, \infty[$ es una pseudonorma, la expresión $d(x, y) = q(x - y)$ define una pseudométrica invariante por traslaciones que genera en G la topología asociada a q. Inversamente, si $d : G \times G \to [0, \infty[$ es una pseudométrica invariante, $q(x) = d(x, 0)$ es una pseudonorma definida en G. Si q verifica la condición suplementaria

$$q(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

(en tal caso diremos que es una pseudonorma *separada*), la pseudométrica d asociada es una métrica. Los resultados precedentes se pueden reformular, por lo tanto, en términos de (pseudo)metrizabilidad: un grupo abeliano topológico es pseudometrizable si y sólo si es I-numerable, y metrizable si y sólo si es I-numerable y de Hausdorff; además, la (pseudo)métrica asociada se puede tomar siempre invariante por traslaciones.

4.6. La generalización de 4.2 al caso de múltiples pseudonormas es inmediata: Si G es un grupo abeliano y $\{q_i\}_{i\in I}$ una familia de pseudonormas definidas en G, los conjuntos del tipo

$$q_i^{-1}[0, \varepsilon], \quad i \in I, \;\; \varepsilon > 0$$

forman una subbase de entornos de cero para una topología de grupo en G. Si la familia $\{q_i\}_{i\in I}$ contiene las pseudonormas máximo de todas sus subfamilias finitas, entonces la familia de conjuntos $q_i^{-1}[0, \varepsilon], \quad i \in I, \;\; \varepsilon > 0$ es una *base* de entornos de cero para esta topología.

A la topología determinada de la forma descrita en 4.6 la llamaremos *topología generada por la familia de pseudonormas* $\{q_i\}_{i\in I}$. El siguiente resultado establece que toda topología de grupo puede obtenerse de esta forma:

TEOREMA 4.7. *La familia de todas las pseudonormas continuas asociadas a un grupo abeliano topológico G genera la topología de G.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que para todo $V \in \mathcal{N}_0(G)$ existen una pseudonorma continua $q : G \to [0, \infty[$ y un $\varepsilon > 0$ tales que $q^{-1}[0, \varepsilon] \subset V$. Podemos suponer que V es simétrico. Construimos inductivamente una sucesión (V_n) de entornos simétricos de cero en G tal que $V_1 = V$, $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Lema 4.4 a esta sucesión, deducimos la existencia de una pseudonorma q definida en G y tal que $q^{-1}[0, \frac{1}{2^{n+1}}] \subset V_n \subset q^{-1}[0, \frac{1}{2^n}]$ para todo n. Es claro que q es continua y verifica en particular $q^{-1}[0, \frac{1}{4}] \subset V$. □

NOTA 4.8. Los resultados de esta sección son sobradamente conocidos, aunque la formulación habitual en grupos se hace en el caso no necesariamente abeliano y en términos de pseudométricas invariantes (cf. Notes to §8 en [**41**], o Sect. 2 en [**84**]). El Teorema 4.5 se conoce como *criterio de metrización de Birkhoff-Kakutani.*

5. El funcional k_U

5.1. Definición y propiedades. Necesitaremos en lo sucesivo (principalmente para darle un significado a la expresión "serie absolutamente convergente" en un grupo abeliano topológico arbitrario) una generalización a grupos de la definición de funcional de Minkowski (1.16). Al intentar hacer esta adaptación, hemos de tener en cuenta que sólo podemos darle sentido a los "múltiplos enteros" de un elemento $x \in G$, es decir, a los elementos del tipo nx con $n \in \mathbb{N}$, si (como parece natural) sustituimos la operación externa en E por la definida en el $\mathbb{Z}-$módulo G. Esto conduce a la siguiente

DEFINICIÓN 5.1. Sea G un grupo abeliano topológico y U un subconjunto no vacío de G. Se define $k_U : G \to [0, 1]$ como sigue (cf. [**82**, p. 496]):

$$k_U(x) = \sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ nx \notin U\right\} \quad \forall x \in G,$$

conviniendo en que $\sup \emptyset = 0$.

En muchos casos resulta preferible utilizar la siguiente determinación de k_U :

$$k_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } nx \in U \ \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{N+1} & \text{si } nx \in U \ \ \forall n \in \{1, \ldots, N\}, \quad (N+1)x \notin U \\ 1 & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

5.2. La sucesión de conjuntos $V_{(n)}$ asociada a cualquier subconjunto V de un grupo abeliano (Subsec. 2.2) puede definirse en términos del funcional k_V:

$$V_{(n)} = \{x \in G : kx \in V\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}\} = \{x \in G : k_V(x) \in [0, \frac{1}{n+1}]\}.$$

Seguidamente recogemos algunas propiedades del funcional k_U :

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea G un grupo abeliano y V, U subconjuntos no vacíos de G.*

(a) *Si $V \subset U$, entonces $k_U \leq k_V$.*
(b) $k_{V+V}(x+y) \leq \max\{k_V(x),\, k_V(y)\} \quad \forall x,\, y \in G$.
(c) *Si $0 \in V$, entonces*

$$k_{V+V+V}(x) \leq \frac{1}{2} k_V(x) \quad \forall x \in V.$$

DEMOSTRACIÓN. (a) es evidente.
(b) Si $x+y \notin V+V$, entonces $x \notin V$ o bien $y \notin V$, y se tiene $1 = k_{V+V}(x+y) = k_V(x)$ ó $1 = k_{V+V}(x+y) = k_V(y)$. Si $x+y \in V+V$, se tiene $k_{V+V}(x+y) = 0$ o bien $k_{V+V}(x+y) = \frac{1}{N+1}$ para algún $N \in \mathbb{N}$. En el primer caso no hay nada que probar. En el segundo, $(N+1)(x+y) \notin V+V$, de donde $(N+1)x \notin V$ o bien $(N+1)y \notin V$. Se tiene así $\max\{k_V(x),\, k_V(y)\} \leq \frac{1}{N+1} = k_{V+V}(x+y)$.
(c) Si $k_V(x) = 0$, entonces $k_{V+V+V}(x) = 0$ y la desigualdad es trivial. En otro caso, $k_V(x) = \frac{1}{N+1}$ para algún $N \in \mathbb{N}$; en particular, $nx \in V$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$. Se tiene

$$n \leq 3N \Rightarrow nx = x + \overset{n}{\cdots} + x + 0 + \overset{3N-n}{\cdots} + 0 \in V+V+V$$

de donde

$$\begin{aligned} k_{V+V+V}(x) &= \sup\left\{\frac{1}{n} : nx \notin V+V+V\right\} \\ &\leq \frac{1}{3N+1} = k_V(x)\frac{N+1}{3N+1} \leq \frac{1}{2}k_V(x). \end{aligned}$$

□

Notar que en general, k_U no es subaditiva, aun en casos en los que el funcional de Minkowski asociado al conjunto U lo sería; por ejemplo, en el grupo abeliano $\mathbb{R}$ se tiene

$$1/2 = k_{[-1,1]}(1/3 + 1/5) > k_{[-1,1]}(1/3) + k_{[-1,1]}(1/5) = 1/4 + 1/6 = 5/12.$$

PROPOSICIÓN 5.4. *Sea G un grupo abeliano.*

(a) *Para cualesquiera $U \subset G$ no vacío, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in G$, se cumple $k_{U_{(n)}}(x) \leq nk_U(x)$.*
(b) *Si q es una pseudonorma en G y $U = \{x \in G : q(x) \leq 1\}$, entonces para todo $x \in G$ se tiene $k_U(x) \leq q(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Si $k_{U_{(n)}}(x) = 0$ es trivial. En otro caso, $k_{U_{(n)}}(x) = \frac{1}{N+1}$ para un $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En particular $(N+1)x \notin U_{(n)}$ y de aquí, existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$l(N+1)x \notin U.$$

Entonces $k_U(x) \geq \frac{1}{l(N+1)} = \frac{1}{l} k_{U_{(n)}}(x) \Rightarrow k_{U_{(n)}}(x) \leq lk_U(x) \leq nk_U(x)$.

(b) Si $k_U(x) = 0$ es claro. Si $k_U(x) = \frac{1}{N+1}$ para un $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en particular $(N+1)x \notin U$ y por lo tanto

$$1 < q((N+1)x) \leq (N+1)q(x) \Rightarrow q(x) > \frac{1}{N+1} = k_U(x).$$

□

Si U es un subconjunto de un grupo abeliano topológico G, es claro que el funcional k_U no es continuo en general; sin embargo, se puede demostrar el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5.5. *Sea G un grupo abeliano topológico, y U un subconjunto cerrado no vacío de G. Entonces $k_U : G \to [0,1]$ es semicontinua inferiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in G$; demostraremos que $\liminf_{x \to a} k_U(x) \geq k_U(a)$. Si $k_U(a) = 0$ es trivial. En otro caso, sea $k_U(a) = \frac{1}{N+1}$ con $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En particular $(N+1)a$ pertenece al abierto $G \setminus U$ y dado que el homomorfismo de grupos $x \in G \mapsto (N+1)x \in G$ es continuo, existe un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $(N+1)x \notin U$ para todo $x \in a + V$. Por lo tanto

$$x \in a + V \Rightarrow k_U(x) \geq \frac{1}{N+1} = k_U(a).$$

□

PROPOSICIÓN 5.6. (a) *Sea $G = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $r > 0$. Sea $U_r = \{x \in G : |x| \leq r\}$. Se tiene*

$$k_{U_r}(x) < \frac{|x|}{r} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$k_{U_r}(x) \geq \frac{1}{2r}|x| \quad \forall x \in U_r.$$

(b) *Sea $G = \mathbb{T}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el entorno de $1 \in \mathbb{T}$*

$$T_n = \{t \in \mathbb{T} : |1 - t| \leq 2sen\frac{\pi}{4n}\}.$$

Se tiene entonces

$$k_{T_n}(t) < \frac{n}{\sqrt{2}}|1 - t| \quad \forall t \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$$

$$k_{T_n}(t) \geq \frac{n}{\pi}|1 - t| \quad \forall t \in T_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Las desigualdades de (a) son de demostración inmediata.

En cuanto a (b), por el Cor. 3.7, se sabe que $T_n = (\mathbb{T}_+)_{(n)}$. Para demostrar la primera desigualdad, basta probarla para el caso $n = 1$ y aplicar la Prop. 5.4(a). Si $k_{\mathbb{T}_+}(t) = 0$, el Cor. 3.7 implica que $t = 1$. En otro caso $k_{\mathbb{T}_+}(t) = \frac{1}{N+1}$ para algún $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; en particular $t^{N+1} \notin \mathbb{T}_+$ y se tiene $\sqrt{2} < |1 - t^{N+1}| \leq (N+1)|1 - t|$; por lo tanto

$$k_{\mathbb{T}_+}(t) = \frac{1}{N+1} < \frac{|1 - t|}{\sqrt{2}}.$$

En cuanto a la segunda desigualdad, si $k_{T_n}(t) = 0$ se deduce como en el caso anterior que $t = 1$; en otro caso, $k_{T_n}(t) = \frac{1}{N+1}$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y en particular (Cor. 3.6)

$$\begin{aligned} t^1, t^2, \ldots, t^N \in T_n = \mathbb{T}[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}] \ &\Rightarrow\ t \in \mathbb{T}[-\frac{\pi}{2nN}, \frac{\pi}{2nN}] \\ &\Rightarrow\ |1-t| \leq 2\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4nN} \leq \frac{\pi}{2nN} \leq \frac{\pi}{n} k_{T_n}(t). \end{aligned}$$

□

5.2. Comparación con otras definiciones. El problema de la generalización del funcional de Minkowski a grupos fue abordado originalmente por Kaplan ([**53**, p. 650]) quien introdujo, como un instrumento necesario para describir la topología compacto-abierta en el grupo dual de un producto de grupos abelianos topológicos (cf. Cap. III), un funcional que nosotros denotaremos como $(\cdot/U)_K$, definido de la siguiente forma:

$$(x/U)_K := \text{ínf}\{\frac{1}{2^n} : 2^k x \in U\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}\}, \tag{5.1}$$

siendo U un subconjunto de un grupo abeliano G y x un elemento de U. En [**7**, p. 8] Banaszczyk prefirió usar una variante de esta definición (más cercana a la presentada aquí) que recogemos seguidamente:

$$(x/U)_B := \text{ínf}\{\frac{1}{n} : kx \in U\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}\}, \tag{5.2}$$

siendo de nuevo U un subconjunto de un grupo abeliano G y x un elemento de U.

5.7. El funcional $(\cdot/U)_B$ toma valores en $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y está definido para $x \in U$. Es inmediato que dados un grupo abeliano G, un subconjunto U de G y $x \in U$, $k_U(x) = \frac{1}{n+1}$ si y sólo si $(x/U)_B = \frac{1}{n}$, y que $k_U(x) = 0$ si y sólo si $(x/U)_B = 0$. Estas equivalencias llevan a que las definiciones y resultados que se apoyan en el funcional k_U, a lo largo de la presente memoria, sean fácilmente adaptables o equivalentes a los que podríamos enunciar utilizando la definición de Banaszczyk. (El funcional k_U, cuya definición puede resultar menos natural, presenta las ventajas técnicas de estar definido en todo el grupo y caracterizar los elementos de U.)

La situación es distinta en lo que concierne a la comparación con el funcional $(\cdot/U)_K$: si definimos $G = \mathbb{R}$, $U = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ y $x = 2$, es inmediato que $k_U(x) = 1/3$ mientras que $(x/U)_K = 0$. De hecho comprobaremos más adelante que en las dos aplicaciones fundamentales del funcional k_U que trataremos en esta memoria (la definición de sucesiones y familias absolutamente sumables en un grupo abeliano topológico, Def. 25.1, y la introducción de la topología asterisco en la suma directa, Prop. 12.5), la sustitución de k_U por $(\cdot/U)_K$ conduce a definiciones distintas, en general. Para poder enunciar de forma más clara condiciones que garanticen la equivalencia de ambas variantes, introducimos el siguiente concepto:

Definición 5.8. Sea G un grupo abeliano y C un subconjunto no vacío de G. Se dice que C es un *conjunto de Kaplan* cuando verifica la siguiente condición:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [x,\ 2x,\ 2^2x, \ldots,\ 2^n x \in C \ \Rightarrow\ x \in C_{(2^n)}].$$

Es claro que cualquier subconjunto equilibrado y no vacío de un espacio vectorial real es un conjunto de Kaplan. Por otra parte, la Prop. 3.8 expresa que, para todo $\beta \in [0, 2\pi/3[$, $\mathbb{T}[-\beta, \beta]$ es un subconjunto de Kaplan del grupo abeliano $\mathbb{T}$. Este último ejemplo permite utilizar la dualidad en la obtención de condiciones suficientes para que un conjunto dado sea un conjunto de Kaplan (ver Prop. 13.26).

PROPOSICIÓN 5.9. *Sean G un grupo abeliano, U un subconjunto no vacío de G y $x \in U$.*

(a) $(x/U)_K \leq 4k_U(x)$.
(b) *Si U es un conjunto de Kaplan, entonces $k_U(x) \leq (x/U)_K$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Si $kx \in U$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ pero $(n+1)x \notin U$, se tiene $2^{[\log_2 n]} \leq n$ y por lo tanto

$$(x/U)_K \leq \frac{1}{2^{[\log_2 n]}} < \frac{2}{2^{\log_2 n}} = \frac{2}{n} \leq 4k_U(x),$$

($[\alpha]$ denota la parte entera del número real α) y es claro que la desigualdad $(x/U)_K \leq 4k_U(x)$ se mantiene en el caso $k_U(x) = 0$.

(b) Si $2^k x \in U$ para todos $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ pero $2^n x \notin U$, por ser U un conjunto de Kaplan se tiene $k_U(x) \leq \frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n} = (x/U)_K$. Si $2^k x \in U$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de nuevo se deduce de la condición de conjunto de Kaplan que $k_U(x) = 0$ y la desigualdad es trivial.

□

6. n-grupos

DEFINICIÓN 6.1. Se dice que un grupo abeliano topológico G es un *n-grupo* cuando existe un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que la sucesión $V_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ es una base de entornos de cero para la topología de G. Si G es un n-grupo, a los entornos de cero en G con esta propiedad les llamaremos *entornos distinguidos.*

Si G es un n-grupo, cualquier entorno de cero en G contenido en uno distinguido es también distinguido; en particular, toda base de entornos de cero en G contiene entornos distinguidos. Por otra parte, de la definición se deduce de forma inmediata que todo n-grupo es I-numerable.

PROPOSICIÓN 6.2. *Sean G un grupo abeliano topológico y H un n-grupo, con entorno distinguido V.*

(a) *Un homomorfismo de grupos $u : G \to H$ es continuo si y sólo si $u^{-1}(V) \in \mathcal{N}_0(G)$.*
(b) *Un conjunto A de homomorfismos de G en H es equicontinuo si y sólo si $\bigcap_{u \in A} u^{-1}(V) \in \mathcal{N}_0(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que (b) es un caso particular de (a). Para demostrar (b), basta ver que $\bigcap_{u \in A} u^{-1}(V_{(n)}) \in \mathcal{N}_0(G)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si llamamos $U = \bigcap_{u \in A} u^{-1}(V) \in \mathcal{N}_0(G)$, es inmediato que el entorno de cero $U_{(n)}$ está contenido en $\bigcap_{u \in A} u^{-1}(V_{(n)})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 6.3. *Se deduce de la Prop. 5.6 (y también de la Prop. 6.5) que* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{T}$ *son n-grupos con entornos distinguidos* $[-1,1]$, $\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 1\}$ *y* $\mathbb{T}_+$, *respectivamente.*

Ejemplo 6.4. *El grupo abeliano topológico subyacente a un espacio vectorial topológico real o complejo* E *es un n-grupo si y sólo si* E *tiene un entorno acotado de 0 (y como consecuencia, una base de entornos acotados).*

Demostración. Sea E un espacio vectorial topológico localmente acotado y V un entorno acotado de cero en E. Dado un entorno de cero U en E, como V es acotado existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $V \subset nU$; por lo tanto $V_{(n)} = \bigcap_{k=1}^{n} \frac{1}{k} V \subset U$. Luego E es un n-grupo y V es un entorno distinguido de cero. Inversamente, supongamos que el grupo subyacente a E es un n-grupo, y sea V un entorno distinguido de cero. Existe un entorno de cero W equilibrado contenido en V (1.15). W es también distinguido; por lo tanto, para cualquier $U \in \mathcal{N}_0(E)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_{(n)} = \frac{1}{n} W \subset U$. Luego W es acotado. □

Los espacios vectoriales topológicos caracterizados en el Ej. 6.4 se denominan *localmente acotados* ([**90**, p. 53]). Un caso particular de especial importancia es el que se obtiene al tomar en el Ejemplo 6.4 como E un espacio normado y como V su bola unidad.

Proposición 6.5. ([**4**, Rem. 3.3(i)]) *Sea* G *un grupo abeliano topológico localmente compacto y de Hausdorff, y* U *un entorno de cero en* G, *compacto y simétrico, que no contiene subgrupos distintos del trivial. Entonces* G *es un n-grupo con entorno distinguido* U.

Demostración. Dado cualquier $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{(n)}$, se cumple trivialmente que $\mathrm{gp}\,\{x\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{(n)}$; por hipótesis, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{(n)} = \{0\}$. Sea V un entorno de cero abierto en G. La familia de cerrados en U formada por $U \cap (G \setminus V)$, $U_{(1)}$, $U_{(2)}$, $U_{(3)} \ldots$ tiene intersección vacía; por compacidad de U, admite una subfamilia finita (que necesariamente ha de incluir al conjunto $U \cap (G \setminus V)$) con intersección también vacía. Dado que la sucesión $(U_{(n)})$ es decreciente, se deduce que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{(n_0)} \cap (G \setminus V) = \emptyset$, es decir, $U_{(n_0)} \subset V$. □

Proposición 6.6. *Si* $G_1, \ldots, G_m$ *son n-grupos, entonces* $G_1 \times \cdots \times G_m$, *dotado de la topología producto, es también un n-grupo.*

Demostración. Sea U_k entorno de cero en G_k, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$. Es inmediato que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(U_1 \times \cdots \times U_m)_{(n)} = (U_1)_{(n)} \times \cdots \times (U_m)_{(n)}$$

y que para todos $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$(U_1)_{(k)} \times \cdots \times (U_m)_{(k)} \subset (U_1)_{(k_1)} \times \cdots \times (U_m)_{(k_m)}$$

siendo $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Si U_j es un entorno distinguido de 0 en G_j para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, los entornos de la forma

$$(U_1)_{(k_1)} \times \cdots \times (U_j)_{(k_m)}, \qquad k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$$

forman base de entornos de cero en $G_1 \times \cdots \times G_m$; y por la discusión anterior el producto $U_1 \times \cdots \times U_m$ es un entorno distinguido del producto. □

Nota 6.7. La Prop. 6.6 no es cierta para productos infinitos. El subgrupo $\{-1,1\}$ de $\mathbb{T}$ es discreto y por lo tanto es un n-grupo; sin embargo, la base de entornos del neutro en el grupo $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por los conjuntos

$$V_\Delta = \{1\}^\Delta \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}\setminus\Delta}, \quad \Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$$

no contiene ningún entorno distinguido, ya que $(V_\Delta)_{(n)} = V_\Delta$ para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$.

Nota 6.8. El nombre de n-grupos alude a los espacios normados, con los que la clase de grupos que hemos definido comparte algunas propiedades (cf. Ejemplo 6.4). En [**42**, Teor. 3] interviene una condición similar a la que caracteriza los n-grupos, retomada posteriormente en [**63**], aunque no se escoge ninguna denominación especial para los grupos que la cumplen. Concretamente, se consideran los grupos abelianos topológicos G para los que existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ con la propiedad de que (ver (5.1)) los conjuntos

$$(\cdot/U)_K^{-1}[0, \frac{1}{2^n}] = \{x \in G : x,\, 2x,\, 2^2x, \ldots, 2^n x \in U\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

forman una base de entornos de cero. Es claro que si en esta condición sustituimos $(\cdot/U)_K$ por el funcional k_U obtenemos la definición de n-grupo (cf. 5.2). Es de esperar que ambas definiciones no sean equivalentes, a la luz de distintos ejemplos que muestran que los funcionales $(\cdot/U)_K$ y k_U no son intercambiables en general (Prop. 12.17, Ej. 25.13).

7. k-grupos

Recordemos que una aplicación $h : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice *k-continua* cuando para cualquier subconjunto compacto K de X, la restricción $f|_K : K \to Y$ es continua, considerando en K la topología inducida.

Un espacio topológico X es un *k-espacio* cuando para cualquier espacio topológico Y y toda aplicación $f : X \to Y$ k-continua, f es continua.

Definición 7.1. Sea G un grupo abeliano topológico. Se dice que G es un k-grupo cuando cualquier homomorfismo de grupos k-continuo $f : G \to H$ (H grupo abeliano topológico arbitrario) es continuo.

Este concepto fue definido en [**65**] para grupos topológicos generales: en esta referencia un k-grupo es un grupo topológico tal que cualquier homomorfismo de grupos k-continuo con dominio G es continuo. Es claro que nuestro concepto de k-grupo no es más que la restricción de éste al caso de G abeliano, ya que dado cualquier homomorfismo de grupos $f : G \to H$, si G es abeliano también lo es el subgrupo $f(G)$ de H.

7.2. Cualquier producto de k-grupos, o cualquier cociente de un k-grupo, es de nuevo un k-grupo. Sin embargo, un subgrupo cerrado de un k-grupo puede no ser un k-grupo ([**65**, 1.2, 1.3, 1.6]).

7.3. Es inmediato comprobar que cualquier grupo abeliano topológico que sea un k-espacio es en particular un k-grupo.

Cualquier espacio topológico I-numerable, o bien localmente compacto, es un k-espacio ([**55**, 7.13]); todo subespacio cerrado de un k-espacio es un k-espacio. Teniendo en cuenta 7.3, se deduce

7.4. Todo grupo abeliano topológico I-numerable o localmente compacto es un k-grupo. Un subgrupo cerrado de un grupo abeliano topológico que sea un k-espacio es un k-grupo.

La implicación inversa a la establecida en 7.3 es falsa, y eso hace que en general los enunciados análogos para k-grupos y k-espacios, cuando tal analogía es posible, no sean simultáneamente ciertos. Un ejemplo de k-grupo que no es k-espacio es cualquier producto no numerable G de copias de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ es k-grupo ya que es localmente compacto; basta aplicar 7.2 para deducir que G es k-grupo; la demostración de que G no es k-espacio aparece indicada en [**55**, Problem 7J(b)].)

8. Grupos de homomorfismos continuos

Sea H un grupo abeliano y A un conjunto no vacío; entonces el producto H^A tiene estructura natural de grupo abeliano. Si $A = G$ es un grupo abeliano, el conjunto de todos los homomorfismos de grupo $f : G \to H$ es un subgrupo de H^G que denotaremos por $\mathrm{Hom}(G, H)$. Si G y H son grupos abelianos topológicos, tiene sentido considerar el subconjunto de $\mathrm{Hom}(G, H)$ formado por los homomorfismos continuos. Denotaremos este subconjunto por $\mathrm{CHom}(G, H)$. Es inmediato que $\mathrm{CHom}(G, H)$ es un subgrupo de $\mathrm{Hom}(G, H)$; a continuación definiremos en estos grupos de aplicaciones, homomorfismos u homomorfismos continuos algunas topologías naturales de grupo asociadas a las topologías fijadas en H y eventualmente en G.

Proposición 8.1. *Sean A un conjunto no vacío y H un grupo abeliano topológico. Sea $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. La familia de subconjuntos de H^A*

$$\mathcal{W}(S, V) := \{f \in H^A : f(S) \subset V\}, \quad S \in \mathfrak{S},\ V \in \mathcal{N}_0(H)$$

es una subbase de entornos de cero para una topología de grupo en H^A.

Si H es de Hausdorff y $\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S = A$ entonces la topología así definida en H^A también es de Hausdorff.

Si $\mathfrak{S}$ verifica la condición

$$\forall S_1,\ S_2 \in \mathfrak{S} \quad \exists S \in \mathfrak{S}, \quad S_1 \cup S_2 \subset S, \tag{8.1}$$

entonces $\{\mathcal{W}(S, V) : S \in \mathfrak{S},\ V \in \mathcal{N}_0(H)\}$ es una base de entornos de cero para la misma topología.

Demostración. Las condiciones fijadas en 1.8 y 1.9 son de inmediata comprobación. Supongamos que H es de Hausdorff y $\mathfrak{S}$ recubre A. Dado $f \neq 0$ en H^A, existe un $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$; por las hipótesis, existen $S \in \mathfrak{S}$ y $V \in \mathcal{N}_0(H)$ tales que $x \in S$ y $f(x) \notin V$, de donde $f \notin \mathcal{W}(S, V)$, luego la topología definida es de Hausdorff. □

Denotaremos la topología definida en H^A por la familia $\mathfrak{S}$ en los términos de la Proposición anterior por $\tau_{\mathfrak{S}}$ y nos referiremos a ella como la $\mathfrak{S}$-topología o bien la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de la familia $\mathfrak{S}$. Abusando de la notación, denotaremos de la misma forma las restricciones de esta topología a subgrupos de H^A, como $\mathrm{Hom}(G,H)$ ó $\mathrm{CHom}(G,H)$ si $A = G$ es un grupo abeliano (topológico); de la misma forma, los entornos $\mathcal{W}(S,V)$ se entenderán incluidos en el subgrupo correspondiente.

8.2. Notar que si H es un grupo abeliano topológico, A es un conjunto no vacío y $\mathfrak{S}$ es una familia no vacía de subconjuntos de A, la familia

$$\mathfrak{S}' = \{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n : S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S},\ n \in \mathbb{N}\}$$

verifica la condición (8.1) y es tal que $\tau_{\mathfrak{S}'} = \tau_{\mathfrak{S}}$ en H^A.

8.3. Dos elecciones habituales para la familia $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de A son:

- $\mathfrak{S} = \{A\}$; en este caso la topología $\tau_{\mathfrak{S}}$ asociada se denomina simplemente *topología de la convergencia uniforme.*
- $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}(A)$; en este caso llamaremos a $\tau_{\mathfrak{S}}$ *topología de la convergencia puntual.* Se trata de la inducida por la topología producto en H^A.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de las definiciones:

PROPOSICIÓN 8.4. *Sean G, H y J grupos abelianos topológicos, y $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de subconjuntos de G. Sea $g \in CHom(H,J)$ fijo. Considerando en $CHom(G,H)$ y en $CHom(G,J)$ las $\mathfrak{S}$-topologías respectivas, el homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{ccc} CHom(G,H) & \to & CHom(G,J) \\ f & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

es continuo.

En lo sucesivo será frecuente encontrar $\mathfrak{S}$-topologías en subgrupos de $\mathrm{CHom}(G,H)$ siendo H un n-grupo. En este caso se puede dar una determinación por entornos más sencilla:

PROPOSICIÓN 8.5. *Sea G un grupo abeliano y H un grupo abeliano topológico. Sea $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de subconjuntos de G. Supongamos que H es un n-grupo y que $\mathfrak{S}$ cumple la condición*

$$\forall S \in \mathfrak{S} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists S' \in \mathfrak{S}, \quad nS := \{nx : x \in S\} \subset S'. \tag{8.2}$$

Entonces, fijado un entorno distinguido de cero V en H, los conjuntos de la forma

$$\mathcal{W}(S,V), \quad S \in \mathfrak{S}$$

forman una subbase de entornos de cero para la topología $\tau_{\mathfrak{S}}$ en $Hom(G,H)$.

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $n \in \mathbb{N}$, $S \in \mathfrak{S}$. Para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ existe $S_k \in \mathfrak{S}$ tal que $kS \subset S_k$, debido a (8.2). Veamos que

$$\mathcal{W}(S_1,V) \cap \mathcal{W}(S_2,V) \cap \cdots \cap \mathcal{W}(S_n,V) \subset \mathcal{W}(S,V_{(n)}),$$

lo que demostrará el enunciado, ya que según la Prop. 8.1 y la condición de n-grupo, los conjuntos $\mathcal{W}(S, V_{(n)})$, $S \in \mathfrak{S}$, $n \in \mathbb{N}$ forman una subbase de entornos de cero para $\tau_{\mathfrak{S}}$. Si $f \in \mathcal{W}(S_1, V) \cap \mathcal{W}(S_2, V) \cap \cdots \cap \mathcal{W}(S_n, V)$ y $x \in S$, se verifica para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$kf(x) = f(kx) \in f(kS) \subset f(S_k) \subset V$$

y por lo tanto $f(x) \in V_{(n)}$. □

8.6. Es claro que si G es un grupo abeliano topológico, H un n-grupo y $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de subconjuntos de G, la familia $\mathfrak{S}'' = \{nS : n \in \mathbb{N}, S \in \mathfrak{S}\}$ verifica la condición (8.2) y es tal que $\tau_{\mathfrak{S}''} = \tau_{\mathfrak{S}}$ en $\mathrm{Hom}(G, H)$.

8.7. Siguiendo [**17**], diremos que una familia $\mathfrak{S}$ no vacía de subconjuntos de G está *bien dirigida* cuando cumple las condiciones (8.1) y (8.2).

PROPOSICIÓN 8.8. *Sean G un grupo abeliano topológico, H un n-grupo con entorno distinguido V y $\mathfrak{S}$ una familia bien dirigida de subconjuntos de G. Los conjuntos de la forma*

$$\mathcal{W}(S, V), \qquad S \in \mathfrak{S}$$

forman una base de entornos de cero para la topología $\tau_{\mathfrak{S}}$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Prop. 8.5, esta familia es una subbase de entornos de cero para $\tau_{\mathfrak{S}}$. De la condición (8.1) se deduce trivialmente que en realidad es una base de entornos.

□

8.9. Si G es un grupo abeliano topológico, H un n-grupo con entorno distinguido V y $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de subconjuntos de G, la familia

$$\overline{\mathfrak{S}} = \{k_1 S_1 \cup k_2 S_2 \cup \cdots \cup k_n S_n : S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S},\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\}$$

está bien dirigida y es tal que $\tau_{\overline{\mathfrak{S}}} = \tau_{\mathfrak{S}}$.

Si en G fijamos una topología de grupo, las elecciones más frecuentes para $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(G)$ son, aparte de las indicadas en 8.3, la familia $\mathcal{K}(G)$ de los compactos o la familia $\mathcal{PC}(G)$ de los precompactos. Si no hay ambigüedad denotaremos las $\mathfrak{S}$-topologías asociadas por $\tau_{\mathcal{K}}$ y $\tau_{\mathcal{PC}}$, respectivamente, y por $\tau_{\mathfrak{F}}$ la topología de la convergencia puntual. Es evidente que estas tres familias están bien ordenadas; de hecho, son invariantes por sumas y uniones finitas. Las inclusiones $\tau_{\mathfrak{F}} \subset \tau_{\mathcal{K}} \subset \tau_{\mathcal{PC}}$ son inmediatas. Es frecuente la denominación "topología compacto-abierta" para $\tau_{\mathcal{K}}$. En la Sección 13 particularizaremos estas definiciones al caso en el que el grupo H es $\mathbb{T}$ con la topología usual.

8.10. En el caso de que $G = E$ sea un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, aparte de las familias bien ordenadas $\mathfrak{F}(E)$, $\mathcal{K}(E)$, $\mathcal{PC}(E)$ mencionadas arriba, se puede considerar la familia bien ordenada $\mathfrak{S} = \mathcal{B}(E)$ de los subconjuntos acotados de E. Como $\mathbb{F}$ es un n-grupo (Ej. 6.3), la Proposición 8.8 implica que en cada caso, los conjuntos de la forma S^{o}, donde S recorre $\mathfrak{S}$, forman una base de entornos de cero para una topología de grupo en $E^* \subset \mathrm{Hom}(E, \mathbb{F})$. Se comprueba que en todos los casos mencionados, las topologías as'ı definidas en E^* le dan de hecho estructura de espacio localmente convexo

([**10**, Ch. III, §3.1, Prop. 1]). El $\mathbb{F}$-espacio vectorial E^*, dotado de la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos acotados de E, se denomina habitualmente *dual fuerte* de E y se denota E^*_β.

9. Teoremas de Ascoli-Arzelà

Nuestro objetivo es formular algunas condiciones necesarias y/o suficientes para la (pre)compacidad en $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathcal{K}})$ y $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathcal{PC}})$; este tipo de resultados se suelen presentar bajo el título que da nombre a esta sección.

9.1. Condiciones de completitud. En las consideraciones que exijan la completitud de espacios funcionales o duales cuando se considera en ellos la topología compacto-abierta es habitual encontrar la noción de k-espacio (y en nuestro caso, la noción asociada de k-grupo), debido a resultados del tipo del que sigue:

PROPOSICIÓN 9.1. *Sean G, H grupos topológicos abelianos tales que G es un k-grupo y H es completo. Entonces $(CHom(G,H),\tau_{\mathcal{K}})$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red de Cauchy en $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathcal{K}})$, es decir,

(9.1)
$$\forall V\in\mathcal{N}_0(H)\quad \forall K\in\mathcal{K}(G)\quad \exists\alpha_0\in A\mid[\alpha,\alpha'\geq\alpha_0,\ x\in K\Rightarrow f_\alpha(x)-f_{\alpha'}(x)\in V].$$

En particular (f_α) es puntualmente de Cauchy y por lo tanto, para todo $x\in G$ existe $f(x)=\lim_{\alpha\in A}f_\alpha(x)\in H$, ya que H es completo. Es trivial que $f:G\to H$ es un homomorfismo de grupos. Pasando al límite en la condición (9.1) y teniendo en cuenta que los entornos de cero cerrados forman base de $\mathcal{N}_0(H)$ deducimos

$$\forall V\in\mathcal{N}_0(H)\quad \forall K\in\mathcal{K}(G)\quad \exists\alpha_0\in A\mid[\alpha\geq\alpha_0,\ x\in K\Rightarrow f_\alpha(x)-f(x)\in V]. \tag{9.2}$$

La condición (9.2) implica claramente que la restricción de f a un subconjunto compacto arbitrario K de G es continua en K, como límite uniforme de continuas. Por ser G k-grupo, tenemos que $f\in\mathrm{CHom}(G,H)$, y podemos leer (9.2) como la condición de convergencia de (f_α) a f en $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathcal{K}})$. □

Si examinamos la demostración del Teor. 9.1, veremos que hemos probado en realidad la siguiente reformulación de su enunciado, que nos resultará útil más adelante:

PROPOSICIÓN 9.2. *Sean G, H grupos topológicos abelianos tales que G es un k-grupo. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red de homomorfismos continuos de G en H, de Cauchy en la topología compacto-abierta y puntualmente convergente a un homomorfismo f. Entonces f es continuo y $f_\alpha\to f$ también en $\tau_{\mathcal{K}}$.*

Un resultado similar para la topología de la convergencia uniforme en precompactos es el que sigue:

PROPOSICIÓN 9.3. *Sean G y H grupos abelianos topológicos. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red equicontinua de homomorfismos de G en H, puntualmente convergente a $f\in Hom(G,H)$. Entonces f es continuo y $f_\alpha\to f$ en $\tau_{\mathcal{PC}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada entorno de cero V en H, existe un entorno de cero U en G tal que $f_\alpha(U) \subset V$ para todo $\alpha \in A$. Si además V es cerrado, $f(x) = \lim_{\alpha\in A} f_\alpha(x) \in V \ \ \forall x \in U$. Teniendo en cuenta que los entornos cerrados de cero forman base de $\mathcal{N}_0(H)$, deducimos que $f \in \mathrm{Hom}(G,H)$ es continuo.

Para demostrar la convergencia en $\tau_{\mathcal{PC}}$, dados un subconjunto precompacto S de G y $V \in \mathcal{N}_0(H)$, tenemos que encontrar $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha - f \in \mathcal{W}(S,V) \ \ \forall \alpha \geq \alpha_0$. Podemos suponer que $f = 0$. Sea $V' \in \mathcal{N}_0(H)$ tal que $V' + V' \subset V$. Existe $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $f_\alpha(U) \subset V'$ para todo $\alpha \in A$. Si F es un subconjunto finito de G tal que $S \subset F + U$, y $f_\alpha(F) \subset V' \ \ \forall \alpha \geq \alpha_0$, se tiene

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow f_\alpha(S) \subset f_\alpha(F) + f_\alpha(U) \subset V' + V' \subset V.$$

□

9.2. Condiciones de precompacidad. Consideremos de nuevo dos grupos abelianos topológicos G y H y una familia no vacía $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de G.

9.4. Diremos que un conjunto $B \subset \mathrm{CHom}(G,H)$ es *equicontinuo en conjuntos de* $\mathfrak{S}$ cuando para todo $S \in \mathfrak{S}$, la familia de aplicaciones $\{f|_S : S \to H\}_{f\in A}$ es equicontinua en S, considerando en S la estructura uniforme inducida por la canónica de G. Equivalentemente, cuando se cumple la siguiente condición:

$$\begin{array}{ll} & \forall S \in \mathfrak{S} \quad \forall x \in S \quad \forall V \in \mathcal{N}_0(H) \quad \exists U \in \mathcal{N}_0(G) \\ \text{tal que} & [x' \in S \cap (x+U),\ f \in B \ \Rightarrow\ f(x-x') \in V.] \end{array}$$

Es inmediato que, si la familia $\mathfrak{S}$ es invariante por traslaciones (es decir, si para todos $x \in G$ y $S \in \mathfrak{S}$, se cumple $x + S \in \mathfrak{S}$), la condición precedente es equivalente a que para todo $S \in \mathfrak{S}$ con $0 \in S$, la familia $\{f|_S : S \to H\}_{f\in A}$ sea equicontinua en 0, es decir,

$$\begin{array}{ll} & \forall S \in \mathfrak{S} \text{ con } 0 \in S \quad \forall V \in \mathcal{N}_0(H) \quad \exists U \in \mathcal{N}_0(G) \\ \text{tal que} & [x \in S \cap U,\ f \in B \ \Rightarrow\ f(x) \in V.] \end{array}$$

Es claro que en particular las familias $\mathfrak{F}(G)$, $\mathcal{PC}(G)$, $\mathcal{K}(G)$, $\{G\}$ son invariantes por traslaciones.

LEMA 9.5. *Sean G y H grupos topológicos abelianos. Sea $\mathfrak{S} = \mathcal{K}(G)$ ó $\mathfrak{S} = \mathcal{PC}(G)$. Sea $B \subset CHom(G,H)$ equicontinuo en conjuntos de $\mathfrak{S}$. Entonces para todos $V \in \mathcal{N}_0(H)$ y $S \in \mathfrak{S}$ existen $F_0 \in \mathfrak{F}(S)$ y $W \in \mathcal{N}_0(H)$ tales que $\mathcal{W}(F_0,W) \cap B \subset \mathcal{W}(S,V)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $W \in \mathcal{N}_0(H)$ tal que $W + W \subset V$. Como $S - S \in \mathfrak{S}$, aplicando el carácter equicontinuo en $x = 0 \in S - S$ de la familia de las restricciones a $S - S$ de los homomorfismos de B, deducimos que existe un $U \in \mathcal{N}_0(H)$ tal que $f((S-S)\cap U) \subset W$ para todo $f \in B$. Sea F_0 un subconjunto finito de S tal que $S \subset F_0 + U$. Para todos $f \in \mathcal{W}(F_0,W) \cap B$ y $s \in S$, ponemos $s = x + u$ con $x \in F_0,\ u \in U \cap (S-S)$ y por lo tanto

$$f(s) = f(x) + f(u) \in W + W \subset V.$$

□

A continuación damos una caracterización de los subconjuntos precompactos de $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathfrak{S}})$, siendo $\mathfrak{S}=\mathcal{K}(G)$ ó $\mathfrak{S}=\mathcal{PC}(G)$:

TEOREMA 9.6. *Sean G y H grupos topológicos abelianos, C un subconjunto de $CHom(G,H)$ y $\mathfrak{S}=\mathcal{K}(G)$ ó $\mathfrak{S}=\mathcal{PC}(G)$. Son equivalentes:*

(i) *C es precompacto en $\tau_{\mathfrak{S}}$.*

(ii) *se verifican las dos condiciones siguientes:*

 (a) *C es equicontinuo en conjuntos de $\mathfrak{S}$.*

 (b) *Para todo $x\in G$, el conjunto $\{f(x) : f\in C\}$ es precompacto en H.*

DEMOSTRACIÓN. (i)$\Rightarrow$(ii): Es sencillo comprobar que la condición (ii)(b) es equivalente a la precompacidad de C en $\tau_{\mathfrak{F}}$; luego (i)$\Rightarrow$(ii)(b). Veamos que (i)$\Rightarrow$(ii)(a): Basta demostrar (9.4) que para todo conjunto $S\in\mathfrak{S}$ tal que $0\in S$ y todo $V\in\mathcal{N}_0(H)$ existe $U\in\mathcal{N}_0(G)$ tal que

$$f(S\cap U)\subset V \quad \forall f\in C.$$

Sea $V'\in\mathcal{N}_0(H)$ tal que $V'+V'\subset V$. Como C es precompacto en $\tau_{\mathfrak{S}}$, existen $f_1,\dots f_N\in C$ tales que $C\subset\{f_1,\dots,f_N\}+\mathcal{W}(S,V')$. Sea $U\in\mathcal{N}_0(G)$ tal que $f_k(U)\subset V'$ para todo $k\in\{1,\dots,N\}$. Dado $f\in C$, si $n\in\{1\dots,N\}$ es tal que $(f-f_n)(S)\subset V'$, se tiene

$$\begin{aligned} f(S\cap U) &\subset (f-f_n)(S\cap U)+f_n(S\cap U)\\ \subset\quad & (f-f_n)(S)+f_n(U)\subset V'+V'\subset V. \end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i): Tenemos que demostrar que para todos $S\in\mathfrak{S}$ y $V\in\mathcal{N}_0(H)$ existe un subconjunto finito $F\subset C$ tal que $C\subset F+\mathcal{W}(S,V)$. Aplicamos el Lema 9.5 tomando como B el conjunto $C-C$, que es claramente equicontinuo en conjuntos de $\mathfrak{S}$. Sean $F_0\in\mathfrak{F}(G)$ y $W\in\mathcal{N}_0(H)$ tales que $\mathcal{W}(F_0,W)\cap(C-C)\subset\mathcal{W}(S,V)$. Como por (ii)(b) C es $\tau_{\mathfrak{F}}$-precompacto, existe $F\in\mathfrak{F}(C)$ tal que $C\subset F+\mathcal{W}(F_0,W)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} C &\subset \bigcup_{f\in F}(f+\mathcal{W}(F_0,W))\cap C\\ &\subset \bigcup_{f\in F} f+\mathcal{W}(S,V)=F+\mathcal{W}(S,V) \end{aligned}$$

y C es $\tau_{\mathfrak{S}}$-precompacto.

□

9.7. Si examinamos la demostración de (i)$\Rightarrow$(ii)(a) en el Teorema 9.6, veremos que no hemos hecho intervenir el carácter (pre)compacto del conjunto S escogido. Podemos utilizar un razonamiento análogo para probar que *si la familia $\mathfrak{S}\subset\mathcal{P}(G)$ es invariante por traslaciones, entonces cualquier subconjunto de $CHom(G,H)$ que sea precompacto en la topología $\tau_{\mathfrak{S}}$ es equicontinuo en los conjuntos de $\mathfrak{S}$.*

Un caso en el que podemos asegurar la equicontinuidad global es el siguiente:

TEOREMA 9.8. *Sean G y H grupos abelianos topológicos, y supongamos que G es un k-grupo. Sea C subconjunto precompacto de $(CHom(G,H),\tau_{\mathcal{K}})$. Entonces C es equicontinuo en G.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos en el producto H^C la topología $\mathcal{T}$ de la convergencia uniforme en C, es decir (Prop. 8.1), la que admite como base de entornos de cero la familia formada por los conjuntos V^C, con $V \in \mathcal{N}_0(H)$. El homomorfismo de grupos abelianos topológicos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G & \to & (H^C, \mathcal{T}) \\ & x & \mapsto & (f(x))_{f\in C} \end{array}$$

es continuo si y sólo si C es equicontinuo en G. Por ser G un k-grupo, basta que demostremos que ϕ es k-continuo, pero esto es cierto ya que de acuerdo con el Teor 9.6, C es equicontinuo en compactos de G.

□

9.3. Condiciones de compacidad. A continuación nos ocuparemos en modificar la caracterización de la precompacidad en $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathfrak{S}})$ dada en el Teor. 9.6 con el fin de llegar a condiciones suficientes para la compacidad del conjunto C. Recordemos que un espacio uniforme es compacto si y sólo si es precompacto y completo.

TEOREMA 9.9. *Sea G un k-grupo y H un grupo abeliano topológico. Sea C un subconjunto de $CHom(G,H)$ cerrado en $\tau_{\mathcal{K}}$, equicontinuo en compactos de G y tal que el conjunto $\{f(x) : f \in C\}$ es relativamente compacto en H para todo $x \in G$. Entonces C es compacto en $\tau_{\mathcal{K}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 9.6, basta demostrar que C es completo. Si $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una $\tau_{\mathcal{K}}$-red de Cauchy en C, en particular es puntualmente convergente ya que el conjunto $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ es relativamente compacto, por hipótesis. La Prop. 9.2 implica que el límite puntual f de (f_α) es también el límite de (f_α) en $(\mathrm{CHom}(G,H),\tau_{\mathcal{K}})$, y $f \in C$ por ser C $\tau_{\mathcal{K}}$-cerrado. □

TEOREMA 9.10. *Sean G y H grupos abelianos topológicos, y C un subconjunto equicontinuo de $CHom(G,H)$, cerrado en $\tau_{\mathcal{PC}}$ y tal que el conjunto $\{f(x) : f \in C\}$ es relativamente compacto en H para todo $x \in G$. Entonces C es compacto en $\tau_{\mathcal{PC}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Análogamente al Teor. 9.9, el Teorema 9.6 garantiza que C es precompacto en $\tau_{\mathcal{PC}}$. La demostración de que C es completo es similar a la del Teor. 9.9, aplicando la Prop. 9.3 en vez de la 9.2. □

El siguiente corolario del Teor. 9.10 es la Prop. 3.5 de [**4**]:

COROLARIO 9.11. *Sea G un grupo abeliano topológico sin subgrupos abiertos propios. Sea H un n-grupo de Hausdorff y localmente compacto. Para todo $V \in \mathcal{N}_0(G)$ distinguido y compacto y todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$, se verifica que $\mathcal{W}(U,V)$ es $\tau_{\mathcal{PC}}$-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y aplicamos el Teorema 9.10 al subconjunto $C = \mathcal{W}(U,V)$, que es equicontinuo (Prop. 6.2(b)) y es claramente cerrado en $\tau_{\mathcal{PC}}$ (de hecho en $\tau_{\mathcal{F}}$). Veamos que $\{f(x) : f \in \mathcal{W}(U,V)\}$ es relativamente compacto en H para todo $x \in G$. Se verifica $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U + \overset{n}{\ldots} + U$ (en caso contrario, para cualquier $W \in \mathcal{N}_0(G)$ contenido en U y simétrico el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W + \overset{n}{\ldots} + W$ sería un subgrupo abierto propio de G). Por lo tanto, fijado un $x \in G$, existe un $n \in \mathbb{N}$ con $x \in U + \overset{n}{\ldots} + U$ y el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{W}(U,V)\}$ está contenido en el compacto $V + \overset{n}{\ldots} + V$. □

NOTA 9.12. Como es sabido, la relación entre la equicontinuidad y la (pre)compacidad en la topología compacto-abierta se puede enunciar para aplicaciones continuas generales entre un espacio topológico y un espacio uniforme. El aprovechamiento de la estructura de grupo topológico permite simplificar las demostraciones y prescindir de algunas hipótesis. El Teor. 9.6 es en este sentido una adaptación de [**11**, Ch. 10, §2.5, Th. 2]. El Teor. 9.8 para subconjuntos compactos de $(\mathrm{CHom}(G,\mathbb{T}), \tau_{\mathcal{K}})$, se debe a Noble ([**65**, Th. 2.3]) y se enuncia habitualmente como una condición para que el homomorfismo canónico de G en su grupo bidual sea continuo (cf. Teor. 13.41). Condiciones para la compacidad en $\tau_{\mathcal{K}}$ semejantes a las recogidas en el Teor. 9.9 se enuncian en multitud de referencias, para espacios generales y exigiendo normalmente la condición de k-espacio en el dominio; éste es el resultado conocido propiamente como "teorema de Ascoli" (ver p. ej. [**55**, 7.18], [**6**, Th. 3]).

10. Teoremas del grafo cerrado y de la aplicación abierta

"Teorema del grafo cerrado" y "teorema de la aplicación abierta" son los nombres bajo los que se enuncian diversos resultados que, como es sabido, dan condiciones para deducir la continuidad o el carácter abierto de aplicaciones lineales (en el caso de los espacios vectoriales topológicos) u homomorfismos (en el caso de grupos topológicos) asumiendo restricciones en la numerabilidad y la categoría de las topologías de dominio y rango. Intentaremos dar formulaciones lo más generales posible, dentro del marco de los grupos topológicos abelianos, aunque, como el lector advertirá, las demostraciones son fácilmente adaptables al caso no abeliano e incluso (ver Nota 10.7) el núcleo del problema se puede enunciar y resolver en espacios uniformes.

DEFINICIÓN 10.1. Sean G y H grupos topológicos abelianos. Se dice que un homomorfismo $\varphi : G \to H$ es *casi continuo* cuando para todo $V \in \mathcal{N}_0(H)$ se tiene $\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V)) \in \mathcal{N}_0(G)$. Se dice que φ es *casi abierto* cuando para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ se tiene $\mathrm{Cl}(\varphi(U)) \in \mathcal{N}_0(H)$.

LEMA 10.2. *Sean G y H grupos topológicos abelianos y $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Se tiene*

(a) *φ es casi continuo si y sólo si* $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V)) \neq \phi \quad \forall V \in \mathcal{N}_0(H)$.
(b) *φ es casi abierto si y sólo si* $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\varphi(U)) \neq \phi \quad \forall U \in \mathcal{N}_0(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos (a); (b) es completamente análogo. Si φ es casi continuo, para todo $V \in \mathcal{N}_0(H)$, $0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V)) \neq \phi$. Inversamente, dado $V \in \mathcal{N}_0(H)$ fijamos $V' \in \mathcal{N}_0(H)$ tal que $V' - V' \subset V$; por hipótesis $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V')) \neq \phi$ y por lo tanto existen $x \in G$, $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tales que $x + U \subset \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V'))$. Se tiene así

$$\begin{aligned} U - U &= (x+U) - (x+U) \subset \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V')) - \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V')) \\ &\subset \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V') - \varphi^{-1}(V')) = \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V' - V')) \subset \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V)); \end{aligned}$$

luego $\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V)) \in \mathcal{N}_0(G)$. □

LEMA 10.3. *Sean G y H grupos topológicos abelianos, H metrizable. Sea d una métrica invariante en H asociada a su topología. Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos casi continuo entonces, fijados $A \subset H$, $x \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(A))$ y $\delta > 0$, existe un subconjunto $B \subset H$ con $d-$diámetro menor o igual que δ y tal que $A \cap B \neq \phi$, $x \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(B))$.*

DEMOSTRACIÓN. Como φ es casi continua, existe $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $V \subset \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(B_d(0,\delta/2)))$. Como $x \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(A)) \subset \varphi^{-1}(A) + V$, existe $w \in \varphi^{-1}(A)$ tal que $x - w \in V$. Sea $w' \in A$ tal que $\varphi(w') = w$. Podemos tomar $B = B_d(w', \delta/2)$, ya que $w' \in A \cap B$ y

$$\begin{aligned} x \in w + V &\subset w + \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(B_d(0,\delta/2))) = \mathrm{Cl}(w + \varphi^{-1}(B_d(0,\delta/2))) \\ &= \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(w' + B_d(0,\delta/2))) = \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(B_d(w',\delta/2))). \end{aligned}$$

□

De una forma análoga se demuestra el siguiente resultado:

LEMA 10.4. *Sean G y H grupos topológicos abelianos, G metrizable. Sea d una métrica invariante en G asociada a su topología. Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos casi abierto entonces, fijados $A \subset G$, $x \in \mathrm{Cl}(\varphi(A))$ y $\delta > 0$, existe un subconjunto $B \subset G$ con $d-$diámetro menor o igual que δ y tal que $A \cap B \neq \phi$, $x \in \mathrm{Cl}(\varphi(B))$.*

PROPOSICIÓN 10.5. *Sean G y H grupos topológicos abelianos, H metrizable y completo. Sea d una métrica invariante en H asociada a su topología. Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos casi continuo y con grafo cerrado, entonces para todos $r > 0$, $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(B_d(0,r))) \subset \varphi^{-1}(B_d(0, r+\varepsilon))$$

y en particular φ es continuo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(B_d(0,r)))$. Llamamos $A_0 = B_d(0,r)$. Por el Lema 10.3 existe un subconjunto $A_1 \subset H$ de $d-$diámetro menor o igual que $\varepsilon \cdot 2^{-1}$ tal que $v \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(A_1))$, $A_0 \cap A_1 \neq \phi$. Aplicamos de nuevo el Lema al conjunto A_1, y así sucesivamente, construyendo una sucesión de subconjuntos de H, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, el $d-$diámetro de A_n es menor o igual que $\varepsilon \cdot 2^{-n}$, $v \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(A_n))$, $A_{n-1} \cap A_n \neq \phi$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ escogemos un $a_n \in A_{n-1} \cap A_n$, es inmediato que la serie $\sum d(a_n, a_{n+1})$ es convergente y por lo tanto la sucesión (a_n) es de Cauchy. Como H es completo, existe $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Veamos que $a \in B_d(0, r+\varepsilon)$ y que $u(v) = a$, con lo que habremos terminado la demostración. Lo primero es consecuencia de que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad d(0, a_n) &\leq d(0, a_1) + d(a_1, a_2) + \cdots + d(a_{n-1}, a_n) \\ &\leq d(0, a_1) + \varepsilon \cdot 2^{-1} + \cdots + \varepsilon \cdot 2^{-n} \leq d(0, a_1) + \varepsilon \\ \Rightarrow d(0, a) &< r + \varepsilon,\end{aligned}$$

y para demostrar que $u(v) = a$, dado que por hipótesis el grafo de φ es cerrado, es suficiente probar que (v, a) está en la adherencia del grafo de φ, es decir, que para todo Z entorno de v en G y todo W entorno de a en H existe un $v' \in Z$ tal que $u(v') \in W$. Esta condición es equivalente a la de que $v \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(W))$ para todo W entorno de a en Y, pero es inmediato comprobar que un tal W contiene algún conjunto A_m, y por lo tanto $v \in \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(A_m)) \subset \mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(W))$. □

Mediante una sencilla adaptación de la demostración anterior y con ayuda del Lema 10.4, se demuestra la siguiente

PROPOSICIÓN 10.6. *Sean G y H grupos topológicos abelianos, G metrizable y completo. Sea d una métrica invariante en G asociada a su topología. Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos casi abierto y con grafo cerrado, entonces para todos $r > 0$, $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\mathrm{Cl}(\varphi(B_d(0, r))) \subset \varphi(B_d(0, r + \varepsilon))$$

y en particular φ es abierto.

NOTA 10.7. Las Proposiciones 10.5 y 10.6 son adaptaciones a los casos que nos interesan de resultados válidos en contextos mucho más generales; nuestra referencia ha sido [**55**, 6.36], donde lo que en nuestro caso es el grafo del homomorfismo φ o el de la correspondencia φ^{-1} se sustituye por un subconjunto cerrado del producto de dos espacios uniformes que cumple una determinada propiedad de continuidad, que generaliza el carácter casi continuo o casi abierto de φ. De este modo, la estructura de grupo no es esencial, aunque sí el carácter metrizable y completo de uno de los dos espacios.

Para enunciar las versiones más frecuentemente utilizadas de los teoremas de la aplicación abierta y el grafo cerrado, necesitamos fijar condiciones en las que sea posible asegurar el carácter casi continuo o casi abierto de φ, para después deducir la continuidad o el carácter abierto de los resultados precedentes.

PROPOSICIÓN 10.8. *Sean G y H grupos topológicos abelianos. Si G es de segunda categoría y $\varphi(G)$ es de Lindelöf (o bien separable), cualquier homomorfismo de grupos $\varphi : G \to H$ es casi continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $V \in \mathcal{N}_0(H)$ abierto. Se tiene $\varphi(G) \subset \bigcup_{x \in G} \varphi(x) + V$ y de la correspondiente propiedad de numerabilidad asumida en $\varphi(G)$ se deduce que existe una sucesión (x_n) en G tal que $\varphi(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) + V$. Entonces $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n + \varphi^{-1}(V)$. Por ser G de segunda categoría existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(x_{n_0} + \varphi^{-1}(V)) \neq \phi$, de donde $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\varphi^{-1}(V)) \neq \phi$. Por el Lema 10.2(a), φ es casi continuo. □

NOTA 10.9. La conclusión de la Proposición 10.8 es cierta bajo las hipótesis de G de segunda categoría y H de Lindelöf. En efecto, si $\varphi(G)$ es denso en H podemos escribir en la demostración anterior $H = \bigcup_{x \in G} \varphi(x) + V$ y aplicar la hipótesis sobre H; en otro caso, definimos

$$\varphi_0 : G \to \mathrm{Cl}(\varphi(G)), \quad \varphi_0(x) = \varphi(x);$$

como ser un espacio de Lindelöf es una propiedad hereditaria para subespacios cerrados, reducimos así este caso al anterior, teniendo en cuenta que si φ_0 es casi continuo, también lo es φ.

De forma análoga a la de la Proposición 10.8 se demuestra

PROPOSICIÓN 10.10. *Sean G y H grupos topológicos abelianos. Si G es de Lindelöf (o bien separable) y H es de segunda categoría, cualquier homomorfismo de grupos sobreyectivo $\varphi : G \to H$ es casi abierto.*

Reuniendo toda esta información podemos enunciar los siguientes resultados:

TEOREMA 10.11. *(Teorema del grafo cerrado) Sean G y H grupos topológicos abelianos, $\varphi : G \to H$ homomorfismo de grupos con grafo cerrado. Si H es metrizable y completo, G es de segunda categoría y $\varphi(G)$ (o bien H) es de Lindelöf, entonces φ es continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Prop. 10.8, y en su caso la Nota 10.9, φ es casi continuo. Por la Prop. 10.5, es continuo. Notar que en espacios metrizables es equivalente ser separable a ser un espacio de Lindelöf. □

TEOREMA 10.12. *(Teorema de la aplicación abierta) Sean G y H grupos topológicos abelianos. Si G es metrizable, separable y completo y H es de segunda categoría, entonces cualquier homomorfismo sobreyectivo y continuo $\varphi : G \to H$ es además abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Prop. 10.10, φ es casi abierta. Por la Prop. 10.6, es abierta. Notar que aunque habitualmente se pide la continuidad de φ, basta suponer que su grafo es cerrado. □

NOTA 10.13. Aunque en la demostración de los resultados de las Props. 10.5 y 10.6 juega un papel fundamental el carácter metrizable y completo de rango y dominio, respectivamente, se pueden demostrar resultados similares sustituyendo esta hipótesis por la de compacidad local, y deducir así teoremas del grafo cerrado y de la aplicación abierta en este contexto ([**41**, Th. 5.29], [**61**, Th. 3]).

El siguiente "principio de equicontinuidad", en la línea del Teorema de Banach-Steinhaus para espacios vectoriales topológicos ([**50**, 11.1.1], sirve como ilustración de las aplicaciones de los resultados de esta sección (cf. Teor. 9.8):

TEOREMA 10.14. *Sean G y H grupos abelianos topológicos, tales que G es de segunda categoría y H es metrizable y separable. Sea B un subconjunto de $CHom(G, H)$ compacto y metrizable en la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$. Entonces B es equicontinuo.*

Demostración. Suponemos primero que H es completo. Tomando en B la topología $\tau_{\mathfrak{F}}$ y en H la de partida, consideramos el subgrupo $C(B,H)$ de H^B formado por las aplicaciones continuas $f : B \to H$, dotado de la topología de la convergencia uniforme. $C(B,H)$ es metrizable (si d es una métrica que genera la topología de H, la expresión $d'(f,g) = \sup_{\phi\in B} d(f(\phi), g(\phi))$ define una métrica que genera la topología de la convergencia uniforme en $C(B,H)$), completo (la demostración es estándar; ver p. ej. [**11**, Ch. X, §1.6, Cor. 1 to Theor. 2]) y además es separable ([**11**, Ch. X, §3.3, Theor. 1]). Si definimos el homomorfismo de grupos

$$u : G \to C(B,H), \quad u(x)(\phi) = \phi(x) \;\; \forall x \in G \;\; \forall \phi \in B,$$

es inmediato que u tiene el grafo cerrado. Por el Teorema 10.11, u es continua, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U \in \mathcal{N}_0(G), \quad [x \in U, \varphi \in B \Rightarrow d(u(x)(\varphi), 0) = d(\varphi(x), 0) \le \varepsilon]$$

que es la condición de equicontinuidad del conjunto B.

En el caso de H no necesariamente completo, podemos considerar B como un subconjunto compacto y metrizable de $(\mathrm{CHom}(G, \widetilde{H}), \tau_{\mathcal{F}})$ (donde $\widetilde{H}$ denota la compleción de H), ya que el homomorfismo natural

$$(\mathrm{CHom}(G,H), \tau_{\mathcal{F}}) \to (\mathrm{CHom}(G, \widetilde{H}), \tau_{\mathcal{F}})$$

es un encajamiento topológico. Se deduce del razonamiento precedente que B es equicontinuo como subconjunto de $\mathrm{CHom}(G, \widetilde{H})$ y por lo tanto, como subconjunto de $\mathrm{CHom}(G,H)$. □

Nota 10.15. Un resultado similar al Teor. 10.14 es el Theor. 1.5 de [**17**], para cuya validez no es necesaria la separabilidad de H pero sí la metrizabilidad de G y el carácter hereditario, en cierto sentido, de la propiedad de categoría asumida en este grupo. Cf. también las referencias citadas en la Rem. 1 de este mismo artículo.

11. Topologías iniciales y finales

En Topología general es conocida la construcción de topologías iniciales y finales asociadas a familias de aplicaciones ([**11**, Ch. 1, §2.3, §2.4]). Si planteamos el problema en nuestro contexto, surge la cuestión de si la topología inicial o final correspondiente a una familia de homomorfismos entre grupos abelianos topológicos será o no una topología de grupo. La respuesta resulta ser positiva en el caso de las topologías iniciales (Prop. 11.1) y negativa en el de las finales (Nota 11.14): se puede hablar de una topología de grupo en G final con respecto a una familia de homomorfismos $v_i : G_i \to G$, donde los G_i son grupos abelianos topológicos, pero esta topología no coincide en general con la final que le corresponde a G en la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas.

11.1. Topologías iniciales.

Proposición 11.1. *Sea G un grupo abeliano, $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos y $u_i : G \to G_i$ homomorfismo de grupos, para todo $i \in I$. Existe en G una* *topología $\mathcal{T}_0$ que hace continuos todos los u_i y es la menos fina con esta propiedad. Además $\mathcal{T}_0$ es una topología de grupo y los conjuntos de la forma*

$$u_i^{-1}(U_i), \quad U_i \in \mathcal{N}_0(G_i), \quad i \in I$$

forman una subbase de entornos de cero para $\mathcal{T}_0$.

Demostración. La comprobación de que los conjuntos $u_i^{-1}(U_i)$ forman una subbase de entornos de cero para una topología de grupo $\mathcal{T}_0$ es inmediata (1.9), y es claro que $\mathcal{T}_0$ hace continuos los homomorfismos u_i. Si ahora τ es una topología en G tal que los homomorfismos $u_i : G_i \to (G, \tau)$ son continuos, fijados $x \in G$, $i \in I$ y $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ existe U'_x τ-entorno de x con $u_i(U'_x) \subset u_i(x) + U_i$; de aquí, teniendo en cuenta que u_i es un homomorfismo, se deduce que $U'_x \subset x + u_i^{-1}(U_i)$. Como los conjuntos $x + u_i^{-1}(U_i)$, $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$, $i \in I$ forman una subbase de entornos de x para τ, y x era arbitrario, hemos probado que $\mathcal{T}_0 \leq \tau$. $\square$

La topología $\mathcal{T}_0$ definida en la Proposición 11.1 se llama *topología inicial* asociada a la familia de homomorfismos $u_i : G \to G_i$. De la descripción de una subbase de entornos de cero para $\mathcal{T}_0$ dada arriba se deduce inmediatamente las siguientes propiedades:

Proposición 11.2. *Con las notaciones de la Prop. 11.1,*

(a) *una red x_γ contenida en G converge a x en la topología $\mathcal{T}_0$ si y sólo si $u_i(x_\gamma)$ converge a $u_i(x)$ en G_i para todo $i \in I$.*

(b) *dado cualquier grupo abeliano topológico H y cualquier homomorfismo de grupos, $u : H \to G$, u es continuo con respecto a las topologías τ_H en H y $\mathcal{T}_0$ en G si y sólo si $u_i \circ u$ es continuo para todo $i \in I$.*

Seguidamente veremos algunos casos particulares de interés:

11.3. Sea (G, τ_G) un grupo abeliano topológico y H un subgrupo de G. La topología inducida por τ_G en H es la topología inicial en el grupo abeliano H asociada a la familia unitaria de homomorfismos $\{i : H \to (G, \tau_G)\}$, donde i indica la inclusión.

11.4. Sea G un grupo abeliano y $\{\tau_i : i \in I\}$ una familia de topologías de grupo en G. La topología inicial asociada a la familia de homomorfismos $\mathrm{id}_G : G \to (G, \tau_i)$, es decir, la menor topología entre las mayores o iguales que todas las topologías τ_i, es una topología de grupo que se suele denominar *supremo* de las τ_i ([**11**, Ch. 1, §2.3, Example 1]). Además, si $\mathcal{U}_i$ es una base de entornos de cero para la topología τ_i para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ es una subbase de entornos de cero para la topología supremo de las τ_i.

11.5. Sean G_i grupos abelianos topológicos ($i \in I$) y sea G el grupo abeliano producto de los G_i, con la operación definida puntualmente, de la manera habitual. La *topología producto* en G es la topología inicial en G con respecto a las proyecciones $p_i : G \to G_i$, $p_i(x) = x_i$; por lo tanto, los conjuntos de la forma

$$p_i^{-1}(U_i), \quad U_i \in \mathcal{N}_0(G_i), \quad i \in I$$

forman una subbase de entornos de cero en G para esta topología.

11.6. Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo no trivialmente valuado. La *topología débil* en E, que denotaremos por $\sigma(E, E^*)$, se puede definir como la topología inicial en el grupo abeliano subyacente a E asociada a la familia de homomorfismos de grupos $E^* \subset \mathrm{Hom}(E, \mathbb{F})$. Teniendo en cuenta la Prop. 11.1, es inmediato que los conjuntos de la forma

$$\{x \in E : |x^*(x)| \leq 1\}, \quad x^* \in E^*$$

forman una subbase de entornos de cero para $\sigma(E, E^*)$. $(E, \sigma(E, E^*))$ es de hecho un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico localmente convexo, si el cuerpo base es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

11.7. Sea G un grupo abeliano y H un grupo abeliano topológico. Sea B un subgrupo de $\mathrm{Hom}(G, H)$. La topología $\tau_{\mathfrak{F}}$ en B (Sec. 8) es la topología inicial con respecto a las evaluaciones en elementos de G,

$$\begin{array}{ccc} B & \to & H \\ f & \mapsto & f(x), \end{array} \qquad x \in G.$$

11.2. Topologías finales.

PROPOSICIÓN 11.8. *Sea G un grupo abeliano, $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos y $v_i : G_i \to G$ homomorfismo de grupos, para todo $i \in I$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de topologías de grupo en G que hacen continuos todos los homomorfismos v_i, $i \in I$. El supremo $\mathcal{T}_f$ de la familia $\mathcal{F}$ (11.4) pertenece a $\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un entorno de cero en $(G, \mathcal{T}_f)$. De 11.4 deducimos que existen topologías de grupo $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ en G tales que $v_i : G_i \to (G, \mathcal{T}_k)$ es continuo para todos $i \in I$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$, y entornos $V_k \in \mathcal{N}_0(G, \mathcal{T}_k)$ para $k \in \{1, \ldots, n\}$ con $V_1 \cap \cdots \cap V_n \subset V$. Claramente el supremo de la subfamilia finita $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}$ pertenece a $\mathcal{F}$ y por lo tanto, para todo $i \in I$ existe $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ con $v_i(U_i) \subset V_1 \cap \cdots \cap V_n \subset V$. □

La topología $\mathcal{T}_f$ definida en la Proposición 11.8 se llama *topología final* asociada a la familia de homomorfismos $v_i : G_i \to G$. $\mathcal{T}_f$ cumple la propiedad dual de la enunciada en la Prop. 11.2(b) para $\mathcal{T}_0$:

PROPOSICIÓN 11.9. *Con las notaciones de la Prop. 11.8, dado cualquier grupo abeliano topológico H y cualquier homomorfismo de grupos, $v : G \to H$, v es continuo con respecto a las topologías $\mathcal{T}_f$ en G y τ_H en H si y sólo si $v \circ v_i$ es continuo para todo $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si v es continuo también lo es $v \circ v_i$ para todo $i \in I$. Inversamente, supongamos que $v \circ v_i$ es continuo para todo $i \in I$, y sea $\mathcal{T}$ la topología inicial en G con respecto al homomorfismo $v : G \to (H, \tau_H)$. Como $v \circ v_i$ es continuo para todo $i \in I$, los homomorfismos $v_i : G_i \to (G, \mathcal{T})$ son continuos (Prop. 11.2(b)), luego, por definición de la topología final, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$. Por lo tanto $v : (G, \mathcal{T}_f) \to H$ es continuo. □

PROPOSICIÓN 11.10. *Con las notaciones de la Prop. 11.8, si* $\mathcal{U}_i$ *es una base de entornos de cero en* G_i *para todo* $i \in I$, *y definimos, para cada* $\mathsf{U} = (U_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$, *el subconjunto de* G

$$\mathsf{U}_f := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \bigcup_{i\in I} v_i(U_{i,n}) = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_N)\in I^N} \sum_{n=1}^{N} v_{i_n}(U_{i_n,n}),$$

entonces $\{\mathsf{U}_f : \mathsf{U} = (U_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}\}$ *es una base de entornos de cero en* G *para* $\mathcal{T}_f$.

DEMOSTRACIÓN. La definición de los conjuntos U_f se puede reformular así: fijada una familia de sucesiones de entornos $(U_{i,n})$, un $y \in G$ pertenece a U_f si y sólo si existen un número natural N e índices $i_1, \ldots, i_N$ tales que y se puede expresar como $y = v_{i_1}(x_1) + \cdots + v_{i_N}(x_N)$, siendo $x_n \in U_{i_n,n}$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$.

De los axiomas de base de entornos para una topología de grupo (1.8) el único de comprobación no trivial es el que en nuestro caso exige que para todo $\mathsf{U} = (U_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$ exista $\mathsf{V} = (V_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$ con $\mathsf{V}_f + \mathsf{V}_f \subset \mathsf{U}_f$. Fijados los entornos $U_{i,n}$, tomamos para cada $i \in I$ y $n \in \mathbb{N}$ un $V_{i,n} \in \mathcal{U}_i$ tal que $V_{i,n} \subset U_{i,2n-1} \cap U_{i,2n}$. Dados y e y' elementos de V_f, se tiene

$$\begin{aligned} &\exists\, i_1, \ldots, i_N \in I \ \text{ tales que } \ y = v_{i_1}(x_1) + \cdots + v_{i_N}(x_N),\ x_k \in V_{i_k,k} \\ &\exists\, i'_1, \ldots, i'_{N'} \in I \ \text{ tales que } \ y' = v_{i'_1}(x'_1) + \cdots + v_{i'_{N'}}(x'_{N'}),\ x'_l \in V_{i'_l,l}. \end{aligned}$$

Podemos suponer que $N = N'$ añadiendo ceros si es necesario. Tenemos así

$$y + y' = v_{i_1}(x_1) + v_{i'_1}(x'_1) + \cdots + v_{i_N}(x_N) + v_{i'_{N'}}(x'_{N'})$$

siendo $x_k \in V_{i_k,k} \subset U_{i_k,2k-1},\ x'_l \in V_{i'_l,l} \subset U_{i_l,2l}$. Podemos renombrar los índices obteniendo

$$y + y' = \sum_{n=1}^{2N} v_{j_n}(z_n), \qquad z_n \in U_{j_n,n}$$

y por lo tanto $y + y' \in \mathsf{U}_f$.

Es claro que $\mathcal{T}_f$ hace continuos los homomorfismos v_i: dado $\mathsf{U} = (U_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$, $v_j(U_{j,1}) \subset \mathsf{U}_f$ para todo $j \in I$. Sea ahora τ topología de grupo en G que hace continuos los homomorfismos v_i. Dado W τ-entorno de cero en G, fijamos una sucesión $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de τ-entornos de cero tales que $W_1 + \cdots + W_n \subset W$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (se construye inductivamente partiendo de W_1 tal que $W_1 + W_1 \subset W$, $W_2 + W_2 \subset W_1$, etc.); basta encontrar $U_{i,n} \in \mathcal{U}_i$ tales que $v_i(U_{i,n}) \subset W_n$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I$. Se tiene así $\mathsf{U}_f \subset W$.

□

La topología $\mathcal{T}_f$ puede definirse mediante una base de entornos de cero alternativa, que cumple que para cada x en el entorno, existe una descomposición asociada a éste en la que cada índice i aparece una sola vez:

PROPOSICIÓN 11.11. *Con las notaciones precedentes, los subconjuntos de G*

$$\mathsf{U}'_f = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{(i_1,\dots,i_N)\in I^N \\ i_j\neq i_k \ si\ j\neq k}} \sum_{n=1}^{N} v_{i_n}(U_{i_n,n}), \qquad \mathsf{U}=(U_{i,n})\in\prod_{i\in I}\mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$$

forman una base de entornos de cero en G para la topología $\mathcal{T}_f$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que para todo $\mathsf{U}=(U_{i,n})\in\prod_{i\in I}\mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$ se cumple $\mathsf{U}'_f\subset\mathsf{U}_f$. Inversamente, dado $\mathsf{U}=(U_{i,n})\in\prod_{i\in I}\mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$, es posible encontrar para cada $i\in I$ una sucesión $(V_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de entornos de cero en G_i tal que para todos $n,\ m\in\mathbb{N}$ se cumple

$$V_{i,n}+V_{i,n+1}+\cdots+V_{i,n+m}\subset U_{i,n}.$$

Comprobemos que $\mathsf{V}_f\subset\mathsf{U}'_f$: Si $x\in\mathsf{V}_f$, existen un $N\in\mathbb{N}$, índices $i_1,i_2,\dots,i_N$ en I y elementos $x_n\in V_{i_n,n}$ $(n\in\{1,\dots,N\})$ tales que

$$x=v_{i_1}(x_1)+v_{i_2}(x_2)+\cdots+v_{i_N}(x_N).$$

Sea $\Delta=\{i_n : n\in\{1,\dots,N\}\}\subset I$, y para cada $i\in\Delta$, sea m_i el mínimo de los $n\in\{1,\dots,N\}$ tales que $i_n=i$. Se tiene

$$x=\sum_{n=1}^{N}v_{i_n}(x_n)=\sum_{i\in\Delta}\sum_{i_n=i}v_{i_n}(x_n)=\sum_{i\in\Delta}v_i(\sum_{i_n=i}x_n)$$

pero $\sum_{i_n=i}x_n\in V_{i,m_i}+V_{i,m_i+1}+\cdots+V_{i,N}\subset U_{i,m_i}$ y dado que $m_i\neq m_j$ para $i\neq j$ en Δ, es claro que $x\in\mathsf{U}'_f$. □

Algunas de las construcciones de topologías finales que aparecen con mayor frecuencia son:

11.12. Sea (G,τ_G) un grupo abeliano topológico y H un subgrupo de G. La topología cociente en G/H es la topología final en el grupo abeliano G/H asociada a la familia unitaria de homomorfismos $\{\varphi:(G,\tau_G)\to G/H\}$.

11.13. Sea G un grupo abeliano y $\{\tau_i : i\in I\}$ una familia de topologías de grupo en G. A la topología final asociada a la familia de homomorfismos $\mathrm{id}_G:(G,\tau_i)\to G$, es decir, a la mayor topología *de grupo* entre las menores o iguales que todas las topologías τ_i, la denominaremos *ínfimo* de las τ_i.

NOTA 11.14. Dado un conjunto X y familias de espacios topológicos $\{X_i : i\in I\}$ y de aplicaciones $g_i : X_i\to X$, la topología $\mathcal{T}$ más fina en X que hace continuas las aplicaciones g_i es igual a la familia de subconjuntos de X formada por aquellos U tales que $g_i^{-1}(U)$ es abierto en X_i para todo $i\in I$ ([**11**, Ch. 1, §2.4, Prop. 6]). En particular la mayor topología de entre las menores o iguales a todas las de una familia dada, definidas sobre X (lo que en Topología General se denomina *ínfimo* de las topologías de la familia, [**11**, Ch. I, §2.4, Example 2]), es simplemente la intersección $\mathcal{T}$ de todas ellas. Esta caracterización contrasta con la complicada descripción de la topología $\mathcal{T}_f$. Como muestra el siguiente ejemplo, en general $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_f$ son diferentes, para la misma familia de homomorfismos $v_i : G_i \to G$, e incluso restringiéndose al caso de I finito. Otros ejemplos pueden encontrarse en [**50**, 5.7.G], [**25**, Exercises 2.10.21, 2.10.22].

EJEMPLO 11.15. [**24**, Example 2.9 (a)]

- *Si τ y τ' son dos topologías de grupo definidas en un grupo abeliano G, el ínfimo de τ y τ' (11.13) se puede definir mediante la siguiente base de entornos de cero:*
$$\{U+V : U \in \mathcal{N}_0(G,\tau),\ V \in \mathcal{N}_0(G,\tau')\}$$
(la demostración es directa, aunque también se deduce de la Prop. 11.16).
- *En el grupo abeliano $\mathbb{Z}$ la topología p-ádica τ_p, para cada número natural primo p, se define como la topología de grupo en $\mathbb{Z}$ que admite la familia de conjuntos $p^n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ como base de entornos de cero.*
- *Es consecuencia del Teorema de Bezout que si p y q son dos primos distintos, $U \in \mathcal{N}_0(\mathbb{Z},\tau_p)$ y $V \in \mathcal{N}_0(\mathbb{Z},\tau_q)$, se cumple $U+V=\mathbb{Z}$. Como consecuencia, el ínfimo de las topologías τ_p y τ_q en $\mathbb{Z}$ es la topología indiscreta, mientras que su intersección contiene a $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (notar que $\{0\}$ es cerrado en ambas topologías).*

Existe otra topología importante asociada a una familia de homomorfismos $v_i : G_i \to G$, que coincide con la topología final en el caso numerable:

PROPOSICIÓN 11.16. *Sea G un grupo abeliano, $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos y $v_i : G_i \to G$ homomorfismo de grupos, para todo $i \in I$. Si para cada $\mathbf{U} = (U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{N}_0(G_i)$ definimos el subconjunto de G*
$$\mathbf{U}_r = \bigcup_{\Delta\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in\Delta} v_i(U_i),$$
la familia $\{\mathbf{U}_r : \mathbf{U} = (U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{N}_0(G_i)\}$ es una base de entornos de cero para una topología de grupo $\mathcal{T}_r$, que hace continuos los homomorfismos v_i.

Además, si I es numerable las topologías $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_f$ coinciden en G.

DEMOSTRACIÓN. Es sencillo comprobar que la familia dada es base de entornos de cero para una topología de grupo en G, y que ésta hace continuos los v_i. En particular es menos fina que $\mathcal{T}_f$.

Si I es numerable podemos suponer $I \subset \mathbb{N}$. Demostraremos que $\mathcal{T}_r$ es la topología de grupo más fina en G que hace los v_i continuos: Sea $\mathcal{T}$ una topología de grupo en G tal que $v_i : G_i \to (G,\mathcal{T})$ es continuo, para todo $i \in I$. Dado un $\mathcal{T}$-entorno de cero W en G, podemos determinar una sucesión (V_n) en $\mathcal{N}_0(G)$ tal que $V_1 + \cdots + V_n \subset W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ $(i \in I)$ es tal que $v_i(U_i) \subset V_i$, se tiene
$$\forall\Delta\in\mathfrak{F}(I) \quad \sum_{i\in\Delta} v_i(U_i) \subset \sum_{i\in\Delta} V_i \subset W \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_r \subset W.$$
$\square$

Llamaremos a $\mathcal{T}_r$ *la topología rectangular* en G asociada a la familia de homomorfismos v_i.

NOTA 11.17. La definición de topologías iniciales y finales asociadas a familias de aplicaciones, y como caso particular los conceptos de supremo e ínfimo de familias de topologías, son temas ampliamente conocidos y reflejados en las referencias. Un tratamiento de estas cuestiones, planteado en el caso no necesariamente abeliano, puede encontrarse en el Chap. 3 de [**73**], donde en particular se demuestra la igualdad entre $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_r$ en el caso numerable. La construcción efectiva de una base de entornos de cero para la topología final parece haberse llevado a cabo por primera vez en [**86**] para espacios vectoriales topológicos, y aparece recogida en [**50**, 4.1] donde además se demuestra que en el caso numerable la topología rectangular coincide con la final. Las Props. 11.10 y 11.16 son adaptaciones de estos resultados a grupos abelianos topológicos generales.

12. Topologías en la suma directa

Un caso representativo de definición de topologías finales con respecto a una familia de homomorfismos lo constituye la suma directa de una familia de grupos topológicos, que discutimos aparte ya que en este grupo, aparte de las topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_r$ definidas en la sección anterior, utilizaremos la topología asterisco $\mathcal{T}_a$, con importantes propiedades asociadas a la dualidad.

Sea I un conjunto no vacío de índices y para cada $i \in I$, sea G_i un grupo abeliano. Recordemos que la suma directa algebraica de los grupos G_i se define como el siguiente subgrupo del producto:

$$\bigoplus_{i\in I} G_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i : \{i \in I : x_i \neq 0\} \in \mathfrak{F}(I)\}$$

El hecho de que $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es un subgrupo del producto $\prod_{i\in I} G_i$ es de comprobación inmediata. Definimos las aplicaciones canónicas

$$v_j : G_j \to \bigoplus_{i\in I} G_i, \quad (v_j(x))_j = x, \quad (v_j(x))_i = 0 \;\; \forall i \neq j.$$

Notar que en este caso los homomorfismos v_i son inyectivos y de hecho a menudo identificaremos algebraicamente cada G_i con el correspondiente subgrupo $v_i(G_i)$ de $\bigoplus_{i\in I} G_i$.

12.1. Topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_r$. Con las notaciones precedentes, supongamos que cada G_i es un grupo abeliano topológico con la topología τ_i. Podemos construir en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ la topología final $\mathcal{T}_f$ (Prop. 11.10) con respecto a la familia de homomorfismos $v_j : G_j \to \bigoplus_{i\in I} G_i$, y la topología rectangular $\mathcal{T}_r$ (Prop. 11.16) asociada al mismo sistema de grupos y homomorfismos. El grupo $\bigoplus_{i\in I} G_i$ dotado de las topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_r$ se denotará, respectivamente, $\bigoplus_{i\in I}^{(f)} G_i$ y $\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i$. Para evitar ambigüedades nos referiremos en algún momento a $\mathcal{T}_f$ como *topología coproducto* en la suma directa (cf. Nota 12.4). Si U_i es un entorno de cero en G_i para todo $i \in I$, denotaremos por $\bigoplus_{i\in I} U_i$ el $\mathcal{T}_r$-entorno básico de cero construido a partir de la familia (U_i), y que representábamos en general por $\mathbf{U}_r$ (Prop. 11.16). Asimismo, llamaremos $\mathcal{T}_\pi$ a la restricción a $\bigoplus_{i\in I} G_i$ de la topología producto, y $\bigoplus_{i\in I}^{(\pi)} G_i$ al grupo topológico $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T}_\pi)$.

Proposición 12.1. *$\mathcal{T}_f$ es la topología de grupo más fina en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ que induce en cada G_i la topología de partida τ_i.*

Demostración. Es inmediato que una topología de grupo $\mathcal{T}$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ hace las inclusiones continuas si y sólo si induce en cada G_i una topología menos fina que la de partida. Veamos que en el caso $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$ la topología inducida es exactamente τ_i. Sea $j \in I$ arbitrario y $U \in \mathcal{N}_0(G_j)$; determinamos $\mathsf{U} = (U_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$U_{j,n} = U \ \ \forall n \in \mathbb{N}; \quad U_{i,n} = G_i \ \ \forall i \in I \setminus \{j\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que $\mathsf{U}'_f \cap v_j(G_j) \subset v_j(U)$, siendo U'_f el $\mathcal{T}_f$-entorno de cero definido a partir de U según la Prop. 11.11.

Por otra parte, si $\mathcal{T}$ es una topología de grupo en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ que induce en cada G_i la topología τ_i, en particular hace las inclusiones continuas y por lo tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$.

□

Nota 12.2. La topología más fina que induce en cada G_i la topología de partida no es necesariamente una topología de grupo; de hecho, no lo es en una amplia clase de ejemplos (Theor. 2 en [**42**]).

El siguiente resultado será de utilidad en lo sucesivo; se trata de la Prop. 1.17 de [**7**], adaptación a su vez del Theor. 2 de [**53**]:

Proposición 12.3. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos de Hausdorff. Sea P un subconjunto precompacto de $\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i$. Entonces existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $P \subset \sum_{i\in J} v_i(G_i)$.*

Nota 12.4. En [**42**, Sect. 2], [**63**] y [**25**, Exerc. 2.10.4] se dan otras construcciones de la topología $\mathcal{T}_f$ en la suma directa, a la que se le da el nombre de *topología suma* o bien *topología coproducto*. El motivo de esta última denominación es que $\bigoplus_{i\in I}^{(f)} G_i$ es el coproducto de la familia $(G_i)_{i\in I}$ en la categoría de grupos abelianos topológicos y homomorfismos continuos.

12.2. La topología asterisco. Si para cada $i \in I$, G_i es un grupo abeliano y U_i un subconjunto no vacío de G_i, se define

$$\bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i = \{x \in \bigoplus_{i\in I} G_i : \sum_{i\in I} k_{U_i}(x_i) < 1\}.$$

Proposición 12.5. *Con las notaciones precedentes, los conjuntos*

$$\bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i, \quad (U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$$

forman una base de entornos de cero para una topología de grupo $\mathcal{T}_a$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$.

Demostración. Los axiomas de base de entornos de cero para una topología de grupo (1.8) se demuestran fácilmente a partir de propiedades básicas del funcional k_U (Prop. 5.3). □

Llamaremos a $\mathcal{T}_a$ topología *asterisco* en $\bigoplus_{i\in I} G_i$, y denotaremos por $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} G_i$ el grupo topológico $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T}_a)$.

12.6. De las determinaciones de $\mathcal{T}_f$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_r$ por bases de entornos de cero es sencillo deducir que, si $(G_i)_{i\in I}$ es una familia de grupos abelianos y J es un subconjunto arbitrario de I, el homomorfismo inyectivo canónico

$$\bigoplus_{i\in J} G_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} G_i$$

pasa a ser un encajamiento topológico si en ambos grupos consideramos las topologías coproducto (resp., asterisco, rectangulares) asociadas.

Ejemplo 12.7. *Supongamos que en la discusión anterior tomamos como $G_i = \mathbb{R}$ con la topología usual, para todo $i \in I$. Denotaremos el grupo $\bigoplus_{i\in I} G_i$ por $\mathbb{R}_0^I$, y designaremos por $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ un elemento arbitrario de $]0,\infty[^I$.*

(a) *Los conjuntos del tipo*

$$R_\Lambda = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_0^I : \text{máx}_{i\in I} \frac{1}{\lambda_i}|x_i| \leq 1\}, \qquad \Lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in]0,\infty[^I,$$

forman una base de entornos de cero para la topología rectangular en $\mathbb{R}_0^I$. [De hecho, se comprueba que $R_\Lambda = \bigoplus_{i\in I} U_i$ siendo $U_i = [-\lambda_i, \lambda_i]$ para todo $i \in I$.]

(b) *Los conjuntos del tipo*

$$A_\Lambda = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_0^I : \sum_{i\in I} \frac{1}{\lambda_i}|x_i| \leq 1\}, \qquad \Lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in]0,\infty[^I,$$

forman una base de entornos de cero para la topología asterisco en $\mathbb{R}_0^I$. [Se deduce del Ejemplo 5.6 que

$$\bigoplus_{i\in I}^{(a)} V_i \subset \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_0^I : \sum_{i\in I} \frac{1}{\lambda_i}|x_i| \leq 1\} \subset \bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i$$

siendo $V_i = [-\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_i}{2}]$, $U_i = [-\lambda_i, \lambda_i]$ para todo $i \in I$.]

12.3. Comparación de topologías. El siguiente resultado resume algunos de los primeros resultados de comparación entre las distintas topologías que se han definido en la suma directa:

Proposición 12.8. *Con las notaciones precedentes,*

(a) $\mathcal{T}_\pi \subset \mathcal{T}_r \subset \mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_f$.
(b) *si I es finito, entonces $\mathcal{T}_\pi = \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_a = \mathcal{T}_f$.*
(c) *si I es numerable, entonces $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_a = \mathcal{T}_f$.*

Demostración. (a) Es claro que $\mathcal{T}_a$ hace continuas las inclusiones v_i y por lo tanto $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_f$. Por otra parte, para cualquier $(U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i$ se cumple $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i \subset \bigoplus_{i\in I} U_i$ ya que

$$\sum_{i\in I} k_{U_i}(x_i) < 1 \ \Rightarrow\ k_{U_i}(x_i) < 1 \ \ \forall i \in I \ \Rightarrow\ x_i \in U_i \ \ \forall i \in I.$$

La inclusión $\mathcal{T}_\pi \subset \mathcal{T}_r$ es inmediata.

(b) Es sencillo demostrar que para I finito, cualquier topología de grupo en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ que induzca las topologías originales en los G_i es menos fina que la producto; en particular $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_\pi$ y se deduce que todas son iguales.

(c) Se deduce de (a) y de la propiedad de que en general $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_f$ coinciden en el caso numerable (Prop. 11.16).

□

En [**63**] se plantea y resuelve el problema de llegar a condiciones *necesarias y suficientes* sobre una familia de grupos abelianos topológicos para que en su suma directa se verifique $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_f$. Reproducimos aquí ambos resultados:

TEOREMA 12.9. *(Th. 3.10 en [**63**]) Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos. Entonces las topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_r$ coinciden en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ si y sólo si existe un subconjunto numerable $I_0 \subset I$ tal que para todo $i \in I \setminus I_0$ se verifica la siguiente condición:*

- *la intersección de cualquier familia numerable de conjuntos abiertos en G_i es un conjunto abierto.*

TEOREMA 12.10. *(Th. 3.11 en [**63**][2]) Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos. Entonces las topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_a$ coinciden en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ si y sólo si existe un subconjunto numerable $I_0 \subset I$ tal que para todo $i \in I \setminus I_0$ se verifica la siguiente condición:*

- *para cualquier $U \in \mathcal{N}_0(G_i)$ el conjunto $\bigcap_{n=1}^\infty U_{(n)} = k_U^{-1}(\{0\})$ es un entorno de cero en G_i.*

12.11. Del Teorema 12.10 se deduce en particular que si I es un conjunto no numerable y para todo $i \in I$, G_i es un n-grupo de Hausdorff y no discreto, en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ la topología $\mathcal{T}_f$ es estrictamente más fina que la $\mathcal{T}_a$. En efecto, dado U_i entorno distinguido de cero en G_i, el conjunto $\bigcap_{n=1}^\infty (U_i)_{(n)}$ está contenido en cualquier entorno de cero por la condición de n-grupo y, dado que G_i es de Hausdorff, necesariamente $\bigcap_{n=1}^\infty (U_i)_{(n)} = \{0\}$; luego esta intersección no puede ser un entorno de cero, para ningún $i \in I$, ya que los G_i no son discretos.

EJEMPLO 12.12. *Para la suma directa $\mathbb{R}_0^I$, con I no numerable, las dos inclusiones $\mathcal{T}_r \subset \mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_f$ son estrictas.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos las bases de entornos de cero para $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_f$ introducidas en el Ej. 12.7.

- La inclusión $\mathcal{T}_r \subset \mathcal{T}_a$ es estricta: Fijamos la familia $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ con $\lambda_i = 1$ para todo $i \in I$; vamos a probar que no existe ninguna $\Lambda' = (\lambda'_i)_{i\in I} \in \,]0,\infty[^I$ tal que $R_{\Lambda'} \subset A_\Lambda$. Si existiera una tal Λ', para todo subconjunto finito Δ de I la familia

[2]En realidad la situación que se considera en [**63**] es $\mathcal{T}_* = \mathcal{T}_f$, donde $\mathcal{T}_*$ es la *topología asterisco de Kaplan* que definiremos a continuación, pero la adaptación de este resultado a la topología $\mathcal{T}_a$ es sencilla.

$(x_i)_{i\in I}$, definida como sigue

$$x_i = \lambda_i' \text{ si } i \in \Delta, \quad x_i = 0 \text{ si } i \notin \Delta$$

sería un elemento de $R_{\Lambda'}$ y por lo tanto $\sum_{i\in\Delta} \lambda_i' \leq 1$. Como $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$ es arbitrario, es claro que $\inf_{i\in B} \lambda_i' = 0$ para todo subconjunto numerable infinito de I, contradicción.

- La inclusión $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_f$ es estricta: Es consecuencia del Teorema 12.10, pero vamos a dar una demostración directa, utilizando la determinación de $\mathcal{T}_f$ por bases de entornos de cero (Subsec. 11.2): Demostremos que existe un $\mathsf{U} = (U_{i,n}) \in \prod_{i\in I} \mathcal{U}_i^{\mathbb{N}}$ tal que U_f' (Prop. 11.11) no contiene ningún $\mathcal{T}_a$-entorno de cero: Sea $U_{i,n} = [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$ para todos $i \in I$ y $n \in \mathbb{N}$. Es claro que un $x \in \mathbb{R}_0^I$ está en U_f' si y sólo si existen $i_1, i_2, \ldots, i_N$ en I, con $i_k \neq i_l$ si $k \neq l$, tales que $|x_{i_n}| \leq \frac{1}{2^n}$, para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$, y $x_j = 0$ para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_N\}$. Supongamos que existe un $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in]0, \infty[^I$ tal que $A_\Lambda \subset \mathsf{U}_f'$. Es claro que para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$, la familia $x \in \mathbb{R}_0^I$ definida por

$$x_i = \frac{\lambda_i}{|\Delta|} \text{ si } i \in \Delta, \quad x_i = 0 \text{ si } i \notin \Delta$$

pertenece a A_Λ y por hipótesis, también a U_f'. Luego existen $i_1, \ldots, i_N$ en I distintos dos a dos tales que $\Delta \subset \{i_1, \ldots, i_N\}$ y $|x_{i_n}| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$. En particular $\min_{i\in\Delta}(\lambda_i/|\Delta|) \leq 1/2^N \leq 1/2^{|\Delta|}$. Como $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$ es arbitrario, se tiene $\min_{i\in\Delta} \lambda_i \leq |\Delta|/2^{|\Delta|}$ para todo subconjunto finito Δ de I, y por lo tanto $\inf_{i\in B} \lambda_i = 0$ para todo subconjunto infinito numerable B de I, lo cual es una contradicción con el carácter no numerable de I.

□

12.4. La topología asterisco de Kaplan. La definición de topología asterisco que se ha adoptado aquí coincide con la introducida por Banaszczyk en [**7**, p. 8]. En esta referencia se toma como base de entornos de cero la formada por los conjuntos

$$\{x \in \bigoplus_{i\in I} G_i : x_i \in U_i \ \forall i \in I, \ \sum_{i\in I} (x_i/U_i)_B < 1\}, \qquad (U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$$

(ver 5.2 para la definición de $(\cdot/U)_B$). De la relación entre $(\cdot/U)_B$ y k_U (5.7) se deduce fácilmente que la topología asociada a esta base de entornos es $\mathcal{T}_a$.

La topología $\mathcal{T}_a$ es una variante de la originalmente definida por Kaplan en [**53**] con el propósito de convertir en topológica la dualidad algebraica existente entre el producto y la suma directa de grupos (ver Sec. 15). Como es de esperar, la "topología asterisco" de Kaplan utiliza los funcionales $(\cdot/U)_K$, cuya definición se recogió en (5.1): la siguiente familia de subconjuntos de $\bigoplus_{i\in I} G_i$

$$\bigoplus_{i\in I}^{(*)} U_i := \{x \in \bigoplus_{i\in I} G_i : x_i \in U_i \ \forall i \in I, \ \sum_{i\in I} (x_i/U_i)_K < 1\}, \quad (U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$$

es una base de entornos de cero para esta topología de grupo, que denotaremos $\mathcal{T}_*$. Es claro que $\mathcal{T}_* \supset \mathcal{T}_r$. En la siguiente Proposición se compara $\mathcal{T}_*$ con $\mathcal{T}_a$.

PROPOSICIÓN 12.13. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos.*

(a) $\mathcal{T}_* \subset \mathcal{T}_a$ *en* $\bigoplus_{i\in I} G_i$.

(b) *Si existe un subconjunto numerable I_0 de I tal que para todo $i \in I \setminus I_0$, G_i admite una base de entornos de cero formada por conjuntos de Kaplan, entonces $\mathcal{T}_* = \mathcal{T}_a$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea U_i un entorno de cero en G_i, para todo $i \in I$. Demostraremos que $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} V_i \subset \bigoplus_{i\in I}^{(*)} U_i$ para cualquier familia $(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$ tal que $V_i + \overset{6}{\ldots} + V_i \subset U_i$, para todo $i \in I$. En efecto, si $x \in \bigoplus_{i\in I}^{(a)} V_i$, en particular $x_i \in V_i \subset U_i$ para todo $i \in I$ y se cumple

$$\sum_{i\in I}(x_i/U_i) \overset{\text{Prop. } 5.9(a)}{\leq} \sum_{i\in I} 4k_{U_i}(x_i) \overset{\text{Prop. } 5.3(c)}{\leq} \sum_{i\in I} k_{V_i}(x_i) < 1.$$

(b) Sea $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i$ un $\mathcal{T}_a$-entorno básico de cero; tenemos que encontrar una familia $(W_i)_{i\in I}$ donde $W_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ para todo $i \in I$ y se cumpla

$$\bigoplus_{i\in I}^{(*)} W_i \subset \bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i.$$

Tomamos primero entornos de cero V_i en G_i de forma que $V_i + V_i + V_i \subset U_i$ para todo $i \in I$ y, en el caso de que $i \in I \setminus I_0$, V_i sea además un conjunto de Kaplan. Para $i \in I_0$, escogemos $W_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ tales que en el grupo $\bigoplus_{i\in I_0} G_i$ se verifique

$$\bigoplus_{i\in I_0} W_i \subset \bigoplus_{i\in I_0}^{(a)} V_i; \tag{12.1}$$

esto puede hacerse ya que para conjuntos numerables de índices las topologías $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_a$ coinciden (Prop. 12.8(c)). Para $i \in I \setminus I_0$, hacemos $W_i = V_i$.

Para todo $x \in \bigoplus_{i\in I}^{(*)} W_i$, es claro que $(x_i)_{i\in I_0} \in \bigoplus_{i\in I_0} W_i$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} k_{U_i}(x_i) &\overset{\text{Prop. } 5.3(c)}{\leq} \frac{1}{2}\sum_{i\in I} k_{V_i}(x_i) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\sum_{i\in I_0} k_{V_i}(x_i) + \sum_{i\in I\setminus I_0} k_{V_i}(x_i)\Big) \\
&\overset{(12.1),\ \text{Prop. } 5.9(b)}{<} \frac{1}{2}\Big(1 + \sum_{i\in I\setminus I_0} (x_i/V_i)_K\Big) < 1.
\end{aligned}$$

□

Dedicaremos el resto de esta subsección a mostrar que las topologías $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{T}_*$ son en general diferentes. Notar que por la Prop. 12.13(b) el ejemplo que proporcionemos ha de ser necesariamente una suma directa no numerable.

PROPOSICIÓN 12.14. *([**64**]) Sea $\delta = (\delta_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales positivos, decreciente y convergente a 0. Si para cada $x \in \mathbb{Z}$ definimos*

$$q_\delta(x) := \text{ínf}\{\sum |a_n|\delta_n : x = \sum a_n 2^n,\ a_n \in \mathbb{Z}\},$$

(donde la suma $x = \sum a_n 2^n$ se extiende sobre el conjunto de índices $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, con una cantidad finita de sumandos no nulos), entonces $q_\delta : \mathbb{Z} \to [0, \infty[$ verifica las siguientes propiedades:

(a) *Para cada $x \in \mathbb{Z}$, el ínfimo que define $q_\delta(x)$ es de hecho un mínimo y se alcanza en la única descomposición de x de la forma $x = \sum a_n 2^n$, $a_n \in \{-1, 0, 1\}$ que cumple la siguiente propiedad:*

$$[n \geq 1,\ a_n \neq 0 \Rightarrow a_{n-1} = a_{n+1} = 0] \tag{12.2}$$

(b) *Para todo $n \geq 0$ se cumple $q_\delta(2^n) = \delta_n$.*
(c) *Para todos $x \in \mathbb{Z}$ y $n \in \{0, 1, 2, 3...\}$, se cumple $q_\delta(2^n x) \leq q_\delta(x)$.*
(d) $q_\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(e) $q_\delta(-x) = q_\delta(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{Z}$
(f) $q_\delta(x + y) \leq q_\delta(x) + q_\delta(y)$ *para todos* $x, y \in \mathbb{Z}$

DEMOSTRACIÓN. (a) está demostrado en [**64**, 1.2, 1.3].
(b) es consecuencia inmediata de (a).
(c) es consecuencia de (a) y del hecho de que la sucesión δ_n es decreciente.
(d) es inmediato teniendo en cuenta que el ínfimo que define $q_\delta(x)$ se alcanza.
(e) es trivial.
(f) Dados $x,\ y \in \mathbb{Z}$, y descomposiciones $x = \sum a_n 2^n$, $y = \sum b_n 2^n$, se tiene $x + y = \sum (a_n + b_n) 2^n$ y por lo tanto $q_\delta(x + y) \leq \sum |a_n + b_n|\delta_n \leq \sum |a_n|\delta_n + \sum |b_n|\delta_n$; como las descomposiciones $x = \sum a_n 2^n$, $y = \sum b_n 2^n$ son arbitrarias, se deduce $q_\delta(x + y) \leq q_\delta(x) + q_\delta(y)$.

□

Designamos por τ_δ la topología metrizable definida en $\mathbb{Z}$ por la pseudonorma separada q_δ, y escribiremos $\mathbb{Z}_\delta$ para referirnos al grupo abeliano topológico $(\mathbb{Z}, \tau_\delta)$. Para cada $\varepsilon > 0$, B_ε denota el conjunto $q_\delta^{-1}[0, \varepsilon]$.

12.15. Notar que, como consecuencia de la Prop. 12.14(c), para todos $\varepsilon > 0$ y $x \in B_\varepsilon$ se cumple $(x/B_\varepsilon)_K = 0$.

LEMA 12.16. *Si definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} l_n &= 2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{2n} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \\ m_n &= \sum_{k=1}^{n} l_k \qquad (m_0 = 0) \\ \delta_j &= 1/n \quad \textit{si } m_{n-1} \leq j < m_n \\ k_j &= l_n \quad \textit{si } m_{n-1} \leq j < m_n, \end{aligned}$$

se cumple

$$k_{B_1}(2^j) \geq \frac{1}{k_j} \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que $q_\delta(k_j 2^j) > 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $j \in \{m_{n-1}, \ldots, m_n - 1\}$. Se tiene $q_\delta(k_j 2^j) = q_\delta((2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{2n})2^j) = q_\delta(2^j + 2^{j+2} + \cdots + 2^{j+2n})$, que por la Prop. 12.14(a) es igual a $\delta_j + \delta_{j+2} + \delta_{j+4} + \cdots + \delta_{j+2n} > (n+1)\frac{1}{n+1} = 1$. □

PROPOSICIÓN 12.17. *Sea I un conjunto no numerable y para cada $i \in I$, hacemos $G_i = \mathbb{Z}_\delta$, siendo $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el Lema 12.16. La topología $\mathcal{T}_a$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_*$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$.*

DEMOSTRACIÓN. 12.15 implica que

$$\forall\ (\varepsilon_i)_{i\in I} \in]0,\infty[^I, \qquad \bigoplus_{i\in I}^{(*)} B_{\varepsilon_i} = \bigoplus_{i\in I} B_{\varepsilon_i}.$$

Por lo tanto las topologías $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_*$ coinciden en $\bigoplus_{i\in I} G_i$. Probaremos que no hay ningún $\mathcal{T}_r$-entorno de cero contenido en $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} B_1$. Supongamos que existe $(\varepsilon_i)_{i\in I} \in]0,\infty[^I$ tal que $\bigoplus_{i\in I} B_{\varepsilon_i} \subset \bigoplus_{i\in I}^{(a)} B_1$. Como I es no numerable, existe un subconjunto numerable e infinito $I_0 \subset I$ tal que $\inf_{i\in I_0}\varepsilon_i > 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_m \leq \inf_{i\in I_0}\varepsilon_i$. Sea Δ un subconjunto de I_0 de cardinal k_m, siendo k_m como en el Lema 12.16. Consideremos la familia $x \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, definida por

$$x_i = \begin{cases} 2^m & \text{si } i \in \Delta, \\ 0 & \text{si } i \notin \Delta. \end{cases}$$

Es claro que $x \in \bigoplus_{i\in I} B_{\varepsilon_i}$, pero (Lema 12.16) se cumple $k_{B_1}(2^m) \geq \frac{1}{k_m}$ y por lo tanto $\sum_{i\in I} k_{B_1}(x_i) \geq 1$. □

NOTA 12.18. Nienhuys demostró en [**64**] que la topología generada por la familia de pseudonormas q_δ, con $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variando en el conjunto de todas las sucesiones de números positivos decrecientes y convergentes a 0, es la topología de grupo más fina en $\mathbb{Z}$ con respecto a la que la sucesión 2^n converge a cero. En [**24**, 1.8] se puede encontrar una selección de referencias sobre las topologías de grupo determinadas por la convergencia a cero de una sucesión prefijada.

NOTA 12.19. El hecho de que $\mathcal{T}_*$ coincide con $\mathcal{T}_r$ en el caso numerable, que se deduce de los resultados precedentes acerca de la comparación entre las distintas topologías en la suma directa, aparece demostrado ya en [**53**] (Theor. 1). En [**12**] (Coroll. to Prop. 1) se demuestra que las topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_r$ coinciden en la suma directa numerable de grupos localmente compactos. Higgins ([**42**]) hace un estudio sistemático de las topologías final, asterisco (en el sentido de Kaplan) y rectangular, además de definir otras topologías de grupo en la suma directa que no hemos considerado aquí, llegando a condiciones suficientes para que estas topologías sean diferentes; 12.11 se puede considerar parte del Coroll. al Theor. 1 de esta referencia. En [**7**, p. 10] se menciona sin demostración que las topologías $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_a$ son diferentes en una suma directa no numerable de copias de $\mathbb{R}$.

CAPíTULO III

Dualidad

13. Resultados generales

Esta sección tiene carácter introductorio y en ella haremos una concisa selección de resultados y definiciones (ampliamente conocidos en su mayor parte) sobre dualidad de grupos abelianos topológicos. Se pueden encontrar presentaciones más sistemáticas de esta teoría en [**85**], [**4**], [**41**]; y desarrollos más exhaustivos de alguno de sus aspectos en las referencias citadas en el texto.

13.1. El grupo dual. Sea G un grupo abeliano topológico. Siguiendo la nomenclatura habitual, llamaremos *carácter* de G a todo homomorfismo de grupos $\chi : G \to \mathbb{T}$. Denotaremos el grupo $\mathrm{CHom}(G, \mathbb{T})$ como $G^\wedge$ y lo llamaremos el *grupo dual* de G. En correspondencia con nuestro convenio para $\mathbb{T}$, usaremos notación multiplicativa para la operación interna de $G^\wedge$.

13.1. A continuación recordamos las determinaciones de los duales de los grupos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}$.

(a) La aplicación $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \chi_\lambda \in \mathbb{R}^\wedge$, donde $\chi_\lambda(x) := \exp(2\pi i\lambda x)$ para todos λ, $x \in \mathbb{R}$, es un isomorfismo de grupos abelianos. [Es claro que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, χ_λ es un carácter real continuo (notar que $|1 - \exp(2\pi i\lambda x)| = 2\mathrm{sen}\,|\pi\lambda x|$), y es inmediato que $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ es un homomorfismo de grupos. Si χ_λ es el carácter trivial, se deduce $\lambda x \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\lambda = 0$. El carácter sobreyectivo de $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ requiere cierta demostración; ver [**39**, p. 4], [**61**, Example 3], [**41**, 23.27(e)], [**76**, 1.2.7].] Teniendo en cuenta que el grupo abeliano topológico $\mathbb{C}$ es identificable con $\mathbb{R}^2$, es sencillo deducir que la aplicación $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \chi_{(\lambda,\mu)} \in \mathbb{C}^\wedge$, donde $\chi_{(\lambda,\mu)}(t) := \exp(2\pi i(\lambda \mathrm{Re}\, t + \mu \mathrm{Im}\, t))$ para todos $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{C}$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

(b) La aplicación $t \in \mathbb{T} \mapsto \chi_t \in \mathbb{Z}^\wedge$, donde $\chi_t(n) := t^n$ para todos $t \in \mathbb{T}$ y $n \in \mathbb{Z}$, es un isomorfismo de grupos abelianos. [Notar que $\chi = \chi_{\chi(1)}$ para todo $\chi \in \mathbb{Z}^\wedge$.]

(c) La aplicación $n \in \mathbb{Z} \mapsto \chi_n \in \mathbb{T}^\wedge$, donde $\chi_n(t) := t^n$ para todos $t \in \mathbb{T}$ y $n \in \mathbb{Z}$, es un isomorfismo de grupos abelianos. [Lo único no trivial es el carácter sobreyectivo. Si $\chi \in \mathbb{T}^\wedge$, y $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es el homomorfismo $x \mapsto \exp(2\pi i x)$, se tiene que $\chi \circ \rho \in \mathbb{R}^\wedge$ y por (a), ha de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(\exp(2\pi i x)) = \exp(2\pi i\lambda x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$ se deduce que $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\chi = \chi_n$.]

Dado un subconjunto A de G, se define el *polar* de A como el subconjunto de $G^\wedge$ dado por

$$A^\triangleright = \{\chi \in G^\wedge : \chi(A) \subset \mathbb{T}_+\}.$$

Si en G no se ha fijado una topología, el polar de un conjunto se entenderá calculado con respecto a la topología discreta en G, es decir, $A^{\triangleright} = \{\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T}) : \chi(A) \subset \mathbb{T}_+\}$.

13.2. (a) Un carácter χ de G es continuo si y sólo si existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $\chi \in U^{\triangleright}$; de hecho,

(b) un subconjunto C de $G^\wedge$ es equicontinuo si y sólo si existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $C \subset U^{\triangleright}$.

Esto es consecuencia de la Prop. 6.2, teniendo en cuenta que $\mathbb{T}$ es un n-grupo con entorno distinguido $\mathbb{T}_+$ (Ej. 6.3).

Dualmente, dado un subconjunto B de $G^\wedge$ se define el *polar inverso* de B como

$$B^{\triangleleft} = \{x \in G : \chi(x) \in \mathbb{T}_+ \ \forall \chi \in B\}.$$

Si G es un grupo abeliano sin estructura topológica, aplicaremos la misma definición considerando en G la topología discreta, es decir, para subconjuntos B de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$. Es claro que si A es un subgrupo de G, se cumple $A^{\triangleright} = \{\chi \in G^\wedge : \chi(A) = \{1\}\}$; análogamente, si B es un subgrupo de $G^\wedge$, entonces $B^{\triangleleft} = \{x \in G : \chi(x) = 1 \ \ \forall \chi \in B\}$.

Definición 13.3. Sea G un grupo abeliano topológico. Se dice que G es *dualmente separado,* o bien que *$G^\wedge$ separa puntos de G,* cuando para todo $x \in G$, $x \neq 0$, existe un $\chi \in G^\wedge$ tal que $\chi(x) \neq 1$.

Es evidente que G es dualmente separado si y sólo si dados x, y elementos distintos de G, existe siempre un $\chi \in G^\wedge$ tal que $\chi(x) \neq \chi(y)$, y esto justifica el nombre escogido para esta clase de grupos.

Ejemplo 13.4. *Los grupos discretos son dualmente separados. Este es un resultado de carácter algebraico, que se deduce fácilmente de 1.7 (*[**61**, Cor. to Prop. 17]*).*

Ejemplo 13.5. *Los grupos compactos y de Hausdorff son dualmente separados. Esta es una de las formulaciones del resultado fundamental conocido como teorema de Peter-Weyl (*[**76**, 1.5.2]*,* [**25**, 2.3.3]*).*

13.6. Los Ejemplos 13.4 y 13.5 pueden también presentarse como aplicaciones del profundo resultado recogido más abajo como Teor. 13.37, y que implica en particular que todo grupo localmente compacto y de Hausdorff es dualmente separado.

Definición 13.7. Sea G un grupo abeliano topológico y H un subgrupo de G.

- Se dice que H es *dualmente cerrado* en G cuando $H^{\triangleright\triangleleft} = H$, es decir,
$$x \in G, \ \ \chi(x) = 1 \ \ \forall \chi \in H^{\triangleright} \Rightarrow x \in H.$$
- Se dice que H está *dualmente embebido* en G cuando todo carácter continuo de H se puede extender a un carácter continuo de G.

13.8. Es claro que H es dualmente cerrado en G si y sólo si el grupo cociente G/H es dualmente separado. Teniendo en cuenta el Ejemplo 13.4 y el hecho de que el cociente por un subgrupo abierto es discreto, se deduce que los subgrupos abiertos son dualmente cerrados. También es una consecuencia sencilla de 1.7 que son dualmente embebidos ([**62**, Lemma 3.3]).

También son dualmente cerrados y embebidos los subgrupos compactos de un grupo dualmente separado ([**14**, Prop. 1.4]).

13.2. La topología de Bohr.

DEFINICIÓN 13.9. Sea (G, τ_G) un grupo abeliano topológico. A la topología inicial en G con respecto a la familia de homomorfismos $(G, \tau_G)^\wedge$ (Prop. 11.1) la llamaremos *topología de Bohr* de G y la denotaremos por $\sigma(G, G^\wedge)$.

PROPOSICIÓN 13.10. *Sea G un grupo abeliano topológico. Los conjuntos de la forma $\{\chi\}^\triangleleft$, $\chi \in G^\wedge$ forman una subbase de entornos de cero para la topología de Bohr en G.*

DEMOSTRACIÓN. Por la caracterización de las topologías iniciales (Prop. 11.1), la familia de conjuntos $\chi^{-1}(T_n)$, donde χ recorre $G^\wedge$ y $n \in \mathbb{N}$, es una subbase de entornos de cero para la topología de Bohr en G. Basta tener en cuenta que, debido al Cor. 3.7,

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{\chi^k\}^\triangleleft = \bigcap_{k=1}^{n} (\chi^k)^{-1}(\mathbb{T}_+) = \chi^{-1}(T_n) \qquad \forall \chi \in G^\wedge \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{13.1}$$

□

13.11. A partir de la propia definición es inmediato que la clausura de $\{0\}$ en la topología de Bohr de G es $\bigcap_{\chi \in G^\wedge} \ker \chi$ y en particular, que el grupo $(G, \sigma(G, G^\wedge))$ es de Hausdorff si y sólo si (G, τ_G) es dualmente separado.

13.12. Para todo grupo abeliano topológico G se verifica $(G, \sigma(G, G^\wedge))^\wedge = G^\wedge$. Por la definición es claro que todo carácter continuo de G es continuo para la topología de Bohr de G. Inversamente, si $\chi : G \to \mathbb{T}$ es un carácter $\sigma(G, G^\wedge)$-continuo, existe un $\sigma(G, G^\wedge)$-entorno de cero U en G tal que $\chi(U) \subset \mathbb{T}_+$ (13.2(a)), y se puede suponer que $U = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}^\triangleleft$ para determinados $\chi_1, \dots, \chi_n \in G^\wedge$ (Prop. 13.10). Si $\chi_i(U_i) \subset \mathbb{T}_+$, siendo $U_i \in \mathcal{N}_0(G)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, es claro que $U_1 \cap \dots \cap U_n \subset U$. Como $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{N}_0(G)$, se deduce que χ es continuo para la topología inicial de G. De hecho se cumple ([**17**, Teor. 3.7]) que para cualquier grupo abeliano G y cualquier subgrupo $H \subset \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$, el grupo dual de $(G, \sigma(G, H))$ es exactamente H, donde $\sigma(G, H)$ denota la topología inicial en G con respecto a los elementos de H.

13.13. Si G y H son grupos abelianos topológicos, cualquier homomorfismo continuo $u : G \to H$ es también continuo considerando en ambos grupos las topologías de Bohr correspondientes. La demostración es inmediata.

PROPOSICIÓN 13.14. *Para todo grupo abeliano topológico G, el grupo $(G, \sigma(G, G^\wedge))$ es precompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el homomorfismo de grupos $u : G \to \mathbb{T}^{G^\wedge}$ definido por $u(x) = (\chi(x))_{\chi \in G^\wedge}$. Si dotamos a G de la topología de Bohr y a $\mathbb{T}^{G^\wedge}$ de la topología producto, u es claramente continua y abierta sobre la imagen. Como el núcleo de u es el subgrupo $H = \bigcap_{\chi \in G^\wedge} \ker \chi$, se puede factorizar $u = \widetilde{u} \circ \varphi$, siendo $\varphi : G \to G/H$ la aplicación canónica. $\widetilde{u}$ es un encajamiento y dado que, por el teorema de Tychonoff,

$\mathbb{T}^{G^\wedge}$ es un espacio topológico compacto, se deduce que $(G, \sigma(G, G^\wedge))/H$ es precompacto. Teniendo en cuenta (13.11) que $(G, \sigma(G, G^\wedge))/H$ es el grupo de Hausdorff asociado a G y que, por lo tanto, para todo $\sigma(G, G^\wedge)$-entorno de cero abierto U se cumple $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U$ (1.13), es inmediato que $(G, \sigma(G, G^\wedge))$ es también precompacto. □

13.15. A continuación vamos a describir de forma intrínseca los entornos de cero para la topología de Bohr en $\mathbb{R}$, utilizando la determinación de $\mathbb{R}^\wedge$:

(a) *Los conjuntos de la forma*

$$[-\varepsilon, \varepsilon] + a\mathbb{Z}, \quad a > 0,\ \varepsilon > 0$$

forman una subbase de entornos de 0 para la topología de Bohr en $\mathbb{R}$. De hecho se cumple, para todos $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$[-\frac{a}{4n}, \frac{a}{4n}] + a\mathbb{Z} = \chi_{1/a}^{-1}(T_n) = \{\chi_{1/a}, \chi_{1/a}^2, \dots, \chi_{1/a}^n\}^{\triangleleft}$$

donde la notación χ_λ se usa en el mismo sentido que en 13.1(a). En efecto,

$$\begin{aligned}
\chi_{1/a}(x) \in T_n \quad &\Leftrightarrow \quad \exp(2\pi i\frac{1}{a}x) \in \mathbb{T}[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}] \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{a}x \in [-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}] + 2\pi\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-\frac{a}{4n}, \frac{a}{4n}] + a\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia directa de (13.1).

(b) $(\mathbb{R}, \sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge))$ no tiene entornos acotados de cero, es decir, en cualquier intersección finita de conjuntos del tipo $[-\varepsilon, \varepsilon] + a\mathbb{Z}$, $a > 0$, $\varepsilon > 0$ hay elementos de valor absoluto arbitrariamente grande. La demostración de este resultado aparece en [**19**] y en [**29**, Lemma 2.2], aunque se puede deducir de forma inmediata del hecho de que $(\mathbb{R}, \sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge))$ es un grupo topológico precompacto (Prop. 13.14).

13.3. Topologías en $G^\wedge$. En $G^\wedge = \mathrm{CHom}(G, \mathbb{T})$ vamos a considerar topologías construidas de acuerdo con las definiciones de la Sec. 8.

13.16. (Prop. 8.5) Los conjuntos de la forma $\{x\}^{\triangleright}$, con $x \in G$, forman una subbase de entornos del neutro en $G^\wedge$ para la topología de la convergencia puntual, que denotaremos habitualmente por $\sigma(G^\wedge, G)$. Como esta topología coincide con la inducida en $G^\wedge$ por la topología producto de $\mathbb{T}^G$ (8.3), se deduce que $(G^\wedge, \sigma(G^\wedge, G))$ es un grupo precompacto.

$\sigma(G^\wedge, G)$ también se puede definir (11.7) como la topología inicial en $G^\wedge$ con respecto a la familia de homomorfismos

$$\mathrm{ev}_x : G^\wedge \to \mathbb{T}, \quad x \in G.$$

13.17. De acuerdo con la Prop. 8.8 y teniendo en cuenta (Ejemplo 6.3) que $\mathbb{T}$ es un n-grupo,

- los conjuntos de la forma $K^{\triangleright}$, con K subconjunto compacto de G, forman una base de entornos del neutro para la topología $\tau_{\mathcal{K}}$ en $G^\wedge$.

- los conjuntos de la forma $P^{\triangleright}$, con P subconjunto precompacto de G, forman una base de entornos del neutro para la topología $\tau_{\mathcal{PC}}$ en $G^{\wedge}$.

Debido a la importante propiedad recogida en el Teor. 13.37, al grupo $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ se le denomina a menudo *dual de Pontryagin* del grupo G.

PROPOSICIÓN 13.18. *Sea G un grupo abeliano topológico. Para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$, el conjunto $U^{\triangleright}$ es compacto en la topología $\tau_{\mathcal{PC}}$ (y en particular en $\tau_{\mathcal{K}}$).*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 9.10, teniendo en cuenta que $U^{\triangleright}$ es equicontinuo por definición, y cerrado en la topología $\tau_{\mathcal{PC}}$ (de hecho $\sigma(G^{\wedge}, G)$-cerrado); y que $\mathbb{T}$ es compacto. □

NOTA 13.19. Notar que el carácter compacto de $U^{\triangleright}$ en la topología $\sigma(G^{\wedge}, G)$ se deduce fácilmente del hecho de que $U^{\triangleright}$ es un subconjunto completo de $\mathbb{T}^G$, dotado de la topología producto: si $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ es una red puntualmente de Cauchy en $U^{\triangleright}$, existe para cada $x \in G$ $\chi(x) = \lim_\alpha \chi_\alpha(x) \in \mathbb{T}$ y claramente χ es un carácter; además es continuo ya que la red (χ_α) es equicontinua (cf. Prop. 9.3).

TEOREMA 13.20. *Sea G un grupo localmente compacto abeliano. Entonces $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un entorno compacto de cero en G. $U^{\triangleright}$ es un entorno de cero en $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ (13.17) y es compacto por la Prop. 13.18. Luego $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ es localmente compacto, ya que tiene un entorno compacto del neutro (1.11). □

TEOREMA 13.21. *Sea G un grupo abeliano topológico.*

(a) *Si G es discreto entonces $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ es compacto.*
(b) *Si G es compacto entonces $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Si G es discreto, $\{0\} \in \mathcal{N}_0(G)$ y por lo tanto $\{0\}^{\triangleright} = G^{\wedge}$ es $\tau_{\mathcal{K}}$-compacto (Prop. 13.18). Alternativamente, en este caso, $\mathfrak{F}(G) = \mathcal{K}(G) = \mathcal{PC}(G)$ y por lo tanto las topologías asociadas a todas estas familias coinciden; el grupo $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}}) = (G^{\wedge}, \sigma(G^{\wedge}, G))$ es precompacto (13.16) y completo, ya que el límite puntual de una red de Cauchy en $(G^{\wedge}, \sigma(G^{\wedge}, G))$, que existe por ser $\mathbb{T}$ completo, es automáticamente continuo por ser G discreto.

(b) Si G es compacto, $G^{\triangleright}$ es un $\tau_{\mathcal{K}}$-entorno del neutro, pero $G^{\triangleright}$ está formado solamente por el carácter trivial. Luego $(G^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$ es discreto.

□

13.22. (a) El isomorfismo de grupos abelianos definido entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{\wedge}$ en 13.1(a) es un isomorfismo topológico si dotamos a $\mathbb{R}$ de la topología usual y a $\mathbb{R}^{\wedge}$ de la compacto-abierta. [Para todo $r > 0$ se verifica

$$[\ \exp(2\pi i\lambda s) \in \mathbb{T}_+\ \forall s \in [-r, r]\ ] \Leftrightarrow \lambda \in [-\frac{1}{4r}, \frac{1}{4r}] \tag{13.2}$$

(es decir, $\chi_\lambda \in [-r, r]^{\triangleright} \Leftrightarrow \lambda \in [-\frac{1}{4r}, \frac{1}{4r}]$) ya que $\exp(2\pi i\lambda[-r, r]) \subset \mathbb{T}_+ \Rightarrow \lambda[-r, r] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] + \mathbb{Z} \Rightarrow |\lambda| r \leq \frac{1}{4}$.] Análogamente para el isomorfismo asociado definido entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}^{\wedge}$.

(b) El isomorfismo de grupos abelianos definido entre $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}^\wedge$ en 13.1(b) es un isomorfismo topológico si dotamos a $\mathbb{T}$ de la topología usual y a $\mathbb{Z}^\wedge$ de la compacto-abierta (equivalentemente, de la topología de la convergencia puntual). [Basta tener en cuenta que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [t \in T_n \Leftrightarrow \chi_t \in \{-n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1, n\}^{\triangleright}]$$

debido al Cor. 3.7.]

(c) El isomorfismo de grupos abelianos definido entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}^\wedge$ en 13.1(c) es un isomorfismo topológico si dotamos a $\mathbb{Z}$ de la topología usual y a $\mathbb{T}^\wedge$ de la compacto-abierta (equivalentemente, de la topología de la convergencia uniforme). [Basta tener en cuenta que los dos grupos son discretos (Teor. 13.21(b)).]

13.23. Dados dos grupos abelianos topológicos G y H y un homomorfismo de grupos continuo $\varphi : G \to H$, se puede definir el llamado *homomorfismo dual* de φ de la siguiente forma:

$$\varphi^\wedge : H^\wedge \to G^\wedge, \quad \varphi^\wedge(\chi) = \chi \circ \varphi.$$

Es inmediato que $\varphi^\wedge$ está bien definido y es continuo considerando en $H^\wedge$ y $G^\wedge$ simultáneamente las topologías de la convergencia uniforme en subconjuntos finitos (resp., precompactos, compactos).

13.4. Grupos localmente cuasiconvexos. El concepto de cuasiconvexidad local es una traducción a grupos del hecho (debido al Teorema de Hahn-Banach) de que en cualquier espacio localmente convexo los bipolares de entornos de cero forman a su vez una base de entornos de cero. Debido a que en grupos no disponemos del concepto de convexidad, esta caracterización de la convexidad local en términos del dual es la que se generaliza más fácilmente a nuestro contexto de grupos abelianos topológicos.

Definición 13.24. Sea G un grupo abeliano topológico. Se dice que un subconjunto A de G es *cuasiconvexo* cuando $A^{\triangleright\triangleleft} = A$, es decir, cuando se verifica la siguiente propiedad:

$$\forall x \in G \setminus A \quad \exists \chi \in G^\wedge, \quad \chi(A) \subset \mathbb{T}_+, \quad \chi(x) \notin \mathbb{T}_+.$$

13.25. Algunas propiedades elementales de los conjuntos cuasiconvexos son:

(a) Todo subconjunto cuasiconvexo contiene al cero y es cerrado en la topología de Bohr.

(b) Un subgrupo es cuasiconvexo si y sólo si es dualmente cerrado.

(c) La intersección de subconjuntos cuasiconvexos es un subconjunto cuasiconvexo.

(d) La imagen inversa de un subconjunto cuasiconvexo por un homomorfismo continuo de grupos es un subconjunto cuasiconvexo.

(e) Un entorno de cero en un grupo abeliano topológico (G, τ_G) es τ_G-cuasiconvexo si y sólo si es τ_d-cuasiconvexo, siendo τ_d la topología discreta en G. [Es consecuencia inmediata de que, debido a 13.2(a), para entornos de cero el polar algebraico coincide con el topológico.]

Proposición 13.26. *Sea G un grupo abeliano topológico y A un subconjunto cuasiconvexo de G. Entonces A es un conjunto de Kaplan en G.*

Demostración. Sean x un elemento de G y n un número natural tales que la sucesión finita $x,\ 2x,\ 2^2x,\ \ldots, 2^nx$ está contenida en A. Tenemos que demostrar que para todo $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, se cumple $kx \in A$. Fijamos un tal k; como A es cuasiconvexo es suficiente probar que $kx \in A^{\triangleright\triangleleft}$. Sea $\chi \in A^{\triangleright}$. La sucesión finita $\chi(x),\ \chi(x)^2,\ \chi(x)^{2^2},\ \chi(x)^{2^n}$ está contenida en $\mathbb{T}_+$ y por lo tanto (Prop. 3.8) $\chi(x) \in T_{2^n}$. En particular $\chi(kx) = \chi(x)^k \in \mathbb{T}_+$. $\square$

Ejemplo 13.27. (a) *Los conjuntos $[-r, r]$ $(r > 0)$ son cuasiconvexos en $\mathbb{R}$ con su topología usual. [Es consecuencia del isomorfismo $\lambda \in \mathbb{R} \leftrightarrow \chi_\lambda \in \mathbb{R}^\wedge$ (13.1(a)), y la relación*

$$\chi_\lambda \in [-r, r]^{\triangleright} \Leftrightarrow \lambda \in [-\frac{1}{4r}, \frac{1}{4r}]$$

demostrada en 13.22(a)]

(b) *Los conjuntos T_n $(n \in \mathbb{N})$ son cuasiconvexos en $\mathbb{T}$ con su topología usual. [Basta tener en cuenta que $T_n = (\mathbb{T}_+)_{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Cor. 3.7): si $x \notin T_n$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $t^k \notin \mathbb{T}_+$; el carácter continuo χ_k (13.1(c)) definido por $\chi_k(s) = s^k \quad \forall s \in \mathbb{T}$ es tal que $\chi_k(t) \notin \mathbb{T}_+, \quad \chi_k \in T_n^{\triangleright}$. De aquí, $T_n{}^{\triangleright\triangleleft} \subset T_n$.] Se demuestra en* [**4**, Ex. 6.4] *que los únicos entornos del neutro conexos y cuasiconvexos en $\mathbb{T}$ son el propio $\mathbb{T}$ y los conjuntos T_n, $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 13.28. *Sea G un grupo abeliano topológico y B un subconjunto de $G^\wedge$. El polar inverso $B^{\triangleleft}$ es un subconjunto cuasiconvexo de G. En efecto, es inmediato que $B \subset B^{\triangleleft\triangleright}$; y por lo tanto, $B^{\triangleleft\triangleright\triangleleft} \subset B^{\triangleleft} \Rightarrow B^{\triangleleft\triangleright\triangleleft} = B^{\triangleleft}$.*

Definición 13.29. Sea G un grupo abeliano topológico. Se dice que G es *localmente cuasiconvexo* cuando G admite una base de entornos de cero formada por conjuntos cuasiconvexos.

13.30. Notar que, debido a 13.25(c), en esta definición podemos sustituir "base de entornos" por "subbase de entornos".

Ejemplo 13.31. *Los grupos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$, con sus topologías usuales, son localmente cuasiconvexos. [Es consecuencia del Ej. 13.27 y del hecho de que las familias de conjuntos allí descritas son bases de entornos del neutro.]*

El grupo abeliano topológico subyacente a un espacio vectorial topológico real E es localmente cuasiconvexo si y sólo si E es un espacio localmente convexo ([**7**, Prop. 2.4]*; una versión más general de este resultado es el Teor. 18.3(b)).*

La introducción de los conceptos de subconjunto cuasiconvexo y grupo localmente cuasiconvexo se remonta a 1951 y es debida a Vilenkin, aunque fue Banaszczyk ([**7**]) quien retomó y utilizó sistemáticamente la noción de cuasiconvexidad local como análoga a la de convexidad local en espacios vectoriales topológicos. A continuación recogemos algunos resultados relacionados con este concepto, de entre los más significativos para nuestros propósitos.

13.32. Es claro que todo grupo localmente cuasiconvexo y de Hausdorff es en particular dualmente separado.

13.33. Si $G_i,\ i \in I$ son grupos localmente cuasiconvexos, G es un grupo abeliano y $u_i : G \to G_i$ es un homomorfismo de grupos, para todo $i \in I$, entonces la topología inicial $\mathcal{T}_0$ en G con respecto a la familia de homomorfismos $u_i,\ i \in I$ es localmente cuasiconvexa. [Por la Prop. 11.1, los conjuntos de la forma $u_i^{-1}(U_i),\quad U_i \in \mathcal{N}_0(G_i),\quad i \in I$ forman una subbase de entornos de cero para $\mathcal{T}_0$; cada uno de ellos es $\mathcal{T}_0$-cuasiconvexo si U_i lo es (13.25(d)).] En particular

- el producto de grupos localmente cuasiconvexos es localmente cuasiconvexo,
- todo subgrupo de un grupo localmente cuasiconvexo es localmente cuasiconvexo con la topología inducida,
- la topología de Bohr de un grupo abeliano topológico arbitrario siempre es localmente cuasiconvexa.

13.34. El análogo a 13.33 para topologías finales no es cierto; el estudio del carácter localmente convexo de la suma directa proporciona contraejemplos en este sentido (Cor. 15.9). Existen además multitud de ejemplos de grupos localmente cuasiconvexos que admiten cocientes de Hausdorff no localmente cuasiconvexos. En [**4**, 12.8] se demuestra de hecho que cualquier grupo abeliano de Hausdorff es topológicamente isomorfo a un cociente de un grupo localmente cuasiconvexo. Como ejemplo concreto, se puede comprobar que el cociente $l_p/\mathbb{Z}_0^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbb{Z}_0^{\mathbb{N}}$ denota el subgrupo de l_p formado por las sucesiones de elementos enteros y eventualmente nulas, no es localmente cuasiconvexo para ningún $p \in]1, \infty[$, mientras que sí lo son los cocientes $l_1/\mathbb{Z}_0^{\mathbb{N}},\quad c_0/\mathbb{Z}_0^{\mathbb{N}}$ (notar que el grupo abeliano topológico subyacente a un espacio normado es localmente cuasiconvexo (Ej. 13.31)). Existen incluso cocientes de Hausdorff, con dual trivial, de espacios de Banach ([**7**, 5.1]).

13.35. ([**17**, Prop. 3.4]) Sea G un grupo abeliano topológico, y $\mathfrak{S}$ una familia no vacía de subconjuntos de G. El grupo dual $G^\wedge$, dotado de la topología $\tau_{\mathfrak{S}}$ (Sec. 8) es siempre localmente cuasiconvexo. [Sea $\overline{\mathfrak{S}}$ la familia bien dirigida asociada a $\mathfrak{S}$ (8.9). Para cada $S \in \overline{\mathfrak{S}}$, y cada $\chi \in G^\wedge \setminus S^\triangleright$, existe un $x \in S$ tal que $\chi(x) \notin \mathbb{T}_+$; el carácter $\varphi \in G^\wedge \mapsto \kappa(\varphi) = \varphi(x) \in \mathbb{T}$ pertenece a $S^{\triangleright\triangleright}$ (y en particular es $\tau_{\overline{\mathfrak{S}}}$-continuo, 13.2(a)) pero $\kappa(\chi) \notin \mathbb{T}_+$. Por lo tanto, los polares de los conjuntos de $\overline{\mathfrak{S}}$ forman una base de entornos de cero (Prop. 8.8) localmente cuasiconvexos para la topología $\tau_{\overline{\mathfrak{S}}} = \tau_{\mathfrak{S}}$.] Como consecuencia, las topologías $\sigma(G^\wedge, G),\ \tau_{\mathcal{PC}},\ \tau_{\mathcal{K}}$ en $G^\wedge$ son localmente cuasiconvexas. Se demuestra en [**17**, Prop. 3.9] que, de hecho, toda topología localmente cuasiconvexa en $G^\wedge$ es una $\mathfrak{S}$-topología.

Proposición 13.36. *Sea (G, τ) un grupo abeliano topológico. La familia $\{U^{\triangleright\triangleleft} : U \in \mathcal{N}_0(G)\}$ es una base de entornos de cero en G para una topología de grupo τ_{qc}. τ_{qc} es la mayor topología localmente cuasiconvexa en G entre las menores o iguales que τ, y se verifica que (G, τ) y (G, τ_{qc}) tienen los mismos caracteres continuos.*

Demostración. Este resultado aparece demostrado en [**4**, Prop. 6.18], o en [**13**, 4.6]. □

13.5. Grupos Pontryagin-reflexivos. Sea G un grupo abeliano topológico. Consideremos el homomorfismo $\alpha_G : G \to (G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge$, definido por $\alpha_G(x)(\chi) = \chi(x)$, para todos $\chi \in G^\wedge$ y $x \in G$.

Es claro que α_G está bien definido; de hecho, $\alpha_G(x)$ es un carácter $\sigma(G^\wedge, G)$-continuo para todo $x \in G$ ya que $\alpha_G(x)(\{x\}^\triangleright) \subset \mathbb{T}_+$ (13.2(a)).

El siguiente resultado fundamental se debe a Pontryagin y Van Kampen:

TEOREMA 13.37. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano de Hausdorff, y consideremos en $(G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge$ la topología compacto-abierta. Entonces α_G es un isomorfismo topológico.*

En general se dirá que un grupo abeliano topológico G es

- *Pontryagin-semirreflexivo* o simplemente *semirreflexivo* cuando $\alpha_G : G \to (G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge$ es sobreyectivo,
- *Pontryagin-reflexivo,* o simplemente *reflexivo,* cuando $\alpha_G : G \to ((G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ es un isomorfismo topológico, y
- *fuertemente reflexivo* cuando todos los subgrupos cerrados y los cocientes de Hausdorff de G y de $(G^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ son reflexivos.

El Teorema de Pontryagin-Van Kampen (Teor. 13.37) se puede reformular, por lo tanto, como el hecho de que todos los grupos localmente compactos abelianos y de Hausdorff son Pontryagin-reflexivos. Sin embargo, el carácter localmente compacto no es necesario para que un grupo abeliano topológico sea reflexivo, como muestra el hecho de que los productos arbitrarios de grupos reflexivos resultan ser reflexivos ([**53**]), o el de que, como se deduce de lo siguiente, existen espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita (y por lo tanto no localmente compactos, [**10**, Ch. I, §2.4, Th. 3]) cuyos grupos subyacentes son Pontryagin-reflexivos :

13.38. Recordamos el concepto usual de espacio localmente convexo reflexivo: Para un espacio localmente convexo E consideramos el dual fuerte E^*_β de E (8.10) y definimos la aplicación lineal canónica $c_E : x \in E \mapsto c_E(x) \in (E^*_\beta)^*$, donde $c_E(x)(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in E^*$. Si c_E resulta ser un isomorfismo topológico entre los espacios localmente convexos E y $(E^*_\beta)^*_\beta$, se dice que E es un espacio localmente convexo reflexivo. Se demuestra en [**81**] que los grupos abelianos topológicos subyacentes a los espacios localmente convexos reflexivos y a *todos* los espacios de Banach son Pontryagin-reflexivos (posteriormente se generalizó en [**7**, Prop. 15.2] a espacios localmente convexos metrizables y completos). Dado que existen espacios de Banach no reflexivos en el sentido de los espacios localmente convexos, se deduce que en esta clase el carácter reflexivo en el sentido de Pontryagin del grupo subyacente no implica el carácter reflexivo del espacio.

13.39. Los ejemplos canónicos de grupos fuertemente reflexivos son los grupos localmente compactos y abelianos, ya que sus grupos duales, dotados de la topología compacto-abierta, son localmente compactos (Teor. 13.20) y claramente, también lo son sus subgrupos cerrados y sus cocientes de Hausdorff. Otra amplia clase de grupos fuertemente reflexivos se menciona en 28.8(f).

Si G es fuertemente reflexivo, todos los subgrupos cerrados de G son dualmente cerrados; y todos los subgrupos de G están dualmente embebidos en G (Prop. 17.1 en [**7**]).

13.40. Es útil tener en cuenta las siguientes reformulaciones elementales de algunas de las propiedades incluidas en la definición de grupo reflexivo:

(a) $\alpha_G : G \to (G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge$ es inyectiva si y sólo si G es un grupo dualmente separado.

(b) $\alpha_G : G \to ((G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ es continua si y sólo si los subconjuntos compactos de $(G^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ son equicontinuos. [Por la descripción por base de entornos de la topología $\tau_\mathcal{K}$ (13.17), α_G es continua si y sólo si para todo subconjunto compacto K de $(G^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $\alpha_G(U) \subset K^\triangleright$; pero esto es claramente equivalente a $K \subset U^\triangleright$; es decir, K ha de ser equicontinuo (13.2(b)).]

Una consecuencia inmediata de 13.40(b) y del Teorema 9.8 es el siguiente resultado:

Teorema 13.41. *Si G es un k-grupo, entonces $\alpha_G : G \to ((G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ es continua.*

Todo grupo Pontryagin-reflexivo G es topológicamente isomorfo al dual de $(G^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ con la topología compacto-abierta, y en particular es localmente cuasiconvexo (13.35). En el sentido opuesto tenemos el siguiente resultado parcial:

Proposición 13.42. *Si G es un grupo localmente cuasiconvexo y de Hausdorff, entonces $\alpha_G : G \to ((G^\wedge, \tau_\mathcal{K})^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ es inyectiva y abierta sobre la imagen.*

Demostración. α_G es inyectiva ya que G es dualmente separado (13.32). Para demostrar el carácter abierto tenemos que probar que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe un subconjunto compacto K de $(G^\wedge, \tau_\mathcal{K})$ con $\alpha_G(G) \cap K^\triangleright \subset \alpha_G(U)$. Dado $U \in \mathcal{N}_0(G)$, el conjunto $K = U^\triangleright$ es $\tau_\mathcal{K}$-compacto (Prop. 13.18). Por otra parte es inmediato que $\alpha_G(U^{\triangleright\triangleleft}) = \alpha_G(G) \cap U^{\triangleright\triangleright}$ y basta tener en cuenta que G es localmente cuasiconvexo. □

13.6. Caracteres reales. Sea G un grupo abeliano topológico. Llamaremos *carácter real* de G (cf. [**41**, 24.33]) a cualquier homomorfismo de grupos $f : G \to \mathbb{R}$. No utilizaremos una notación especial para el grupo de los caracteres reales continuos $\mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$.

Se puede desarrollar una teoría de dualidad para grupos abelianos topológicos tomando $\mathbb{R}$ en vez de $\mathbb{T}$ como grupo base; aquí sólo recogeremos algunos resultados que necesitaremos más adelante, referidos especialmente a la relación entre caracteres reales y complejos sobre un grupo G.

13.43. A continuación caracterizaremos los grupos de caracteres reales continuos de algunos grupos abelianos topológicos representativos:

(a) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico. Cualquier carácter real continuo de E es un elemento de E^*. [Sea $f \in \mathrm{CHom}(E, \mathbb{R})$; tenemos que demostrar que f es homogénea. Es claro que para todos $n \in \mathbb{Z}$, $x \in E$ se cumple $f(nx) = nf(x)$. Si $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, se verifica

$$pf(x) = f(px) = f(q\frac{p}{q}x) = qf(\frac{p}{q}x)$$

y como consecuencia f es homogénea para escalares racionales. Finalmente, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in E$, determinamos una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathbb{Q}$ y tal que $r_n \to \lambda$; como E es un espacio vectorial topológico se cumple $r_n x \to \lambda x$ y por ser f continua, $r_n f(x) = f(r_n x) \to f(\lambda x)$. Como además $r_n f(x) \to \lambda f(x)$, se deduce $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.] En particular, la aplicación $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto f_\lambda \in \mathrm{CHom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, definida por $f_\lambda(\mu) = \lambda\mu$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

(b) Sea G un grupo abeliano topológico precompacto; entonces $\mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}) = \{0\}$. [Si $f \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$, $f(G)$ es un subgrupo precompacto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto $f(G) = \{0\}$.] En particular $\mathbb{T}$ no tiene caracteres reales continuos no triviales.

(c) La aplicación $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto f_\lambda \in \mathrm{CHom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, definida por $f_\lambda(n) = n\lambda$ para todos $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es claramente un isomorfismo de grupos abelianos.

La siguiente definición es totalmente análoga a la correspondiente con grupo base $\mathbb{T}$:

DEFINICIÓN 13.44. Sea G un grupo abeliano topológico. Se dirá que $\mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ *separa puntos de* G cuando para todo $x \in G$, $x \neq 0$, existe un $f \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ tal que $f(x) \neq 0$; equivalentemente, cuando para todos x, y elementos distintos de G, existe un $f \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Todo carácter real da lugar a un carácter complejo mediante composición con $\rho : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(2\pi i x) \in \mathbb{T}$, lo que conduce a conjeturar la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 13.45. *Sea G un grupo abeliano topológico. Si $CHom(G, \mathbb{R})$ separa puntos de G, entonces $G^\wedge$ también separa puntos de G.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in G$ tal que $\chi(x) = 1$ para todo $\chi \in G^\wedge$. En particular para todo $f \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ se tiene $\rho(f(x)) = 1$, es decir, $f(x) \in \mathbb{Z}$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

es una forma lineal sobre el subespacio vectorial $\mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^G$, y dado que su imagen está contenida en $\mathbb{Z}$, ha de ser nula. Por hipótesis, $x = 0$. $\square$

NOTA 13.46. La implicación inversa a la demostrada en la Prop. 13.45 es claramente falsa en general. De hecho, si G es un grupo abeliano topológico con algún subgrupo precompacto no trivial, $\mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ no separa puntos de G (si $C \neq \{0\}$ es un subgrupo precompacto de G y $f \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$, $f(C) = \{0\}$ por 13.43(b)) y existen multitud de ejemplos de grupos que tienen subgrupos precompactos no triviales y admiten suficientes caracteres continuos (por ejemplo, cualquier grupo compacto y de Hausdorff no trivial, cf. Ej. 13.5).

Análogamente al caso de la topología de Bohr, dado un grupo abeliano topológico G denotaremos por $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$ la topología en G inicial con respecto al conjunto de sus caracteres reales continuos. Teniendo en cuenta la Prop. 11.1 y el hecho de que $\lambda u \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$, es claro que los conjuntos de la forma

$$u^{-1}[-1, 1], \qquad u \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$$

forman una subbase de entornos de cero para $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$, y que esta topología es separada si y sólo si los caracteres reales continuos separan puntos de G.

13.47. Entre las topologías $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$ y $\sigma(G, G^\wedge)$ no hay ninguna relación de contenido válida en general:

(a) Para $G = \mathbb{T}$ la topología $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$ es estrictamente menos fina que $\sigma(G, G^\wedge)$: dado que el único carácter real continuo de $\mathbb{T}$ es el trivial (13.43(b)), $\sigma(\mathbb{T}, \mathrm{CHom}(\mathbb{T}, \mathbb{R}))$ es la topología indiscreta en $\mathbb{T}$, mientras que $\sigma(\mathbb{T}, \mathbb{T}^\wedge) = \sigma(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$ (13.1(c)) es la topología usual de $\mathbb{T}$ (1.1).

(b) Si E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico no trivial y con suficientes funcionales lineales continuos, la topología $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$ es estrictamente más fina que $\sigma(G, G^\wedge)$: como los caracteres reales continuos de E son sus formas lineales continuas (13.43(a)), $(E, \sigma(E, \mathrm{CHom}(E, \mathbb{R}))) = (E, \sigma(E, E^*))$ es un espacio vectorial topológico no trivial y de Hausdorff, y por tanto no puede ser precompacto (cf. [**10**, Ch. I, §2.4, Théor. 3]), luego $\sigma(E, E^\wedge)$ y $\sigma(E, E^*)$ son distintas; el hecho de que $\sigma(E, E^*)$ es más fina que $\sigma(E, E^\wedge)$ es una consecuencia inmediata de que todo carácter continuo de E es de la forma $\rho \circ f$, donde $f \in E^*$ y $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es el homomorfismo definido en la Subsec. 2.1 ([**41**, 23.32], o bien Prop. 17.8).

13.48. Como muestra el último ejemplo, una forma natural de obtener caracteres reales continuos es *levantando* a $\mathbb{R}$ los complejos (se dirá que un carácter real $f : G \to \mathbb{R}$ se obtiene levantando el carácter complejo $\chi : G \to \mathbb{T}$ cuando $\chi = \rho \circ f$). Es claro que si un grupo abeliano topológico G es tal que todo carácter continuo de G se puede levantar a algún carácter real continuo, entonces la topología $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$ hace continuos todos los elementos de $G^\wedge$ y por lo tanto es más fina que $\sigma(G, G^\wedge)$.

Un primer resultado de levantamiento es la siguiente Proposición, adaptada de [**41**, 24.43], donde se demuestra en el caso localmente compacto. En su enunciado, los grupos duales se consideran dotados de la topología compacto-abierta y, se utiliza la denominación habitual de *subgrupo uniparamétrico* de un grupo abeliano topológico G para el subgrupo imagen de un homomorfismo de grupos continuo $\varphi : \mathbb{R} \to G$.

PROPOSICIÓN 13.49. *Sea G un grupo abeliano topológico.*

(a) *Todo carácter de G que se puede levantar a $\mathbb{R}$ pertenece a la unión de los subgrupos uniparamétricos de $G^\wedge$.*

(b) *Si α_G es continua, todo carácter de G que pertenezca a la unión de los subgrupos uniparamétricos de $G^\wedge$ se puede levantar a $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $\chi \in G^\wedge$ un carácter tal que existe $f \in \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R})$ con $\chi = \rho \circ f$. Es claro que entonces $\chi \in \varphi(\mathbb{R})$, siendo $\varphi : \mathbb{R} \to G^\wedge$ el homomorfismo continuo definido por $\varphi(\lambda) = \exp(2\pi i \lambda f)$.

(b) Fijamos un carácter χ perteneciente a la unión de los subgrupos uniparamétricos de $G^\wedge$. Sea $\chi = \varphi(1)$, siendo $\varphi : \mathbb{R} \to G^\wedge$ un homomorfismo continuo. Consideramos el homomorfismo dual $\varphi^\wedge : G^{\wedge\wedge} \to \mathbb{R}^\wedge$, definido por $\varphi^\wedge(\kappa) = \kappa \circ \varphi$ (13.23). Sea $\psi : \mathbb{R}^\wedge \to \mathbb{R}$ el isomorfismo topológico descrito en 13.1(a) y 13.22(a). El homomorfismo continuo $f = \psi \circ \varphi^\wedge \circ \alpha_G$ es un levantamiento de χ. En efecto, por la definición de ψ, para todo $x \in G$ se tiene $(\varphi^\wedge \circ \alpha_G)(x)(1) = \exp(2\pi i f(x))$, es decir, $\chi(x) = \varphi(1)(x) = \alpha_G(x)(\varphi(1)) = \exp(2\pi i f(x))$.

□

El siguiente resultado, debido a Dixmier ([**26**, Théor. 1]) en el caso localmente compacto y a Nickolas ([**62**, p. 137]) en su formulación general, da condiciones de carácter puramente topológico en las que es posible el levantamiento descrito en la Prop. 13.49.

TEOREMA 13.50. *Sea G un grupo abeliano topológico que además es k-espacio. Entonces la componente conexa por caminos del neutro en $G^\wedge$ coincide con la unión de todos los subgrupos uniparamétricos de $G^\wedge$. En particular (Prop. 13.49(b)) todo carácter contenido en esta componente se puede levantar a $\mathbb{R}$.*

14. Las pseudonormas $||\cdot||_V$

La topología de un grupo abeliano topológico G puede generarse siempre a partir de una familia de pseudonormas (Teor. 4.7). En el caso localmente cuasiconvexo, análogamente a lo que ocurre en los espacios localmente convexos (cf. Cor. 1.18), estas pseudonormas pueden definirse en términos de los polares de entornos de cero.

DEFINICIÓN 14.1. Sea G grupo abeliano topológico. Para cada $V \subset G$ no vacío y cada $x \in G$, se define la pseudonorma

$$||x||_V = \sup_{\chi \in V^\triangleright} |1 - \chi(x)|$$

Es inmediato que $||\cdot||_V$ verifica las condiciones de pseudonorma (Def. 4.1). Notar que si $V \in \mathcal{N}_0(G)$ el supremo que define $||x||_V$ se alcanza por el carácter compacto de $V^\triangleright$ en las topologías consideradas en $G^\wedge$ (Prop. 13.18, Nota 13.19).

PROPOSICIÓN 14.2. *Sean G un grupo abeliano topológico y V un subconjunto no vacío de G.*

(a) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$(V^{\triangleright\triangleleft})_{(n)} = \{x \in G : ||x||_V \leq 2sen\frac{\pi}{4n}\}.$$

En particular $V^{\triangleright\triangleleft} = \{x \in G : ||x||_V \leq \sqrt{2}\}$.

(b) *Si V es cuasiconvexo, $V_{(n)}$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$ y se tiene la igualdad*

$$V_{(n)} = \{x \in G : ||x||_V \leq 2sen\frac{\pi}{4n}\}.$$

(c) *Si V es un entorno de cero, $||\cdot||_V$ es una pseudonorma continua en G.*

Demostración. (a) Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned} ||x||_V \leq 2\text{sen}\frac{\pi}{4n} &\overset{\text{Cor. 3.7}}{\Longleftrightarrow} \forall \chi \in V^{\triangleright} \ \ \chi(x) \in (\mathbb{T}_+)_{(n)} \\ &\Longleftrightarrow \forall \chi \in V^{\triangleright} \ \forall k \in \{1,\ldots,n\} \ \ \chi(x)^k = \chi(kx) \in \mathbb{T}_+ \\ &\Longleftrightarrow x \in (V^{\triangleright\triangleleft})_{(n)}. \end{aligned}$$

(b) La igualdad es consecuencia inmediata de (a). El hecho de que $V_{(n)}$ es cuasiconvexo si lo es V se deduce de 13.25(c) y 13.25(d), ya que $V_{(n)} = \bigcap_{k=1}^{n} u_k^{-1}(V)$ donde $u_k : x \in G \mapsto kx \in G,\ k \in \{1,\ldots,n\}$ son claramente homomorfismos continuos.

(c) Si V es un entorno de cero, $V_{(n)}$ también lo es, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, y se tiene $V_{(n)} \subset (V^{\triangleright\triangleleft})_{(n)} = \{x \in G : ||x||_V \leq 2\text{sen}\frac{\pi}{4n}\}$.

□

Proposición 14.3. *Sea G un grupo abeliano topológico. G es localmente cuasiconvexo si y sólo si la familia de pseudonormas $\{||\cdot||_V, \quad V \in \mathcal{N}_0(G)\}$ genera la topología de G.*

Demostración. Si G es localmente cuasiconvexo, los conjuntos del tipo $V^{\triangleright\triangleleft} = \{x \in G : ||x||_V \leq \sqrt{2}\},\quad V \in \mathcal{N}_0(G)$ (Prop. 14.2(a)) forman una base de entornos de cero. Si las pseudonormas $||\cdot||_V$, con $V \in \mathcal{N}_0(G)$, generan la topología de G, en particular los conjuntos de la forma $\{x \in G : ||x||_V \leq 2\text{sen}\frac{\pi}{4n}\} = (V^{\triangleright\triangleleft})_{(n)}$ (Prop. 14.2(a)), con $V \in \mathcal{N}_0(G)$, forman una subbase de entornos de cero en G. Por la Prop. 14.2(b) estos conjuntos son cuasiconvexos, de forma que (13.30) G es localmente cuasiconvexo. □

A continuación veremos la relación entre la pseudonorma $||\cdot||_V$ y el funcional k_V :

Lema 14.4. *Sea G un grupo abeliano topológico y V un subconjunto no vacío de G. Entonces*

(a) $\|x\|_V \leq \pi k_V(x) \quad \forall x \in G$.

(b) *Si V es cuasiconvexo, entonces* $\sqrt{2}k_V(x) \leq \|x\|_V \quad \forall x \in G$.

Demostración. (a) es evidente si $x \notin V$ (ya que $\|x\|_V \leq 2 < \pi$ y $k_V(x) = 1$). Supongamos por lo tanto que $x \in V$. Si $k_V(x) = 0$, se deduce que $x \in V_{(n)} \subset (V^{\triangleright\triangleleft})_{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por la Prop. 14.2(a), $||x||_V = 0$. Si $k_V(x) = \frac{1}{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in V_{(n)}$ y de nuevo por la Prop. 14.2(a),

$$||x||_V \leq 2\text{sen}\,\frac{\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{2n} \leq \pi k_V(x).$$

(b) Si $x \notin V$, $k_V(x) = 1$ y por ser V cuasiconvexo (Prop. 14.2(b)) se tiene $||x||_V > \sqrt{2} = \sqrt{2}k_V(x)$. Supongamos por lo tanto que $x \in V$. Si $k_V(x) = 0$ no hay nada que probar; en otro caso $k_V(x) = \frac{1}{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En particular $(n+1)x \notin V$ y como V es cuasiconvexo, existe un $\chi \in V^{\triangleright}$ tal que $\sqrt{2} < |1 - \chi((n+1)x)| \leq (n+1)|1-\chi(x)|$. Por lo tanto $||x||_V \geq \frac{\sqrt{2}}{n+1} = \sqrt{2}k_V(x)$.

□

PROPOSICIÓN 14.5. *Sea G un n-grupo. Son equivalentes:*

(a) *G es localmente cuasiconvexo*
(b) *G admite un entorno distinguido cuasiconvexo.*
(c) *Para un $V \in \mathcal{N}_0(G)$, la pseudonorma $||\cdot||_V$ genera la topología de G.*

DEMOSTRACIÓN.
(a)$\Rightarrow$(b): Es consecuencia de que todo entorno contenido en un entorno distinguido es distinguido.
(b)$\Rightarrow$(c): Sea V un entorno de cero distinguido y cuasiconvexo en G. Los conjuntos

$$V_{(n)} \overset{\text{Prop. } 14.2(b)}{=} \{x \in G : ||x||_V \leq 2\mathrm{sen}\frac{\pi}{4n}\}$$

forman una base de entornos de G .
(c)$\Rightarrow$(a): Es consecuencia de la Prop. 14.3. $\square$

En lo que resta de esta sección generalizaremos al contexto de grupos topológicos abelianos la conocida construcción del espacio normado $(\mathrm{sp}\, V, p_V)/p_V^{-1}(0)$, donde E es un espacio vectorial y V un subconjunto convexo y equilibrado de E (cf. 27.1).

Sea G un grupo topológico abeliano, V un entorno de cero cuasiconvexo en G. En estas condiciones (Prop. 14.2(c)) $||\cdot||_V$ es una pseudonorma continua. Consideremos el grupo pseudonormado $(G, ||\cdot||_V)$. Es claro que (Prop. 14.2(b))

$$\mathrm{Cl}_{||\cdot||_V}(\{0\}) = \{x \in G : ||x||_V = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{(n)} =: V_{(\infty)}$$

y por lo tanto, el grupo de Hausdorff asociado a $(G, ||\cdot||_V)$ es

$$G_V := \frac{(G, ||\cdot||_V)}{V_{(\infty)}}.$$

Denotaremos el homomorfismo canónico $(G, ||\cdot||_V) \to G_V$ por φ_V, y la identidad (continua) $(G, \tau_G) \to (G, ||\cdot||_V)$, por i_V.

PROPOSICIÓN 14.6. *Si G es un grupo topológico abeliano y V es un entorno cuasiconvexo de 0 en G, entonces*

(a) *Para todo $x \in G$, se tiene*

$$x \in V \Leftrightarrow \varphi_V(x) \in \varphi_V(V).$$

(b) *Para todo $x \in G$, se tiene $||\varphi_V(x)||_{\varphi_V(V)} = ||x||_V$.*
(c) *G_V es un n-grupo de Hausdorff localmente cuasiconvexo. El entorno de cero $\varphi_V(V)$ es distinguido y cuasiconvexo en G_V.*

DEMOSTRACIÓN. El enunciado de (a) es equivalente a que $V + V_{(\infty)} = V$. Dados $y \in V$ y $v \in V_{(\infty)}$, se tiene

$$||y+v||_V \leq ||y||_V + ||v||_V = ||y||_V \leq \sqrt{2}$$

y por lo tanto (Prop. 14.2(a)) $y + v \in V$.

Es sencillo demostrar que la aplicación $\chi \mapsto \chi \circ \varphi_V \circ i_V$ define una biyección entre los polares de $\varphi_V(V)$ en G_V y de V en (G, τ_G). De aquí, (b) es inmediato.

El hecho de que $\varphi_V(V)$ es cuasiconvexo si lo es V es una consecuencia inmediata de (b). Por otra parte, los conjuntos $V_{(n)} = \{x \in G : ||x||_V \leq 2\text{sen}\, \frac{\pi}{4n}\}$, $n \in \mathbb{N}$ (Prop. 14.2(b)) forman una base de entornos de cero en $(G, ||\cdot||_V)$ y por lo tanto, los conjuntos $\varphi_V(V_{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ forman a su vez base de entornos de cero en G_V. Es consecuencia de (a) que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_V(V_{(n)}) = \varphi_V(V)_{(n)}$ y en particular, el entorno $\varphi_V(V)$ es distinguido en G_V. Por la Prop. 14.5, G_V es un n-grupo localmente cuasiconvexo.

$\square$

14.7. Sea G un grupo localmente cuasiconvexo y V, U entornos de cero cuasiconvexos en G, tales que $V \subset U$. El homomorfismo de grupos

$$\phi_{VU} : G_V \to G_U, \quad \phi_{VU}(\varphi_V(x)) = \varphi_U(x)$$

está bien definido, es sobreyectivo y continuo. Esto es una consecuencia inmediata de la Prop. 14.6 y el hecho de que $||\cdot||_U \leq ||\cdot||_V$.

15. Resultados de dualidad para sumas directas

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de dualidad y el carácter localmente cuasiconvexo de las topologías definidas en la suma directa de una familia de grupos abelianos topológicos (Sec. 12).

15.1. Si $\{G_i : i \in I\}$ es una familia de grupos abelianos y $\bigoplus_{i\in I} G_i$ denota la suma directa algebraica de los G_i, es inmediato que cualquier carácter $\chi : \bigoplus_{i\in I} G_i \to \mathbb{T}$ es de la forma $x \mapsto \prod_{i\in I} \chi_i(x_i)$, donde χ_i es el carácter $\chi \circ v_i$ de G_i, para todo $i \in I$. Inversamente, para toda familia $(\chi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \text{Hom}\,(G_i, \mathbb{T})$, la expresión $x \mapsto \prod_{i\in I} \chi_i(x_i)$ define un carácter del grupo abeliano $\bigoplus_{i\in I} G_i$.

En el siguiente Lema consideramos el grupo abeliano $\prod_{i\in I} \text{Hom}\,(G_i, \mathbb{T})$ como dual algebraico de $\bigoplus_{i\in I} G_i$, en el sentido de 15.1:

Lema 15.2. *Sean G_i $(i \in I)$ grupos abelianos topológicos, y para cada $i \in I$, sean V_i, U_i subconjuntos no vacíos de G_i.*

(a) *Si para todo $i \in I$ se cumple $V_i + V_i + V_i \subset U_i$, entonces $\prod_{i\in I} U_i^{\triangleright} \subset (\bigoplus_{i\in I}^{(a)} V_i)^{\triangleright}$.*
(b) *Si para todo $i \in I$ se cumple $V_i + V_i \subset U_i$, entonces $(\prod_{i\in I} V_i^{\triangleright})^{\triangleleft} \subset \bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i^{\triangleright\triangleleft}$.*

Demostración. (a) Sean $x \in \bigoplus_{i\in I}^{(a)} V_i$ y $(\chi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i^{\triangleright}$. Denotamos por Δ el conjunto finito formado por los $i \in I$ tales que $x_i \neq 0$. Se tiene

$$\sum_{i\in I} k_{V_i}(x_i) < 1 \overset{5.3(c)}{\Longrightarrow} \sum_{i\in I} k_{U_i}(x_i) < \frac{1}{2}.$$

Sean $n_i \in \mathbb{N}$ $(i \in \Delta)$ tales que $x_i \in (U_i)_{(n_i)}$, $\sum_{i\in\Delta} \frac{1}{n_i+1} < \frac{1}{2}$. Por el Cor. 3.7, $\chi_i(x_i) \in T_{n_i}$ para todo $i \in \Delta$ y en particular $\prod_{i\in I} \chi_i(x_i) = \prod_{i\in\Delta} \chi_i(x_i) \in \mathbb{T}_+$, ya que $\sum_{i\in\Delta} \frac{1}{n_i} < 1$.

(b) Sea $x \in (\prod_{i\in I} V_i^{\triangleright})^{\triangleleft}$. Vamos a demostrar que $\sum_{i\in I} ||x_i||_{U_i} \leq \sqrt{2}$, lo que, debido al Lema 14.4(b), implica $\sum_{i\in I} k_{U_i^{\triangleright\triangleleft}}(x_i) < 1$ (notar que $||\cdot||_U = ||\cdot||_{U^{\triangleright\triangleleft}}$ para todo U).

Si $\chi_i \in U_i^{\triangleright}$ para todo $i \in I$, se tiene

$$\prod_{i\in I} \chi_i^{\varepsilon_i}(x_i) \in \mathbb{T}[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad \forall (\varepsilon_i)_{i\in I} \in \{-1, 0, 1\}^I \tag{15.1}$$

ya que $V_i + V_i \subset U_i \Rightarrow \chi_i^{\varepsilon_i},\ \chi_i^{2\varepsilon_i} \in V_i^{\triangleright}$ para $i \in I$; en particular $\prod_{i\in I} \chi_i^{\varepsilon_i}(x_i)$ y $(\prod_{i\in I} \chi_i^{\varepsilon_i}(x_i))^2$ pertenecen a $\mathbb{T}_+$, y basta aplicar el Cor. 3.7. De (15.1) y la Prop. 3.12 se deduce

$$\sum_{i\in I} |1 - \chi_i(x_i)| \leq \frac{\pi}{4} < \sqrt{2}.$$

□

15.3. Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos abelianos topológicos, y $\mathcal{T}$ una topología de grupo definida en la suma directa $\bigoplus_{i\in I} G_i$, *que hace continuas las inclusiones* $v_i : G_i \to \bigoplus_{i\in I} G_i$ (es decir, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$). El grupo dual de $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})$ se puede identificar con un subgrupo del producto $\prod_{i\in I} G_i{}^{\wedge}$, en el sentido de que para todo χ carácter $\mathcal{T}$-continuo de $\bigoplus_{i\in I} G_i$, existe una única familia $(\chi_i)_{i\in I}$ en $\prod_{i\in I} G_i{}^{\wedge}$ con $\chi(x) = \prod_{i\in I} \chi_i(x_i)$ para todo $x = (x_i) \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ (concretamente, $\chi_i = \chi \circ v_i$ para todo $i \in I$) y además el homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})^{\wedge} & \to & \prod_{i\in I} G_i{}^{\wedge} \\ & \chi & \mapsto & (\chi \circ v_i)_{i\in I} \end{array}$$

así definido es inyectivo. Este resultado, de demostración inmediata, es una primera aproximación a la dualidad entre suma directa y producto de grupos *topológicos;* a continuación lo afinaremos:

TEOREMA 15.4. *Con las notaciones e hipótesis de 15.3, supongamos que los grupos G_i son de Hausdorff y consideremos en $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})^{\wedge}$ la topología compacto-abierta asociada a $\mathcal{T}$ y en $\prod_{i\in I} G_i{}^{\wedge}$, la topología producto asociada a las compacto-abiertas en cada $G_i{}^{\wedge}$. Se tiene:*

(a) *El homomorfismo Φ es continuo.*
(b) *Si $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}_r$, Φ es un encajamiento topológico.*
(c) *Si $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}_a$, Φ es un isomorfismo topológico.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea V un entorno de cero para la topología producto de $\prod_{i\in I}(G_i{}^{\wedge}, \tau_{\mathcal{K}})$. Por 13.17 y la definición de topología producto, existe un subconjunto finito $\{i_1, \ldots, i_N\} \subset I$ y subconjuntos compactos $K_n \subset G_{i_n}$ ($n \in \{1, \ldots, N\}$) tales que $\bigcap_{n=1}^N p_{i_n}^{-1}(K_n^{\triangleright}) \subset V$ (p_j denota la proyección j-sima $(\chi_i) \in \prod_{i\in I} G_i{}^{\wedge} \mapsto \chi_j$). Sea $K = \bigcup_{n=1}^N v_n(K_n)$. Por ser v_n continua para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$, K es $\mathcal{T}$-compacto. Es claro que $\Phi(K^{\triangleright}) \subset \bigcap_{n=1}^N p_{i_n}^{-1}(K_n^{\triangleright})$ (si $\chi \in K^{\triangleright}$ y $\Phi(\chi) = (\chi_i)_{i\in I}$, se tiene $\chi_{i_n}(K_n) = \chi(v_{i_n}(K_n)) \subset \chi(K) \subset \mathbb{T}_+$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$); como V era arbitrario, esto demuestra el carácter continuo de Φ.

(b) Sea U un entorno de cero para la topología compacto-abierta de $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})^\wedge$. Por 13.17, existe un subconjunto $\mathcal{T}$-compacto K de $\bigoplus_{i\in I} G_i$ tal que $K^\triangleright \subset U$. De la Prop. 12.3 se deduce que existe un subconjunto finito $\{i_1, \ldots, i_N\} \subset I$ tal que $K \subset \sum_{n=1}^N v_{i_n}(G_{i_n})$. Sea $u_j : \bigoplus_{i\in I} G_i \to G_j$ la proyección sobre el sumando G_j, para cada $j \in I$; como $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}_r$, en particular u_j es $\mathcal{T}$-continua y por lo tanto $u_j(K)$ es compacto en G_j para todo $j \in I$. Sea $V = \bigcap_{n=1}^N p_{i_n}^{-1}(\mathcal{W}(u_{i_n}(K), T_N))$; V es un entorno de cero en $\prod_{i\in I} G_i{}^\wedge$ y además $\Phi(U) \supset \operatorname{Im}\Phi \cap V$. En efecto, si $\chi \in (\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})^\wedge$ es tal que $\chi(v_{i_n}(u_{i_n}(K))) \subset T_N$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$, se demuestra que $\chi \in K^\triangleright$:

$$x \in K \Rightarrow \chi(x) = \prod_{n=1}^N \chi_{i_n}(x_{i_n}) \in \prod_{n=1}^N T_N \subset \mathbb{T}_+.$$

(c) Basta ver que $\Phi : (\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T}_a)^\wedge \to \prod_{i\in I} G_i{}^\wedge$ es sobreyectiva. Sea $(\chi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i{}^\wedge$. Para cada $i \in I$, sea $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ con $\chi_i \in U_i^\triangleright$, y $V_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ con $V_i + V_i + V_i \subset U_i$. Por el Lema 15.2(a), el carácter de $\bigoplus_{i\in I} G_i$ asociado a $(\chi_i)_{i\in I}$ pertenece al polar (algebraico) $(\bigoplus_{i\in I}^{(a)} V_i)^\triangleright$ y en particular, es $\mathcal{T}_a$-continuo (13.2(a)). $\square$

Nota 15.5. [1] $\Phi : (\bigoplus_{\alpha\in A}^{(r)} G_\alpha)^\wedge \to \prod_{\alpha\in A} G_\alpha{}^\wedge$ no es sobreyectiva en general. Concretamente, si $G_\alpha = \mathbb{R}$ con su topología usual para todo $\alpha \in A$, e identificamos $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha{}^\wedge$ con $\mathbb{R}^A$ (13.1(a)), la imagen de Φ es el subgrupo de $\mathbb{R}^A$ formado por las familias $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ con soporte numerable; en otras palabras, el carácter algebraico

$$x \in \mathbb{R}_0^A \mapsto \exp(2\pi i \sum \mu_\alpha x_\alpha)$$

es $\mathcal{T}_r$-continuo si y sólo si $\mu_\alpha = 0$ para todo α en el complementario de un subconjunto numerable de A. [Supongamos que para todo $\alpha \in A \setminus B$ se cumple $\mu_\alpha = 0$, siendo $B \subset A$ numerable. El carácter $x \in (\mathbb{R}_0^A, \mathcal{T}_r) \mapsto \exp(2\pi i \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha x_\alpha)$ es continuo si y sólo si lo es $x \in (\mathbb{R}_0^B, \mathcal{T}_r) \mapsto \exp(2\pi i \sum_{\alpha\in B} \mu_\alpha x_\alpha)$ (12.6), pero en esta suma directa numerable la topología $\mathcal{T}_r$ coincide con la $\mathcal{T}_a$ y cualquier familia de escalares reales da lugar a un carácter continuo (Teor. 15.4(c)). Inversamente, supongamos que $\chi : x \mapsto \exp(2\pi i \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha x_\alpha)$ es $\mathcal{T}_r$-continuo. Existe (Ej. 12.7) $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\in A} \in]0, \infty[^A$ tal que $\chi(R_\Lambda) \subset \mathbb{T}_+$, es decir,

$$x \in \mathbb{R}_0^A,\ |x_\alpha| \le \lambda_\alpha \ \ \forall \alpha \in A \ \Rightarrow \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha x_\alpha \in [-1/4, 1/4] + \mathbb{Z}$$

En particular para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$, se tiene que $\sum_{\alpha\in\Delta} \mu_\alpha[-\lambda_\alpha, \lambda_\alpha]$ está contenido en $[-1/4, 1/4] + \mathbb{Z}$ y, por conexión, en $[-1/4, 1/4]$. Luego $\sum_{\alpha\in\Delta} \lambda_\alpha|\mu_\alpha| \le 1/4$ para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$; esto implica (ya que $\lambda_\alpha \neq 0$ para todo α) que $\mu_\alpha = 0$ para todos $\alpha \in A$ salvo una cantidad numerable.]

[1] En esta Nota cambiamos la notación del conjunto de índices y sus elementos para evitar confusiones con la unidad imaginaria.

NOTA 15.6. Utilizando la Prop. 3.8 es sencillo demostrar el análogo del Lema 15.2(a) para los entornos básicos de la topología $\mathcal{T}_*$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ (ver Subsec. 12.4) y, como consecuencia, llegar a que el Teorema 15.4(c) sigue siendo cierto si sustituimos $\mathcal{T}_a$ por $\mathcal{T}_*$ en su enunciado. En particular el grupo dual de $\bigoplus_{i\in I}^{(*)} G_i$, con la topología compacto-abierta, es topológicamente isomorfo de forma natural al producto topológico de los duales, también dotados de las topologías $\tau_{\mathcal{K}}$ respectivas. Este resultado fue demostrado por Kaplan[2] en 1948 ([**53**]), aunque lo enunció bajo condiciones algo más restrictivas. La variante de esta identificación para $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a$, contenida en el Teorema 15.4, aparece en [**7**, 14.11]. El hecho de que los grupos duales de $\bigoplus_{i\in I}^{(*)} G_i$ y $\bigoplus_{i\in I}^{(f)} G_i$ coinciden algebraica y topológicamente está recogido como Theor. 4.3 en [**63**].

En [**53**] y [**7**, 14.11] también se demuestra la identidad algebraica y topológica entre el grupo dual del producto topológico $\prod_{i\in I} G_i$ y la suma directa $\bigoplus_{i\in I} G_i{}^\wedge$, dotada respectivamente de las topologías $\mathcal{T}_*$ y $\mathcal{T}_a$, y de nuevo considerando en todos los duales las topologías de la convergencia uniforme en compactos. Notar que, independientemente de este resultado, se deduce de la Prop. 12.13(b) que las topologías $\mathcal{T}_*$ y $\mathcal{T}_a$ coinciden en $\bigoplus_{i\in I} G_i{}^\wedge$ ya que se trata de una suma directa de grupos localmente cuasiconvexos (13.35) y en particular todos ellos admiten una base de entornos de cero formada por conjuntos de Kaplan (Prop. 13.26).

TEOREMA 15.7. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos abelianos localmente cuasiconvexos. La topología asterisco $\mathcal{T}_a$ es la topología localmente cuasiconvexa más fina en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ que hace las inclusiones continuas.*

DEMOSTRACIÓN.
- $\mathcal{T}_a$ es localmente cuasiconvexa: Sea U_i entorno cuasiconvexo de cero en G_i, para todo $i \in I$. Si V_i y W_i son entornos de cero en G_i tales que $W_i + W_i + W_i \subset V_i$, $V_i + V_i \subset U_i$ para todo $i \in I$, el Lema 15.2 implica
$$\bigoplus_{i\in I}^{(a)} W_i \subset (\prod_{i\in I} V_i^{\triangleright})^{\triangleleft} \subset \bigoplus_{i\in I}^{(a)} U_i.$$
$(\prod_{i\in I} V_i^{\triangleright})^{\triangleleft}$ es un subconjunto cuasiconvexo del grupo discreto $\bigoplus_{i\in I} G_i$ (Ej. 13.28); como además es un $\mathcal{T}_a$-entorno de cero (ya que contiene a $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} W_i$) es un entorno de cero cuasiconvexo en la topología asterisco (13.25).
- $\mathcal{T}_a$ hace las inclusiones continuas: es claro.
- $\mathcal{T}_a$ es la más fina en esas condiciones: Sea $\mathcal{T}$ una topología localmente convexa en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ que hace las inclusiones continuas. Sea U un entorno de cero cuasiconvexo en $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})$. Para todo $i \in I$ existe un entorno de cero U_i en G_i tal que $v_i(U_i) \subset U$. Sea $U^{\triangleright}$ el polar de U para la topología $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ hace las inclusiones continuas, cualquier carácter $\mathcal{T}$-continuo se puede identificar con una familia $(\chi_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} G_i{}^\wedge$ (15.3); como para todo $i \in I$ se cumple $v_i(U_i) \subset U$, es inmediato que de hecho $U^{\triangleright} \subset \prod_{i\in I} U_i^{\triangleright}$. Se tiene por lo tanto $(\prod_{i\in I} U_i^{\triangleright})^{\triangleleft} \subset U^{\triangleright\triangleleft} = U$, pero $(\prod_{i\in I} U_i^{\triangleright})^{\triangleleft}$ es un $\mathcal{T}_a$-entorno de cero por el Lema 15.2(a).

[2] De hecho, el propósito de la introducción de la topología asterisco y del propio funcional original de Kaplan fue la definición de una topología de grupo en la suma directa que cumpliera esta propiedad de dualidad y la descrita en el párrafo siguiente.

□

COROLARIO 15.8. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos abelianos localmente cuasiconvexos. La topología asterisco $\mathcal{T}_a$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es la topología localmente cuasiconvexa asociada a $\mathcal{T}_f$ (en el sentido de la Prop. 13.36).*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que comprobar que en las condiciones del enunciado, $\mathcal{T}_a$ es la topología de grupo localmente cuasiconvexa más fina entre las menos finas que $\mathcal{T}_f$. Teniendo en cuenta que una topología de grupo $\mathcal{T}$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es menos fina que $\mathcal{T}_f$ si y sólo si hace continuas las inclusiones, se trata de una consecuencia inmediata del Teor. 15.7. □

Notar que por la Prop. 13.36, la topología localmente cuasiconvexa asociada tiene el mismo dual que la original, lo que, para el caso de $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{T}_f$ forma parte de lo demostrado en el Teor. 15.4.

COROLARIO 15.9. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos abelianos localmente cuasiconvexos. La topología $\mathcal{T}_f$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es localmente cuasiconvexa si, y sólo si, coincide con $\mathcal{T}_a$.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del Cor. 15.8. □

NOTA 15.10. El hecho de que si los grupos de partida son localmente cuasiconvexos, la topología asterisco en la suma directa es localmente cuasiconvexa, aparece enunciado en [**7**] (Prop. 1.16), y probado en [**4**] (Prop. 6.8 (iii); la demostración incluye el Lema 15.2(a)).

16. Dualidad de cuerpos valuados localmente compactos

Las propiedades de los espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ derivadas de la estructura de grupo abeliano topológico que les dan la operación interna y la topología compatible, son sobradamente conocidas y están estudiadas en profundidad ([**7**, §2]). En esta sección y la siguiente veremos que buena parte de ellas pueden enunciarse y probarse suponiendo que el cuerpo base es un cuerpo valuado localmente compacto arbitrario. La parte significativa de esta generalización es la referida al caso de valuación no arquimediana, ya que cualquier cuerpo con valuación arquimediana se puede encajar en $\mathbb{C}$ (Teor. 16.1) pero nuestro enfoque permite un tratamiento unificado de los casos real, complejo y p-ádico, además de mostrar que determinadas propiedades específicas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, como la conexión local, no resultan esenciales para probar el carácter autodual del cuerpo (Teorema 16.4) o la existencia de levantamiento de los caracteres del espacio vectorial a funcionales lineales continuos (Prop. 17.8).

16.1. Cuerpos valuados. Comenzaremos retomando algunas definiciones y resultados básicos en relación con los cuerpos valuados. Para una exposición más sistemática de esta teoría se puede consultar [**5**] o [**87**].

Si $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ es un cuerpo valuado, denotamos por $|\mathbb{F}|$ el conjunto $\{|t| : t \in \mathbb{F}\}$. Es inmediato comprobar que $|\mathbb{F}| \setminus \{0\}$ es un subgrupo del grupo multiplicativo $]0, \infty[$; este último es topológicamente isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología usual, y por lo tanto (Subsec. 2.1) $|\mathbb{F}| \setminus \{0\}$ es o bien discreto, o bien denso en $]0,\infty[$; la valuación se dirá, respectivamente, discreta o densa. El subgrupo $|\mathbb{F}| \setminus \{0\}$ se reduce al $\{1\}$ si y sólo si la valuación es trivial.

Dos valuaciones $|\cdot|$ y $|\cdot|'$ sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$ se dicen *equivalentes* cuando existe un $s>0$ tal que $|t|' = |t|^s$ para todo $t \in \mathbb{F}$.

Se dice que la valuación $|\cdot|$ es *arquimediana* cuando la sucesión de números reales $(|n \cdot 1_{\mathbb{F}}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *no* está acotada. La valuación dada por la restricción del módulo a un subcuerpo de $\mathbb{C}$ es claramente arquimediana y de hecho es la única en el sentido del siguiente resultado clásico ([**74**, Th. 1.2]):

TEOREMA 16.1. *(Ostrowski) Todo cuerpo $\mathbb{F}$ dotado de una valuación arquimediana es isomorfo a un subcuerpo $\mathbb{F}'$ de $\mathbb{C}$ y su valuación es equivalente a la valuación inducida en $\mathbb{F}'$ por el módulo.*

EJEMPLO 16.2. *Dado un número primo p, definimos la aplicación $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0,\infty[$ de la siguiente forma:*

$$|t|_p = \begin{cases} p^{-n} & si\ 0 \neq t = \frac{a}{b}p^n \quad donde\ n \in \mathbb{Z},\ mcd(a,p) = mcd(b,p) = 1 \\ 0 & si\ t = 0. \end{cases}$$

$|\cdot|_p$ es una valuación no arquimediana sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$, llamada valuación p-ádica.

La condición de no arquimedianidad puede sustituirse por otra aparentemente mucho más fuerte: Si $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ es un cuerpo valuado y $|\cdot|$ es no arquimediana, entonces se cumple la *desigualdad ultramétrica*

$$|t+s| \leq \max\{|t|, |s|\} \quad \forall t, s \in \mathbb{F}.$$

Notar que todo cuerpo con valuación no arquimediana ("cuerpo no arquimediano" en lo sucesivo) es un grupo TNA, ya que los conjuntos de la forma $B_\lambda = \{t \in \mathbb{F} : |t| \leq \lambda\}$, $\lambda > 0$, son subgrupos de $\mathbb{F}$.

Si consideramos en el cuerpo valuado $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ la topología separada de grupo dada por su valuación, la compleción $\widetilde{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$ (1.5) tiene canónicamente estructura de cuerpo valuado, de forma que las nuevas operaciones y la valuación en $\widetilde{\mathbb{F}}$ extienden las definidas en $\mathbb{F}$. En particular el cuerpo valuado compleción de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$, se suele denotar $\mathbb{Q}_p$; este cuerpo es localmente compacto y constituye de hecho un ejemplo muy representativo en la teoría de grupos localmente compactos abelianos (cf. [**41**, Sect. 10], [**2**]).

16.2. Autodualidad de los cuerpos valuados localmente compactos. En 13.22(a) hemos visto que el grupo dual de $\mathbb{R}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}$; de hecho que $\mathbb{R}$ es "fuertemente autodual" en el sentido definido en [**34**], es decir, existe un isomorfismo topológico $\nabla : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\wedge$ tal que $\nabla(t)(s) = \nabla(s)(t)$ para todos $t,\ s \in \mathbb{R}$. En concreto, se puede definir $\nabla(t)(s) = \varphi(ts)$, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es un carácter no trivial de $\mathbb{R}$. Si intentamos trasladar esta propiedad a otros cuerpos valuados, encontramos de forma natural la restricción de compacidad local (Prop. 16.8), que condiciona drásticamente la estructura del cuerpo:

- Si $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ es un cuerpo valuado arquimediano y localmente compacto, sustituyendo $|\cdot|$ por una valuación equivalente obtenemos que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ con sus valuaciones canónicas. Esto es debido al Teorema de Ostrowski (Teor. 16.1) y al hecho de que el único subcuerpo localmente compacto propio de $\mathbb{C}$ es $\mathbb{R} \times \{0\}$ ([**87**, Ex. 27.1]).
- La estructura de los cuerpos valuados no arquimedianos localmente compactos (los llamados *cuerpos locales*) es más flexible (cf. [**59**, p. 7]), pero su valuación es necesariamente discreta (Théor. I.7 en [**59**]).

En el resto de la sección nos proponemos demostrar el carácter autodual, en el sentido apuntado arriba, de los cuerpos (no trivialmente) valuados localmente compactos, considerados como grupos abelianos topológicos. La discusión precedente nos permitiría dividir el estudio en los casos real, complejo y no arquimediano, y utilizar el carácter discreto de la valuación en este último. Sin embargo, daremos una demostración general.

Necesitaremos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 16.3. *Sea G un grupo topológico abeliano semirreflexivo y tal que todos los subgrupos cerrados de $G^\wedge$ son dualmente cerrados. Entonces cualquier subgrupo de $G^\wedge$ que separe puntos de G es denso en $G^\wedge$.*

DEMOSTRACIÓN. Es la Prop. 31 de [**61**]. En esta referencia aparece enunciado para grupos localmente compactos, pero sólo se utilizan en la demostración las hipótesis de arriba. □

En lo sucesivo $\mathbb{F}$ denota un cuerpo valuado, localmente compacto, con valuación $|\cdot|$. Para cada $\lambda > 0$, $B_\lambda := \{t \in \mathbb{F} : |t| \leq \lambda\}$. Si $|\cdot|$ es no trivial, los conjuntos $B_\lambda,\ \lambda \in |\mathbb{F}| \setminus \{0\}$ forman una base de entornos de cero y una cobase de los subconjuntos compactos de $\mathbb{F}$, de donde el conjunto de sus polares es una base de entornos del neutro en el grupo $(\mathbb{F}^\wedge, \tau_{\mathcal{K}})$ (13.17).

TEOREMA 16.4. *Sea $\mathbb{F}$ cuerpo valuado localmente compacto, con valuación no trivial. Sea $\varphi_0 \in \mathbb{F}^\wedge$ no trivial. Entonces $\widetilde{\varphi_0} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^\wedge$ definido de la forma $\widetilde{\varphi_0}(t)(s) = \varphi_0(ts)$, es un isomorfismo topológico si en $\mathbb{F}^\wedge$ consideramos la topología compacto-abierta.*

Más concretamente, el número real positivo

$$\alpha_0 = \text{máx}\{\alpha \in |\mathbb{F}| : \varphi_0 \in B_\alpha^\triangleright\},$$

está bien definido y se verifica

$$\lambda, \mu \in |\mathbb{F}|,\ \lambda\mu = \alpha_0 \ \Rightarrow\ \widetilde{\varphi_0}(B_\mu) = B_\lambda^\triangleright.$$

DEMOSTRACIÓN. Notar que la existencia de un carácter no trivial φ_0 de $\mathbb{F}$ está garantizada por ser $\mathbb{F}$ un grupo localmente compacto (13.6). Es inmediato que $\widetilde{\varphi_0}(t)$ es un carácter continuo de $\mathbb{F}$ para todo $t \in \mathbb{F}$, y del hecho de que φ_0 no es idénticamente 1 se deduce que el homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi_0}$ es inyectivo.

Sea $A = \{\alpha \in |\mathbb{F}| : \varphi_0 \in B_\alpha^\triangleright\}$. Veamos que $\alpha_0 = \sup A \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha_0 - \frac{1}{n} < |t_n| \leq \alpha_0$ y $\varphi_0(B_{|t_n|}) \subset \mathbb{T}_+$. Sea t_{n_k} una subsucesión convergente de (t_n); si $t = \text{lím}_{k\in K} t_{n_k}$, es claro que $|t| = \alpha_0$. Veamos que $\varphi_0(B_{\alpha_0}) \subset \mathbb{T}_+$. Basta demostrar que $\varphi_0(s) \in \mathbb{T}_+$ para todo $s \in \mathbb{F}$ con $|s| = \alpha_0$. Fijado s en esas condiciones, la sucesión $s_k = t_{n_k} t^{-1} s$ converge a s en $\mathbb{F}$ y verifica $\varphi_0(s_k) \in \mathbb{T}_+$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde $\varphi_0(s) \in \mathbb{T}_+$.

Si λ y μ son elementos de $|\mathbb{F}|$ tales que $\lambda\mu \leq \alpha_0$, entonces es trivial que $\widetilde{\varphi_0}(B_\mu) \subset B_\lambda^\triangleright$.

Si λ y μ son elementos de $|\mathbb{F}|$ tales que $\lambda\mu \geq \alpha_0$, entonces $\widetilde{\varphi_0}(B_\mu) \supset \widetilde{\varphi_0}(\mathbb{F}) \cap B_\lambda^\triangleright$. En efecto,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_0}(t) \in B_\lambda^\triangleright \quad &\Rightarrow \quad \varphi_0 \in (tB_\lambda)^\triangleright = (B_{\lambda|t|})^\triangleright \\ &\Rightarrow \quad \lambda|t| \leq \alpha_0 \Rightarrow |t| \leq \frac{\alpha_0}{\lambda} \leq \mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{\varphi_0}$ es un encajamiento. Demostraremos que es sobreyectivo aplicando la Prop. 16.3. Es inmediato que $\widetilde{\varphi_0}(\mathbb{F})$ separa puntos de $\mathbb{F}$; y el resto de las hipótesis de la Prop. 16.3 son consecuencia del carácter localmente compacto de $\mathbb{F}$ (13.39). Deducimos así que $\widetilde{\varphi_0}(\mathbb{F})$ es denso en $\mathbb{F}^\wedge$. Como $\widetilde{\varphi_0}(\mathbb{F})$ es un grupo localmente compacto y en particular completo, necesariamente coincide con $\mathbb{F}^\wedge$, lo que, junto con las inclusiones de arriba, demuestra el Teorema. □

Nota 16.5. Siempre se puede escoger $\varphi_0 \in \mathbb{F}^\wedge$ de forma que $\alpha_0 = \max\{\alpha \in |\mathbb{F}| : \varphi_0 \in B_\alpha^\triangleright\} = 1$: dado $\psi \in \mathbb{F}^\wedge$ no trivial, basta definir $\varphi_0(t) = \psi(t_0 t)$ siendo $|t_0| = \max\{\alpha \in |\mathbb{F}| : \psi \in B_\alpha^\triangleright\}$.

El hecho de que $\widetilde{\varphi_0}$ es un isomorfismo algebraico, que forma parte de lo demostrado en el Teorema 16.4, tiene interés como resultado aparte:

Corolario 16.6. *Sea $\mathbb{F}$ cuerpo valuado localmente compacto, con valuación no trivial. Sea $\varphi_0 \in \mathbb{F}^\wedge$ no trivial. Entonces, para toda $\varphi \in \mathbb{F}^\wedge$ existe un único $t_\varphi \in \mathbb{F}$ tal que* $\varphi(s) = \varphi_0(t_\varphi s) \quad \forall s \in \mathbb{F}$.

Nota 16.7. Si la valuación de $\mathbb{F}$ es trivial el Teor. 16.4 es falso, salvo en el caso de que el cuerpo sea finito; de hecho $\widetilde{\varphi_0}$ no puede ser siquiera sobreyectiva. Esto es una consecuencia inmediata del resultado debido a Kakutani que afirma que para todo grupo abeliano discreto e infinito G, se verifica $|G^\wedge| = 2^{|G|}$. ([**41**, 24.47]).

El siguiente resultado muestra que el carácter localmente compacto de $\mathbb{F}$ es esencial para la validez del Teorema 16.4:

Proposición 16.8. *Sea $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ un cuerpo valuado. Si existe $\varphi_0 \in \mathbb{F}^\wedge$ tal que el homomorfismo de grupos $\widetilde{\varphi_0} : \mathbb{F} \to (\mathbb{F}^\wedge, \tau_K)$, definido por $\widetilde{\varphi_0}(t)(s) = \varphi_0(ts)$ para todos t, $s \in \mathbb{F}$, es un isomorfismo topológico, entonces $\mathbb{F}$ es localmente compacto.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_0 \in B_\varepsilon^\triangleright$. Es inmediato que $\widetilde{\varphi_0}(B_1) \subset B_\varepsilon^\triangleright$, y en particular $\widetilde{\varphi_0}(B_1)$ es relativamente compacto (Prop. 13.18). Como $\widetilde{\varphi_0}$ es un homeomorfismo, B_1 es relativamente compacto, luego compacto. □

Nota 16.9. La propiedad de autodualidad demostrada en el Teor. 16.4 se puede enunciar para cuerpos topológicos localmente compactos no discretos, ya que la topología de cualquier cuerpo topológico localmente compacto viene dada por una valuación ([**87**, 1.9.8]).

NOTA 16.10. El hecho de que $\mathbb{R}$ es autodual es un resultado clásico; en cuanto al caso no arquimediano, Tate ([**83**]) demostró en 1960 que cualquier cuerpo local es topológicamente isomorfo a su dual. La demostración de Tate, al igual que la presentada aquí, utiliza el teorema de dualidad de Pontryagin. Phillips ([**66**]) demuestra este resultado a partir de una versión simplificada del Teorema de Pontryagin para grupos localmente compactos cerodimensionales. Existen demostraciones del carácter autodual de $\mathbb{Q}_p$ que no utilizan el teorema de dualidad (Hewitt-Ross ([**41**, 25.1]), Washington ([**88**]), Samelson ([**77**]); teniendo en cuenta que existen resultados estructurales que permiten reducir el problema de autodualidad de un cuerpo local general al caso p-ádico ([**66**]), y que, como hemos visto, el caso arquimediano es reducible al de $\mathbb{R}$, vemos que se puede dar una demostración del Teor. 16.4 sin acudir al teorema de Pontryagin.

Asimismo, en el capítulo 9 de [**74**] se desarrolla una teoría de dualidad para grupos topológicamente no arquimedianos, en la que el grupo donde toman valores los caracteres es el subgrupo T de $\mathbb{T}$ formado por todas las raíces de 1, y dotado de la topología discreta. Si llamamos G^s al grupo de caracteres continuos de G en T, G^s es de forma natural un grupo TNA, considerando la base de entornos del neutro formada por los subgrupos anuladores de los de la base de G. Se puede demostrar (teorema 9.14 en [**74**]) que si $\mathbb{F}$ es no arquimediano y localmente compacto, y χ_0 es un elemento no trivial de $\mathbb{F}^s$, χ_0 define, de forma análoga a la descrita en el Teor. 16.4, un isomorfismo topológico entre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}^s$. Para una amplia clase de s-grupos (que incluye a los $\mathbb{F}$ localmente compactos no arquimedianos: ejercicio 9.C en [**74**]) $\mathbb{F}^s$ y $\mathbb{F}^\wedge$ son topológicamente isomorfos de forma canónica, así que de la construcción hecha en [**74**] se puede deducir el teorema 16.4 para el caso no arquimediano.

NOTA 16.11. No existe una clasificación de los grupos localmente compactos abelianos autoduales. Algunos ejemplos significativos, distintos de los que hemos analizado en esta sección, se pueden encontrar en [**41**, 25.34]; en [**2**, 4.37] se hace una pequeña historia del problema, que podemos actualizar parcialmente mencionando los métodos homológicos desarrollados en las referencias [**33**] y [**34**], en las que además se introduce el concepto de grupo fuertemente autodual y se deja abierto el problema de la existencia de grupos localmente compactos autoduales pero no fuertemente autoduales.

17. Dualidad de espacios y grupos vectoriales topológicos

17.1. Topologías de grupo en espacios vectoriales. En adelante nos encontraremos con mucha frecuencia, tanto para proporcionar ejemplos como para desarrollar o motivar parte de la teoría, en el contexto de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E, dotado de una determinada topología τ que no cumple en general las condiciones de compatibilidad que harían de (E,τ) un espacio vectorial topológico, sino otras menos exigentes.

DEFINICIÓN 17.1. (a) Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y τ una topología en E tal que los homomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{array}{rcl} (E\times E,\tau\times\tau) & \to & (E,\tau) \\ (x,y) & \mapsto & x+y, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (E,\tau) & \to & (E,\tau) \\ x & \mapsto & tx \end{array}$$

para todo $t \in \mathbb{F}$, son continuos. En estas condiciones se dice que (E, τ) es un *grupo vectorial topológico* sobre $\mathbb{F}$.

(b) Sea (E, τ) un grupo vectorial topológico sobre un cuerpo valuado $\mathbb{F}$. Se dice que (E, τ) es un *grupo vectorial localmente equilibrado* sobre $\mathbb{F}$ cuando existe una base de entornos de cero en E formada por conjuntos equilibrados.

Es claro que todo grupo vectorial topológico es un grupo abeliano topológico considerado con su estructura aditiva.

17.2. Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo valuado, todo $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico E es claramente un $\mathbb{F}$-grupo vectorial localmente equilibrado (1.15).

EJEMPLO 17.3. *Sea* $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ *un cuerpo valuado.* $\mathbb{F}$ *es un* $\mathbb{F}$*-espacio vectorial; si* τ_d *denota la topología discreta en* $\mathbb{F}$*,* $(\mathbb{F}, \tau_d)$ *es claramente un* $\mathbb{F}$*-grupo vectorial localmente equilibrado.*

EJEMPLO 17.4. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, dotado de la topología de Bohr* $\sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge)$*.* $E = (\mathbb{R}, \sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge))$ *es un* $\mathbb{R}$*-grupo vectorial topológico, no localmente equilibrado. [Se deduce del Cor. 17.12 que* E *es un grupo vectorial topológico, aunque se demuestra trivialmente teniendo en cuenta que es un grupo abeliano topológico y que, para todos* $\lambda \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$,

$$\lambda([-\varepsilon, \varepsilon] + a\mathbb{Z}) = [-|\lambda|\varepsilon, |\lambda|\varepsilon] + a|\lambda|\mathbb{Z}$$

de donde (teniendo en cuenta 13.15(a)) se deduce la continuidad de los homomorfismos $x \mapsto \lambda x$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Como* E *no tiene entornos acotados de cero (13.15(b)), el único entorno de cero equilibrado es todo el espacio.]*

NOTA 17.5. Raĭkov ([**70**]) introdujo el concepto de grupo vectorial topológico. La identificación de $(\mathbb{R}, \sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge)$ como grupo vectorial topológico se debe a Dergačev ([**19**]), que lo presentó como ejemplo de que un grupo vectorial topológico conexo no tiene por qué ser un espacio vectorial topológico, a diferencia de lo que Kenderov había demostrado para los grupos vectoriales localmente convexos (ver Def. 18.4).

De la misma forma que en espacios vectoriales topológicos, dado un grupo vectorial topológico E definido sobre un cuerpo topológico $\mathbb{F}$ denotaremos por E^* el subconjunto de $\mathrm{CHom}(E, \mathbb{F})$ formado por las formas lineales y continuas de E en $\mathbb{F}$. Es claro que E^* es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}^E$.

EJEMPLO 17.6. *Para el grupo vectorial topológico* E *descrito en el Ejemplo 17.4 se cumple* $E^* = \{0\}$*; de hecho, dado que* E *es precompacto (Prop. 13.14),* $\mathrm{CHom}(E, \mathbb{R}) = \{0\}$ *(13.43(b)). Notar que sin embargo* $E^\wedge = \mathbb{R}^\wedge$ *(13.12) es un grupo abeliano isomorfo a* $\mathbb{R}$ *(13.1(a)).*

17.2. Relación entre el grupo dual y el espacio dual. A continuación describiremos la relación entre los duales de un espacio vectorial topológico E como grupo y como espacio vectorial. En el caso de que el cuerpo base sea $\mathbb{R}$, es un hecho conocido y frecuentemente utilizado (cf. Nota 17.14) que se puede establecer un isomorfismo natural entre ambos duales, que pasa a ser topológico si hacemos intervenir las topologías compacto-abiertas correspondientes. Nuestro propósito es generalizar este resultado para un cuerpo base valuado localmente compacto arbitrario.

El primer paso en esta dirección es el que establece que los caracteres de E se pueden levantar a funcionales lineales continuos (Prop. 17.8); en la demostración utilizaremos el siguiente resultado previo:

LEMA 17.7. *Sea E un grupo vectorial localmente equilibrado sobre un cuerpo valuado $(\mathbb{F}, |\cdot|)$, localmente compacto y con valuación no trivial. Sea φ_0 un carácter no trivial de $\mathbb{F}$ y $f : E \to \mathbb{F}$ una forma lineal. Entonces f es continua si y sólo si lo es $\varphi_0 \circ f$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\varphi_0 \circ f$ es continua. Demostraremos que $\widetilde{\varphi_0} \circ f$ es continua, lo que junto con el Teor. 16.4 implicará la continuidad de f. Se trata de demostrar que

$$\forall \lambda \in |\mathbb{F}| \setminus \{0\} \quad \exists U \in \mathcal{N}_0(E), \quad \widetilde{\varphi_0}(f(U)) \subset B_\lambda^\triangleright.$$

Existe un entorno equilibrado de cero W en E tal que $\varphi_0(f(W)) \subset \mathbb{T}_+$. Definimos $U = t^{-1}W$, siendo $t \in \mathbb{F}$ tal que $|t| = \lambda$. U es entorno de cero por ser E un grupo vectorial topológico. Si ahora fijamos $x \in U$ y $s \in B_\lambda$, se tiene $sx \in st^{-1}W \subset W$ y por lo tanto

$$\widetilde{\varphi_0}(f(x))(s) = \varphi_0(sf(x)) = \varphi_0(f(sx)) \in \mathbb{T}_+.$$

□

PROPOSICIÓN 17.8. *Sea E un espacio vectorial topológico sobre un cuerpo valuado localmente compacto $\mathbb{F}$, con valuación no trivial. Sea $\varphi_0 : \mathbb{F} \to \mathbb{T}$ un carácter continuo no trivial. Entonces, para cada $\chi \in E^\wedge$ existe una única forma lineal continua $f : E \to \mathbb{F}$ tal que $\chi = \varphi_0 \circ f$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\chi \in E^\wedge$. Para cada $x \in E$, la aplicación $t \mapsto \chi(tx)$ es un carácter en $\mathbb{F}$ y, por el Corolario 16.6, existe un único $f(x) \in \mathbb{F}$ tal que $\chi(tx) = \varphi_0(tf(x)) \quad \forall t \in \mathbb{F}$; en particular, $\chi(x) = \varphi_0(f(x))$. Es inmediato que $f : E \to \mathbb{F}$ es lineal. Por otra parte, si $g : E \to \mathbb{F}$ es una forma lineal tal que $\chi = \varphi_0 \circ g$, entonces para todos $t \in \mathbb{F}$ y $x \in E$ se tiene $\chi(tx) = \varphi_0(g(tx)) = \varphi_0(tg(x))$ y por lo tanto $g = f$. La continuidad de f es consecuencia inmediata del Lema 17.7. □

NOTA 17.9. La Prop. 17.8 no es cierta en grupos vectoriales topológicos generales. Consideremos $E = (\mathbb{R}, \tau_d)$, donde τ_d denota la topología discreta. E es un grupo vectorial topológico (Ejemplo 17.3), todo elemento f de E^* es claramente de la forma $f(x) = \mu x$, para algún $\mu \in \mathbb{R}$, y si, fijado $\varphi_0 \in \mathbb{R}^\wedge$, un carácter $\chi : E \to \mathbb{T}$ se puede levantar por φ_0 a una forma lineal $f : E \to \mathbb{R}$, ese levantamiento es único [φ_0 es necesariamente de la forma $\varphi_0(x) = \exp(2\pi i \lambda_0 x)$, para un $\lambda_0 \neq 0$ en $\mathbb{R}$ (13.1(a)). Supongamos que $f_1, f_2 \in E^*$ verifican $\varphi_0 \circ f_1 = \varphi_0 \circ f_2 = \chi$; si $f_1(x) = \mu_1 x$ y $f_2(x) = \mu_2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto implica que $\lambda_0(\mu_1 - \mu_2)x \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y dado que $\lambda_0 \neq 0$, necesariamente $\mu_1 = \mu_2$.] Como consecuencia el subgrupo de $E^\wedge$ formado por los caracteres que se pueden levantar por φ_0 a formas lineales es biyectivo con E^*. Como el cardinal de $E^\wedge$ es estrictamente mayor que el de E^* ([**41**, 25.6]), hay caracteres de E que no se pueden levantar. (Ver también el Ejemplo 17.6)

NOTA 17.10. La Prop. 17.8 también resulta ser falsa en general si eliminamos la hipótesis de la compacidad local del cuerpo base: en [**79**, p. 195] se da un ejemplo de espacio vectorial topológico E, sobre un cuerpo valuado, tal que $E^* = \{0\}$ y E pertenece a la clase de lo que en la Sec. 18 llamaremos espacios localmente convexos no arquimedianos que, como allí se demuestra, tienen dual no trivial como grupos; de hecho son localmente cuasiconvexos.

17.11. La relación entre funcionales lineales continuos y caracteres continuos que establece la Prop. 17.8 implica en particular que si E es un espacio vectorial topológico sobre un cuerpo no trivialmente valuado y localmente compacto $\mathbb{F}$, entonces $E^\wedge$ separa puntos de E si y sólo si lo hace E^* : en efecto, si E tiene suficientes caracteres continuos, dado $x \in E$ no nulo existe un $\chi \in E^\wedge$ (necesariamente de la forma $\chi = \varphi_0 \circ f$, siendo $f \in E^*$ y $\varphi_0 \in \mathbb{F}^\wedge$ no trivial) con $\chi(x) \neq 1$ y en particular $f(x) \neq 0$; inversamente, si E tiene suficientes formas lineales continuas, para cualquier x no nulo en E basta encontrar $f \in E^*$ con $f(x) \neq 0$ y (dado que $\mathbb{F}^\wedge$ separa puntos de $\mathbb{F}$) un $\varphi \in \mathbb{F}^\wedge$ tal que $\varphi(f(x)) \neq 1$; el carácter continuo $\chi = \varphi \circ f$ no se anula en x.

El siguiente corolario de la Prop. 17.8 proporciona ejemplos interesantes de grupos vectoriales topológicos:

COROLARIO 17.12. *Sea E un espacio vectorial topológico sobre un cuerpo valuado localmente compacto $\mathbb{F}$, con valuación no trivial. Entonces $(E, \sigma(E, E^\wedge))$ es un grupo vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero el caso en el que E es el cuerpo $\mathbb{F}$ con la topología dada por su valuación. Sea $(t_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red en $\mathbb{F}$ que converge a cero en la topología de Bohr de $\mathbb{F}$ y s un elemento fijo de $\mathbb{F}$. Tenemos que demostrar que $st_\alpha \to 0$ en $\sigma(\mathbb{F}, \mathbb{F}^\wedge)$. Para cada $\varphi \in \mathbb{F}^\wedge$, la aplicación $t \mapsto \varphi(st)$ es un carácter continuo de $\mathbb{F}$; luego, dado que $(t_\alpha) \to 0$ en $\sigma(\mathbb{F}, \mathbb{F}^\wedge)$, deducimos que $\varphi(st_\alpha) \to 1$. Como φ es arbitraria, hemos demostrado que $st_\alpha \to 0$ en $\sigma(\mathbb{F}, \mathbb{F}^\wedge)$ (Prop. 11.2(a)).

En el caso general, si fijamos $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ convergente a cero en la topología de Bohr de E y $s \in \mathbb{F}$, se trata de demostrar que $sx_\alpha \to 0$ en $\sigma(E, E^\wedge)$, es decir, que $\chi(sx_\alpha) \to 1$ para todo $\chi \in E^\wedge$. Fijamos por lo tanto $\chi \in E^\wedge$; por la Prop. 17.8 existen un funcional lineal continuo $f : E \to \mathbb{F}$ y un carácter continuo $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{T}$ tales que $\chi = \varphi \circ f$. Como $x_\alpha \to 0$ en $\sigma(E, E^\wedge)$, se tiene $f(x_\alpha) \to 0$ en $\sigma(\mathbb{F}, \mathbb{F}^\wedge)$ y, dado que $(\mathbb{F}, \sigma(\mathbb{F}, \mathbb{F}^\wedge))$ es un grupo vectorial topológico, $sf(x_\alpha) = f(sx_\alpha) \to 0$ en $\sigma(\mathbb{F}, \mathbb{F}^\wedge)$. En particular, $\varphi(f(sx_\alpha)) = \chi(sx_\alpha) \to 1$. □

TEOREMA 17.13. *Sea E un espacio vectorial topológico sobre un cuerpo valuado localmente compacto $\mathbb{F}$, con valuación no trivial. Sea $\varphi_0 : \mathbb{F} \to \mathbb{T}$ un carácter continuo no trivial. La aplicación $\widehat{\varphi_0} : E^* \to E^\wedge$, definida de la forma $\widehat{\varphi_0}(f) = \varphi_0 \circ f$, es un isomorfismo algebraico. Si dotamos a E^* y a $E^\wedge$ de las topologías compacto-abiertas respectivas, $\widehat{\varphi_0}$ es un isomorfismo topológico.*

DEMOSTRACIÓN. La Prop. 17.8 demuestra que $\widehat{\varphi_0}$ es biyectiva; es claro que de hecho es un isomorfismo algebraico.

El carácter continuo de $\widehat{\varphi_0}$ es consecuencia inmediata de la Prop. 8.4.

Para demostrar el carácter abierto, fijados un compacto $K \subset E$ y un $\mu \in |\mathbb{F}| \setminus \{0\}$, tenemos que encontrar un compacto $R \subset E$ tal que $\widehat{\varphi_0}(\mathcal{W}(K, B_\mu)) \supset R^\triangleright$ (Prop. 8.1), es decir,

$$f \in E^*, (\varphi_0 \circ f)(R) \subset \mathbb{T}_+ \Rightarrow f \in \mathcal{W}(K, B_\mu).$$

Sea $\lambda \in |\mathbb{F}| \setminus \{0\}$ tal que $B_\lambda^\triangleright = \widetilde{\varphi_0}(B_\mu)$ (Teor. 16.4), y $R = B_\lambda K$. R es compacto por ser E espacio vectorial topológico. Para todo $x \in K$, se tiene

$$B_\lambda x \subset R \Rightarrow \varphi_0(f(B_\lambda x)) \subset \mathbb{T}_+ \Rightarrow \widetilde{\varphi_0}(f(x)) \in B_\lambda^\triangleright \Rightarrow f(x) \in B_\mu.$$

□

Nota 17.14. Una demostración del teorema 17.13, para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, aparece ya en [**81**]. En [**41**, 23.32] se recoge una demostración distinta (publicada con anterioridad) de la identificación algebraica de los grupos abelianos $E^\wedge$ y E^*, también en el caso real.

18. Relación entre convexidad y cuasiconvexidad local

Dado un espacio vectorial topológico E, la relación entre formas lineales continuas y caracteres continuos en E permite en muchos casos caracterizar el carácter cuasiconvexo de un conjunto en términos del dual vectorial.

Proposición 18.1. *Sea E un grupo vectorial topológico sobre un cuerpo valuado localmente compacto $\mathbb{F}$, con valuación no trivial.*

(a) *Para todo subconjunto A de E, se tiene $A^{\triangleright\triangleleft} \subset A^{\circ\circ}$.*
(b) *Supongamos que E es un espacio vectorial topológico y $A \subset E$ es equilibrado. Entonces $A^{\triangleright\triangleleft} = A^{\circ\circ}$; en particular, A es cuasiconvexo si y sólo si $A = A^{\circ\circ}$.*

Demostración. (a) Sea $x \notin A^{\circ\circ}$. Existe $f \in A^\circ$ tal que $f(x) \notin B_1$. Del Teor. 16.4 se deduce trivialmente que las bolas $B_\mu \subset \mathbb{F}$ son cuasiconvexas; luego existe un $\varphi \in B_1^\triangleright$ tal que $\varphi(f(x)) \notin \mathbb{T}_+$. Entonces el carácter $\chi = \varphi \circ f$ verifica $\chi \in A^\triangleright$, $\chi(x) \notin \mathbb{T}_+$. Por lo tanto $x \notin A^{\triangleright\triangleleft}$.

(b) Fijamos $\varphi \in \mathbb{F}^\wedge$ tal que $\widetilde{\varphi}(B_1) = B_1^\triangleright$ (Teor. 16.4, Nota 16.5). Sea $x \notin A^{\triangleright\triangleleft}$. Existe $\chi \in A^\triangleright$ tal que $\chi(x) \notin \mathbb{T}_+$; por la Prop. 17.8 existe $f : E \to \mathbb{F}$ forma lineal continua tal que $\varphi \circ f = \chi$. Como A es equilibrado y $\chi \in A^\triangleright$, se tiene

$$\begin{aligned} & \varphi(B_1 f(A)) = \varphi(f(B_1 A)) = \chi(B_1 A) = \chi(A) \subset \mathbb{T}_+ \\ \Rightarrow \quad & \widetilde{\varphi}(f(A)) \subset B_1^\triangleright \Rightarrow f(A) \subset B_1. \end{aligned}$$

Por otra parte $\chi(x) = \varphi(f(x)) \notin \mathbb{T}_+ \;\Rightarrow\; f(x) \notin B_1$. Luego $x \notin A^{\circ\circ}$.

□

En el caso arquimediano, resulta natural aplicar la Prop. 18.1 a la familia de entornos de cero *convexos,* cerrados y equilibrados de E, que (debido al Teorema de Hahn-Banach) coinciden con sus bipolares vectoriales, y llegar así a la equivalencia entre el carácter localmente convexo del espacio y el hecho de que su grupo aditivo sea localmente cuasiconvexo. Se trata de una construcción conocida (Prop. 2.4 en [**7**]), que a continuación desarrollaremos y generalizaremos en lo posible a grupos vectoriales topológicos. Para el caso no arquimediano, que trataremos seguidamente, es claro que se necesita una definición de conjunto convexo, o al menos de espacio localmente convexo, en la que no intervenga el producto por escalares reales. La teoría de espacios localmente convexos no arquimedianos se ha venido desarrollando desde los años 50 y en la actualidad es de una riqueza comparable a la arquimediana, pero ni siquiera en sus principios básicos se puede presentar conjuntamente con ésta, y por este motivo separaremos el estudio de los dos casos.

18.1. Caso arquimediano. En las consideraciones que siguen fijamos como cuerpo base $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

18.1.1. *Espacios vectoriales topológicos.* Vamos a llegar a la equivalencia entre el carácter localmente convexo de un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y el hecho de que el grupo abeliano topológico subyacente a él sea localmente cuasiconvexo. Este hecho es un corolario inmediato de los resultados que obtendremos seguidamente para grupos vectoriales topológicos, pero es natural detenerse primero en este caso más favorable.

Para demostrar la equivalencia mencionada arriba es suficiente estudiar el caso real, porque tanto el hecho de que un $\mathbb{C}$-espacio vectorial topológico sea localmente convexo, como el de que su grupo topológico asociado sea localmente cuasiconvexo, dependen sólo del $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico subyacente. Sin embargo, estudiaremos conjuntamente los dos casos, ya que la validez en el caso complejo de algunos resultados intermedios, interesantes en sí mismos, no se deduce de forma inmediata de que se cumplan en el caso real. Una observación similar a ésta es también pertinente en 18.1.2.

18.2. Todo espacio localmente convexo sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ admite una base de entornos de cero convexos, cerrados y equilibrados. [Dado $W \in \mathcal{N}_0(E)$, existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ cerrado contenido en W; sean $\varepsilon > 0$ y U entorno de cero *convexo* tales que $B_\varepsilon U \subset V$ como en 1.15. Es inmediato que la clausura de $B_\varepsilon U$ es un entorno convexo, cerrado y equilibrado contenido en W.]

TEOREMA 18.3. *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico.*

(a) *Dado $U \in \mathcal{N}_0(E)$ equilibrado, U es cuasiconvexo en el grupo aditivo de E si y sólo si es convexo y cerrado.*

(b) *E es un espacio localmente convexo si y sólo si es localmente cuasiconvexo como grupo.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$ equilibrado. Por la Prop. 18.1(b), U es cuasiconvexo si y sólo si $U = U^{\circ\circ}$. Por el Cor. 1.19, esta última condición es equivalente a que U sea convexo y cerrado.

(b) Si E es un espacio localmente convexo, E admite una base de entornos de cero cerrados, convexos y equilibrados (18.2), luego cuasiconvexos (apartado anterior). Inversamente, supongamos que E es un espacio vectorial topológico localmente cuasiconvexo como grupo. Para cada $U \in \mathcal{N}_0(E)$ cuasiconvexo existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ equilibrado con $V \subset U$. Por lo tanto (Prop. 18.1(b)) $V^{\circ\circ} = V^{\triangleright\triangleleft} \subset U^{\triangleright\triangleleft} = U$ y $V^{\circ\circ}$ es un entorno de cero convexo contenido en U. Como los entornos cuasiconvexos de cero forman base de $\mathcal{N}_0(E)$, hemos demostrado que E es localmente convexo.

$\square$

18.1.2. *Generalización a grupos vectoriales topológicos.* Las dos direcciones de la equivalencia descrita en el Teorema 18.3(b) se pueden generalizar de forma significativa a grupos vectoriales topológicos (Teoremas 18.6 y 18.13). Necesitamos la siguiente definición:

Definición 18.4. Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, siendo $\mathbb{F}$ el cuerpo de los números reales o el de los complejos. Se dice que E es un $\mathbb{F}$-*grupo vectorial localmente convexo* cuando es un $\mathbb{F}$-grupo vectorial topológico y admite una base de entornos convexos de cero.

Como es habitual, eliminaremos la referencia al cuerpo base si el contexto no da lugar a ambigüedad.

Proposición 18.5. *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, y τ una topología en E tal que (E,τ) es un grupo abeliano topológico con respecto a la operación interna de E. Sea B un subconjunto $\mathbb{R}$-equilibrado de E. Entonces se tiene*

$$co\, B \subset B^{\triangleright\triangleleft}.$$

Demostración. Sean $b_1,\dots,b_n \in B$ y $t_1,\dots,t_n \in [0,1]$ tales que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$. Tenemos que demostrar que $b = \sum_{k=1}^n t_k b_k \in B^{\triangleright\triangleleft}$, es decir, que $\chi(b) \in \mathbb{T}_+$ para cualquier $\chi \in B^{\triangleright}$. Fijamos un tal χ y definimos los caracteres

$$\chi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{T}, \quad \chi_k(\alpha) = \chi(\alpha b_k), \quad k \in \{1,\dots,n\}.$$

Se verifica $\chi_k([-1,1]) \subset \mathbb{T}_+$ para todo $k \in \{1,\dots,n\}$, ya que B es $\mathbb{R}$-equilibrado. Por 13.2(a), χ_k es continuo para todo $k \in \{1,\dots,n\}$, y por lo tanto (13.1(a)) existen $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\chi_k(\alpha) = \exp(2\pi i\lambda_k\alpha)$ para todos $k \in \{1\dots,n\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. De la condición $\lambda_k[-1,1] \subset [-1/4,1/4] + \mathbb{Z}$ se deduce $\lambda_k \in [-1/4,1/4]$, para todo $k \in \{1,\dots,n\}$. Por lo tanto

$$\chi(b) = \chi(\sum_{k=1}^n t_k b_k) = \prod_{k=1}^n \chi(t_k b_k) = \prod_{k=1}^n \chi_k(t_k) = \exp(2\pi i \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k) \in \mathbb{T}_+$$

ya que $\sum_{k=1}^n \lambda_k t_k \in \sum_{k=1}^n t_k[-1/4,1/4] \subset [-1/4,1/4]$. $\square$

Teorema 18.6. *Todo $\mathbb{F}$-grupo vectorial localmente equilibrado y localmente cuasi-convexo es un grupo vectorial localmente convexo.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$; tenemos que encontrar un entorno de cero convexo V contenido en U. Sean $W_1 \in \mathcal{N}_0(E)$ contenido en U y cuasiconvexo; $W_2 \in \mathcal{N}_0(E)$ contenido en W_1 y $\mathbb{R}$-equilibrado. Por la Prop. 18.5, se cumple $\operatorname{co} W_2 \subset {W_2}^{\triangleright\triangleleft}$; como W_1 es cuasiconvexo y contiene a W_2, se verifica también la inclusión ${W_2}^{\triangleright\triangleleft} \subset W_1$. Por lo tanto, $V = \operatorname{co} W_2$ es un entorno de cero convexo contenido en U. $\square$

Proposición 18.7. *Todo $\mathbb{F}$-grupo vectorial localmente convexo E admite una base de entornos de cero formada por conjuntos convexos y equilibrados.*

DEMOSTRACIÓN. El caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ es inmediato; en cuanto al caso complejo, es la Prop. 4 de [**70**], cuya demostración reproducimos: Dado $U \in \mathcal{N}_0(E)$ fijamos un entorno convexo de cero U_1 contenido en U; es claro que el conjunto

$$V = \bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu U_1 = \{x \in U_1 : [|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in U_1]\}$$

es equilibrado, convexo y está contenido en U_1. Veamos que es un entorno de cero. Por la validez del mismo resultado en el caso real, existe W_1 entorno de cero convexo y $\mathbb{R}$-equilibrado tal que $W_1 + W_1 \subset U_1$. Sea $W = W_1 \cap iW_1$; notar que W es convexo, $\mathbb{R}$-equilibrado y además $W = iW$. Por ser E un $\mathbb{C}$-grupo vectorial topológico W es un entorno de cero y basta comprobar que $W \subset V$, es decir, que para cualesquiera $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, se cumple $\lambda x \in U_1$. Si ponemos $\lambda = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, con $r \in [-1, 1]$, se tiene

$$\lambda x = (r\cos\theta)x + i(r\,\mathrm{sen}\,\theta)x \in W + W \subset U_1.$$

□

DEFINICIÓN 18.8. Sea U un subconjunto estrellado de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E. Diremos que U es *M-cerrado*[3] cuando $U = \{x \in E : p_U(x) \leq 1\}$ (equivalentemente, cuando $U = \bigcap_{\lambda>1} \lambda U$).

La demostración del siguiente resultado es inmediata:

PROPOSICIÓN 18.9. *Sean E un $\mathbb{F}$-grupo vectorial topológico y $U \subset E$. Son equivalentes:*

(a) *U es un entorno de cero convexo, equilibrado y M-cerrado.*
(b) *Existen un subespacio abierto S de E y una seminorma continua $p : S \to [0, \infty[$ tales que $U = B_p$.*

PROPOSICIÓN 18.10. *Sea E un $\mathbb{F}$-grupo vectorial topológico. Sea U un entorno de cero convexo, equilibrado y M-cerrado en E. Entonces $U = U^{\circ\circ}$; en particular, U es cuasiconvexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S un subespacio de E y $p : S \to [0, \infty[$ una seminorma continua tal que $U = B_p$ (Prop. 18.9). Sea $x_0 \notin U$. Si $x_0 \notin S$, es claro que existe un $f \in E^*$ tal que $\{0\} = f(S) \supset f(U)$ y $|f(x_0)| > 1$. Supongamos que $x_0 \in S$. El conjunto $U = B_p$ es un entorno de cero convexo, equilibrado y cerrado en el espacio vectorial topológico (S, p). Existe por lo tanto (Cor. 1.19) $f \in (S, p)^*$ tal que $|f(u)| \leq 1$ para todo $u \in U$ y $|f(x_0)| > 1$. Sea g una extensión lineal arbitraria de f al espacio E. Entonces $g \in E^*$ ya que su restricción al subespacio abierto S de E es p-continua y por lo tanto continua para la topología inducida por la de E; y se tiene $|g(u)| \leq 1$ $\forall u \in U$; $|g(x_0)| > 1$. Esto demuestra $U = U^{\circ\circ}$; de la Prop. 18.1(b) se deduce que U es cuasiconvexo. □

[3] *closed by rays* en [**32**].

NOTA 18.11. Notar que un entorno de cero convexo, equilibrado y cerrado de un grupo vectorial localmente convexo puede no ser cuasiconvexo, lo cual implica que en la Prop. 18.10 no se puede sustituir la hipótesis de M-cerrado por la de cerrado. Consideremos el $\mathbb{R}$-grupo vectorial localmente convexo $(\mathbb{R}, \tau_d)$ (τ_d denota la topología discreta). El conjunto $C = (-1, 1)$ es convexo, simétrico y cerrado. Veamos que $1 \in C^{\triangleright\triangleleft}$: Si $\chi \in C^{\triangleright}$, en particular $\chi(-1,1) \subset \mathbb{T}_+$ y por lo tanto (13.2(a)) χ es un carácter continuo con respecto a la topología usual de $\mathbb{R}$, de donde $\chi(1) \in \mathbb{T}_+$.

PROPOSICIÓN 18.12. *Sea E un $\mathbb{F}$-grupo vectorial localmente convexo . E tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos convexos, equilibrados y M-cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. E tiene una base de entornos de cero convexos y equilibrados (Prop. 18.7). Para cada entorno U con esas propiedades fijamos un $\varepsilon < 1$ arbitrario y consideramos el entorno $V = B_p$ siendo $p : \mathrm{sp}U \to [0, \infty[$ el funcional de Minkowski del conjunto εU, es decir, $p = p_{\varepsilon U} = \frac{1}{\varepsilon} p_U$. Por la Prop. 18.9, V es un entorno de cero convexo, equilibrado y M-cerrado, y es inmediato que $V \subset U$. □

TEOREMA 18.13. *El grupo abeliano topológico subyacente a un grupo vectorial localmente convexo es localmente cuasiconvexo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Prop. 18.12, E tiene una base $\mathcal{B}$ de entornos de cero convexos, equilibrados y M-cerrados. La Prop. 18.10 implica que los elementos de $\mathcal{B}$ son cuasiconvexos. □

NOTA 18.14. El Teor. 18.13 es el Cor. 9.9 en [**4**].

18.2. Caso no arquimediano. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo valuado no arquimediano $\mathbb{F}$. Se dice que un subconjunto A de E es *absolutamente convexo* cuando verifica la siguiente condición:

$$\forall t,\ s \in B_1 \quad \forall x,\ y \in A \quad tx + sy \in A,$$

es decir, cuando A es un módulo sobre el anillo B_1 con las operaciones inducidas por E y $\mathbb{F}$. En particular todo subconjunto de E absolutamente convexo es un subgrupo de E. Los conjuntos convexos se pueden definir como los trasladados de conjuntos absolutamente convexos ([**59**, Ch. III, §2, Prop. 5]), pero no usaremos este concepto.

18.15. Si E es un espacio vectorial topológico, se dice que E es un *espacio localmente convexo no arquimediano* cuando su topología admite una base de entornos de 0 formada por conjuntos absolutamente convexos.

De esta definición se deduce que todo espacio localmente convexo no arquimediano es un grupo TNA y en particular es localmente cuasiconvexo (recordemos que los subgrupos abiertos son dualmente cerrados, 13.8). La otra implicación se demuestra como la correspondiente del Teorema 18.3 (teniendo en cuenta que todo conjunto de la forma A^{oo}, para un $A \subset E$, es absolutamente convexo) y podemos enunciar

TEOREMA 18.16. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo valuado no arquimediano, localmente compacto y con valuación no trivial. Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. E es un* *espacio localmente convexo no arquimediano si y sólo si E es localmente cuasiconvexo como grupo.*

EJEMPLO 18.17. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo no trivialmente valuado, con valuación $|\cdot|$ no arquimediana. Denotamos por $l_1(\mathbb{F})$ el subespacio del $\mathbb{F}$-espacio vectorial $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ formado por aquellas sucesiones $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $||x||_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Es inmediato que la aplicación $||\cdot||_1$ verifica las siguientes propiedades:*

(a) $||x||_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(b) $||tx||_1 = |t|\,||x||_1$ *para todos* $t \in \mathbb{F},\ x \in l_1(\mathbb{F})$
(c) $||x+y||_1 \leq ||x||_1 + ||y||_1$ *para todos* $x,\ y \in l_1(\mathbb{F})$
(d) *existen* $x,\ y \in l_1(\mathbb{F})$ *tales que* $||x+y||_1 > \max\{||x||_1, ||y||_1\}$[4].

Es claro que el grupo pseudonormado $(l_1(\mathbb{F}), ||\cdot||_1)$ tiene estructura de $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico. Se demuestra en [**59**, p. 39] *que $l_1(\mathbb{F})$ no es un espacio localmente convexo no arquimediano. En particular (Teor. 18.16) el grupo pseudonormado $(l_1(\mathbb{F}), ||\cdot||_1)$ no es localmente cuasiconvexo. Daremos otra demostración indirecta de este hecho en el Ej. 29.11.*

NOTA 18.18. En la implicación del Teor. 18.16 cuyo análogo arquimediano se demostraba mediante el Teorema de Hahn-Banach hemos preferido utilizar el hecho (debido también al Lema de Zorn) de que los subgrupos abiertos son dualmente cerrados. Existe, por supuesto, una versión no arquimediana del Teorema de Hahn-Banach, debida a Ingleton ([**46**]) en el contexto de los espacios normados, y generalizada por Monna ([**60**]) a espacios localmente convexos; aunque aquí no usaremos este resultado, podemos mencionar que para que la propiedad de extensión expresada en el teorema de Hahn-Banach se cumpla en un espacio localmente convexo no arquimediano, es necesario y suficiente (salvo casos triviales) que el cuerpo base sea *esféricamente completo* ([**79**, p. 187]), que es una condición topológica más débil que la compacidad local: un cuerpo $\mathbb{F}$ con valuación no arquimediana y no trivial se dice esféricamente completo cuando cualquier sucesión decreciente de bolas en $\mathbb{F}$ tiene intersección no vacía.

19. La propiedad de Schur en grupos

DEFINICIÓN 19.1. Sea (G, τ_G) un grupo abeliano topológico de Hausdorff. Se dice que G tiene la *propiedad de Schur* cuando toda sucesión convergente en la topología de Bohr de G converge en τ_G.

En lo sucesivo sólo se planteará la presencia de la propiedad de Schur en grupos de Hausdorff, aunque esta restricción no se mencione explícitamente.

PROPOSICIÓN 19.2. *Sea G un grupo abeliano topológico con la propiedad de Schur. Entonces G es dualmente separado.*

[4]Si E es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $||\cdot|| : E \to [0,\infty[$ es una aplicación que verifica las propiedades (a), (b), (c) y (d), se dice que $||\cdot||$ es una *A-norma* en E, y que $(E, ||\cdot||)$ es un *espacio A-normado,* aunque algunos autores ([**74**, p. 88]) extienden la denominación de *A-norma* a cualquier aplicación $||\cdot|| : E \to [0,\infty[$ que cumpla las condiciones (a), (b) y (c).

Demostración. Sea $x \in G$ tal que $\chi(x) = 1$ para todo $\chi \in G^\wedge$. Para todos $n \in \mathbb{N}$ y $\chi \in G^\wedge$, se verifica $\chi(nx) = 1$ y en particular la sucesión nx es convergente a 0 en $\sigma(G, G^\wedge)$. Por hipótesis nx es convergente en τ_G; sea $y = \lim_n nx$. Dado que $2nx$ es una subsucesión de nx, se tiene $\lim_n 2nx = \lim nx = y$ pero por otra parte $\lim 2nx = 2 \lim nx = 2y$; por lo tanto $y = 0$, ya que τ_G es de Hausdorff. La sucesión $(n+1)x$ es asimismo una subsucesión de nx y por lo tanto es convergente a 0 en τ_G; luego $(n+1)x - nx = x$ es el término general de una sucesión convergente a 0, y se deduce que $x = 0$. □

Proposición 19.3. *Sea G grupo abeliano topológico de Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) *G tiene la propiedad de Schur.*

(ii) *Cualquier sucesión en G que converja a 0 en la topología de Bohr, converge a 0 también en τ_G.*

(iii) *Cualquier sucesión en G que converja a 0 en la topología de Bohr, es convergente en τ_G.*

Demostración.

- (i)$\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $x_n \to 0$ en $\sigma(G, G^\wedge)$. Como G tiene la propiedad de Schur, la sucesión x_n es convergente a un $x \in G$ en la topología τ_G original del grupo; en particular $x_n \to x$ en $\sigma(G, G^\wedge)$ y por ser de Hausdorff la topología de Bohr de G (Prop. 19.2), $x = 0$.
- (ii)$\Rightarrow$(iii) es trivial.
- (iii)$\Rightarrow$ (i): Sea x_n una sucesión convergente, en la topología de Bohr de G, a un elemento $x \in G$. La sucesión $y_n = x_n - x$ converge a 0 en la topología de Bohr y por hipótesis es convergente en la original; por lo tanto, x_n también es convergente en τ_G.

□

Ejemplo 19.4. *$\mathbb{T}$ tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Es trivial, ya que la identidad de $\mathbb{T}$ es un carácter continuo. □

Ejemplo 19.5. *$\mathbb{R}$ tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que tiende a cero en $\sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge)$, es decir, tal que $\chi_\lambda(x_n) \to 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, siendo $\chi_\lambda(x) = \exp(2\pi i \lambda x)$ como en 13.1(a). Teniendo en cuenta que $\chi_\lambda(x_n) = \chi_{x_n}(\lambda)$, la sucesión de caracteres continuos $(\chi_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente convergente al carácter trivial, y es equicontinua (basta aplicarle el Teorema del Grafo Cerrado, Teor. 10.11, al homomorfismo de grupos $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto (\chi_{x_n}(\lambda))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ se considera dotado de la topología de la convergencia uniforme). Por la Prop. 9.3, χ_{x_n} converge en la topología $\tau_{\mathcal{PC}}$ al carácter trivial, y esto implica claramente que $x_n \to 0$ en la topología usual de $\mathbb{R}$. □

La propiedad de Schur cumple el siguiente resultado de permanencia:

Proposición 19.6. *Sean G, G_i $(i \in I)$ grupos abelianos topológicos de Hausdorff y $u_i : G \to G_i$, $i \in I$ homomorfismos de grupos. Supongamos que G_i tiene la propiedad de Schur para todo $i \in I$ y que la topología de G es la inicial con respecto a la familia de homomorfismos u_i, $i \in I$. Entonces G también tiene la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a cero en $\sigma(G, G^\wedge)$; tenemos que demostrar que también converge a cero en la topología original de G. Basta demostrar (Prop. 11.2(a)) que para cualquier $i \in I$ la sucesión $u_i(x_n)$ tiende a cero en G_i. Fijado i, como G_i tiene la propiedad de Schur, $u_i(x_n)$ converge a cero si y sólo si $\chi(u_i(x_n))$ converge a 1 en $\mathbb{T}$ para cualquier $\chi \in G_i{}^\wedge$; esto se cumple debido a que $\chi \circ u_i$ es un carácter continuo de G y x_n converge a 0 en la topología de Bohr de G. □

En particular la propiedad de Schur se conserva al formar productos y subgrupos de grupos que la satisfagan.

LEMA 19.7. (a) *Sea G un grupo abeliano y τ, τ' dos topologías de grupo en G tales que τ' admite una base de entornos de cero τ-cerrados. Si $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es una red de Cauchy en τ' y convergente a x en τ, entonces (x_γ) converge también a x en τ'.*

(b) *Sea G un grupo abeliano y τ, τ' dos topologías de grupo en G tales que τ' admite una base de entornos de cero τ-secuencialmente cerrados. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en τ' y convergente a x en τ, entonces (x_n) converge también a x en τ'.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Tenemos que demostrar que para todo U τ'-entorno de cero en G, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $x_\gamma - x \in U$ para todo $\gamma \geq \gamma_0$. Fijamos un tal U, que por hipótesis podemos suponer τ-cerrado. Existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que para todos γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$ con γ_1, $\gamma_2 \geq \gamma_0$, se verifica $x_{\gamma_1} - x_{\gamma_2} \in U$. Sea $\gamma_1 \geq \gamma_0$; como U es τ-cerrado y $(x_\gamma)_{\gamma\geq\gamma_0}$ converge a x en τ, se deduce $x_{\gamma_1} - x \in U$.

(b) La demostración es la misma que la de (a) sustituyendo redes por sucesiones.

□

PROPOSICIÓN 19.8. *Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff. Se tiene*

(a) *Si G tiene la propiedad de Schur, cualquier sucesión de Cauchy en la topología de Bohr es también de Cauchy en la topología original de G.*

(b) *Si G es secuencialmente completo y tiene la propiedad de Schur, entonces G es secuencialmente completo en la topología de Bohr.*

(c) *Si en G cualquier sucesión de Cauchy en la topología de Bohr es también de Cauchy en la topología original y G tiene una base de entornos de cero secuencialmente cerrados en la topología de Bohr, entonces G tiene la propiedad de Schur.*

(d) *Si G es metrizable y un subgrupo denso suyo H tiene la propiedad de Schur, entonces G tiene la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea G un grupo con la propiedad de Schur, y (x_n) una sucesión de Cauchy en la topología de Bohr. Supongamos que (x_n) no es de Cauchy en la topología original τ_G de G. Es inmediato que entonces (x_n) admite una subsucesión (x_{n_k}) con la propiedad de que $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ no converge a 0 en τ_G. Por hipótesis, la sucesión (y_k) no es convergente en la topología de Bohr de G, absurdo.

(b) es consecuencia inmediata de (a).

(c) Sea (x_n) una sucesión convergente a 0 en la topología de Bohr de G. En particular (x_n) es de Cauchy en esta topología y por hipótesis es de Cauchy en la topología original de G. Basta aplicar el Lema 19.7(b) para deducir que (x_n) converge a 0 en la topología original de G.

(d) Sea (x_n) una sucesión convergente a 0 en la topología de Bohr de G. Fijamos una sucesión fundamental decreciente de entornos (V_n) en G. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in H$ tal que $y_n - x_n \in V_n$. La sucesión (y_n) converge a 0 en $\sigma(H, H^\wedge)$; en efecto, dado $\chi \in H^\wedge$, si $\overline{\chi}$ denota su extensión continua a G (1.10) se tiene

$$\chi(y_n) = \overline{\chi}(y_n - x_n)\overline{\chi}(x_n) \to 1.$$

Como H tiene la propiedad de Schur, se deduce $y_n \to 0$ en H y por lo tanto $x_n \to 0$ en G.

□

Con algunas excepciones ([**13**, 8.3], [**40**]) la propiedad de Schur en grupos topológicos generales no ha sido objeto de estudio en sí misma, aunque existe un concepto muy relacionado con éste que sí ha sido analizado en profundidad, y que recogemos a continuación:

Definición 19.9. Sea G un grupo abeliano topológico. Se dice que G tiene la *propiedad de Glicksberg,* o que G *respeta compacidad,* cuando cualquier subconjunto compacto en la topología de Bohr de G es compacto en la topología original del grupo.

La relación entre la propiedad de respetar compacidad y la propiedad de Schur ha sido estudiada en [**13**, 8.3]; hacemos a continuación un breve resumen de resultados y definiciones relacionados con esta cuestión, la mayoría contenidos en esta referencia.

Proposición 19.10. *(cf.* [**13**, Cor. 8.3.9]*) Sea G un grupo abeliano topológico. Supongamos que G es dualmente separado y respeta compacidad. Entonces G tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a 0 en la topología de Bohr de G. El conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto en la topología de Bohr y, por hipótesis, en la topología de partida τ_G. Supongamos que x_n no converge a 0 en τ_G. Existen entonces $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $x_{n_k} \notin U$ para todo $k \in \mathbb{N}$. El conjunto $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto y por lo tanto existe una subred $(x_\beta)_{\beta\in B}$ de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un $x \in G$. Para cualquier $\chi \in G^\wedge$, se cumple $\chi(x_\beta) \to \chi(x)$ pero como (x_β) es una subred de (x_n), converge débilmente a 0; luego $\chi(x) = 1$ para todo $\chi \in G^\wedge$. Como G es dualmente separado, se deduce que $x = 0$, contradicción. □

Parece claro que para que la implicación en el sentido opuesto al de la Prop. 19.10 se cumpla en un grupo abeliano topológico G, es necesaria en el grupo $(G, \sigma(G, G^\wedge))$ alguna propiedad de determinación de la compacidad por sucesiones. Una clase conveniente de espacios topológicos en los que es posible esta reducción son los *espacios angélicos* definidos por Fremlin. No entraremos en la definición concreta ni en la descripción de las propiedades de estos espacios, que pueden verse en [**69**]. Utilizando este concepto, en [**13**] se llega a condiciones generales sobre un grupo para que en éste la propiedad de Schur implique la de respetar compacidad:

Proposición 19.11. *Sea G un grupo abeliano topológico metrizable y dualmente separado. Entonces G tiene la propiedad de Schur si y sólo si G respeta compacidad.*

Demostración. Un grupo G metrizable, dualmente separado y con la propiedad de Schur respeta compacidad; esto es una consecuencia inmediata del Teor. 8.3.1 y el Cor. 8.3.9 de [**13**]. En cuanto a la implicación inversa, es un caso particular de la Prop. 19.10. □

19.12. Debido a que se conocen condiciones muy generales bajo las cuales un grupo dado respeta compacidad, la Prop. 19.10 constituye un criterio útil para proporcionar ejemplos de grupos con la propiedad de Schur. Glicksberg demostró en [**37**] que cualquier grupo localmente compacto y abeliano respeta compacidad; teniendo en cuenta que los grupos localmente compactos abelianos de Hausdorff son dualmente separados (13.6), se deduce que cualquier grupo de este tipo tiene la propiedad de Schur. En [**9**] se llega a una condición suficiente considerablemente más general: *todo grupo nuclear respeta compacidad.* La definición de grupo nuclear se recoge más adelante (Def. 28.5), aunque a estos efectos basta mencionar que

- todo grupo localmente compacto abeliano y de Hausdorff es nuclear, así como todo espacio localmente convexo nuclear en el sentido ordinario (Def. 28.1),
- la clase de los grupos nucleares es cerrada con respecto a las operaciones de tomar subgrupos y formar cocientes de Hausdorff, productos arbitrarios y sumas directas numerables.

Teniendo en cuenta además que todo grupo nuclear es localmente cuasiconvexo ([**7**, Teor. 8.5]) y en particular dualmente separado, podemos deducir del resultado mencionado arriba que todo grupo nuclear tiene la propiedad de Schur; esta última afirmación aparece demostrada directamente ya en [**8**, Th. 1].

En el contexto de los espacios vectoriales topológicos cabe definir una propiedad análoga a la que en grupos hemos llamado propiedad de Schur, sustituyendo la topología de Bohr por la topología débil asociada al conjunto de funcionales continuos del espacio (11.6); de hecho éste es el significado habitual de la expresión "propiedad de Schur" y el más ajustado al resultado original de Schur del que esta propiedad toma el nombre (ver Sec. 24). A pesar de que las topologías $\sigma(E, E^\wedge)$ y $\sigma(E, E^*)$ son en general diferentes para un espacio vectorial topológico E (13.47(b)), vamos a demostrar que los dos conceptos de convergencia débil a que dan lugar son equivalentes para sucesiones y, como consecuencia, que son también equivalentes las dos definiciones de "propiedad de Schur" asociadas.

19.13. Notar que el hecho de que el único $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico precompacto y de Hausdorff es el trivial es cierto para cualquier cuerpo valuado completo y no discreto $\mathbb{F}$ (cf. [**10**, Ch. I, §2.4, Théor. 3]), de forma que, como en el caso arquimediano (13.47(b)), si $E \neq \{0\}$ y E^* separa puntos de E, las topologías $\sigma(E, E^\wedge)$ y $\sigma(E, E^*)$ son diferentes; concretamente, $\sigma(E, E^\wedge)$ es estrictamente menos fina que $\sigma(E, E^*)$ debido a la propiedad de levantamiento de caracteres establecida en la Prop. 17.8.

Sin embargo, se cumple que $\sigma(E, E^*)$ admite una base de entornos de cero $\sigma(E, E^\wedge)$-cerrados. De hecho $(E, \sigma(E, E^*))$ es un espacio localmente convexo (en el sentido arquimediano o no arquimediano, según la naturaleza de la valuación de $\mathbb{F}$) y por lo tanto (Teoremas 18.3(b) y 18.16) el grupo abeliano topológico subyacente es localmente cuasiconvexo. En particular (13.25(a)) $(E, \sigma(E, E^*))$ admite una base de entornos de cero cerrados en la topología de Bohr asociada a $(E, \sigma(E, E^*))$, que es exactamente $\sigma(E, E^\wedge)$ ya que, debido a la propiedad de levantamiento (Prop. 17.8), los caracteres continuos de E y de $(E, \sigma(E, E^*))$ coinciden.

Proposición 19.14. *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico de Hausdorff, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo valuado localmente compacto, con valuación no trivial. Entonces $(E, \sigma(E, E^\wedge))$ y $(E, \sigma(E, E^*))$ tienen las mismas sucesiones convergentes. Si además E^* separa los puntos de E, $(E, \sigma(E, E^\wedge))$ y $(E, \sigma(E, E^*))$ tienen los mismos subconjuntos compactos.*

Demostración. Como $\sigma(E, E^\wedge)$ es menos fina que $\sigma(E, E^*)$, todo subconjunto $\sigma(E, E^*)$-compacto (resp. toda sucesión $\sigma(E, E^*)$-convergente) es $\sigma(E, E^\wedge)$-compacto (resp. $\sigma(E, E^\wedge)$-convergente).

Sea x_n una sucesión convergente en $\sigma(E, E^\wedge)$ a un elemento x. Vamos a demostrar que x_n converge a x también en $\sigma(E, E^*)$, es decir, que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$. Fijamos $f \in E^*$; como $\mathbb{F}$ tiene la propiedad de Schur (19.12), $f(x_n) \to f(x)$ si y sólo si $\chi(f(x_n)) \to \chi(f(x))$ para todo $\chi \in E^\wedge$, pero esta condición se cumple ya que $\chi \circ f$ es un carácter continuo de E y x_n converge a x en la topología de Bohr de E.

Supongamos que E tiene suficientes funcionales lineales continuos. Sea K un subconjunto $\sigma(E, E^\wedge)$-compacto de E. Como el homomorfismo $\Phi : E \to \mathbb{F}^{E^*}$, definido por $\Phi(x) = (f(x))_{f \in E^*}$, es continuo considerando en E su topología original y en $\mathbb{F}^{E^*}$ la topología producto, también es continuo con respecto a las topologías de Bohr asociadas (13.13) y podemos decir que $\Phi(K)$ es $\sigma(\mathbb{F}^{E^*}, (\mathbb{F}^{E^*})^\wedge)$-compacto. Teniendo en cuenta que $\mathbb{F}$ respeta compacidad (19.12) y que la propiedad de respetar compacidad se conserva al formar productos ([**71**, Cor. 2.2]), se deduce que $\Phi(K)$ es compacto en $\mathbb{F}^{E^*}$. Es inmediato que si consideramos en E la topología $\sigma(E, E^*)$ y en $\mathbb{F}^{E^*}$ la topología producto, Φ resulta ser un encajamiento (el carácter inyectivo es consecuencia de que E^* separa puntos de E); luego de hecho K es compacto en $(E, \sigma(E, E^*))$. $\square$

Corolario 19.15. *Sea E un espacio vectorial topológico de Hausdorff sobre un cuerpo valuado $\mathbb{F}$ localmente compacto, con valuación no trivial. Las siguientes condiciones sobre E son equivalentes:*

(a) *Toda sucesión $\sigma(E, E^\wedge)$-convergente en E es convergente con respecto a la topología original de E.*
(b) *Toda sucesión $\sigma(E, E^*)$-convergente en E es convergente con respecto a la topología original de E.*

Si E tiene suficientes funcionales lineales continuos, son equivalentes:

(a') *Todo subconjunto $\sigma(E, E^\wedge)$-compacto en E es compacto con respecto a la topología original de E.*

(b') *Todo subconjunto $\sigma(E, E^\wedge)$-compacto en E es compacto con respecto a la topología original de E.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la Prop. 19.14. □

19.16. El Cor. 19.15 permite utilizar en nuestro contexto los resultados existentes sobre la verificación de la propiedad de Schur "vectorial". Recordamos a continuación algunas clases de espacios vectoriales topológicos E en los que se conocen condiciones necesarias y/o suficientes para la coincidencia de las sucesiones convergentes con las $\sigma(E, E^*)$-convergentes:

- Supongamos que E es un espacio de Banach sobre el cuerpo de los números reales o el de los complejos. Si E es de dimensión finita, es claro que tiene la propiedad de Schur. En dimensión infinita, el ejemplo clásico es l_1; el hecho de que en este espacio toda sucesión débilmente convergente es convergente es una reformulación del lema clásico de Schur (Teor. 24.1). De hecho se puede demostrar a partir del Teorema de Rosenthal ([**21**, Ch. XI]) que cualquier espacio de Banach de dimensión infinita con la propiedad de Schur contiene una copia isomorfa de ℓ_1. En particular ningún espacio de Banach infinitodimensional y reflexivo tiene la propiedad de Schur. Otros resultados en esta dirección aparecen enunciados en [**40**].
- El caso de cuerpo base no arquimediano muestra un comportamiento totalmente distinto: *cualquier* espacio localmente convexo no arquimediano (18.15) y de Hausdorff definido sobre un cuerpo valuado localmente compacto (de hecho esféricamente completo, ver Nota 18.18) verifica la propiedad de Schur ([**79**, Prop. 4.11]). Sin embargo, el espacio $l_1(\mathbb{Q}_p)$ (Ej. 18.17) , que podríamos considerar como un análogo no arquimediano a l_1, no cumple la propiedad de Schur ([**57**, Th. 3]).

NOTA 19.17. La Prop. 19.14 para el caso de $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y en lo referido a la igualdad de los subconjuntos compactos aparece demostrada en [**71**, Lemma 1.2(b)], aunque aquí se ha eliminado la hipótesis innecesaria, asumida en esta referencia, de que el espacio sea localmente convexo. Resultados de permanencia análogos a los derivados de la Prop. 19.6 se enuncian también en [**71**] para la propiedad de respetar compacidad.

19.18. Terminaremos esta sección proporcionando un ejemplo de un espacio localmente convexo E con la propiedad de Schur pero que no respeta compacidad. Notar que por el Cor. 19.15, podemos utilizar indistintamente las definiciones originales de estas propiedades o las equivalentes que se obtienen sustituyendo en ellas la topología de Bohr de E por la topología $\sigma(E, E^*)$. Necesitaremos referirnos a algunos resultados y definiciones de Análisis Funcional, que resumimos a continuación:

(a) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y F un subespacio del espacio de las formas lineales definidas en E. Supongamos que F separa puntos de E. De una topología de espacio vectorial $\mathcal{T}$ en E se dice que es *compatible con la dualidad* (E, F) cuando $(E, \mathcal{T})^* = F$. La topología inicial en E con respecto a los elementos de F, $\sigma(E, F)$, es la topología menos fina compatible. Existe asimismo la topología más fina compatible, denominada *topología de Mackey* en E, que se denota $\tau(E, F)$ y se puede caracterizarr como la topología de la convergencia uniforme en conjuntos convexos, equilibrados y $\sigma(F,E)$-compactos de F ([**10**, Ch. IV, §1], [**78**, Ch. 4], [**90**, Ch. 8, 9]).

(b) Consideramos el espacio de Banach l_∞. Las siguientes afirmaciones relativas a distintas topologías en l_∞^* se deben a Grothendieck:

(b1) Toda sucesión $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$-convergente es $\sigma(l_\infty^*, l_\infty^{**})$-convergente ([**21**, p. 103]).

(b2) Las topologías $\tau(l_\infty^*, l_\infty)$ y $\sigma(l_\infty^*, l_\infty^{**})$ en l_∞^* tienen los mismos subconjuntos relativamente compactos ([**38**, p. 229]).

(c) (c1) Sea E un espacio de Banach. Se dice que E tiene la propiedad de Dunford-Pettis cuando (entre otras formulaciones equivalentes) para cualesquiera sucesiones x_n^* en E^* y x_n en E, que convergen, respectivamente, a x^* en $\sigma(E^*, E^{**})$ y a x en $\sigma(E, E^*)$, se verifica que $x_n^*(x_n)$ converge en $\mathbb{F}$ a $x^*(x)$.

(c2) Si E es un espacio de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis y x_n^* converge a 0 en $\sigma(E^*, E^{**})$, entonces también converge a 0 en $\tau(E^*, E)$. [En efecto, si x_n^* convergiese a 0 en $\sigma(E^*, E^{**})$ pero no en $\tau(E^*, E)$, existirían una subsucesión $(x_{n_k}^*)$ de (x_n^*), un subconjunto $\sigma(E, E^*)$-compacto K de E y un $\varepsilon > 0$ tales que

$$\varepsilon < \max_{x\in K} |x_{n_k}^*(x)| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sea $x_k \in K$ un punto en el que se alcanza $\max_{x\in K} |x_{n_k}^*(x)|$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Eberlein-Smulyan ([**21**, Ch. III]), una subsucesión de x_k (que suponemos es la propia sucesión) converge a un $x_0 \in K$ en la topología $\sigma(E, E^*)$; por la condición de Dunford-Pettis se deduce que $x_{n_k}^*(x_k)$ converge a cero, contradicción.]

(c3) Si K es un espacio topológico compacto, el espacio de Banach $C(K)$, con la norma del máximo, verifica la propiedad de Dunford-Pettis ([**22**, Cor. VI.2.6]) l_∞ se puede expresar como un espacio $C(K)$ ([**21**, p. 103]); por lo tanto cumple la propiedad de Dunford-Pettis.

EJEMPLO 19.19. *El espacio localmente convexo $E = (l_\infty^*, \tau(l_\infty^*, l_\infty))$ tiene la propiedad de Schur pero no la de respetar compacidad.*

DEMOSTRACIÓN. La topología $\sigma(E, E^*)$ es en este caso $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$ (19.18(a)). Si (x_n^*) es una sucesión en l_∞^* que converge a 0 en $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$, por 19.18(b1) también lo hace en $\sigma(l_\infty^*, l_\infty^{**})$ y por (c), en $\tau(l_\infty^*, l_\infty)$. Por lo tanto E tiene la propiedad de Schur. Sin embargo la bola unidad cerrada de l_∞ es $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$-compacta (por el teorema de Alaoglu, [**58**, 2.6.18]) y no es $\tau(l_\infty^*, l_\infty)$-compacta: si lo fuese, por 19.18(b2) también sería compacta con respecto a la topología $\sigma(l_\infty^*, l_\infty^{**})$ y l_∞^* sería un espacio de Banach reflexivo ([**58**, 2.8.2]), contradicción. □

CAPíTULO IV

Sumabilidad en grupos abelianos topológicos

20. Familias sumables, presumables, hereditariamente sumables

En lo sucesivo se utilizará continuamente $\mathfrak{F}(A)$ como conjunto de índices asociado a distintas redes definidas en un grupo, siendo A un conjunto no vacío. En todos los casos se tomará $\mathfrak{F}(A)$ dirigido por inclusión.

20.1. Dado un grupo abeliano topológico G, un conjunto no vacío A y una familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$, se dice que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es *convergente a cero* (cf. [**67**, 1.1.6]) cuando

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(G), \quad \{\alpha \in A : x_\alpha \notin U\} \in \mathfrak{F}(A).$$

Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una familia convergente a cero, el conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ es precompacto.

Una sucesión es convergente a cero según esta definición si y sólo si lo es en el sentido ordinario. Asimismo, si $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una familia convergente a cero en un grupo *metrizable* G, entonces el conjunto $S_x = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\}$ es numerable ya que se puede escribir como unión numerable de conjuntos finitos

$$S_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\alpha \in A : x_\alpha \notin V_n\},$$

siendo $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión fundamental de entornos de cero en G.

Definición 20.2. Sea A un conjunto no vacío, G un grupo topológico abeliano de Hausdorff y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$. Se dice que la familia (x_α) es *sumable* cuando la red $\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\right)_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)}$ es convergente, es decir, cuando existe un $x \in G$ (necesariamente único) tal que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe $\Delta_0 \in \mathfrak{F}(A)$ con la propiedad de que

$$\Delta \in \mathfrak{F}(A), \quad \Delta_0 \subset \Delta \;\Rightarrow\; \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in x + U.$$

Se dice que x es la *suma* de la familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ y se denota $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha$. Notar que si A es finito, cualquier familia en G^A es sumable, y la suma tiene el sentido ordinario. En el caso de que se utilice notación multiplicativa para la operación del grupo, se hablará de familia multiplicable y se usará la notación $\prod_{\alpha\in A} x_\alpha$ para el límite de la red $\left(\prod_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\right)_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)}$.

Nota 20.3. Imponemos la restricción de que el grupo sea separado para poder asegurar la unicidad de la suma y evitar complicar la exposición, no porque el concepto de familia sumable pierda su sentido en el caso general, que se puede reducir a éste en lo esencial mediante un cociente por el subgrupo cerrado $\overline{\{0\}}$ (ver Subsec. 1.4).

Esta condición de sumabilidad (la que se asocia normalmente con el nombre de "familia sumable", ver [**11**, III.37]) es demasiado exigente para muchos de nuestros objetivos, y es fácil ver que en general no se conserva al pasar a subfamilias ni a subgrupos que contengan a la familia de partida. A continuación la debilitaremos exigiendo solamente que la red de sumas en subfamilias finitas verifique la condición de Cauchy.

DEFINICIÓN 20.4. Sea A un conjunto no vacío, G un grupo topológico abeliano y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$. Se dice que la familia (x_α) es *presumable* cuando la red $\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\right)_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)}$ es de Cauchy[1] en la uniformidad natural de G, es decir, cuando

$$\begin{array}{rl} & \forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \exists \Delta_0 \in \mathfrak{F}(A) \\ \text{tal que} & [\Delta, \Delta' \in \mathfrak{F}(A),\ \Delta_0 \subset \Delta \cap \Delta' \Rightarrow \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha - \sum_{\alpha\in\Delta'} x_\alpha \in U]. \end{array}$$

Es inmediato que la condición de presumabilidad dada arriba es equivalente a

$$\begin{array}{rl} & \forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \exists \Delta_0 \in \mathfrak{F}(A) \\ \text{tal que} & [\Delta \in \mathfrak{F}(A),\ \Delta \cap \Delta_0 = \phi \Rightarrow \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in U]. \end{array}$$

20.5. Es claro que cualquier familia presumable es convergente a cero en el sentido de 20.1.

PROPOSICIÓN 20.6. *Sea G un grupo abeliano topológico y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$.*

(a) *Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es presumable, entonces para cualquier $B \subset A$ no vacío la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ es presumable.*
(b) *Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es tal que para cualquier $B \subset A$ numerable la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ es presumable, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es presumable.*

DEMOSTRACIÓN.
(a) Es trivial.
(b) Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ no es presumable; entonces existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ existe $\Delta' \in \mathfrak{F}(A)$ con $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ y $\sum_{\alpha\in\Delta'} x_\alpha \notin U$. Inductivamente podemos construir una sucesión $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de A disjuntos dos a dos y tales que $\sum_{\alpha\in\Delta_n} x_\alpha \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El subconjunto $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ de A es numerable y es claro que la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ no es presumable. $\square$

A diferencia de lo que ocurre con las familias presumables, las subfamilias de las sumables no son en general sumables, lo que motiva la siguiente definición:

[1] En algunas referencias ([**8**], [**67**]) se denomina familias sumables a las aquí introducidas bajo el nombre de presumables, es decir, a las que satisfacen la condición de Cauchy de sumabilidad. Aunque en la mayoría de las situaciones que vamos a encontrar éste sea efectivamente el grado significativo de sumabilidad necesario, preferimos reservar el término *sumable* para las familias que de hecho se pueden sumar dentro del grupo.

DEFINICIÓN 20.7. Sea A un conjunto no vacío, G un grupo topológico abeliano de Hausdorff y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$. Se dice que la familia (x_α) es *hereditariamente sumable*[2] cuando para todo $B \subset A$ la familia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ es sumable.

Es evidente que toda familia hereditariamente sumable es sumable y que toda sumable es presumable. Los tres conceptos de sumabilidad que hemos introducido son claramente equivalentes en el caso de que A sea finito y también, como es de esperar, bajo las hipótesis de la siguiente

PROPOSICIÓN 20.8. *Sea G un grupo abeliano topológico completo y de Hausdorff; A un conjunto no vacío y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$. Son equivalentes*

(i) (x_α) *es presumable.*
(ii) (x_α) *es sumable.*
(iii) (x_α) *es hereditariamente sumable.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar (i)$\Rightarrow$(iii). Si (x_α) es presumable y $B \subset A$, la familia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ es presumable (Prop. 20.6(a)) y, por ser G completo, sumable. □

EJEMPLO 20.9. (a) *Una familia (x_α) en $\mathbb{R}$ (resp., en $\mathbb{C}$) es sumable si y sólo si lo es la familia $(|x_\alpha|)$ de los valores absolutos (resp., de los módulos).*
(b) *Una familia (t_α) en $\mathbb{T}$ es multiplicable si y sólo si la familia $(|1-t_\alpha|)_{\alpha\in A}$ es sumable en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) La afirmación relativa a los grupos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ es una generalización natural del teorema de Dirichlet-Riemann que establece la equivalencia entre los conceptos de serie absolutamente convergente e incondicionalmente convergente, y la demostración es una consecuencia sencilla de las desigualdades

$$\max_{\Delta\subset\{1,\dots,N\}} \Big|\sum_{n\in\Delta} x_n\Big| \le \sum_{n=1}^{N} |x_n| \le c \max_{\Delta\subset\{1,\dots,N\}} \Big|\sum_{n\in\Delta} x_n\Big|, \tag{20.1}$$

válidas para cualquier familia finita $(x_1, \dots, x_N)$ de números reales o complejos, donde $c = 2$ en el caso real y $c = 4$ en el complejo (Cf. [**11**, Ch. VII, §3.1]). La primera desigualdad es consecuencia de la desigualdad triangular para el valor absoluto o el módulo; en cuanto a la segunda, en el caso real basta tener en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| = \sum_{\{n:x_n\ge 0\}} x_n - \sum_{\{n:x_n<0\}} x_n = \Big|\sum_{\{n:x_n\ge 0\}} x_n\Big| + \Big|\sum_{\{n:x_n<0\}} x_n\Big| \le 2 \max_{\Delta\subset\{1,\dots,N\}} \Big|\sum_{n\in\Delta} x_n\Big|.$$

[2] *supersummable family* en [**18**, p. 102]

El caso complejo se deduce del real de la siguiente forma: si ponemos $x_n = a_n + ib_n$, con $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n| &\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |b_n| \\ &\leq 2 \max_{\Delta \subset \{1,\dots,N\}} |\sum_{n\in\Delta} a_n| + 2 \max_{\Delta \subset \{1,\dots,N\}} |\sum_{n\in\Delta} b_n| \\ &\leq 2 \max_{\Delta \subset \{1,\dots,N\}} |\sum_{n\in\Delta} x_n| + 2 \max_{\Delta \subset \{1,\dots,N\}} |\sum_{n\in\Delta} x_n|.\end{aligned}$$

(b) Para una familia finita $(t_1, \dots, t_N)$ de elementos de $\mathbb{T}$, la desigualdad

$$\max_{\Delta \subset \{1,\dots,N\}} |1 - \prod_{n\in\Delta} t_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |1 - t_n| \tag{20.2}$$

es una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular para la pseudonorma $t \mapsto |1-t|$ en $\mathbb{T}$. Inversamente, de la Prop. 3.13 se deduce que

$$\forall\, \beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[\,, \quad \left[\max_{\Delta \subset \{1,\dots,N\}} |1 - \prod_{n\in\Delta} t_n| \leq 2\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2} \;\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |1 - t_n| \leq 2\beta\right]. \tag{20.3}$$

De (20.2) y (20.3) se deduce la caracterización enunciada.

□

Ejemplo 20.10. *Si G es un grupo topológicamente no arquimediano, las familias presumables en G coinciden con las convergentes a cero.*

Demostración. Toda familia presumable es convergente a cero (20.5). Inversamente, sea G un grupo TNA, $A \neq \emptyset$ y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia convergente a cero en G. Fijado $U \in \mathcal{N}_0(G)$, tenemos que demostrar que existe un $\Delta_U \in \mathfrak{F}(A)$ con $\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in U$ para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ con $\Delta \cap \Delta_U = \emptyset$. Por ser la familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ convergente a cero, existe $\Delta_U \in \mathfrak{F}(A)$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \in A \setminus \Delta_U$. Como podemos suponer que U es un subgrupo de G, la conclusión es inmediata. □

Proposición 20.11. *Sean G y H grupos abelianos topológicos y $u : G \to H$ un homomorfismo continuo. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia presumable (resp. sumable, hereditariamente sumable) en G. Entonces $(u(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ es presumable (resp. sumable, hereditariamente sumable) en H.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de las definiciones. □

Proposición 20.12. *Sea G un grupo abeliano topológico y $\{q_i\}_{i\in I}$ una familia de pseudonormas que generan la topología de G, en el sentido de 4.6. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$ es tal que*

$$\sum_{\alpha\in A} q_i(x_\alpha) < \infty \quad \forall i \in I$$

entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es presumable.

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \in \mathcal{N}_0(G)$ arbitrario; tenemos que demostrar que existe un $\Delta_U \in \mathfrak{F}(A)$ tal que para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ disjunto con Δ_U, se cumple $\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in U$. Es claro que podemos suponer que $U = \{x \in G : q_i(x) \leq 1\}$ para algún $i \in I$. Como $\sum_{\alpha\in A} q_i(x_\alpha) < \infty$, existe un $\Delta_U \in \mathfrak{F}(A)$ tal que $\sum_{\alpha\in A\setminus\Delta_U} q_i(x_\alpha) \leq 1$ y en particular, si $\Delta \cap \Delta_U = \emptyset$, $q_i(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha) \leq \sum_{\alpha\in\Delta} q_i(x_\alpha) \leq 1$, luego $\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in U$. □

20.13. Si (G, q) es un grupo pseudonormado, llamaremos q-absolutamente sumables a aquellas familias $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ para las que $\sum_{\alpha\in A} q(x_\alpha) < \infty$. La Prop. 20.12 implica en particular que si G es un grupo abeliano topológico metrizable y q una pseudonorma que genera la topología de G, entonces cualquier familia q-absolutamente sumable en G es presumable.

PROPOSICIÓN 20.14. *Sea G un grupo abeliano topológico con la propiedad de Schur. Entonces cualquier familia presumable en la topología de Bohr de G es presumable en la topología original de G.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia presumable en la topología de Bohr de G. Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ no es presumable en la topología original de G.

Si A es numerable, podemos suponer $A = \mathbb{N}$; es claro que existen $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y una sucesión (Δ_n) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con $\max \Delta_n < \min \Delta_{n+1}$ y $\sum_{k\in\Delta_n} x_k \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $y_n = \sum_{k\in\Delta_n} x_k$ converge a cero en la topología de Bohr de G pero no en la original, contradicción.

Si A no es numerable, existe un subconjunto numerable B de A tal que la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ no es presumable en la topología original de G (Prop. 20.6(b)), y este caso se reduce al anterior. □

PROPOSICIÓN 20.15. *Sean G, G_i $(i \in I)$ grupos abelianos topológicos y $u_i : G \to G_i$, $i \in I$ homomorfismos de grupos. Supongamos que la topología de G es la inicial con respecto a la familia de homomorfismos u_i, $i \in I$. Entonces son equivalentes:*

(i) *$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es presumable en G*
(ii) *para todo $i \in I$ la familia $(u_i(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ es presumable en G_i*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la descripción de los entornos básicos de cero asociados a la topología inicial (Prop. 11.1). □

PROPOSICIÓN 20.16. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos de Hausdorff. Sean $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_f$ las topologías rectangular, asterisco y coproducto, respectivamente, en la suma directa $\bigoplus_{i\in I} G_i$ (Sec. 12). Sea $A \neq \emptyset$. Las familias presumables $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ con respecto a las tres topologías coinciden. Además, si (x_α) es presumable con respecto a cualquiera de estas topologías, existe $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$ tal que $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset \sum_{i\in\Delta} v_i(G_i)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro (Prop. 20.11) que

$$(x_\alpha)\ \mathcal{T}_f\text{- presumable} \Rightarrow (x_\alpha)\ \mathcal{T}_a\text{- presumable} \Rightarrow (x_\alpha)\ \mathcal{T}_r\text{- presumable.}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{T}_r$-presumable, en particular $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una familia $\mathcal{T}_r$-convergente a cero (20.5) y por lo tanto $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ es un subconjunto precompacto de $\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i$. Luego

(Prop. 12.3) existe $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$ con $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset \sum_{i\in\Delta} v_i(G_i)$. Es inmediato (cf. Lema 23.4) que (x_α) es una familia presumable con respecto a la topología inducida por la rectangular en $\sum_{i\in\Delta} v_i(G_i)$, que denotamos también $\mathcal{T}_r$. Por la composición de los isomorfismos topológicos canónicos

$$(\sum_{i\in\Delta} v_i(G_i), \mathcal{T}_r) \xrightarrow{12.6} \bigoplus_{i\in\Delta}^{(r)} G_i \xrightarrow{\text{Prop. } 12.8(b)} \bigoplus_{i\in\Delta}^{(f)} G_i \xrightarrow{12.6} (\sum_{i\in\Delta} v_i(G_i), \mathcal{T}_f)$$

la familia (x_α) se transforma en sí misma, y por lo tanto es $\mathcal{T}_f$-presumable. □

Proposición 20.17. *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo no trivialmente valuado localmente compacto; consideramos el espacio vectorial topológico $(E, \sigma(E, E^*))$ (11.6). Son equivalentes:*

(i) *$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es presumable en $(E, \sigma(E, E^*))$*
(ii) *para todo $x^* \in E^*$ la familia $(x^*(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ es sumable en $\mathbb{F}$*
(iii) *$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es presumable en $(E, \sigma(E, E^\wedge))$*

Demostración. • (i)⇔(ii) es un caso particular de la Prop. 20.15.

- (ii)⇔(iii): Dado que $\mathbb{F}$ tiene la propiedad de Schur (19.12), de la Prop. 20.14 se deduce que (ii) es equivalente a que $(\varphi(x^*(x_\alpha)))_{\alpha\in A}$ sea una familia multiplicable en $\mathbb{T}$ para todos $\varphi \in \mathbb{F}^\wedge$ y $x^* \in E^*$. Por la Prop. 17.8, esta condición expresa que $(\chi(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ sea multiplicable en $\mathbb{T}$ para todo $\chi \in E^\wedge$ y por la Prop. 20.15, esta propiedad es a su vez equivalente a (iii).

20.18. Con las notaciones de la Prop. 20.17, supongamos por simplicidad que $E^\wedge$ (equivalentemente, E^*: ver 17.11) separa puntos de E. Se cumple que una familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es sumable en $(E, \sigma(E, E^*))$ si y sólo si lo es en $(E, \sigma(E, E^\wedge))$, y además para cualquier familia sumable, coinciden las sumas con respecto a ambas topologías. En efecto, toda familia $\sigma(E, E^*)$-sumable en E es claramente $\sigma(E, E^\wedge)$-sumable al mismo elemento, ya que $\sigma(E, E^\wedge) \subset \sigma(E, E^*)$ (19.13); inversamente, si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una familia sumable con respecto a la topología $\sigma(E, E^\wedge)$, en particular es $\sigma(E, E^*)$-presumable (Prop. 20.17) y basta aplicarle a la red de sumas sobre subconjuntos finitos de A el Lema 19.7(a), teniendo en cuenta que $(E, \sigma(E, E^*))$ admite una base de entornos $\sigma(E, E^\wedge)$-cerrados de cero (19.13).

Como consecuencia, las familias hereditariamente sumables con respecto a las dos topologías también coinciden.

□

21. Sucesiones sumables, presumables, hereditariamente sumables

Muchas de las cuestiones que surgen al estudiar la sumabilidad de familias de elementos de un grupo abeliano topológico pueden reducirse fácilmente al caso de conjunto de índices numerable (Prop. 20.6(b)), que en todo caso merece estudio aparte: dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en G, la red de sumas finitas $\left(\sum_{n\in\Delta} x_n\right)_{\Delta\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}$ admite como subred a una sucesión (la de sumas parciales, $(\sum_{n=1}^N x_n)_{N\in\mathbb{N}}$) y esta propiedad, con importantes consecuencias, no es cierta en el caso general. Los distintos conceptos de sumabilidad en sucesiones están estudiados en profundidad, especialmente en el contexto de los espacios de Banach o más en general, de los espacios vectoriales topológicos ([**51**], [**21**], [**67**])

Por tradición mantenemos el confuso término de *serie,* que se utiliza para referirse a una sucesión de la que interesa su sumabilidad en cualquiera de los sentidos usuales. Así, a la sucesión $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$ (donde G es un grupo abeliano topológico) le asociaremos la expresión formal $\sum x_n$, *serie* de término general x_n. Diremos que la serie $\sum x_n$ es

- *convergente* cuando lo es la sucesión $(\sum_{n=1}^{N} x_n)_{N\in\mathbb{N}}$, llamada de sumas parciales (denotaremos el límite de esta sucesión por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$);
- *de Cauchy* cuando la sucesión de las sumas parciales es de Cauchy;
- *incondicionalmente convergente* cuando para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum_n x_{\pi(n)}$ es convergente;
- *incondicionalmente de Cauchy* cuando para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum_n x_{\pi(n)}$ es de Cauchy;
- *subseries convergente* cuando para toda sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ la serie $\sum_k x_{n_k}$ es convergente;
- *subseries Cauchy* cuando para toda sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ la serie $\sum_k x_{n_k}$ es de Cauchy.

LEMA 21.1. *Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff. Si una sucesión (x_n) en G es presumable y además la serie $\sum x_n$ es convergente a x, entonces (x_n) es sumable a x.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si Δ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ que contiene a $\{1, \ldots, N\}$, entonces se tiene $\sum_{n\in\Delta} x_n \in x + U$. Fijamos $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y determinamos $V \in \mathcal{N}_0(G)$ con $V + V \subset U$. Por ser (x_n) presumable, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}), \quad \min \Delta > N_1 \Rightarrow \sum_{n\in\Delta} x_n \in V$$

y por ser $\sum x_n$ convergente a x, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \in x + V.$$

Si ahora $\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ es tal que $\{1, \ldots, N\} \subset \Delta$, siendo $N = \max\{N_1, N_2\}$, es claro que

$$\sum_{n\in\Delta} x_n = \sum_{n=1}^{N} x_n + \sum_{n\in\Delta\setminus\{1,\ldots,N\}} x_n \ \in \ x + V + V \subset x + U.$$

□

NOTA 21.2. Aunque resulta preferible esta demostración directa, también podemos recurrir a la compleción $\widetilde{G}$ del grupo G: (x_n) es sumable en $\widetilde{G}$ (prop. 20.8) a un elemento $\widetilde{x}$ que ha de coincidir con x ya que en particular $\widetilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

PROPOSICIÓN 21.3. *Sea G un grupo abeliano topológico y $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$. Son equivalentes*

(i) *(x_n) es presumable*
(ii) *$\sum x_n$ es subseries Cauchy*
(iii) *$\sum x_n$ es incondicionalmente de Cauchy*

DEMOSTRACIÓN. • (i)⇒(ii): Si (x_n) es presumable, también lo es (x_{n_k}) para toda $(n_k) \nearrow \infty$ en $\mathbb{N}$, y en particular la sucesión $(\sum_{k=1}^{l} x_{n_k})_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

• (ii) ⇒ (iii): Supongamos que existe $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutación tal que $(\sum_{n=1}^{N} x_{\pi(n)})_{N\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy. Existen $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y sucesiones (p_k) y (q_k) en $\mathbb{N}$ tales que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$p_i < q_i < p_{i+1}, \qquad \sum_{j=p_i+1}^{q_i} x_{\pi(j)} \notin U,$$
$$\max\{\pi(p_i), \dots, \pi(q_i)\} < \min\{\pi(p_{i+1}), \dots, \pi(q_{i+1})\}.$$

Ordenando los índices de cada subconjunto $\{\pi(p_i), \dots, \pi(q_i)\}$ y numerándolos correlativamente podemos construir una sucesión $(n_k) \nearrow \infty$ tal que $(\sum_{k=1}^{l} x_{n_k})_{l\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

• (iii) ⇒ (i) Si (x_n) no es presumable, existen $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y subconjuntos finitos de N $\Delta_1 < \Delta_2 < \dots$ tales que $\forall i \in \mathbb{N}$ $\sum_{n\in\Delta_i} x_n \notin U$. Sean $N_0 = 0$, $N_i = \max \Delta_i$, $n_i = \operatorname{card} \Delta_i$. Construimos una permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\{N_{i-1} + 1, \dots, N_i\} \setminus \Delta_i = \{\pi(N_{i-1} + 1), \dots, \pi(N_i - n_i)\}$$
$$\Delta_i = \{\pi(N_i - n_i + 1), \dots, \pi(N_i)\}.$$

Es claro que la serie $\sum x_{\pi(n)}$ no es de Cauchy.

□

PROPOSICIÓN 21.4. *Sea G un grupo topológico abeliano y de Hausdorff. Sea $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$.*

(a) *Si (x_n) es sumable entonces $\sum x_n$ es incondicionalmente convergente.*
(b) *Si $\sum x_n$ es incondicionalmente convergente entonces (x_n) es sumable, y todas las reordenadas $\sum x_{\pi(n)}$ convergen a la suma de la sucesión.*

DEMOSTRACIÓN. (a) es trivial.

(b) Si $\sum x_n$ es incondicionalmente convergente entonces es incondicionalmente de Cauchy. Por la Prop. 21.3, (x_n) es presumable y basta aplicar el Lema 21.1, teniendo en cuenta que podemos aplicarle el razonamiento a cualquier reordenada de (x_n).

□

PROPOSICIÓN 21.5. *Sea G un grupo topológico abeliano y de Hausdorff. Sea $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$. $\sum x_n$ es subseries convergente si, y sólo si, (x_n) es hereditariamente sumable.*

DEMOSTRACIÓN. Si (x_n) es hereditariamente sumable, es inmediato que $\sum x_n$ es subseries convergente. Si $\sum x_n$ es subseries convergente, de la Prop. 21.3 deducimos que (x_n) es presumable; fijado B subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, si $B = \{n_1, n_2, \dots\}$ con $n_1 < n_2 < \dots$, la sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es presumable y la serie $\sum_k x_{n_k}$ convergente; aplicando el lema 21.1 se deduce que la sucesión $(x_n)_{n\in B}$ es sumable. □

El hecho de que la sumabilidad de una sucesión se reduzca al carácter convergente de determinadas series asociadas a ella permite enunciar una versión algo más fuerte de la Proposición 20.8 para $A = \mathbb{N}$:

PROPOSICIÓN 21.6. *Sea G un grupo abeliano topológico secuencialmente completo y de Hausdorff; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$. Son equivalentes*
(i) (x_n) *es presumable.*
(ii) (x_n) *es sumable.*
(iii) (x_n) *es hereditariamente sumable.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar (i)⇒(iii). Por la Prop. 21.5 es suficiente probar que $\sum x_n$ es subseries convergente, pero cualquier subserie de $\sum x_n$ es de Cauchy y G es por hipótesis secuencialmente completo. □

NOTA 21.7. Los resultados precedentes son conocidos pero se suelen enunciar en contextos más restringidos; hemos incluido las demostraciones para poner de manifiesto que son válidos en grupos abelianos topológicos y de hecho ([**16**], Chapt. III) en muchos casos, en estructuras más generales.

EJEMPLO 21.8. *Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio de Banach. Supongamos que E no contiene ninguna copia isomorfa de c_0, es decir, que no existe ningún encajamiento lineal $c_0 \hookrightarrow E$. Por el Teorema de Bessaga-Pelczynski (*[**21**, Theor. V.8]*), cualquier sucesión (x_n) en E para la que $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$ para todo $x^* \in E^*$ es sumable en $(E, ||\cdot||)$. En particular, en el espacio localmente convexo $E_w = (E, \sigma(E, E^*))$ cualquier sucesión presumable (Prop. 20.17) es hereditariamente sumable. Sin embargo E_w no es completo a menos que E sea de dimensión finita (*[**58**, Prop. 2.5.15]*). Si se toma $E = J^*$, donde J es el espacio de James (*[**48**]*), E_w es de hecho no secuencialmente completo (*[**20**]*). Si (siguiendo la nomenclatura establecida en espacios vectoriales topológicos llamamos grupos Σ-completos a los grupos en los que coinciden las sucesiones presumables y las hereditariamente sumables, este último ejemplo muestra que la clase de los grupos Σ-completos contiene estrictamente a la de los grupos secuencialmente completos.*

NOTA 21.9. Aunque aquí no los utilizaremos directamente, es importante reseñar la validez en grupos de resultados del tipo del teorema de Orlicz-Pettis ([**50**, Th. 14.6.4]), que afirma que en cualquier espacio localmente convexo (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y de Hausdorff E, las sucesiones hereditariamente sumables con respecto a las topologías τ_E y $\sigma(E, E^*)$ coinciden. Llamemos *propiedad de Orlicz-Pettis* al análogo más natural, en grupos abelianos topológicos, a la propiedad obtenida en este resultado: el hecho de que para un grupo abeliano topológico G coincidan las sucesiones hereditariamente sumables con respecto a las topología original y a la topología de Bohr del grupo. Dado que las familias $\sigma(E, E^\wedge)$- y $\sigma(E, E^*)$-hereditariamente sumables son las mismas (20.18), el teorema original de Orlicz-Pettis implica que el grupo subyacente a cualquier espacio localmente convexo verifica esta propiedad.

Kalton estudió el problema general de encontrar condiciones bajo las cuales dos topologías separadas de grupo τ y τ', definidas sobre el mismo grupo abeliano G y con $\tau \subset \tau'$, tienen asociadas las mismas sucesiones hereditariamente sumables, y demostró que ése es el caso si ([**52**, Th. 3]) ambas son separables y además (G, τ') es completo y metrizable, y también si ([**52**, Th. 5]) τ' admite una base de entornos de cero τ-cerrados. Este segundo resultado implica en particular que todo grupo localmente cuasiconvexo y de Hausdorff cumple la propiedad de Orlicz-Pettis. Se pueden encontrar significativas generalizaciones de los resultados de Kaplan en [**18**, Cor. 3.3.25, Th. 3.3.27].

22. Sumabilidad y compacidad del conjunto de sumas

Dada una serie convergente de números reales $\sum x_n$, la sucesión de sumas parciales asociada es convergente y en particular está acotada, pero es claro que esta acotación no es suficiente para que la serie de partida converja. Si sustituimos el conjunto de sumas parciales por el de *todas* las sumas sobre subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, obtenemos una caracterización del carácter *incondicionalmente* convergente de la serie. Esta equivalencia constituye un ejemplo representativo del tipo de resultados que recogeremos en esta sección, en la que enunciaremos condiciones necesarias o suficientes de sumabilidad de una familia dada en términos del carácter compacto o precompacto del conjunto formado por las sumas de determinadas subfamilias suyas.

Para simplificar los enunciados en lo sucesivo, introducimos los siguientes conceptos:

Definición 22.1. Sea G un grupo abeliano y A un conjunto no vacío; sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ un elemento de G^A. Llamaremos *conjunto de sumas finitas* de la familia (x_α) al subconjunto de G

$$\{\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha : \Delta \in \mathfrak{F}(A)\}.$$

Si G es un grupo abeliano topológico y (x_α) es una familia hereditariamente sumable en G, llamaremos *conjunto de sumas* de (x_α) al subconjunto de G

$$\{\sum_{\alpha\in B} x_\alpha : B \subset A\}.$$

Proposición 22.2. *En todo grupo abeliano topológico, el conjunto de sumas finitas de una familia presumable es precompacto.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano topológico y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia presumable en G. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de sumas finitas de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Tenemos que demostrar que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe un subconjunto finito F de G tal que $\mathcal{S} \subset F + U$. Dado U, por la condición de presumabilidad existe $\Delta_U \in \mathfrak{F}(A)$ tal que

$$\Delta \in \mathfrak{F}(A),\ \Delta \cap \Delta_U = \emptyset \Rightarrow \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in U.$$

Si Δ es un subconjunto finito arbitrario de A podemos poner

$$\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta\cap\Delta_U} x_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta\cap(A\setminus\Delta_U)} x_\alpha \in F+U$$

siendo $F = \{\sum_{\alpha\in C} x_\alpha : C \subset \Delta_U.\}$ □

A la luz de la Prop. 22.2 resulta natural la cuestión de si el conjunto de sumas de una familia hereditariamente sumable es compacto. Vamos a dar una respuesta afirmativa a esta pregunta, para lo que necesitaremos un resultado previo:

LEMA 22.3. *Sea A un conjunto no vacío. Para cada $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ definimos*

$$U_\Delta = \{(B,C) \in \mathfrak{P}(A)\times\mathfrak{P}(A) : B\cap\Delta = C\cap\Delta\}.$$

Entonces $\mathcal{B} = \{U_\Delta : \Delta \in \mathfrak{F}(A)\}$ es base de una uniformidad $\mathcal{U}$ en $\mathfrak{P}(A)$. Además el espacio topológico $(\mathfrak{P}(A), \tau_{\mathcal{U}})$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Los axiomas de base de uniformidad (1.3) son de comprobación sencilla para $\mathcal{B}$. Para demostrar que $\mathfrak{P}(A)$ es compacto con la topología $\tau_{\mathcal{U}}$, definimos la aplicación biyectiva

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathfrak{P}(A) & \to & \{0,1\}^A \\ & B & \mapsto & c_B \end{array}$$

donde c_B es la función característica de B, definida de la forma usual:

$$c_B(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\notin B, \\ 1 & \text{si } \alpha \in B. \end{cases}$$

Consideremos ahora a $\mathfrak{P}(A)$ dotado de la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ y a $\{0,1\}^A$, de la topología producto. Para todos $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ y $B \in \mathfrak{P}(A)$ se tiene

$$\begin{aligned} \Phi(U_\Delta[B]) &= \{\chi_C : C\cap\Delta = B\cap\Delta\} \\ &= \{(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in A} \in \{0,1\}^A : \forall\alpha\in\Delta \quad [\varepsilon_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha\in B]\} \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta}\{\chi_B(\alpha)\} \times \prod_{\alpha\notin\Delta}\{0,1\}. \end{aligned}$$

Como $\{U_\Delta[B] : \Delta \in \mathfrak{F}(A)\}$ y $\{\prod_{\alpha\in\Delta}\{\chi_B(\alpha)\} \times \prod_{\alpha\notin\Delta}\{0,1\} : \Delta\in\mathfrak{F}(A)\}$ son bases de entornos de B y de χ_B, respectivamente, en los espacios correspondientes, se deduce que Φ es un homeomorfismo. Basta ahora tener en cuenta que por el Teorema de Tychonoff, $\{0,1\}^A$ es un espacio topológico compacto. □

En el siguiente enunciado consideramos en $\mathfrak{P}(A)$ la estructura uniforme definida arriba, en $\mathfrak{F}(A)$ la inducida por $\mathfrak{P}(A)$ y en el grupo abeliano topológico G la uniformidad canónica:

PROPOSICIÓN 22.4. *Sean G un grupo abeliano topológico y A un conjunto no vacío.*

(a) *Para toda familia* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *presumable en* G*, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F}(A) & \to & G \\ \Delta & \mapsto & \displaystyle\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \end{array}$$

es uniformemente continua.

(b) *Si* G *es de Hausdorff, para toda familia* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *hereditariamente sumable en* G*, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P}(A) & \to & G \\ B & \mapsto & \displaystyle\sum_{\alpha\in B} x_\alpha \end{array}$$

es uniformemente continua.

Demostración. (a) Denotaremos por μ la aplicación así definida. Tenemos que demostrar que

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \exists \Delta_0 \in \mathfrak{F}(A) \quad \text{tal que} \quad [(\Delta, \Delta') \in U_{\Delta_0} \cap \mathfrak{F}(A) \times \mathfrak{F}(A) \Rightarrow \mu(\Delta) - \mu(\Delta') \in U.]$$

Fijamos $U \in \mathcal{N}_0(G)$. Sea $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $V - V \subset U$. Por ser (x_α) presumable, existe un $\Delta_0 \in \mathfrak{F}(A)$ tal que

$$\Delta \in \mathfrak{F}(A), \quad \Delta \cap \Delta_0 = \emptyset \Rightarrow \mu(\Delta) \in V.$$

Si ahora Δ y Δ' son subconjuntos finitos de A tales que $(\Delta, \Delta') \in U_{\Delta_0}$, es decir, $\Delta \cap \Delta_0 = \Delta' \cap \Delta_0$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) - \mu(\Delta') &= \mu(\Delta \cap \Delta_0) + \mu(\Delta \cap (A \setminus \Delta_0)) - \mu(\Delta' \cap \Delta_0) - \mu(\Delta' \cap (A \setminus \Delta_0)) \\ &= \mu(\Delta \cap (A \setminus \Delta_0)) - \mu(\Delta' \cap (A \setminus \Delta_0)) \in V - V \subset U. \end{aligned}$$

(b) De la definición de la estructura uniforme en $\mathfrak{P}(A)$ descrita arriba se deduce trivialmente que $\mathfrak{F}(A)$ es denso en $\mathfrak{P}(A)$: para todo conjunto $B \subset A$, la red de los subconjuntos finitos de B converge a B. Sea $\widetilde{G}$ el grupo abeliano topológico compleción de G, $i : G \to \widetilde{G}$ la inclusión y $\mu' = \overline{i \circ \mu} : \mathfrak{P}(A) \to \widetilde{G}$ la única extensión uniformemente continua de $i \circ \mu$ a $\mathfrak{P}(A)$ (1.4). Vamos a demostrar que μ' toma valores en G y actúa igual que la aplicación del enunciado. Para todo $B \subset A$, se tiene

$$\mu'(B) = \lim_{\Delta\in\mathfrak{F}(B)} \mu'(\Delta) = \lim_{\Delta\in\mathfrak{F}(B)} \mu(\Delta) = \lim_{\Delta\in\mathfrak{F}(B)} \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha = \sum_{\alpha\in B} x_\alpha \in G$$

$\square$

Notar que de (a) se deduce fácilmente la Prop. 22.2, aunque en este caso es más sencilla la demostración directa.

TEOREMA 22.5. *Sea G un grupo abeliano topológico y de Hausdorff, y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia hereditariamente sumable en G. Entonces el conjunto de sumas de (x_α) es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto de sumas de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es imagen por una aplicación continua (Prop. 22.4(b)) de un espacio topológico compacto (Lema 22.3). □

NOTA 22.6. La construcción de una estructura uniforme en $\mathfrak{P}(A)$, y la deducción del carácter compacto del conjunto de sumas asociado a una familia hereditariamente sumable, aparecen en [**18**, Ch. 3].

Nos interesa llegar a resultados suficientemente generales sobre la validez de las implicaciones en cierto sentido inversas a las demostradas en la Prop. 22.2 y el Teor. 22.5, es decir, encontrar condiciones bajo las que

- el carácter precompacto del conjunto de sumas finitas implique que la familia es presumable,
- el carácter relativamente compacto del conjunto de sumas finitas implique que la familia es hereditariamente sumable.

Es evidente que ninguna de las dos relaciones es cierta sin hipótesis suplementarias sobre el grupo; de ser así, cualquier familia de elementos de un grupo compacto sería sumable, y eso es claramente falso. El resultado siguiente (Prop. 3 en [**72**]) muestra que, de alguna forma, éste es el único contraejemplo posible:

TEOREMA 22.7. *Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff cuyo único subgrupo compacto es el trivial. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ familia de elementos de G. Si el conjunto de sumas finitas de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es relativamente compacto, entonces (x_α) es hereditariamente sumable en G.*

El siguiente ejemplo muestra que el análogo más natural del Teor. 22.7 para familias presumables no es válido, es decir, que existen grupos que no admiten subgrupos precompactos no triviales pero sí familias no presumables con conjunto de sumas finitas precompacto:

EJEMPLO 22.8. *(cf.* [**73**, Ch. 10, ex. 4]*) Sean $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ y (λ_n) una sucesión de números reales linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ y tal que $0 < \lambda_n < 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea X el subgrupo de $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ (con la topología producto) generado por la sucesión $\{(\lambda_n, e^{2\pi i\theta})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se verifica:*

(a) *X no tiene subgrupos precompactos no triviales.*
(b) *La sucesión $\{(\lambda_n, e^{2\pi i\theta})\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es presumable.*
(c) *El conjunto de sumas finitas de la sucesión $\{(\lambda_n, e^{2\pi i\theta})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es precompacto.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Supongamos que S es un subgrupo precompacto de X. Se tiene que $p_1(S)$ (donde $p_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es la primera proyección) es un subgrupo precompacto de $\mathbb{R}$; es trivial que entonces $p_1(S) = \{0\}$. Sea $(0, t) \in S$; por definición de X se puede poner

$$0 = \sum_{n=1}^{N} k_n \lambda_n, \quad t = \exp(2\pi i \theta \sum_{n=1}^{N} k_n)$$

para alguna sucesión finita $(k_1, \dots, k_N)$ de números enteros. Como los elementos de la sucesión (λ_n) son racionalmente independientes, se deduce que $k_n = 0$ para todo $n \in \{1, \dots, N\}$, y en particular $t = 1$. Luego $S = \{(0,1)\}$.

(b) es evidente ya que esta sucesión no tiende a $(0,1)$.

(c) es claro ya que el conjunto de sumas finitas de esta sucesión está contenido en $[0,1] \times \mathbb{T}$.

□

A continuación recogeremos algunas condiciones que garantizan el carácter presumable de una familia con conjunto de sumas finitas precompacto.

22.9. Notar que si en un grupo abeliano topológico G se cumple que cualquier sucesión con conjunto de sumas finitas precompacto es presumable, entonces lo mismo es cierto para familias arbitrarias, debido a la Prop. 20.6(b).

TEOREMA 22.10. *Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff. Consideremos las siguientes condiciones sobre G:*

(a) *Existe un grupo abeliano topológico H completo, de Hausdorff y sin subgrupos compactos no triviales tal que τ_G admite una base de entornos de cero $\sigma(G, CHom(G,H))$-cerrados, donde $\sigma(G, CHom(G,H))$ denota la topología inicial en G con respecto a todos los homomorfismos continuos definidos de G en H (Prop. 11.1).*

(b) *Existe un grupo abeliano topológico H completo, de Hausdorff y sin subgrupos compactos no triviales tal que $CHom(\widetilde{G}, H)$ separa puntos de $\widetilde{G}$ (es decir, para todo $x \neq 0$ en $\widetilde{G}$ existe $f \in CHom(\widetilde{G}, H)$ tal que $f(x) \neq 0$), donde $\widetilde{G}$ denota la compleción de G.*

(c) *$\widetilde{G}$ no tiene subgrupos compactos no triviales.*

(d) *Cualquier familia $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in G^A$ cuyo conjunto de sumas finitas sea precompacto, es presumable.*

Se verifica (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d).

DEMOSTRACIÓN. • (a)⇒(b): Sea H el grupo cuya existencia viene dada por (a). Sea x un elemento no nulo de $\widetilde{G}$, y $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ una red contenida en G que converge a x en $\widetilde{G}$. Si suponemos que $f(x) = 0$ para todo $f \in \mathrm{CHom}(\widetilde{G}, H)$, en particular $g(x_\gamma) \to 0$ para todo $g \in \mathrm{CHom}(G, H)$; en efecto, fijado un tal g, si $\overline{g}$ denota su extensión a $\widetilde{G}$ se cumple

$$0 = \overline{g}(x) = \lim_{\gamma} \overline{g}(x_\gamma) = \lim_{\gamma} g(x_\gamma).$$

Entonces (Prop. 11.2(a)), $x_\gamma \to 0$ en $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G,H))$ y como (x_γ) es una red de Cauchy en (G,τ_G) y τ_G admite una base de entornos de cero $\sigma(G,\mathrm{CHom}(G,H))$-cerrados, necesariamente (Lema 19.7(a)) $x_\gamma \to 0$ en G y por lo tanto $x = 0$, contradicción.

- (b)⇒(c): Sea K un subgrupo compacto de $\widetilde{G}$. Sea H un grupo en las condiciones descritas en (b). Para todo $f \in \mathrm{CHom}(\widetilde{G},H)$, $f(K)$ es un subgrupo compacto de H y por tanto $f(K) = \{0\}$. Como $\mathrm{CHom}(\widetilde{G},H)$ separa puntos de $\widetilde{G}$, se deduce que $K = \{0\}$.
- (c)⇒(d): Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$ y supongamos que el conjunto de sumas finitas $\mathcal{S}$ asociado a (x_α) es precompacto. Entonces $\mathcal{S}$ es un subconjunto relativamente compacto del grupo $\widetilde{G}$. Por el Teor. 22.7, (x_α) es hereditariamente sumable en $\widetilde{G}$ y por lo tanto, presumable en G.

□

NOTA 22.11. La implicación (a)⇒(b) del Teor. 22.10 es válida para H completo y de Hausdorff; en particular para $H = \mathbb{T}$, lo que constituye el Cor. 1 de [**36**]. En general los resultados contenidos en esta referencia, en la que se caracteriza el hecho de que la compleción de un grupo con suficientes caracteres continuos conserve esta propiedad, son adaptables a este caso general.

PROPOSICIÓN 22.12. *Sea G un grupo abeliano topológico. Supongamos que G tiene una base de entornos de cero cerrados en la topología de Bohr. Si además todo carácter continuo de G puede levantarse a un carácter real continuo, entonces cualquier familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ en G con conjunto de sumas finitas precompacto es presumable.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de la implicación (a)⇒(d) del Teor. 22.10 para $H = \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que la propiedad de levantamiento descrita en el enunciado implica que $\sigma(G,G^\wedge) \subset \sigma(G,\mathrm{CHom}(G,\mathbb{R}))$ (13.48). □

Recordemos que unas condiciones suficientes para que todos los caracteres continuos de G puedan levantarse a $\mathbb{R}$ son las de que G sea un k-espacio y $(G^\wedge,\tau_{\mathcal{K}})$ sea conexo por caminos (Teor. 13.50). La hipótesis de que G admita una base de entornos de cero cerrados en la topología de Bohr se cumple, por ejemplo, en el caso localmente cuasiconvexo (13.25(a)).

PROPOSICIÓN 22.13. *Sea (G,τ_G) un grupo abeliano topológico tal que las topologías $\sigma(G, CHom(G,\mathbb{R}))$ y τ_G tienen las mismas sucesiones de Cauchy. Entonces cualquier familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ en G con conjunto de sumas finitas precompacto es presumable.*

DEMOSTRACIÓN. Por 22.9 es suficiente demostrarlo para sucesiones. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en esas condiciones. Para todo $f \in \mathrm{CHom}(G,\mathbb{R})$ la sucesión de números reales $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene asociado un conjunto de sumas finitas acotado y por lo tanto es sumable. Consideremos la sucesión de sumas parciales $y_N = \sum_{n=1}^N x_n$; por lo anterior, $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\sigma(G,\mathrm{CHom}(G,\mathbb{R}))$, y por hipótesis en la topología inicial de G. Aplicando el mismo razonamiento a distintas reordenadas de la sucesión (x_n), deducimos el carácter incondicionalmente de Cauchy de $\sum x_n$ o equivalentemente, el carácter presumable de (x_n) (Prop. 21.3). $\square$

Notar que en particular si G tiene la propiedad de Schur y además todos sus caracteres continuos se pueden levantar a caracteres reales continuos, G está en las hipótesis de la Proposición anterior: en esas condiciones, toda sucesión de Cauchy en $\sigma(G, \mathrm{CHom}(G, \mathbb{R}))$ es de Cauchy en $\sigma(G, G^\wedge)$ (13.48) y por lo tanto en τ_G (Prop. 19.8(a)).

PROPOSICIÓN 22.14. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico de Hausdorff. Cualquier familia de elementos de E cuyo conjunto de sumas finitas sea precompacto, es presumable.*

DEMOSTRACIÓN. La compleción $\widetilde{E}$ de E tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico ([**10**, I, §1.4]) y en particular $\widetilde{E}$ no tiene subgrupos precompactos no triviales. Basta aplicar (c)$\Rightarrow$(d) en el Teor. 22.10. $\square$

23. Grupos de familias sumables

23.1. Los grupos topológicos $\ell_1(A, G)$ y $\ell_h(A, G)$. Dados un grupo topológico abeliano G y un conjunto no vacío A, utilizaremos las notaciones $\ell_1(A, G)$ y $\ell_h(A, G)$ para referirnos a los subconjuntos de G^A formados por todas las familias $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ presumables y hereditariamente sumables, respectivamente. Si el conjunto de índices es $\mathbb{N}$, abreviaremos estas notaciones a $\ell_1(G)$ y $\ell_h(G)$.

La demostración del siguiente resultado es inmediata:

PROPOSICIÓN 23.1. *Sean G un grupo abeliano topológico y A un conjunto no vacío. Los conjuntos $\ell_1(A, G)$ y $\ell_h(A, G)$ son subgrupos del producto G^A.*

A continuación definiremos una topología de grupo natural en $\ell_1(A, G)$. Para cada $V \in \mathcal{N}_0(G)$, definimos

$$(V)_A = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1(A, G) \ : \ \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in V \ \ \forall \Delta \in \mathfrak{F}(A)\}. \tag{23.1}$$

Es sencillo comprobar que $\{(V)_A : V \in \mathcal{N}_0(G)\}$ es una base de entornos de cero para una topología de grupo (1.8) en $\ell_1(A, G)$, que denotaremos por $(\tau_G)_A$, siendo τ_G la topología considerada en G.

Si una familia $(x_\alpha) \in (V)_A$ es hereditariamente sumable y V es cerrado, es claro que

$$\forall B \subset A \quad \sum_{\alpha\in B} x_\alpha = \lim_{\Delta\in\mathcal{F}(B)} \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in V;$$

como los entornos cerrados forman una base de entornos de cero para la topología de G, la familia

$$\{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_h(A, G) \ : \ \sum_{\alpha\in B} x_\alpha \in V \ \ \forall B \subset A\}, \quad V \in \mathcal{N}_0(G)$$

es una base de entornos de cero para la topología inducida en $\ell_h(A, G)$ por $(\tau_G)_A$.

Salvo mención en contra, éstas serán las topologías con las que dotaremos los grupos $\ell_1(A, G)$ y $\ell_h(A, G)$. Denotaremos ambas por el mismo símbolo $(\tau_G)_A$ y, con un criterio similar al establecido arriba, eliminaremos los subíndices cuando el conjunto A sea el de los números naturales.

EJEMPLO 23.2. (a) *Sea A un conjunto no vacío y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. $\ell_1(A, \mathbb{F})$ coincide con el subespacio vectorial de $\mathbb{F}^A$ formado por las familias $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ para las que $\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha| < \infty$, y su topología viene determinada por cualquiera de las normas*

$$(x_\alpha) \mapsto \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha|, \qquad (x_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|$$

Consecuentemente, $\ell_1(A, \mathbb{F})$ es el grupo abeliano topológico subyacente al espacio de Banach usual de las familias $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ sumables en $\mathbb{F}$.

(b) *Sea A un conjunto no vacío. $\ell_1(A, \mathbb{T})$ coincide con el subgrupo de $\mathbb{T}^A$ formado por las familias $(t_\alpha)_{\alpha \in A}$ para las que $\sum_{\alpha \in A} |1 - t_\alpha| < \infty$, y su topología viene determinada por cualquiera de las dos pseudonormas*

$$(t_\alpha) \mapsto \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |1 - \prod_{\alpha \in \Delta} t_\alpha|, \qquad (t_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in A} |1 - t_\alpha|.$$

DEMOSTRACIÓN. La caracterización de los elementos de los grupos $\ell_1(A, \mathbb{F})$ y $\ell_1(A, \mathbb{T})$ proviene del Ej. 20.9. Es claro que las pseudonormas

$$(x_\alpha) \mapsto \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha|, \qquad (t_\alpha) \mapsto \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |1 - \prod_{\alpha \in \Delta} t_\alpha|$$

están bien definidas y determinan las topologías naturales de $\ell_1(A, \mathbb{F})$ y $\ell_1(A, \mathbb{T})$, respectivamente. De las desigualdades demostradas en el Ej. 20.9 se deduce asimismo que

$$(x_\alpha) \in \ell_1(A, \mathbb{F}) \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha| \leq c \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha|, \tag{23.2}$$

donde $c = 2$ en el caso real y $c = 4$ en el complejo, y

$$(t_\alpha) \in \ell_1(A, \mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |1 - \prod_{\alpha \in \Delta} t_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in A} |1 - t_\alpha|$$

$$\beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[, \quad \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} |1 - \prod_{\alpha \in \Delta} t_\alpha| \leq 2\text{sen}\,\frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha \in A} |1 - t_\alpha| \leq 2\beta.$$

□

PROPOSICIÓN 23.3. *Sean G un grupo abeliano topológico y A un conjunto no vacío.*

(a) *Si G es completo, entonces $\ell_1(A, G) = \ell_h(A, G)$ es completo.*
(b) *Si G es metrizable, entonces $\ell_1(A, G)$ y $\ell_h(A, G)$ son metrizables.*
(c) *Si A es numerable y G es separable, entonces $\ell_1(A, G)$ y $\ell_h(A, G)$ son separables.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ una red de Cauchy en $\ell_1(A, G)$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea $x_\gamma = (x_\gamma(\alpha))_{\alpha \in A}$. Fijado $\alpha \in A$, la red $(x_\gamma(\alpha))_{\gamma \in \Gamma}$ es de Cauchy en G; como G es completo, $x_\gamma(\alpha) \xrightarrow{\gamma} x(\alpha)$ para algún $x(\alpha) \in G$. Por ser la red (x_γ) de Cauchy, para cualquier $V \in \mathcal{N}_0(G)$ existe un $\gamma_V \in \Gamma$ tal que si $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ son tales que

$\gamma, \gamma' \geq \gamma_V$, se tiene $x_{\gamma'} - x_\gamma \in (V)_A$, es decir, $\sum_{\alpha \in \Delta}(x_{\gamma'}(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \in V$ para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$. Si V es cerrado, pasando al límite en γ' se deduce

$$\gamma \geq \gamma_V,\ \Delta \in \mathfrak{F}(A) \Rightarrow \sum_{\alpha \in \Delta}(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \in V. \tag{23.3}$$

De aquí, $x = (x(\alpha))_{\alpha \in A}$ es presumable: Fijado $U \in \mathcal{N}_0(G)$ consideramos un entorno de cero cerrado V tal que $V + V \subset U$, y el índice γ_V asociado a V en las condiciones de (23.3). Si $\gamma \in \Gamma$ es cualquier índice posterior a γ_V, la condición de presumabilidad de x_γ garantiza que existe un $\Delta_0 \in \mathfrak{F}(A)$ tal que $\sum_{\alpha \in \Delta} x_\gamma(\alpha) \in V$ para cualquier $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ disjunto con Δ_0. Para cualquier $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ en esas condiciones, se cumple por lo tanto

$$\sum_{\alpha \in \Delta} x(\alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta}(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\gamma(\alpha) \in V + V \subset U.$$

Ahora la condición (23.3) expresa la convergencia de x_γ a x en $\ell_1(A, G)$.

(b) Sea $V_n,\ n \in \mathbb{N}$ una sucesión fundamental de entornos de cero en G; es claro que la sucesión $(V_n)_A,\ n \in \mathbb{N}$ es una base de entornos de cero para la topología $(\tau_G)_A$ en $\ell_1(A, G)$, y que ésta conserva el carácter separado de τ_G. Como $\ell_h(A, G)$ es un subespacio topológico de $\ell_1(A, G)$, también es metrizable si lo es G (por los resultados de la Sec. 4, un grupo abeliano topológico es metrizable si y sólo si es I-numerable y de Hausdorff).

(c) Supongamos $A = \mathbb{N}$ (el caso de A finito es trivial). Sea D un subconjunto numerable denso de G; definimos el siguiente subconjunto de $\ell_1(G)$ asociado:

$$D' = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}} : y_1, y_2, \ldots, y_N \in D,\ y_n = 0\ \forall n > N\}$$

Es claro que D' es numerable; veamos que es denso en $\ell_1(G)$. Dados $(x_n) \in \ell_1(G)$ y $U \in \mathcal{N}_0(G)$, tenemos que encontrar un $(y_n) \in D'$ tal que $(x_n - y_n) \in (U)_{\mathbb{N}}$. Sea $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $V + V \subset U$. Por ser (x_n) presumable, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ con $\min \Delta > N$, se verifica $\sum_{n \in \Delta} x_n \in V$. Sea $W \in \mathcal{N}_0(G)$ con $W + \overset{N}{\ldots} + W \subset V$. Para cada $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ fijamos $d_n \in D$ tal que $x_n - d_n \in W$. Veamos que la sucesión $(y_n) = (d_1, d_2, \ldots, d_N, 0, 0, \ldots) \in D'$ cumple la condición pedida: Para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$,

$$\sum_{n \in \Delta}(x_n - y_n) = \sum_{\substack{n \in \Delta \\ n \leq N}}(x_n - d_n) + \sum_{\substack{n \in \Delta \\ n > N}} x_n \in V + V \subset U.$$

Como el conjunto D' está contenido en $\ell_h(A, G)$, la misma demostración es válida para el grupo de las familias hereditariamente sumables.

□

Lema 23.4. *Sea G un grupo abeliano topológico, A un conjunto no vacío y H un subgrupo de G considerado con la topología inducida por la de G. Se tiene*

(a) $\ell_1(A,H) = \ell_1(A,G) \cap H^A$, $\ell_h(A,H) \subset \ell_h(A,G) \cap H^A$ *y, si* H *es cerrado,* $\ell_h(A,H) = \ell_h(A,G) \cap H^A$.

(b) *para todo* $V \in \mathcal{N}_0(G)$ *se tiene*

$$(V \cap H)_A = (V)_A \cap H^A.$$

(c) *las inclusiones canónicas* $\ell_1(A,H) \hookrightarrow \ell_1(A,G)$ *y* $\ell_h(A,H) \hookrightarrow \ell_h(A,G)$ *son encajamientos topológicos.*

Demostración. (a) y (b) se deducen directamente de las definiciones. (c) es consecuencia de (a) y (b). □

Proposición 23.5. *Sea* G *un grupo abeliano topológico localmente cuasiconvexo. La topología de* $\ell_1(A,G)$ *es la generada por la familia de pseudonormas*

$$(x_\alpha) \mapsto s_V((x_\alpha)) := \sup_{\Delta \in \mathfrak{F}(A)} \|\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\|_V,$$

donde V *recorre los entornos de cero en* G. *Además, si* $V \in \mathcal{N}_0(G)$ *es cuasiconvexo, entonces*

$$(V)_A = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1(A,G) : s_V((x_\alpha)) \leq \sqrt{2}\}.$$

Demostración. Las pseudonormas s_V son continuas ya que para todos $V \in \mathcal{N}_0(G)$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$W \in \mathcal{N}_0(G),\ W + \overset{n}{\ldots} + W \subset V,\ (x_\alpha) \in (W)_A \quad \Rightarrow \quad s_V((x_\alpha)) \leq 2\mathrm{sen}\frac{\pi}{4n}$$

(Cor. 3.7.) La igualdad $(V)_A = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1(A,G) : s_V((x_\alpha)) \leq \sqrt{2}\}$ para V cuasiconvexo es consecuencia inmediata de la Prop. 14.2(b), y junto con lo anterior demuestra que las pseudonormas s_V generan la topología $(\tau_G)_A$. □

Proposición 23.6. *Sea* G *un grupo abeliano topológico localmente cuasiconvexo y* A *un conjunto no vacío. Entonces* $(\ell_1(A,G),(\tau_G)_A)$ *es localmente cuasiconvexo.*

Demostración. Para cada $V \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo, $(V)_A$ es cuasiconvexo en la topología natural de $\ell_1(A,G)$ ya que se cumple $(V)_A = \bigcap_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} u_\Delta^{-1}(V)$ donde para cada $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$, $u_\Delta : \ell_1(A,G) \to G$ es el homomorfismo continuo definido por $u_\Delta((x_\alpha)_{\alpha\in A}) = \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha$, y basta aplicar 13.25(c) y (d). □

23.2. El espacio vectorial topológico $\ell_1(A,E)$**.** Si E es un espacio vectorial topológico, el grupo de las familias $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ presumables en E, $\ell_1(A,E)$, es un subespacio vectorial de E^A. El espacio $\ell_1(A,E)$, donde E es un espacio localmente convexo, ha sido estudiado con detalle en [**67**]. En esta referencia se denota $l_A^1(E)$ y se considera equipado con la ε-topología, generada por las seminormas

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto \varepsilon_U((x_\alpha)) = \sup_{x^*\in U^\circ} \sum_{\alpha\in A} |x^*(x_\alpha)|,$$

donde U recorre los entornos de cero absolutamente convexos de E. (El hecho de que este supremo es finito para cada $(x_\alpha) \in \ell_1(A,E)$ se prueba en [**67**, 1.2.3], aunque también es consecuencia de la demostración de la Prop. 23.9). Para demostrar que la ε-topología coincide con la topología $(\tau_E)_A$ definida en la sección anterior, necesitamos enunciar algunos resultados previos.

Si E es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ (siendo $\mathbb{F}$ el cuerpo de los números reales o el de los complejos), el Teor. 17.13 y la determinación del dual de $\mathbb{F}$ (13.1(a)) implican en particular que la aplicación $x^* \mapsto \exp(2\pi i \mathrm{Re}\, x^*)$ es un isomorfismo entre el grupo aditivo E^* y el grupo multiplicativo $E^\wedge$.

Lema 23.7. *Sea U un subconjunto equilibrado no vacío de un espacio vectorial topológico real o complejo E. Se tiene*

(a) $U^\triangleright = \{\exp(\frac{\pi}{2} i \mathrm{Re}\, x^*) : x^* \in U^\circ\}$, *y se cumple la igualdad*

$$\|x\|_U = \sup_{x^* \in U^\circ} 2\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{4}|x^*(x)|\right) \quad \forall x \in E \tag{23.4}$$

(b) $\|x\|_U \leq \frac{\pi}{2} p_U(x) \quad \forall x \in E$; *más precisamente,*

$$\|x\|_U \leq 2\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{4} p_U(x)\right) \quad \forall x \in U,$$

y si U es un entorno de cero convexo y equilibrado, entonces se verifica

$$p_U(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_U \qquad \forall x \in U.$$

Demostración. (a) Sea $B = \{\exp(\frac{\pi}{2} i \mathrm{Re}\, x^*) : x^* \in U^\circ\}$. La inclusión $B \subset U^\triangleright$ es clara y se verifica para todo U. Inversamente, para todo $\varphi \in E^\wedge$ se tiene $\varphi = \exp(2\pi i \mathrm{Re}\, y^*)$ para algún $y^* \in E^*$; suponiendo $\varphi \in U^\triangleright$, si fijamos un $x \in U$, $|1 - \varphi(x)| = 2\mathrm{sen}\,|\pi \mathrm{Re}\, y^*(x)| \leq \sqrt{2}$; dado que U es equilibrado, si t denota un número de módulo 1 tal que $ty^*(x) = |y^*(x)|$ y $\mu \in [0,1]$ es arbitrario, podemos escribir también (ya que $\mu t x \in U$)

$$\sqrt{2} \geq |1 - \varphi(\mu t x)| = 2\mathrm{sen}\,|\pi \mathrm{Re}\, y^*(\mu t x)| = 2\mathrm{sen}\pi\mu|\mathrm{Re}\, t y^*(x)| = 2\mathrm{sen}\,\pi\mu|y^*(x)|.$$

Esto implica claramente que $|y^*(x)| \leq \frac{1}{4}$. Por lo tanto $x^* = 4y^* \in U^\circ$ y $\varphi \in B$.

La igualdad (23.4) es consecuencia de ésta:

$$\begin{aligned} ||x||_U &= \sup_{\chi \in U^\triangleright} |1 - \chi(x)| = \sup_{x^* \in U^\circ} |1 - \exp(\frac{\pi}{2} i \mathrm{Re}\, x^*(x))| \\ &= \sup_{x^* \in U^\circ} 2\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}|\mathrm{Re}\, x^*(x)| = \sup_{x^* \in U^\circ} 2\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}|x^*(x)| \end{aligned}$$

(notar que para cada $x \in E$, $x^* \in U^\circ$ existe un $y^* \in U^\circ$ con $y^*(x) = |x^*(x)|$)

(b) La primera desigualdad se deduce de (23.4), ya que $|x^*(x)| \leq p_U(x) \ \ \forall x \in E \ \ \forall x^* \in U^\circ$.

Usando el mismo razonamiento y el hecho de que sen ξ es creciente para $\xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, obtenemos la segunda desigualdad.

En cuanto a la tercera, por (23.4) y la desigualdad sen $\xi \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\xi$ (válida para $\xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$) se tiene $||x||_U \geq \sup_{x^* \in U^\circ} \sqrt{2}|x^*(x)|$, y basta aplicar el Cor. 1.18.

□

NOTA 23.8. Teniendo en cuenta que un entorno de cero equilibrado U de un espacio vectorial topológico es cerrado y convexo si y sólo si $U = \{x \in E : p_U(x) \leq 1\}$, y cuasiconvexo si y sólo si $U = \{x \in E : \|x\|_U \leq \sqrt{2}\}$, de (23.4) y el Cor. 1.18 se puede deducir el Teorema 18.3(a).

PROPOSICIÓN 23.9. *Si E es un espacio localmente convexo, para cualquier conjunto A no vacío la $\varepsilon-$topología en $\ell_1(A, E)$ coincide con $(\tau_E)_A$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 18.3, E es localmente cuasiconvexo. Por la Prop. 23.5, $(\tau_E)_A$ está generada por las pseudonormas s_V, donde V recorre los entornos de cero en E.

Sea $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo, cerrado y equilibrado; tales entornos forman base de $\mathcal{N}_0(E)$ (18.2). Para cada $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1(A, E)$ se cumple

$$\begin{aligned} s_V((x_\alpha)) &= \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} \Big|\Big|\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\Big|\Big|_V \overset{\text{Lema 23.7}(b)}{\leq} \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} \frac{\pi}{2} p_V\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\Big) \\ &\overset{\text{Cor. 1.18}}{=} \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} \frac{\pi}{2} \sup_{x^*\in V^\circ} \Big|\sum_{\alpha\in\Delta} x^*(x_\alpha)\Big| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon_V((x_\alpha)). \end{aligned}$$

Por otra parte, para todo $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in (V)_A$, se verifica

$$\begin{aligned} \varepsilon_V((x_\alpha)) &= \sup_{x^*\in V^\circ} \sum_{\alpha\in A} |x^*(x_\alpha)| \overset{(23.2)}{\leq} 2 \sup_{x^*\in V^\circ} \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} \Big|\sum_{\alpha\in\Delta} x^*(x_\alpha)\Big| \\ &\leq 2 \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} p_V\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\Big) \overset{\text{Lema 23.7}(b)}{\leq} 2 \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(A)} \frac{1}{\sqrt{2}} \Big|\Big|\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\Big|\Big|_V = \sqrt{2} s_V((x_\alpha)). \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican el resultado. ☐

24. El lema de Schur en grupos topológicos

Comenzamos recordando el lema de Schur clásico:

TEOREMA 24.1. *Sea $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(a_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ pertenece a l_1. Si además se tiene*

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j\in M} a_{ij} = 0 \quad \forall M \subset \mathbb{N},$$

entonces $\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \to 0$.

Este resultado, que se remonta a 1920, admite como corolario la coincidencia entre las sucesiones convergentes en norma y las débilmente convergentes en l_1, que es la forma en que aparece habitualmente en las referencias. Daremos en esta sección una versión del Lema válida en grupos abelianos topológicos generales.

El siguiente lema previo contiene el núcleo de la demostración:

LEMA 24.2. *Sean G un grupo abeliano topológico de Hausdorff, $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *para todo* $i \in \mathbb{N}$ *la sucesión* $(a_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ *es hereditariamente sumable.*
(b) *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *existe un* $F_i \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ *con* $\sum_{j\in F_i} a_{ij} \notin U$.
(c) $\lim_{i\to\infty} a_{ij} = 0$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Entonces existen $V \in \mathcal{N}_0(G)$ *y subconjuntos infinitos* I, J *de* $\mathbb{N}$ *tales que*

$$\sum_{j\in J} a_{ij} \notin V \quad \forall i \in I.$$

DEMOSTRACIÓN. Dados (a_{ij}) y U como en el enunciado, determinamos $W \in \mathcal{N}_0(G)$ con $W + W \subset U$, y $V \in \mathcal{N}_0(G)$ simétrico, cerrado y tal que $V + V + V \subset W$.

Fijado $i_1 = 1$, existe por hipótesis $\Delta_1 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ tal que $\sum_{j\in\Delta_1} a_{i_1j} \notin W$. Por ser la sucesión $(a_{i_1j})_{j\in\mathbb{N}}$ presumable, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > \max\Delta_1$ y $(a_{i_1j})_{j\geq n_1} \in (V)_\mathbb{N}$ (ver (23.1)).

Sea $i_2 > i_1$ tal que $\sum_{j\in\Delta} a_{i_2j} \in V$ para todo $\Delta \subset \{1,\dots,n_1\}$ (utilizamos aquí la condición de convergencia a 0 de las columnas). Buscamos un $\Delta_2 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ tal que $n_1 < \min\Delta_2$ y tal que $\sum_{j\in\Delta_2} a_{i_2j} \notin W$ (si para todo $\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ con $n_1 < \min\Delta$ se tuviera $\sum_{j\in\Delta} a_{i_2j} \in W$, podríamos deducir

$$F \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{j\in F} a_{i_2j} = \sum_{j\in F,\, j\leq n_1} a_{i_2j} + \sum_{j\in F,\, j>n_1} a_{i_2j} \in V + W \subset U,$$

contradicción). Sea $n_2 > \max\Delta_2$ tal que $(a_{i_2j})_{j\geq n_2} \in (V)_\mathbb{N}$, e $i_3 > i_2$ tal que $\sum_{j\in\Delta} a_{i_3j} \in V$ para todo $\Delta \subset \{1,\dots,n_2\}$.

Inductivamente construimos así sucesiones (i_k) y (n_k) en $\mathbb{N}$, y (Δ_k) en $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$, tales que

$$i_1 < i_2 < i_3 < \dots, \quad \max\Delta_1 < n_1 < \min\Delta_2 \leq \max\Delta_2 < n_2 < \dots$$
$$\sum_{j\in\Delta_k} a_{i_kj} \notin W \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$(a_{i_kj})_{j\geq n_k} \in (V)_\mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$\sum_{j\in\Delta} a_{i_{k+1}j} \in V \quad \forall\Delta \subset \{1,\dots,n_k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sean $I = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ y $J = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k$. Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j\in J} a_{i_kj} = \sum_{j\in\Delta_l,\, l<k} a_{i_kj} + \sum_{j\in\Delta_k} a_{i_kj} + \sum_{j\in\Delta_l,\, l>k} a_{i_kj}$$

y por lo tanto $\sum_{j\in J} a_{i_kj} \notin V$ (en otro caso, se tendría $\sum_{j\in\Delta_k} a_{i_kj} \in V - V - \mathrm{Cl}(V) = V + V + V \subset W$, contradicción). ☐

TEOREMA 24.3. *(Lema de Schur en grupos) Sea* G *un grupo abeliano topológico de Hausdorff,* A *un conjunto no vacío y* $(a_{i\alpha}) \in G^{\mathbb{N}\times A}$ *tal que para todo* $i \in \mathbb{N}$, $(a_{i\alpha})_{\alpha\in A}$ *es* *una familia hereditariamente sumable en G. Si además*

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\alpha\in B} a_{i\alpha}=0 \quad \forall B\subset A,$$

entonces esta convergencia es uniforme en $B\subset A$, es decir,

$$\forall U\in\mathcal{N}_0(G)\quad \exists i_0\in\mathbb{N}\qquad [i\geq i_0,\ B\subset A\Rightarrow \sum_{\alpha\in B} a_{i\alpha}\in U].$$

Demostración. Si la conclusión del Teorema no es cierta, podemos encontrar un entorno cerrado de cero U en G tal que para todo $i\in\mathbb{N}$ existen $i'\geq i$ y $B\subset A$ con la propiedad de que $\sum_{\alpha\in B} a_{i'\alpha}\notin U$. Como además $\sum_{\alpha\in B} a_{i'\alpha}=\lim_{\Delta\in\mathcal{F}(B)}\sum_{\alpha\in\Delta} a_{i'\alpha}$, podemos suponer que B es finito. Inductivamente construimos sucesiones (B_n) en $\mathcal{F}(A)$ e $(i_n)\nearrow\infty$ en $\mathbb{N}$ tales que $\sum_{\alpha\in B_n} a_{i_n\alpha}\notin U$ para todo $n\in\mathbb{N}$. El conjunto $A_0:=\bigcup_{n\in N} B_n$ es numerable y no puede ser finito; ponemos $A_0=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\}$; $\quad b_{mn}:=a_{i_m\alpha_n}$, para todos $m,n\in\mathbb{N}$. La matriz $(b_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ cumple las hipótesis del Lema 24.2; por lo tanto existe un $J\subset\mathbb{N}$ tal que

$$(\sum_{n\in J} b_{mn})_{m\in\mathbb{N}}=(\sum_{n\in J} a_{i_m\alpha_n})_{m\in\mathbb{N}}\not\to 0,$$

contradicción. □

Nota 24.4. Este resultado puede considerarse una generalización del lema clásico de Schur (Teor. 24.1) ya que para $(a_{ij})\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ son equivalentes las condiciones

(i) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\xrightarrow{i\to\infty}0$

(ii) $\sum_{j\in M} a_{ij}\xrightarrow{i\to\infty}0$ uniformemente en $M\subset\mathbb{N}$.

La demostración es consecuencia inmediata de las desigualdades (23.2).

Nota 24.5. En [**56**] (Lemma 10) y [**1**] (Theorem 3) se pueden encontrar versiones más fuertes del Teor. 24.3. Concretamente, se prueba que si para todo $\alpha\in A$ existe $a_\alpha=\lim_{i\to\infty}a_{i\alpha}$, y además para todo $B\subset A$ $\quad(\sum_{\alpha\in B}a_{i\alpha})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces la familia de los límites es hereditariamente sumable y $\lim_{i\to\infty}\sum_{\alpha\in B}a_{i\alpha}=\sum_{\alpha\in B}\lim_{i\to\infty}a_{i\alpha}$, uniformemente en $B\subset A$. Para nuestra versión hemos utilizado una demostración del tipo "joroba deslizante", como en las pruebas del lema de Schur clásico que se encuentran normalmente en las referencias (cf. [**90**], Theor. 1-3-2, o [**49**], Prop. 27.13).

Vamos a enunciar el Teor. 24.3 en términos de la convergencia de sucesiones en $\ell_h(A,G)$ con respecto a distintas topologías. Para cada subconjunto B de A, definimos el homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc}\Sigma_B: & \ell_h(A,G) & \longrightarrow & G\\ & (x_\alpha) & \mapsto & \sum_{\alpha\in B}x_\alpha.\end{array}$$

Sea $\mathcal{T}_0$ la topología inicial en $\ell_h(A,G)$ con respecto a la familia de homomorfismos Σ_B, $B\subset\mathbb{N}$. Es claro que $\mathcal{T}_0\leq(\tau_G)$. El teorema 24.3 puede reformularse de la siguiente forma:

TEOREMA 24.6. *Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff y A un conjunto no vacío. En $\ell_h(A,G)$, las sucesiones (τ_G)-convergentes coinciden con las $\mathcal{T}_0$-convergentes.*

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado, que proporciona una clase importante de ejemplos de grupos con la propiedad de Schur:

TEOREMA 24.7. *Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff y A un conjunto no vacío. Si G tiene la propiedad de Schur, entonces $\ell_h(A,G)$ también tiene la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\ell_h(A,G)$ que tiende a 0 en la topología de Bohr de $\ell_h(A,G)$. Por el Teor. 24.6 basta demostrar que x_n converge a 0 en la topología $\mathcal{T}_0$, es decir, que $\sum_{\alpha\in B} x_n(\alpha)\to 0$ para todo $B\subset A$. Fijamos un tal B; como G tiene la propiedad de Schur sólo hay que demostrar que $\chi(\sum_{\alpha\in B} x_n(\alpha))\to 1$ para todo $\chi\in G^\wedge$. Pero esto es claro ya que para cualquier $\chi\in G^\wedge$,

$$(y(\alpha))\in\ell_h(A,G)\mapsto\chi(\sum_{\alpha\in B} y(\alpha))$$

es un carácter continuo de $\ell_h(A,G)$. $\square$

NOTA 24.8. Si en el Teor. 24.7 ponemos $A=\mathbb{N}$ y $G=\mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo de los números reales o complejos con su topología usual, $\ell_1(A,G)=\ell_h(A,G)$ es (Ej. 23.2(a)) el grupo abeliano topológico subyacente al espacio de Banach de las sucesiones sumables en $\mathbb{F}$, $(l_1,||\cdot||_1)$, y obtenemos como caso particular el hecho conocido de que este espacio cumple la propiedad de Schur (cf. 19.16). Como consecuencia, el grupo $\ell_h(\mathbb{N},l_1)$, que tiene estructura natural de espacio de Banach, también verifica la propiedad de Schur; este resultado es una reformulación de [**45**, Example 2.1], en donde además se demuestra que este último espacio no puede encajarse en ningún espacio de Banach con base incondicional y en particular, no es isomorfo a l_1.

25. Sumabilidad absoluta en grupos

25.1. Familias absolutamente sumables en grupos.

DEFINICIÓN 25.1. Sea G un grupo abeliano topológico y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de elementos de G. Se dice que (x_α) es *absolutamente sumable* cuando para todo $U\in\mathcal{N}_0(G)$, $\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha)<\infty$.

Por la Prop. 5.3(a), basta con que la condición exigida se verifique para los entornos de una base de $\mathcal{N}_0(G)$.

25.2. Es claro que cualquier familia absolutamente sumable $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\in G^A$ es convergente a cero en el sentido de 20.1: para cualquier $U\in\mathcal{N}_0(G)$ se verifica $\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha)<\infty$ y en particular

$$\{\alpha\in A : x_\alpha\notin U\}=\{\alpha\in A : k_U(x_\alpha)=1\}\in\mathfrak{F}(A).$$

EJEMPLO 25.3. (a) *Las familias absolutamente sumables en los grupos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{T}$ (dotados de sus topologías usuales) coinciden con las sumables.*

(b) *Sea G un grupo abeliano topológico que admite una base de entornos de cero formada por conjuntos U que satisfacen la siguiente condición:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in U \quad nx \in U \tag{25.1}$$

(por ejemplo, un grupo topológicamente no arquimediano en el sentido de la Def. 2.2.) Es inmediato que las familias absolutamente sumables en G coinciden con las convergentes a cero.

DEMOSTRACIÓN. (a) se demuestra en el Ej. 25.15(a).

(b) es inmediato (notar que para todo U en las condiciones de (25.1) y todo $x \in U$, se cumple $k_U(x) = 0$).

□

PROPOSICIÓN 25.4. *Sea G un grupo abeliano topológico y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$.*

(a) *Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es absolutamente sumable, entonces para cualquier $B \subset A$ no vacío la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ es absolutamente sumable.*

(b) *Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es tal que para cualquier $B \subset A$ numerable la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ es absolutamente sumable, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es absolutamente sumable.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Es trivial.

(b) Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ no es absolutamente sumable; entonces existe un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) = \infty$. Como una familia de números reales no negativos es sumable si y sólo si su conjunto de sumas finitas es acotado, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\Delta_n \in \mathfrak{F}(A)$ tal que $\sum_{\alpha\in\Delta_n} k_U(x_\alpha) \geq n$. El conjunto $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ es numerable y verifica $\sum_{\alpha\in B} k_U(x_\alpha) = \infty$. □

PROPOSICIÓN 25.5. *Sean G y H grupos abelianos topológicos y $u : G \to H$ un homomorfismo continuo. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia absolutamente sumable en G. Entonces $(u(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ es absolutamente sumable en H.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de las definiciones y las propiedades elementales del funcional k_U. □

PROPOSICIÓN 25.6. *Sean G, G_i $(i \in I)$ grupos abelianos topológicos y $u_i : G \to G_i$, $i \in I$ homomorfismos de grupos. Supongamos que la topología de G es la inicial con respecto a la familia de homomorfismos u_i, $i \in I$.*

(a) *Sea $\{i_1, \ldots, i_m\}$ un subconjunto finito de I, $U_l \in \mathcal{N}_0(G_{i_l})$ para todo $l \in \{1 \ldots, m\}$, y $U = \bigcap_{l=1}^m u_{i_l}^{-1}(U_l)$. Para todo $x \in G$, se tiene*

$$k_U(x) = \max_{1\leq l\leq m} k_{U_l}(u_{i_l}(x)). \tag{25.2}$$

(b) *Una familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$ es absolutamente sumable en G si y sólo si para todo $i \in I$, la familia $(u_i(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ es absolutamente sumable en G_i.*

DEMOSTRACIÓN. (a) es trivial; (b) es consecuencia de (a) y del hecho de que los conjuntos de la forma $\bigcap_{l=1}^m u_{i_l}^{-1}(U_l)$, con $m \in \mathbb{N}$ y $U_l \in \mathcal{N}_0(G_{i_l})$ para todo $l \in \{1, \ldots, m\}$, forman una base de entornos de cero para la topología de G (Prop. 11.1). □

PROPOSICIÓN 25.7. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos de Hausdorff. Sean $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_f$ las topologías rectangular, asterisco y coproducto en la suma directa $\bigoplus_{i\in I} G_i$ (Sec. 12). Sea $A \neq \emptyset$. Las familias absolutamente sumables $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ con respecto a las tres topologías coinciden. Además, si (x_α) es absolutamente sumable con respecto a cualquiera de estas topologías, existe $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$ tal que $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset \sum_{i\in\Delta} v_i(G_i)$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es totalmente análoga a la de la Prop. 20.16, ya que las familias absolutamente sumables verifican las mismas propiedades que permiten demostrar este resultado en el caso de las presumables (Prop. 25.5, 25.2). □

PROPOSICIÓN 25.8. *Sea G un grupo abeliano topológico y $\{q_i\}_{i\in I}$ una familia de pseudonormas que generan la topología de G, en el sentido de 4.6. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$ es tal que*

$$\sum_{\alpha\in A} q_i(x_\alpha) < \infty \quad \forall i \in I$$

entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es absolutamente sumable.

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \in \mathcal{N}_0(G)$ arbitrario; tenemos que demostrar que $\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) < \infty$. Podemos suponer $U = \{x \in G : q_i(x) \leq 1\}$ para algún $i \in I$; la Prop. 5.4(b) implica que $\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) \leq \sum_{\alpha\in A} q_i(x_\alpha) < \infty$. □

25.9. La Prop. 25.8 implica en particular que si G es un grupo abeliano topológico metrizable y q una pseudonorma que genera la topología de G, entonces cualquier familia q-absolutamente sumable (20.13) es absolutamente sumable.

En relación con esto es interesante el siguiente resultado, que aparece enunciado como Theor. 5 en [**31**] para espacios vectoriales topológicos, aunque la demostración es válida en el caso general:

TEOREMA 25.10. *Sea G un grupo abeliano metrizable y (γ_n) una sucesión de números positivos convergente a cero. Existe una pseudonorma $q : G \to [0, \infty[$ que genera la topología de G y tal que cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ que cumpla $q(x_n) \leq \gamma_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ es absolutamente sumable en G.*

La obtención de resultados en el sentido inverso es más problemática. Existen grupos abelianos metrizables que contienen sucesiones absolutamente sumables no presumables (Ej. 29.11). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en esas condiciones, es claro que $\sum_{n=1}^{\infty} q(x_n) = \infty$ para *cualquier* pseudonorma q que genere la topología del grupo (Prop. 20.12). Por otra parte, si G es un n-grupo localmente cuasiconvexo, existe en G una pseudonorma q que genera la topología de G y tal que las familias absolutamente sumables en G coinciden con las q-absolutamente sumables (Prop. 25.20(b)).

25.11. La Def. 25.1 resulta natural si tenemos en cuenta el concepto habitual de familia absolutamente sumable en un espacio vectorial topológico (25.24) y que hemos presentado el funcional k_U como un análogo al funcional de Minkowski válido en grupos abelianos topológicos generales. Evidentemente, las alternativas al funcional k_U recogidas en la Subsec. 5.2 pueden usarse análogamente y con el mismo propósito. De hecho, la definición original de familia absolutamente sumable en un grupo abeliano topológico, presentada en [**7**, 10.16] y utilizada posteriormente en [**8**] para probar que en todo grupo nuclear las familias absolutamente sumables coinciden con las presumables (ver Sec. 31), usa el funcional $(\cdot/U)_B$ ((5.2)): en estas referencias una familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ se dice absolutamente sumable cuando verifica la condición

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \Delta = \{\alpha \in A : x_\alpha \notin U\} \in \mathfrak{F}(A), \qquad \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta} (x_\alpha/U)_B < \infty. \tag{25.3}$$

De las observaciones hechas en 5.7 se deduce trivialmente que la condición (25.3) es equivalente a la que caracteriza a las familias absolutamente sumables según la Def. 25.1. Por lo que respecta a la definición que cabría enunciar utilizando el funcional original de Kaplan $(\cdot/U)_K$ ((5.1), aunque de hecho Kaplan no estudia esta cuestión), la equivalencia no se mantendría en general. A continuación daremos condiciones suficientes para que sea cierta esta equivalencia, y un ejemplo en el que no lo es.

PROPOSICIÓN 25.12. *Sea G un grupo abeliano topológico, A un conjunto no vacío y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de elementos de G. Consideremos las condiciones*

(a) $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *es absolutamente sumable (Def. 25.1)*

(b) $\forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \Delta = \{\alpha \in A : x_\alpha \notin U\} \in \mathfrak{F}(A), \quad \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta}(x_\alpha/U)_K < \infty.$

Se tiene siempre (a)⇒(b), y si G tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos de Kaplan, entonces (b)⇒(a).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es absolutamente sumable. En particular es convergente a cero (25.2). Dado $U \in \mathcal{N}_0(G)$, si llamamos Δ al conjunto finito $\{\alpha \in A : x_\alpha \notin U\} \in \mathfrak{F}(A)$, por la Prop. 5.9(a) se tiene $\sum_{\alpha\in A\setminus\Delta}(x_\alpha/U)_K \le 4\sum_{\alpha\in A\setminus\Delta} k_U(x_\alpha) < \infty$.

Si G admite una base de entornos de cero $\mathcal{B}$ formada por conjuntos de Kaplan y (x_α) verifica la condición (b), para cualquier $U \in \mathcal{B}$ se cumple

$$\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_U(x_\alpha) + \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta} k_U(x_\alpha) \overset{\text{Prop. 5.9}(b)}{\le} \sum_{\alpha\in\Delta} k_U(x_\alpha) + \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta} (x_\alpha/U)_K < \infty$$

y por ser $\mathcal{B}$ una base de entornos, (x_α) es absolutamente sumable. □

En particular las definiciones de familia absolutamente sumable a las que dan lugar los funcionales k_U y $(\cdot/U)_K$ son equivalentes en el caso de que G sea un grupo localmente cuasiconvexo (Prop. 13.26). Vamos a dar a continuación un ejemplo en el que no lo son.

EJEMPLO 25.13. *Sean $\delta = (\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ las sucesiones definidas en el Lema 12.16, y $\mathbb{Z}_\delta$ el grupo abeliano topológico obtenido al dotar a $\mathbb{Z}$ de la pseudonorma q_δ construida a partir de (δ_j) como en la Prop. 12.14. Sea $B_1 = \{x \in \mathbb{Z} : q_\delta(x) \le 1\}$. Se verifica $(2^j/B_1) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pero sin embargo $\sum_{j\in\mathbb{N}} k_{B_1}(2^j) = \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo $j \in \mathbb{N}$, $2^j \in B_1$ (Prop. 12.14(b)); por lo tanto, $(2^j/B_1) = 0$ (12.15). Por el Lema 12.16, $k_{B_1}(2^j) \ge \frac{1}{k_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$; luego $\sum_{j\in\mathbb{N}} k_{B_1}(2^j) \ge \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{k_j} = l_1\frac{1}{l_1} + l_2\frac{1}{l_2} + \cdots = \infty$. □

Análogamente a lo establecido para las familias presumables y hereditariamente sumables, vamos a dotar de una topología conveniente al grupo de las familias absolutamente sumables.

PROPOSICIÓN 25.14. *Sean G grupo abeliano topológico y A un conjunto no vacío. El conjunto de todas las familias $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$ absolutamente sumables, que denotaremos por $\ell_1\{A, G\}$, es un subgrupo del producto G^A y los conjuntos de la forma*

$$\{V\}_A := \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1\{A, G\} : \sum_{\alpha\in A} k_V(x_\alpha) < 1\}, \qquad V \in \mathcal{N}_0(G)$$

forman una base de entornos de cero para una topología de grupo en $\ell_1\{A, G\}$.

DEMOSTRACIÓN. Las condiciones de base de entornos de cero fijadas en 1.8 son consecuencia de las siguientes propiedades de los conjuntos $\{V\}_A$, $V \in \mathcal{N}_0(G)$:

- Si $V,\ U \in \mathcal{N}_0(G)$ son tales que $V \subset U$, entonces $\{V\}_A \subset \{U\}_A$. Esto se deduce directamente de la Prop. 5.3(a).
- Para todo $V \in \mathcal{N}_0(G)$, se verifica $\{V\} + \{V\} \subset \{V + \overset{6}{\ldots} + V\}$: Si fijamos $(x_\alpha),\ (y_\alpha) \in \{V\}$, en particular $x_\alpha,\ y_\alpha \in V\ \ \forall \alpha \in A$ y

$$\begin{aligned}\sum_\alpha k_{V+\overset{6}{\ldots}+V}(x_\alpha + y_\alpha) &\overset{\text{Prop. } 5.3(c)}{\leq} \frac{1}{2}\sum_\alpha k_{V+V}(x_\alpha + y_\alpha)\\ &\overset{\text{Prop. } 5.3(b)}{\leq} \frac{1}{2}\sum_\alpha \max\{k_V(x_\alpha), k_V(y_\alpha)\}\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_\alpha k_V(x_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_\alpha k_V(y_\alpha) < 1.\end{aligned}$$

- Para todo $V \in \mathcal{N}_0(G)$, se verifica $\{-V\} = -\{V\}$; esto es inmediato, teniendo en cuenta que para todo $x \in G$, $k_{-V}(x) = k_V(-x)$.

$\square$

EJEMPLO 25.15. (a) *Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, con su topología usual. Una familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $\mathbb{F}$ es absolutamente sumable si y sólo si la familia $(|x_\alpha|)_{\alpha\in A}$ es sumable en $\mathbb{F}$. La topología de $\ell_1\{A, \mathbb{F}\}$ es la generada por la norma*

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto \sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|.$$

Consecuentemente, $\ell_1\{A, \mathbb{F}\}$ y $\ell_1(A, \mathbb{F})$ coinciden algebraica y topológicamente.

(b) *Sea $(t_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia en $\mathbb{T}$. Entonces $(t_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1\{A, \mathbb{T}\}$ si y sólo si $(t_\alpha)_{\alpha\in A}$ es multiplicable en $\mathbb{T}$. La topología de $\ell_1\{A, \mathbb{T}\}$ es la generada por la pseudonorma*

$$(t_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto \sum_{\alpha\in A} |1 - t_\alpha|.$$

Consecuentemente, $\ell_1\{A, \mathbb{T}\}$ y $\ell_1(A, \mathbb{T})$ coinciden algebraica y topológicamente.

DEMOSTRACIÓN. La caracterización de los elementos de $\ell_1\{A, \mathbb{F}\}$ como las familias sumables en el grupo $\mathbb{F}$, y de los de $\ell_1\{A, \mathbb{T}\}$ como las multiplicables en $\mathbb{T}$, así como el hecho de que las pseudonormas definidas en el enunciado generan las topologías naturales en $\ell_1\{A, \mathbb{F}\}$ y $\ell_1\{A, \mathbb{T}\}$, son consecuencia de las desigualdades que relacionan las pseudonormas canónicas de $\mathbb{F}$ y $\mathbb{T}$ con el valor de los funcionales de Kaplan sobre entornos básicos de cero (Prop. 5.6, (a) y (b) respectivamente). Finalmente, en los Ejs. 20.9 y 23.2 se caracteriza a las familias presumables en $\mathbb{F}$ y $\mathbb{T}$ con la misma condición y se muestra que las pseudonormas del enunciado generan asimismo la topología natural del grupo de las familias presumables. □

PROPOSICIÓN 25.16. *Sean G un grupo abeliano topológico y A un conjunto no vacío.*

(a) *Si G es completo, entonces $\ell_1\{A, G\}$ es completo.*
(b) *Si G es metrizable, entonces $\ell_1\{A, G\}$ es metrizable.*
(c) *Si A es numerable y G es separable, entonces $\ell_1\{A, G\}$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN.
(a) Sea $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ una red de Cauchy en $\ell_1\{A, G\}$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea $x_\gamma = (x_\gamma(\alpha))_{\alpha\in A}$. Fijado $\alpha \in A$, la red $(x_\gamma(\alpha))_{\gamma\in\Gamma}$ es de Cauchy en G; como G es completo, $x_\gamma(\alpha) \xrightarrow{\gamma} x(\alpha)$ para algún $x(\alpha) \in G$. Vamos a demostrar que

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \exists \gamma_0 \in \Gamma, \quad [\gamma \geq \gamma_0 \Rightarrow \sum_{\alpha\in A} k_U(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) < 1]. \tag{25.4}$$

Fijamos $U \in \mathcal{N}_0(G)$; sea $V \in \mathcal{N}_0(G)$ cerrado y tal que $V + V + V \subset U$. Existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$\gamma,\ \gamma' \geq \gamma_0 \Rightarrow \sum_{\alpha\in A} k_V(x_{\gamma'}(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) < 1.$$

Para todos $\alpha \in A$ y $\gamma \geq \gamma_0$, la red $(x_{\gamma'}(\alpha) - x_\gamma(\alpha))_{\gamma'\geq\gamma_0}$ converge en G a $x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)$. Como V es cerrado, la Prop. 5.5 implica que

$$\alpha \in A,\ \gamma \geq \gamma_0 \Rightarrow k_V(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \leq \liminf_{\gamma'\geq\gamma_0} k_V(x_{\gamma'}(\alpha) - x_\gamma(\alpha))$$

y por lo tanto (notar que la suma de los límites inferiores es menor o igual que el límite inferior de la suma)

$$\begin{aligned}
&\Delta \in \mathfrak{F}(A),\ \gamma \geq \gamma_0 \\
\Rightarrow\quad &\textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} k_V(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) &&\leq \sum_{\alpha\in\Delta} \liminf_{\gamma'\geq\gamma_0} k_V(x_{\gamma'}(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \\
& &&\leq \liminf_{\gamma'\geq\gamma_0} \sum_{\alpha\in\Delta} k_V(x_{\gamma'}(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \\
& &&\leq 1.
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\gamma \geq \gamma_0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{\alpha\in A} k_V(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \leq 1 \\ &\overset{\text{Prop. 5.3}(c)}{\Rightarrow} \quad \sum_{\alpha\in A} k_U(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) \leq \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

y (25.4) está demostrado. Esta relación implica en particular que $x = (x_\alpha) \in \ell_1\{A, G\}$: dado un $U \in \mathcal{N}_0(G)$ escogemos $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $V + V \subset U$; de (25.4) se deduce que existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $\sum_{\alpha\in A} k_V(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)) < \infty$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A} k_U(x(\alpha)) \quad &= \quad \sum_{\alpha\in A} k_U(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha) + x_\gamma(\alpha)) \\ &\overset{\text{Prop. 5.3}(b)}{\leq} \quad \sum_{\alpha\in A} \max\{k_V(x(\alpha) - x_\gamma(\alpha)),\ k_V(x_\gamma(\alpha))\} < \infty.\end{aligned}$$

Ahora es claro que (25.4) expresa el hecho de que la red (x_γ) converge a x en $\ell_1\{A, G\}$.

(b) Es claro que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión fundamental de entornos de cero en G, entonces los conjuntos $\{V_n\}_A$, $n \in \mathbb{N}$ forman base de entornos de cero en $\ell_1\{A, G\}$, y que $\ell_1\{A, G\}$ es de Hausdorff si lo es G. Basta tener en cuenta que un grupo abeliano topológico es metrizable si y sólo si es I-numerable y de Hausdorff (Sec. 4).

(c) Supongamos $A = \mathbb{N}$; el caso de A finito es trivial. Sea D un subconjunto numerable denso de G y definimos, como en la Prop. 23.3(c), el subconjunto numerable de $\ell_1\{G\}$

$$D' = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}} : y_1, y_2, \ldots, y_N \in D,\ y_n = 0\ \forall n > N\}.$$

Demostraremos que D' es denso en $\ell_1\{G\}$: Dados $(x_n) \in \ell_1\{G\}$ y $U \in \mathcal{N}_0(G)$, tenemos que encontrar un $(y_n) \in D'$ tal que $(x_n - y_n) \in \{U\}_{\mathbb{N}}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} k_U(x_n) < 1/2$. Para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$ determinamos $d_n \in D$ tal que $x_n - d_n \in U_{(2N)}$. La sucesión $(y_n) = (d_1, d_2, \ldots, d_N, 0, 0, \ldots) \in D'$ cumple la condición pedida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_U(x_n - y_n) = \sum_{n\leq N} k_U(x_n - d_n) + \sum_{n>N} k_U(x_n) < N\frac{1}{2N} + \frac{1}{2} = 1.$$

$\square$

LEMA 25.17. *Sea G un grupo abeliano topológico, A un conjunto no vacío y H un subgrupo de G en el que se considera la topología inducida por la de G. Se tiene*

(a) $\ell_1\{A, H\} = \ell_1\{A, G\} \cap H^A$.

(b) *Para todo $V \in \mathcal{N}_0(G)$ se tiene*

$$\{V \cap H\}_A = \{V\}_A \cap H^A.$$

(c) *la inclusión canónica $\ell_1\{A, H\} \hookrightarrow \ell_1\{A, G\}$ es un encajamiento topológico.*

DEMOSTRACIÓN. (a) y (b) se deducen directamente de las definiciones (notar que para todos $x \in H$ y $V \in \mathcal{N}_0(G)$, $\quad k_{V\cap H}(x) = k_V(x)$). (c) es consecuencia de (a) y (b). $\square$

PROPOSICIÓN 25.18. *Sea G un grupo abeliano topológico localmente cuasiconvexo.*

(a) *Una familia (x_α) en G es absolutamente sumable si y sólo si para todo $V \in \mathcal{N}_0(G)$*

$$r_V((x_\alpha)) := \sum_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_V < \infty.$$

(b) *La topología de $\ell_1\{A, G\}$ es la generada por las pseudonormas $\{r_V \ : \ V \in \mathcal{N}_0(G)\}$. Además, los conjuntos*

$$[V]_A = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1\{A, G\} : r_V((x_\alpha)) \leq \sqrt{2}\},$$

donde V recorre los entornos de cero en G, forman un sistema fundamental de entornos de cero para $\{\tau_G\}_A$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Es consecuencia inmediata del Lema 14.4.

(b) Para todos $U \in \mathcal{N}_0(G)$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple $\{V\}_A \subset r_U^{-1}[0, \frac{\pi}{2^n}]$, donde V es un entorno de cero en G tal que $V + \overset{3^n}{\ldots} + V \subset U$. En efecto,

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{\alpha\in A} k_V(x_\alpha) < 1 \\ \Rightarrow \quad & \textstyle\sum_{\alpha\in A} ||x_\alpha||_U \overset{\text{Lema 14.4}(a)}{\leq} \pi \sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) \overset{\text{Prop. 5.3}(c)}{\leq} \frac{\pi}{2^n} \sum_{\alpha\in A} k_V(x_\alpha) < \frac{\pi}{2^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las pseudonormas r_V son continuas. Dado ahora $U \in \mathcal{N}_0(G)$, fijamos un entorno de cero V cuasiconvexo y tal que $V + V + V \subset U$. Si $r_V((x_\alpha)) \leq \sqrt{2}$, en particular (Prop. 14.2(a)) $x_\alpha \in V^{\triangleright\triangleleft} = V$ para todo $\alpha \in A$ y se cumple

$$\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) \overset{\text{Prop. 5.3}(c)}{\leq} \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in A} k_V(x_\alpha) \overset{\text{Lema 14.4}(b)}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\alpha\in A} ||x_\alpha||_V \leq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto se tiene la inclusión $[V]_A = r_V^{-1}[0, \sqrt{2}] \subset \{U\}_A$. $\square$

PROPOSICIÓN 25.19. *Sea G un grupo abeliano topológico localmente cuasiconvexo y A un conjunto no vacío. Entonces el grupo $(\ell_1\{A, G\}, \{\tau_G\}_A)$ es localmente cuasiconvexo.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que los conjuntos $[V]_A$ forman una base de entornos de cero para la topología $\{\tau_G\}_A$ en en $\ell_1\{A, G\}$ (Prop. 25.18(b)), basta demostrar que

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(G) \quad \exists V \in \mathcal{N}_0(G), \qquad [V]_A{}^{\triangleright\triangleleft} \subset [U]_A.$$

Dado $U \in \mathcal{N}_0(G)$, determinamos un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ con $V + V \subset U$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in [V]_A{}^{\triangleright\triangleleft}$; comprobemos que $\sum_{\alpha\in A} ||x_\alpha||_U \leq \sqrt{2}$. Basta probar que $\sum_{\alpha\in\Delta} |1-\chi_\alpha(x_\alpha)| \leq \sqrt{2}$ para cualquier subconjunto finito $\Delta \subset A$ y cualquier familia finita $(\chi_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ en $U^{\triangleright}$. Sea

Δ un subconjunto finito arbitrario de A y para cada $\alpha \in \Delta$, sean $\chi_\alpha \in U^\triangleright$ y $n_\alpha \in \{-2,-1,0,1,2\}$. El carácter

$$(y_\alpha) \in \ell_1\{A,G\} \mapsto \prod_{\alpha\in\Delta} \chi_\alpha^{n_\alpha}(y_\alpha) \in \mathbb{T}$$

pertenece a $[V]_A^\triangleright$: si $\sum_{\alpha\in A} ||y_\alpha||_V \leq \sqrt{2}$, en particular

$$|1 - \prod_{\alpha\in\Delta} \chi_\alpha^{n_\alpha}(y_\alpha)| \leq \sum_{\alpha\in\Delta} |1 - \chi_\alpha^{n_\alpha}(y_\alpha)| \leq \sqrt{2}$$

ya que $\chi_\alpha^{n_\alpha} \in V^\triangleright$ para todo $\alpha \in \Delta$. Como $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in [V]_A{}^{\triangleright\triangleleft}$, se cumple que $\prod_{\alpha\in\Delta} \chi_\alpha^{n_\alpha}(x_\alpha) \in \mathbb{T}_+$. Del Cor. 3.7 deducimos que

$$\forall (\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \{-1,0,1\}^\Delta \quad \prod_{\alpha\in\Delta} \chi_\alpha^{\varepsilon_\alpha}(x_\alpha) \in \mathbb{T}[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

y por la Prop. 3.12

$$\sum_{\alpha\in\Delta} |1 - \chi_\alpha(x_\alpha)| \leq \frac{\pi}{4} < \sqrt{2}.$$

□

PROPOSICIÓN 25.20. *Sea G un n-grupo con entorno distinguido U. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in G^A$.*

(a) $(x_\alpha) \in \ell_1\{A,G\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) < \infty$.
(b) *si G es un n-grupo localmente cuasiconvexo y U es un entorno de cero distinguido y cuasiconvexo en G, se tiene*

$$(x_\alpha) \in \ell_1\{A,G\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha\in A} ||x_\alpha||_U < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. (a) La condición es claramente necesaria, y es suficiente por la Prop. 5.4(a).
(b) Se deduce de (a) y del Lema 14.4.

□

25.2. Relación con los conceptos correspondientes en grupos vectoriales topológicos. Vamos a comprobar que las nociones que hemos introducido conservan su sentido habitual al considerarlas en el contexto de espacios vectoriales con estructura topológica compatible, en los que la definición usual de familia absolutamente sumable utiliza los funcionales de Minkowski (1.16) de entornos de cero. A lo largo de esta sección $\mathbb{F}$ denota el cuerpo de los números reales o de los números complejos, indistintamente.

LEMA 25.21. *Sea E un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y U un subconjunto de E. Entonces*

(a) $p_U(x) \leq 2k_U(x) \quad \forall x \in U$.
(b) *Si U es estrellado, $k_U(x) \leq p_U(x) \quad \forall x \in E$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x \notin U$ y U es estrellado, $p_U(x) \geq 1$ y $k_U(x) = 1 \leq p_U(x)$, lo que demuestra (b) en este caso. Si $k_U(x) = 0$ (b) es trivial; como $nx \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_U(x) = 0$, lo que demuestra (a). Si $k_U(x) = \frac{1}{N+1}$ para algún $N \in \mathbb{N}$, en particular $Nx \in U$ y $(N+1)x \notin U$, de donde se deducen, respectivamente, (a) y (b). $\square$

PROPOSICIÓN 25.22. *Sean E un $\mathbb{F}-$grupo vectorial topológico localmente equilibrado, A un conjunto no vacío y $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in E^A$. Son equivalentes:*

(a) $\forall U \in \mathcal{N}_0(E) \quad \sum_{\alpha\in A} \min\{p_U(x_\alpha), 1\} < \infty$
(b) $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1\{A, E\}$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar (a)$\Rightarrow$ (b), fijamos $U \in \mathcal{N}_0(E)$. Existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ estrellado tal que $V \subset U$. Como $\sum_{\alpha\in A} \min\{p_V(x_\alpha), 1\} < \infty$, necesariamente $p_V(x_\alpha) \leq 1 \ \forall \alpha \in A \setminus \Delta$, siendo Δ un subconjunto finito de A. Se tiene así

$$\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) \overset{\text{Prop. } 5.3(a)}{\leq} \sum_{\alpha\in A} k_V(x_\alpha) \leq |\Delta| + \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta} k_V(x_\alpha) \overset{\text{Lema } 25.21(b)}{\leq} |\Delta| + \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta} p_V(x_\alpha) < \infty.$$

En cuanto a la otra implicación, fijado $U \in \mathcal{N}_0(E)$, el conjunto $\Delta' = \{\alpha \in A : x_\alpha \notin U\}$ es finito (25.2); se tiene

$$\sum_{\alpha\in A} p_U(x_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta'} p_U(x_\alpha) + \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta'} p_U(x_\alpha) \overset{\text{Lema } 25.21(a)}{\leq} \sum_{\alpha\in\Delta'} p_U(x_\alpha) + 2 \sum_{\alpha\in A\setminus\Delta'} k_U(x_\alpha) < \infty.$$

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que la Prop. 25.22 no es cierta sin la hipótesis de que el grupo vectorial topológico considerado sea localmente equilibrado.

EJEMPLO 25.23. *Sea E el $\mathbb{R}$-grupo vectorial topológico $(\mathbb{R}, \sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\wedge))$ (Ej. 17.4). E no tiene entornos acotados de cero (13.15(b)) y por lo tanto, para cualesquiera $x \in E$ y $U \in \mathcal{N}_0(E)$ se cumple $p_U(x) = 0$. Por lo tanto cualquier familia $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in E^A$ verifica la condición enunciada en la Prop. 25.22(a), pero es claro que $\ell_1\{A, E\} \neq E^A$.*

25.24. Si E es un espacio vectorial topológico, los elementos de $\mathcal{N}_0(E)$ son conjuntos absorbentes y la propiedad enunciada en 25.22(a) se puede escribir como

$$\forall U \in \mathcal{N}_0(E) \quad \sum_{\alpha\in A} p_U(x_\alpha) < \infty,$$

que es la definición habitual de familia absolutamente sumable en un espacio vectorial topológico ([**31**, p. 37], [**78**, p. 120]). La presente Proposición establece en particular, por lo tanto, que *una familia de elementos de un espacio vectorial topológico E es absolutamente sumable si y sólo lo es considerada en el grupo aditivo topológico asociado a E.* Podemos llamar absolutamente sumables a estas familias, sin ambigüedad.

EJEMPLO 25.25. *Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Las familias $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ absolutamente sumables para la topología $\sigma(E, E^*)$ coinciden con las presumables para esta misma topología (caracterizadas en la Prop. 20.17).*

DEMOSTRACIÓN. Aunque en la Prop. 29.6 demostraremos un resultado más general, este enunciado se puede probar fácilmente teniendo en cuenta que para todo $x^* \in E^*$, el funcional de Minkowski del conjunto $\{x \in E : |x^*(x)| \leq 1\}$ coincide en cada $y \in E$ con $|x^*(y)|$; como los conjuntos $\{x \in E : |x^*(x)| \leq 1\}$, con x^* recorriendo E^*, forman una subbase de entornos de cero para $\sigma(E, E^*)$ (11.6), se deduce que una familia $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in E^A$ es $\sigma(E, E^*)$-absolutamente sumable si y sólo si $\sum_{\alpha \in A} |x^*(x_\alpha)| < \infty$ para todo $x^* \in E^*$, condición que caracteriza (Prop. 20.17) a las familias $\sigma(E, E^*)$-presumables. $\square$

La propiedad enunciada en el Ej. 25.25 es cierta también para espacios vectoriales topológicos sobre un cuerpo valuado no arquimediano arbitrario. Dado un tal espacio E, el espacio $(E, \sigma(E, E^*))$ es siempre localmente convexo no arquimediano (18.15) y en particular el grupo subyacente es topológicamente no arquimediano. Veremos en el Ej. 29.4(b) que en cualquier grupo TNA coinciden las familias absolutamente sumables con las presumables.

LEMA 25.26. *Sea E un $\mathbb{F}$-grupo vectorial topológico localmente equilibrado. Definimos*

$$\pi_U : \ell_1\{A, E\} \to [0, \infty], \quad \pi_U((x_\alpha)) = \sum_{\alpha \in A} p_U(x_\alpha)$$

Los conjuntos de la forma $\pi_U^{-1}[0, 1]$, $U \in \mathcal{N}_0(E)$ constituyen una base de entornos de cero para la topología $\{\tau_E\}_A$.

DEMOSTRACIÓN. Del Lema 25.21 se deduce que, para cualquier $U \in \mathcal{N}_0(E)$ estrellado,

$$\sum_{\alpha \in A} k_{\frac{1}{2}U}(x_\alpha) < 1 \Rightarrow \sum_{\alpha \in A} p_{\frac{1}{2}U}(x_\alpha) < 2 \Rightarrow \sum_{\alpha \in A} p_U(x_\alpha) < 1,$$

$$\sum_{\alpha \in A} p_U(x_\alpha) < 1 \Rightarrow \sum_{\alpha \in A} k_U(x_\alpha) < 1.$$

La demostración se completa teniendo en cuenta que por hipótesis los entornos equilibrados (y por lo tanto los estrellados) forman una base de entornos de cero en E. $\square$

25.27. Si E es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico, el Lema 25.26 implica que la familia de seminormas

$$(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \ell_1\{A, E\} \mapsto \pi_U((x_\alpha)) = \sum_{\alpha \in A} p_U(x_\alpha)$$

(ver 25.24), donde U recorre los entornos convexos y equilibrados de cero en E, genera $\{\tau_E\}_A$, que en particular es una topología de espacio localmente convexo.

En [**67**, 1.4] el espacio de las familias $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ absolutamente sumables en E se denota por $l_A^1\{E\}$ y se presenta esta construcción de $\{\tau_E\}_A$, que se introduce bajo el nombre de *π-topología* en $l_A^1\{E\}$.

26. Homomorfismos sumantes

DEFINICIÓN 26.1. Sean G y H grupos topológicos abelianos, $u : G \to H$ homomorfismo de grupos. Se dice que u es *absolutamente sumante,* o simplemente *sumante,* cuando para toda $(x_n) \in \ell_1(G)$ se verifica $(u(x_n)) \in \ell_1\{H\}$.

El siguiente resultado muestra que la elección de $\mathbb{N}$ entre los posibles conjuntos infinitos de índices no es esencial para la definición:

PROPOSICIÓN 26.2. *Sean G y H grupos abelianos topológicos y $u : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Si existe un conjunto infinito B tal que*

$$\forall (x_\beta)_{\beta\in B} \in \ell_1(B, G) \quad (u(x_\beta))_{\beta\in B} \in \ell_1\{B, H\}$$

entonces esta condición se cumple tomando en vez de B un conjunto no vacío arbitrario.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \neq \emptyset$ y fijamos $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell_1(A, G)$ y $V \in \mathcal{N}_0(H)$. Tenemos que demostrar que $\sum_{\alpha\in A} k_V(u(x_\alpha)) < \infty$. Basta demostrar que $\sum_{\alpha\in A_0} k_V(u(x_\alpha)) < \infty$ para cualquier subconjunto numerable A_0 de A (Prop. 25.4(b)). Fijamos un tal subconjunto A_0 y una aplicación inyectiva $i : A_0 \to B$. La familia $(y_\beta)_{\beta\in B}$ definida como sigue

$$y_{i(\alpha)} = x_\alpha \quad \forall \alpha \in A_0; \qquad y_\beta = 0 \quad \forall \beta \in B \setminus i(A_0)$$

es claramente presumable y por hipótesis $(u(y_\beta))_{\beta\in B} \in \ell_1\{B, G\}$; luego $\sum_{\beta\in B} k_V(u(y_\beta)) = \sum_{\alpha\in A} k_V(u(x_\alpha) < \infty$. □

PROPOSICIÓN 26.3. *Sean G_1, G_2, G_3, G_4 grupos abelianos topológicos, $f : G_1 \to G_2$ y $g : G_3 \to G_4$ homomorfismos continuos y $u : G_2 \to G_3$ homomorfismo sumante. Entonces $g \circ u \circ f$ es sumante.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata de que (Props. 20.11 y 25.5) la imagen por un homomorfismo continuo de una familia presumable (resp. absolutamente sumable) es presumable (resp. absolutamente sumable). □

PROPOSICIÓN 26.4. *Sean G y H grupos abelianos topológicos, G I-numerable. Si $u : G \to H$ es un homomorfismo sumante, entonces es continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que u no es continuo. Sea (Teor. 4.5) q una cuasinorma en G que genere su topología. Existen $V \in \mathcal{N}_0(H)$ y una sucesión (x_n) en G tal que $q(x_n) \to 0$ pero $u(x_n) \notin V$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n) tal que $\sum_{k=1}^{\infty} q(x_{n_k}) < \infty$. En particular $(x_{n_k}) \in \ell_1(G)$ (20.13), pero $u(x_{n_k})$ no converge a 0, y por lo tanto no es absolutamente sumable, contradicción. □

A continuación mostramos que un homomorfismo sumante puede no ser secuencialmente continuo, y en particular que la Prop. 26.4 no es cierta sin la hipótesis de que G sea I-numerable.

EJEMPLO 26.5. (a) *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio de Banach, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo de los números reales o el de los complejos. Cualquier sucesión $\sigma(E^*, E)$-presumable en E^* es $\sigma(E^*, E^{**})$-presumable.*

(b) *La identidad* $u : (l_1, \sigma(l_1, c_0)) \to (l_1, \sigma(l_1, l_\infty))$ *es sumante pero no secuencialmente continua.*

Demostración. (a) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\sigma(E^*, E)$-presumable en el espacio de Banach E. El conjunto $\mathcal{S}$ de sumas finitas de (x_n) es $\sigma(E^*, E)$-precompacto (Prop. 22.2) y por lo tanto, $\sigma(E^*, E)$-acotado. Por el teorema de Banach-Steinhaus (cf. [**58**, Teor. 2.6.7]), $\mathcal{S}$ es acotado en norma en E^*. De aquí se deduce trivialmente que (x_n) es $\sigma(E^*, E^{**})$-presumable (cf. Prop. 20.17).

(b) Es claro que u no es secuencialmente continua ya que la base canónica de l_1 es convergente a cero en la topología $\sigma(l_1, c_0)$ pero no en la $\sigma(l_1, l_\infty)$. Por otra parte, teniendo en cuenta el apartado (a) y el Ej. 25.25, se deduce que u es un homomorfismo sumante.

□

Lema 26.6. *Sean G y H grupos topológicos abelianos metrizables. Sean G_1 y H_1 subgrupos de G y H, respectivamente; G_1 denso en G. Si $i_G : G_1 \to G$ e $i_H : H_1 \to H$ denotan las respectivas inclusiones y $u : G \to H$ y $u_1 : G_1 \to H_1$ son homomorfismos de grupos tales que u es continuo, u_1 es sumante e $i_H \circ u_1 = u \circ i_G$, entonces u también es sumante.*

Demostración. Sea $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de entornos de cero en H tal que

$$b_n \in V_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (b_n) \in \ell_1\{H\}.$$

Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de entornos simétricos de cero en G tal que

$$u(U_n) \subset V_n; \quad [a_n \in U_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n) \in \ell_1(G)].$$

(La existencia de estas sucesiones de entornos es consecuencia de 20.13 y 25.9.) Sea $(x_n) \in \ell_1(G)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, fijamos un $z_n \in G_1$ tal que $x_n - z_n \in U_n$. Se tiene $u(x_n) = u(x_n - z_n) + u(z_n)$; como $u(x_n - z_n) \in V_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión $u(x_n - z_n)$ es absolutamente sumable en H; por otra parte $z_n = (z_n - x_n) + x_n \Rightarrow (z_n) \in \ell_1(G)$; como además $(z_n) \in G_1^{\mathbb{N}}$, se tiene (Lema 23.4(a)) $(z_n) \in \ell_1(G_1) \Rightarrow (u(z_n)) = (u_1(z_n)) \in \ell_1\{H_1\} \subset \ell_1\{H\}$ (Lema 25.17(a)). Se deduce así que $(u(x_n)) \in \ell_1\{H\}$. □

Nota 26.7. La hipótesis de que u es continuo no se puede eliminar del enunciado del Lema 26.6. Sea E un espacio de Banach infinitodimensional y $u : E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal no acotado. Es evidente que u no es sumante, pero la restricción de u al subespacio denso $\ker u$ es idénticamente 0.

Si $u : G \to H$ es sumante, se puede definir el homomorfismo de grupos asociado $u^s : \ell_1(G) \to \ell_1\{H\}$, $\quad u^s((x_n)) = (u(x_n))$. Es inmediato que si $u : G \to H$ es un homomorfismo sumante, entonces la continuidad de u^s implica la de u; basta escribir $u = p_1 \circ u^s \circ i_1$, donde

$$\begin{array}{ll} i_1 : G \to \ell_1(G) & p_1 : \ell_1\{H\} \to H \\ i_1(x) = (x, 0, 0, \dots) & p_1((x_n)) = x_1 \end{array}$$

son claramente continuas. De este hecho y del Ej. 26.5 se deduce que para un u sumante, u^s no es necesariamente continua, en general; de hecho, tampoco basta que u sea continua, como muestra el ejemplo $G = H = \mathbb{R}^{(I)}$, siendo I conjunto de índices no numerable, u la identidad (Ej. 29.19). Un ejemplo de un operador lineal sumante $u : E \to F$, donde E es un espacio localmente convexo, F es un espacio de Banach y u^s no es continua, se puede encontrar en [**67**, 2.1.4]. Sin embargo, en el caso de que G sea metrizable sí se puede deducir la continuidad de u^s:

TEOREMA 26.8. *Sean G y H grupos topológicos abelianos, G metrizable, y $u : G \to H$ un homomorfismo sumante. Entonces $u^s : \ell_1(G) \to \ell_1\{H\}$ es continuo.*

DEMOSTRACIÓN. *Paso 1.* Supongamos primero que G y H son metrizables y completos y H es además separable. Entonces $\ell_1(G)$ y $\ell_1\{H\}$ tienen las mismas propiedades (Props. 23.3 y 25.16), y para deducir la continuidad de u^s podemos aplicar el Teorema del Grafo Cerrado (Teor. 10.11). Comprobemos que el grafo de u^s es cerrado: Sea (x_n) una sucesión en $\ell_1(G)$ tal que $x_n \to 0$, y supongamos que $u^s(x_n) \to y$ en $\ell_1\{H\}$. Es claro que para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_n(m) \overset{n}{\to} 0$ en G, ya que las proyecciones $x \in \ell_1(G) \mapsto x(m) \in G$ son continuas. Ahora, por la Prop. 26.4, u es continuo y por lo tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene $u(x_n(m)) \overset{n}{\to} 0$ en H. Como $u^s(x_n) = (u(x_n(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ y las proyecciones $\ell_1\{H\} \to H$, $z \mapsto z(m)$ son también continuas, se deduce que $y = 0$, es decir, que u^s tiene el grafo cerrado.

Paso 2. Generalizamos al caso en que G y H sean metrizables y H además separable. Sea $\overline{u} : \widetilde{G} \to \widetilde{H}$ la extensión continua de u a las compleciones de G y H. $\widetilde{G}$ y $\widetilde{H}$ son metrizables y completos, $\widetilde{H}$ es separable y por el Lema 26.6, $\overline{u}$ es sumante. Aplicando ahora el caso anterior, deducimos que $\overline{u}^s$ es continua; teniendo en cuenta que los monomorfismos naturales $i_G : \ell_1(G) \to \ell_1(\widetilde{G})$, $i_H : \ell_1\{H\} \to \ell_1\{\widetilde{H}\}$ son encajamientos topológicos (Lemas 23.4(c) y 25.17(c)) y que $\overline{u}^s \circ i_G = i_H \circ u^s$, se deduce que u^s es continua.

Paso 3. Supongamos que $u : G \to H$ es sumante y u^s no es continua, siendo G y H metrizables. Existe entonces un $V \in \mathcal{N}_0(H)$ tal que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$, se tiene $u^s((U)_{\mathbb{N}}) \not\subset \{V\}_{\mathbb{N}}$. Sea $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión fundamental de entornos de cero en G. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n = (x_n(k))_{k \in \mathbb{N}} \in (U_n)_{\mathbb{N}}$ tal que $(u(x_n(k))) \notin \{V\}_{\mathbb{N}}$. Sea $G_0 = \operatorname{gp}\{x_n(k) : n, k \in \mathbb{N}\}$, con la topología inducida por la de G; G_0 es un subgrupo numerable de G. El grupo $H_0 = u(G_0)$, con la topología inducida por la de H, es metrizable y separable (de hecho numerable). Es claro que la restricción de u a G_0 y H_0, que denotamos por u_0, es sumante; por el paso anterior, $(u_0)^s$ es continua, contradicción con el hecho de que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u^s((x_n)) \in (u_0)^s((U_n \cap G_0)_{\mathbb{N}}), \quad u^s((x_n)) \notin \{V \cap H_0\}_{\mathbb{N}}.$$

Paso 4. Supongamos finalmente que $u : G \to H$ es sumante y u^s no es continua, siendo G metrizable. Sea $V \in \mathcal{N}_0(H)$ tal que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ se tiene $u^s((U)_{\mathbb{N}}) \not\subset \{V\}_{\mathbb{N}}$, y $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de entornos simétricos de cero en H tal que $V_1 \subset V$ y $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por τ la topología I-numerable determinada por la base de entornos de cero (V_n) en H, y W el interior de V para esta topología. W es un entorno abierto de cero en τ y, en particular, en τ_H. Sea H' el grupo de Hausdorff asociado a (H,τ) (es decir, $H' = (H,\tau)/\mathrm{Cl}_\tau(\{0\})$), y $\varphi_0 : (H,\tau) \to H'$ el homomorfismo canónico. Del carácter τ-abierto de W se deduce que $\varphi_0^{-1}(\varphi_0(W)) = W$ (1.13) y en particular, $k_W(y) = k_{\varphi_0(W)}(\varphi(y)) \quad \forall y \in H$. El homomorfismo $\varphi_0 \circ u$ es sumante (Prop. 26.3); por el paso anterior, $(\varphi_0 \circ u)^s$ es continuo. Como $\{W\}_\mathbb{N} \subset \{V\}_\mathbb{N}$, para todo U entorno de cero en G existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (U)_\mathbb{N}$ tal que $(u(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \notin \{W\}_\mathbb{N}$, luego $(\varphi_0(u(x_k)))_{k\in\mathbb{N}} \notin \{\varphi_0(W)\}_\mathbb{N}$, contradicción con el carácter continuo de $(\varphi_0 \circ u)^s$. □

NOTA 26.9. El concepto de operador absolutamente sumante, implícito en el trabajo de Grothendieck que dio lugar a la teoría de los espacios nucleares, fue formulado y estudiado por Pelzcynski y Pietsch en los primeros 60. Desde entonces esta noción (así como el concepto relacionado de operador absolutamente p-sumante) ha sido objeto de intensa investigación y se ha revelado como una herramienta imprescindible en diversas áreas del Análisis Funcional ([**67**], [**23**]). Aquí hemos visto que una definición análoga tiene sentido en grupos abelianos topológicos. El Teor. 26.8 es conocido para el caso de espacios localmente convexos ([**67**, Theor. 2.1.3]).

CAPíTULO V

Grupos GP-nucleares

Una vez que hemos definido los conceptos de familia presumable y absolutamente sumable en grupos abelianos topológicos generales, y hemos dotado de topologías naturales a los grupos formados por esas familias, tiene sentido preguntarse por las implicaciones del hecho de que en un determinado grupo toda familia presumable sea absolutamente sumable, y/o viceversa, con o sin la hipótesis de continuidad de la inclusión correspondiente. Grothendieck y Pietsch mostraron (cf. Teor. 30.7) que la igualdad algebraica y/o topológica entre los espacios de las sucesiones presumables y absolutamente sumables en un espacio localmente convexo guarda una estrecha relación con el carácter nuclear del espacio. Teniendo en cuenta este hecho, es de esperar que las identificaciones análogas en grupos conduzcan al concepto de grupo nuclear, que Banaszczyk introdujo como una generalización conveniente del de espacio nuclear en [**7**]. En este capítulo plantearemos esas identificaciones y estudiaremos las clases formadas por los grupos que las cumplen, así como la conexión con los grupos nucleares en el sentido de Banaszczyk.

Comenzaremos presentando los conceptos de espacio nuclear, grupo vectorial nuclear y grupo nuclear, en orden creciente de generalidad. Para ello es necesario recordar una serie de resultados y definiciones sobre diámetros de Kolmogorov, números de aproximación y diferentes clases de operadores entre espacios normados, que constituyen el contenido de la siguiente sección. En todo este capítulo, y salvo mención en contra, como cuerpo base $\mathbb{F}$ se toma indistintamente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

27. Definiciones y resultados previos

27.1. Construcción de los espacios normados $E_{(V)}$. Recordemos la construcción del espacio normado asociado a un subconjunto convexo y equilibrado de un espacio vectorial ([**50**, 6.8], [**78**, III.7]):

Sea $\mathbb{F}$ el cuerpo de los números reales o el de los complejos, E un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $U \subset E$ un subconjunto convexo y equilibrado de E. El funcional de Minkowski p_U define una seminorma en el subespacio generado por U, que denotamos $\operatorname{sp} U$. En particular el conjunto $N_U = p_U^{-1}(0) = \bigcap_{\lambda>0} \lambda U$ es un subespacio de $\operatorname{sp} U$. Si $E_{(U)}$ denota el espacio vectorial cociente $\operatorname{sp} U/N_U$ y $\Lambda_U : \operatorname{sp} U \to E_{(U)}$ es la proyección canónica, entonces la aplicación $||\cdot|| : E_{(U)} \to \mathbb{R}$, definida por $||\Lambda_U(x)|| = p_U(x)$ está bien definida y es una norma en $E_{(U)}$.

Dados U y V absolutamente convexos y tales que $V \subset U$, denotaremos por $\Lambda_{VU} : E_{(V)} \to E_{(U)}$ el operador definido por $\Lambda_{VU}(\Lambda_V(x)) = \Lambda_U(x)$. Es evidente que Λ_{VU} es lineal, continuo y de norma menor o igual que 1.

Sea p una seminorma definida en un espacio vectorial E. El conjunto $B_p = \{x \in E : p(x) \leq 1\} \subset E$ es convexo y equilibrado, y su funcional de Minkowski coincide con p. Utilizaremos la notación E_p para referirnos al espacio normado $E_{(B_p)}$; análogamente Λ_{pq} denotará el operador $\Lambda_{B_p B_q}$, si p y q son seminormas tales que $q \leq p$.

Diremos que p es una seminorma prehilbertiana si se verifica la igualdad $p^2(x+y) + p^2(x-y) = 2p^2(x) + 2p^2(y)$ para todos $x,\ y \in E$; es evidente que p es prehilbertiana si y sólo si E_p es un espacio prehilbertiano.

27.2. Diámetros de Kolmogorov y números de Kolmogorov de un operador. Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, U, V subconjuntos no vacíos de E tales que U es estrellado. Se define el k-ésimo diámetro de Kolmogorov ($k \in \mathbb{N}$) de V con respecto a U de la siguiente forma:

$$d_k(V,U) = \inf\{\varepsilon > 0 : \exists L \text{ subespacio de } E,\ \dim L < k,\ V \subset \varepsilon U + L\}$$

En esta definición se acepta que $\inf \emptyset = +\infty$, de forma que $d_1(V,U)$ es finito si y sólo si U absorbe a V. Es claro que en cualquier caso se tiene

$$\infty \geq d_1(V,U) \geq d_2(V,U) \geq \cdots \geq 0$$

27.1. ([**75**, 7.1.2]) Si U, V y W son subconjuntos de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial E y $n,\ m \in \mathbb{N}$, se verifica

$$d_{n+m-1}(W,U) \leq d_n(W,V)\, d_m(V,U).$$

Sean E y F dos $\mathbb{F}$-espacios normados y $u : E \to F$ un operador lineal continuo. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se define el k-simo número de Kolmogorov de u de la siguiente forma:

$$d_k(u) = d_k(u(B_E), B_F)$$

donde B_E y B_F son las bolas unidad cerradas de los espacios E y F, respectivamente. Es claro que $+\infty > ||u|| = d_1(u) \geq d_2(u) \geq d_3(u) \geq \ldots$

El valor de los números de Kolmogorov de un operador $u : E \to F$ puede variar al considerar como rango de u distintos subespacios de F que contengan a la imagen ([**7**, p. 22]). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

27.2. [**7**, Lemma 2.10] Sean E un espacio normado, F un espacio prehilbertiano, $u : E \to F$ un operador lineal y continuo, F_0 un subespacio de F que contiene a $u(E)$ y $u_0 : E \to F_0$ definido por $u_0(x) = u(x)$ para todo $x \in E$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple $d_k(u) = d_k(u_0)$.

27.3. ([**4**, Cor. 18.16]) Sean E y F espacios normados, $u : E \to F$ un operador lineal y continuo. Si $\overline{u} : \widetilde{E} \to \widetilde{F}$ denota la extensión de u a las compleciones de E y F, entonces $d_k(u) = d_k(\overline{u})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

27.4. Sea E un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, U, V subconjuntos convexos y equilibrados de E tales que $V \subset U$. Se verifica

$$d_k(\Lambda_{VU}) = d_k(V,U) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[Si V y U son además M-cerrados, esta igualdad se deduce de [**4**, 18.7] o bien de [**50**, Lem. 10.6.6]. El caso general se reduce a éste teniendo en cuenta que si definimos $V' = B_{p_V}$, $U' = B_{p_U}$, se cumple trivialmente $d_k(V', U') = d_k(V, U)$ para todo $k \in \mathbb{N}$; $E_{(U)} = E_{(U')}$, $E_{(V)} = E_{(V')}$ como espacios normados, y $\Lambda_{VU} = \Lambda_{V'U'}$.]

27.3. Números de aproximación de un operador. Sean E y F dos $\mathbb{F}$-espacios normados y $u : E \to F$ un operador lineal y continuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el *n-simo número de aproximación de u* como

$$a_n(u) = \inf\{||u - v|| : \ v : E \to F \text{ lineal y continuo, } \dim v(E) < n\}.$$

Es claro que $||u|| = a_1(u) \geq a_2(u) \geq \dots$

27.5. La relación entre los números de aproximación y los números de Kolmogorov de un operador es la siguiente:

(a) ([**67**, 9.1.6]) Si E y F son espacios normados y $u : E \to F$ es un operador lineal y continuo, entonces

$$d_n(u) \leq a_n(u) \leq n d_n(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) ([**68**, 11.6.2]) Si E y F son espacios de Hilbert y $u : E \to F$ es un operador lineal y continuo, entonces

$$d_n(u) = a_n(u), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

27.4. Operadores nucleares. Sean E y F dos espacios de Banach. Se dice que un operador lineal y continuo $u : E \to F$ es *nuclear* cuando existen sucesiones (x_n^*) en E^* e (y_n) en F tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*|| \, ||y_n|| < \infty, \qquad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n \quad \forall x \in E.$$

No es difícil demostrar que si $u : E \to F$ es nuclear, se puede de hecho poner

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, x_n^*(x) y_n \quad \forall x \in E$$

siendo $(\lambda_n) \in l_1$ y (x_n^*) e (y_n) sucesiones convergentes a cero en E^* y F, respectivamente.

27.6. Es inmediato que, si E, F, G, H son espacios de Banach, $u : E \to F$ y $w : G \to H$ son operadores lineales y continuos y $v : F \to G$ es un operador nuclear, entonces $w \circ v \circ u$ es un operador nuclear.

27.7. ([**75**, Prop. 7.2.5]) Si E y F son espacios de Banach y $u : E \to F$ es un operador nuclear, existen operadores lineales y continuos $u_1 : E \to l_2$, $u_2 : l_2 \to F$ tales que $u = u_2 \circ u_1$.

27.8. ([**67**, 8.4.3]) Si E, F son espacios de Banach y $u : E \to F$ es un operador lineal y continuo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u) < \infty$, entonces u es nuclear.

La afirmación inversa a la recogida en 27.8 es cierta en espacios de Hilbert ([**67**, 8.3.3]); en general se puede demostrar el siguiente resultado:

27.9. ([**67**, 8.4.6]) Sean E, F espacios de Banach y $u : E \to F$ composición de tres operadores nucleares; entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u) < \infty$. [De hecho, es suficiente que los tres operadores de cuya composición resulta u sean sumantes, cf. [**50**, 20.6.3]]

27.10. ([**67**, 3.2.13]) Sean E y F espacios de Banach. Todo operador nuclear $u : E \to F$ es sumante.

27.11. ([**67**, 3.3.5], [**50**, 20.6.2], [**23**, 5.31]) Si E y F son espacios de Banach y $u : E \to F$ es composición de dos operadores sumantes, entonces u es nuclear. [Éste es un resultado profundo, debido originariamente a Grothendieck. Posteriormente se han demostrado versiones más fuertes, que aparecen recogidas en las referencias.]

27.5. Operadores de Hilbert-Schmidt.

27.12. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbb{F}$. Se dice que un operador lineal y continuo $u : H_1 \to H_2$ es un *operador de Hilbert-Schmidt* cuando para algún sistema ortogonal completo $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ en H_1, se verifica $\sum_{\alpha \in A} ||u(e_\alpha)||^2 < \infty$.

Se comprueba ([**67**, 2.5.1]) que si u es un operador de Hilbert-Schmidt, el valor de $\sum_{\alpha \in A} ||u(e_\alpha)||^2 < \infty$ es el mismo para cualquier sistema ortogonal completo escogido en H_1.

27.13. ([**67**, 2.5.5], [**67**, 8.3.4], 27.5) Si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert y $u : H_1 \to H_2$ es un operador lineal y continuo, son equivalentes:

- u es de Hilbert-Schmidt.
- u es sumante.
- $\sum_{k=1}^{\infty} d_k(u)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(u)^2 < \infty$.

28. Espacios y grupos nucleares

Al plantear la coincidencia de las sucesiones presumables y absolutamente sumables en un espacio vectorial topológico surge, según veremos, el concepto de espacio nuclear. Esta noción fue introducida por Grothendieck en el marco de su teoría de productos tensoriales topológicos. Aparte de la definición original, actualmente se conocen diversas caracterizaciones. Nosotros partiremos de la siguiente definición, basada en conceptos de Teoría de Operadores:

DEFINICIÓN 28.1. Sea E un espacio localmente convexo. Se dice que E es *nuclear* cuando para todo $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado, tal que la aplicación canónica $\overline{\Lambda_{VU}} : \widetilde{E_{(V)}} \to \widetilde{E_{(U)}}$ es un operador nuclear.

Esta definición admite una generalización literal para la clase de grupos vectoriales localmente convexos:

DEFINICIÓN 28.2. Sea E un grupo vectorial localmente convexo. Se dice que E es *nuclear* cuando para todo $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado, tal que la aplicación canónica $\overline{\Lambda_{VU}} : \widetilde{E_{(V)}} \to \widetilde{E_{(U)}}$ es un operador nuclear.

De 27.6 se deduce que en esta definición podemos sustituir $\mathcal{N}_0(E)$ por cualquier base de entornos de cero de E. Por otra parte, es claro que todo espacio nuclear es en particular un grupo vectorial nuclear, ya que la condición exigida sobre la familia de los entornos de cero es exactamente la misma en ambos casos.

El concepto de grupo vectorial nuclear fue introducido en [**7**, Def. 9.1] mediante una definición distinta a la aquí presentada, aunque equivalente a ella (Teor. 28.4, (a)$\Leftrightarrow$(b)).

Los dos resultados siguientes generalizan al caso de grupos vectoriales localmente convexos algunas caracterizaciones del carácter nuclear conocidas en espacios localmente convexos. En el caso del Teor. 28.3 se utilizan distintos ideales de operadores en lugar del de los operadores compactos que figura en la definición (cf. [**50**, Th. 21.2.1]); en el Teor. 28.4 se caracteriza el carácter nuclear de un grupo vectorial localmente convexo mediante diámetros de Kolmogorov de entornos de cero, lo que constituye una generalización del Teorema de Mitiagin ([**12**, Th. 3.1], [**50**, Th. 21.2.8])

TEOREMA 28.3. *Sea E un grupo vectorial localmente convexo. Son equivalentes:*
(a) *E es un grupo vectorial nuclear.*
(b) *Para todo $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que $V \subset U$ y Λ_{VU} es sumante.*
(c) *Para cualquier $U \in \mathcal{N}_0(E)$ existen p, q seminormas prehilbertianas definidas en un subespacio S de E tales que $q \leq p$, $B_q \subset U$, $B_p \in \mathcal{N}_0(E)$ y $\overline{\Lambda_{pq}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt.*

DEMOSTRACIÓN. • (a)$\Rightarrow$(c): Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$; podemos suponer que U es convexo y equilibrado y por lo tanto existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que $\overline{\Lambda_{VU}} : \widetilde{E_{(V)}} \to \widetilde{E_{(U)}}$ es un operador nuclear. Sean (27.7) $u_1 : \widetilde{E_{(V)}} \to l_2$ y $u_2 : l_2 \to \widetilde{E_{(U)}}$ operadores lineales y continuos tales que $\overline{\Lambda_{VU}} = u_2 \circ u_1$. Podemos suponer que $||u_2|| < 1$ y por lo tanto, para todo $x \in \operatorname{sp} V$

$$||u_1(\Lambda_V(x))||_{l_2} \leq 1 \Rightarrow ||\Lambda_U(x)|| < 1 \Rightarrow x \in U.$$

Se tiene así que $q'(x) = ||u_1(\Lambda_V(x))||_{l_2}$ es una seminorma prehilbertiana en $\operatorname{sp} V$ tal que $B_{q'} \subset U$ y $B_{q'} \in \mathcal{N}_0(E)$. Análogamente a lo demostrado para U, para el entorno de cero $B_{q'}$ existe una seminorma prehilbertiana p definida en un subespacio S de E, tal que $B_p \in \mathcal{N}_0(E)$, $B_p \subset B_{q'}$ y $\overline{\Lambda_{pq'}}$ es nuclear, y por lo tanto un operador de Hilbert-Schmidt (27.10, 27.13).

Sea q la restricción de q' al subespacio S. El operador

$$\widetilde{x} \in \widetilde{E_p} \mapsto \overline{\Lambda_{pq'}}(\widetilde{x}) \in \overline{\Lambda_{pq'}(E_p)}^{\widetilde{E_{q'}}}$$

es claramente de Hilbert-Schmidt. Por otra parte, $\Lambda_{q'}(x) \mapsto \Lambda_q(x)$ define una isometría entre $\Lambda_{pq'}(E_p)$ y E_q, que se extiende a $\overline{\Lambda_{pq'}(E_p)}^{\widetilde{E_{q'}}}$ y $\widetilde{E_q}$; en definitiva, $\overline{\Lambda_{pq}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt.

• (c)$\Rightarrow$(b): Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado. Sean p y q seminormas prehilbertianas definidas en un subespacio S de E y tales que $q \leq p$, $B_q \subset U$, $B_p \in \mathcal{N}_0(E)$ y $\overline{\Lambda_{pq}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt. Se tiene (27.13, Lemas 23.4(a) y

25.17(a)) que Λ_{pq} es un operador sumante; luego (Prop. 26.3) también es sumante $\Lambda_{B_qU} \circ \Lambda_{pq} = \Lambda_{B_pU}$.

- (b)⇒(a): Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado. Existe $W \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que $W \subset U$ y Λ_{WU} es sumante, luego (Prop. 26.6) también lo es $\overline{\Lambda_{WU}}$. Aplicando la misma propiedad al entorno W encontramos $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado, contenido en W y tal que $\overline{\Lambda_{VW}}$ es sumante. De 27.11 se deduce que $\overline{\Lambda_{VU}} = \overline{\Lambda_{VW}} \circ \overline{\Lambda_{WU}}$ es un operador nuclear.

□

TEOREMA 28.4. *Sea E un grupo vectorial localmente convexo. Son equivalentes:*

(a) *E es un grupo vectorial nuclear.*

(b) *Para todo $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que*
$$d_k(V,U) \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(c) *Para todos $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado, $m \in \mathbb{N}$ y $c > 0$ existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que*
$$d_k(V,U) \leq c\, k^{-m} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(d) *Para todos $U \in \mathcal{N}_0(E)$, $m \in \mathbb{N}$ y $c > 0$ existe un subespacio S de E y seminormas prehilbertianas p, q definidas en S y tales que*
$$d_k(B_p, B_q) \leq c\, k^{-m} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_p \in \mathcal{N}_0(E),\ B_q \subset U.$$

DEMOSTRACIÓN. • (a)⇒ (b): Sea U un entorno de cero convexo y equilibrado en E. Aplicando reiteradamente la hipótesis de que E es nuclear, podemos encontrar $V' \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que $V' \subset U$ y $\overline{\Lambda_{V'U}}$ es composición de tres operadores nucleares; en estas condiciones $\sum_{k=1}^{\infty} d_k(\overline{\Lambda_{V'U}}) < \infty$ (27.5(b), 27.9). Por 27.3 y 27.4, $d_k(\overline{\Lambda_{V'U}}) = d_k(\Lambda_{V'U}) = d_k(V',U)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $(d_k(V',U))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y sumable de números no negativos; bajo estas hipótesis no es difícil demostrar que $\lim_{k\to\infty} kd_k(V',U) = 0$. De aquí, es claro que existe un $\lambda > 0$ tal que $kd_k(\lambda V', U) = \lambda k d_k(V',U) \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Basta tomar $V = \lambda V'$.

- (b)⇒(c): Se deduce aplicando reiteradamente 27.1 (cf. [**4**, Lemma 20.2]).
- (c)⇒(a): Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado; tenemos que encontrar $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que $\overline{\Lambda_{VU}}$ sea un operador nuclear. Por (c), existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo y equilibrado tal que $d_k(V,U) \leq k^{-3}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se tiene
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\overline{\Lambda_{VU}}) \overset{27.5(a)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} nd_n(\overline{\Lambda_{VU}}) \overset{27.3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nd_n(\Lambda_{VU}) \overset{27.4}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nd_n(V,U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty,$$
y aplicando 27.8 deducimos que $\overline{\Lambda_{VU}}$ es nuclear.

- (c)$\Rightarrow$(d): Supongamos que se cumple (c); por la discusión anterior podemos deducir que E es un grupo vectorial nuclear y en particular se cumple la condición (c) del Teorema 28.3. Fijado $U \in \mathcal{N}_0(E)$, existe una seminorma prehilbertiana q' definida en un subespacio de E tal que $B_{q'} \subset U, \quad B_{q'} \in \mathcal{N}_0(E)$. Por hipótesis, existe un entorno de cero convexo y equilibrado V en E tal que $V \subset B_{q'}$ y $d_k(V, B_{q'}) \leq c\,k^{-m}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para el entorno de cero V existe, por las mismas razones que antes, una seminorma prehilbertiana p definida en un subespacio S de E tal que $B_p \subset V, \quad B_p \in \mathcal{N}_0(E)$. Es claro que $d_k(B_p, B_{q'}) \leq d_k(V, B_{q'}) \leq c\,k^{-m}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos q como la restricción de q' al subespacio S. Veamos que $d_k(B_p, B_{q'}) = d_k(B_p, B_q)$: Por 27.4, $d_k(B_p, B_{q'}) = d_k(\Lambda_{pq'}), \ d_k(B_p, B_q) = d_k(\Lambda_{pq})$. Como $E_{q'}$ es un espacio prehilbertiano, para calcular el valor de $d_k(\Lambda_{pq'})$ se puede suponer que $\Lambda_{pq'}$ toma valores en $\Lambda_{pq'}(E_p)$ (27.2) pero, análogamente a (a)$\Rightarrow$(c) en el Teorema 28.3, $\Lambda_{pq'}(E_p)$ es canónicamente isométrico a E_q. La conclusión es inmediata.
- (d)$\Rightarrow$(c) es trivial.

$\square$

A la hora de dar una definición de grupo abeliano topológico nuclear, no resulta claro cómo introducir una clase de "homomorfismos nucleares" entre grupos que incluya como caso particular los operadores nucleares entre espacios de Banach, base de nuestra definición de los espacios y los grupos vectoriales nucleares. La definición existente de *grupo nuclear*, debida a Banaszczyk y que reproducimos a continuación, se basa en la caracterización de los espacios nucleares dada por el teorema de Mitiagin, pero tampoco existe una versión de los diámetros de Kolmogorov válida para entornos de cero en grupos abelianos topológicos generales, lo que hace que en la definición de grupo nuclear intervenga de forma esencial la estructura de espacio vectorial.

Definición 28.5. ([**7**, 7.1]) Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff. Se dice que G es nuclear cuando satisface la siguiente condición: para todos $U \in \mathcal{N}_0(G), \quad c > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ existe un espacio vectorial real E, dos subconjuntos simétricos y convexos $A, \ B$ de E tales que $d_k(A, B) \leq ck^{-m}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, un subgrupo H de E y un homomorfismo $\varphi : H \to G$ tal que $\varphi(H \cap A) \in \mathcal{N}_0(G)$ y $\varphi(H \cap B) \subset U$.

Se demuestra en [**7**] que de hecho, cumple esta condición cualquier grupo abeliano topológico de Hausdorff G en el que para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ exista un espacio vectorial real E, dos subconjuntos simétricos y convexos $A, \ B$ de E tales que $d_k(A, B) \leq 10^{-2}k^{-4}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, un subgrupo H de E y un homomorfismo $\varphi : H \to G$ tal que $\varphi(H \cap A) \in \mathcal{N}_0(G)$ y $\varphi(H \cap B) \subset U$.

Existe también una caracterización muy útil de los grupos nucleares en términos de los grupos vectoriales nucleares:

Teorema 28.6. *(*[**7**, Th. 9.6]*) Sea G un grupo abeliano topológico de Hausdorff. Son equivalentes:*

(a) *G es un grupo nuclear.*

(b) *Existen un $\mathbb{R}$-grupo vectorial nuclear E, un subgrupo H de E y un subgrupo cerrado F de H tales que G es topológicamente isomorfo al cociente H/F.*

28.7. Por [**3**, Prop. 8.8] podemos reformular la caracterización dada arriba sustituyendo la condición (b) por

(b') Existen un $\mathbb{R}$-grupo vectorial nuclear E y un subgrupo cerrado F de E tales que G es topológicamente isomorfo a un subgrupo del cociente E/F.

28.8. Algunas propiedades importantes de la clase de los grupos nucleares son las siguientes:

(a) Todo grupo localmente compacto y abeliano es nuclear ([**7**, Prop. 7.10]).
(b) Los subgrupos, los cocientes de Hausdorff, las sumas directas numerables y los productos arbitrarios de grupos nucleares son grupos nucleares ([**7**, Props. 7.5, 7.6, 7.8].
(c) Si G es un grupo metrizable y nuclear, el grupo $(G^\wedge, \tau_{\mathcal{PC}})$ es nuclear ([**7**, Theor. 16.1]).
(d) Los grupos nucleares son localmente cuasiconvexos ([**7**, Theor. 8.5].
(e) Los grupos nucleares respetan compacidad ([**9**]).
(f) Todo grupo nuclear metrizable y completo es fuertemente reflexivo ([**7**, Cor. 17.3]). Como consecuencia (13.39),
   - todo subgrupo de un grupo nuclear G está dualmente embebido en G ([**7**, Cor. 8.3]).
   - todo subgrupo cerrado de un grupo nuclear es dualmente cerrado ([**7**, Cor. 8.6]).

28.9. Otras propiedades de la clase de grupos nucleares que no figuran explícitamente en las referencias son:

(a) Todo grupo TNA es nuclear (ya que si G es TNA, por la Prop. 2.3 se puede encajar en un producto de grupos discretos, y basta aplicar (a) y (b)). En [**7**, Prop. 7.11] se demuestra que es un grupo nuclear el subyacente a cualquier espacio localmente convexo no arquimediano sobre un cuerpo valuado no arquimediano y localmente compacto.
(b) El grupo abeliano topológico subyacente a un $\mathbb{R}$- ó $\mathbb{C}$-grupo vectorial topológico localmente equilibrado E es nuclear si y sólo si E es un grupo vectorial nuclear (Theor. 31.4). Del Teor. 28.6, o de las propias definiciones, es sencillo deducir que todo grupo vectorial nuclear es un grupo nuclear. En [**4**, Th. 20.20] se demostró que todo grupo vectorial localmente convexo y cuyo grupo abeliano topológico subyacente es nuclear, es un grupo vectorial nuclear.

29. Grupos GP-nucleares: definición y propiedades generales

Retomamos el estudio de cuestiones referidas a la sumabilidad definiendo y estudiando las distintas relaciones de contenido, de carácter algebraico o topológico, que pueden darse entre el grupo de las familias presumables y el de las absolutamente sumables construidos sobre un grupo abeliano topológico. Las denominaciones “propiedad de Grothendieck-Pietsch" o "grupo GP-nuclear", que utilizaremos para designar condiciones de este tipo, se deben a que la coincidencia de estos dos grupos fue planteada por primera vez, en el contexto de los espacios localmente convexos, por los mencionados autores, quienes la identificaron como una condición equivalente al carácter nuclear del espacio correspondiente (Teor. 30.7).

29.1. Definición y primeras propiedades.

PROPOSICIÓN 29.1. *Sea G un grupo abeliano topológico.*

(I) *Son equivalentes:*

(I-1) *Existe un conjunto infinito B tal que $\ell_1\{B,G\} \subset \ell_1(B,G)$,*

(I-2) *Para cualquier conjunto no vacío A, se cumple $\ell_1\{A,G\} \subset \ell_1(A,G)$.*

(I') *Son equivalentes:*

(I'-1) *Existe un conjunto infinito B tal que $\ell_1\{B,G\} \subset \ell_1(B,G)$ con inclusión continua.*

(I'-2) *Para cualquier conjunto no vacío A, $\ell_1\{A,G\} \subset \ell_1(A,G)$ con inclusión continua.*

(I'-3) *Para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que*

$$n \in \mathbb{N}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G, \quad \sum_{i=1}^{n} k_V(x_i) < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \in U$$

(II) *Son equivalentes:*

(II-1) *Existe un conjunto infinito B tal que $\ell_1(B,G) \subset \ell_1\{B,G\}$,*

(II-2) *Para cualquier conjunto no vacío A, se cumple $\ell_1(A,G) \subset \ell_1\{A,G\}$.*

(II') *Son equivalentes:*

(II'-1) *Existe un conjunto infinito B tal que $\ell_1(B,G) \subset \ell_1\{B,G\}$ con inclusión continua.*

(II'-2) *Para cualquier conjunto no vacío A, $\ell_1(A,G) \subset \ell_1\{A,G\}$ con inclusión continua.*

(II'-3) *Para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que*

$$n \in \mathbb{N}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G, \quad \sum_{i \in \Delta} x_i \in V \ \ \forall \Delta \subset \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_U(x_i) < 1.$$

DEMOSTRACIÓN. (I) Supongamos que se cumple (I-1). Sea A un conjunto no vacío y supongamos que $\ell_1\{A,G\} \not\subset \ell_1(A,G)$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia absolutamente sumable y no presumable en G. Por la Prop. 20.6(b), existe un subconjunto numerable $A_0 \subset A$ tal que la subfamilia $(x_\alpha)_{\alpha \in A_0}$ no es presumable. Sea $i : A_0 \to B$ una aplicación inyectiva. La familia $(y_\beta)_{\beta \in B}$ definida por

$$y_{i(\alpha)} = x_\alpha \ \ \forall \alpha \in A_0, \qquad y_\beta = 0 \quad \text{si } \beta \notin i(A_0)$$

pertenece claramente a $\ell_1\{B,G\}$, luego a $\ell_1(B,G)$, contradicción ya que admite una subfamilia no presumable.

(I') (I'-2)⇒(I'-1) es trivial y (I'-1)⇒(I'-3) es sencilla; demostraremos (I'-3)⇒(I'-2). Sean A un conjunto no vacío y $U \in \mathcal{N}_0(G)$; tenemos que encontrar un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $\{V\}_A \subset (U)_A$. Consideremos el entorno V determinado a partir de U según lo supuesto en (I'-3). Se tiene

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \{V\}_A \Rightarrow \textstyle\sum_{\alpha\in A} k_V(x_\alpha) < 1 \Rightarrow \forall\Delta \in \mathfrak{F}(A) \quad \sum_{\alpha\in\Delta} k_V(x_\alpha) < 1$$
$$\Rightarrow \qquad \forall\Delta \in \mathfrak{F}(A) \quad \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in U \Rightarrow (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in (U)_A.$$

(II) Es un corolario de la Prop. 26.2, tomando $G = H$ y $u : G \to H$ la identidad.

(II') De nuevo la única implicación no inmediata es (II'-3)⇒(II'-2). Sean A un conjunto no vacío y $U \in \mathcal{N}_0(G)$; tenemos que encontrar un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $(V)_A \subset \{U\}_A$. Determinamos $U' \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $U' + U' + U' \subset U$ y $V \in \mathcal{N}_0(G)$ a partir de U' según lo supuesto en (II'-3). Se verifica

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in (V)_A \Rightarrow \forall\Delta \in \mathfrak{F}(A) \quad \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in V$$
$$\Rightarrow \ \forall\Delta \in \mathfrak{F}(A) \quad \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} k_{U'}(x_\alpha) < 1 \overset{\text{Prop. 5.3}(c)}{\Rightarrow} \forall\Delta \in \mathfrak{F}(A) \quad \sum_{\alpha\in\Delta} k_U(x_\alpha) < 1/2$$
$$\Rightarrow \qquad \textstyle\sum_{\alpha\in A} k_U(x_\alpha) \leq 1/2 < 1.$$

□

29.2. En algunas ocasiones, con el fin de aligerar los enunciados, utilizaremos la siguiente nomenclatura: diremos que un grupo abeliano topológico tiene la *propiedad GPI* (resp. *GPI', GPII, GPII'*) cuando verifica cualquiera de las propiedades equivalentes entre sí recogidas en la Prop. 29.1(I) (resp (I'), (II), (II')). Notar que la condición GPII se puede expresar como el carácter sumante del homomorfismo identidad $i : G \to G$.

En lo que sigue analizaremos distintas clases de grupos que cumplen alguna o varias de estas propiedades. Nos interesarán especialmente aquéllos en los que se verifica la igualdad, algebraica y/o topológica, entre los grupos de sucesiones presumables y absolutamente sumables, con sus topologías naturales; para estas situaciones introducimos a continuación unas denominaciones específicas.

DEFINICIÓN 29.3. Sea G un grupo abeliano topológico.

(a) Se dice que G es un grupo *débilmente GP-nuclear,* o que G tiene la *propiedad débil de Grothendieck-Pietsch,* cuando los subgrupos $\ell_1(G)$ y $\ell_1\{G\}$ de $G^{\mathbb{N}}$ coinciden.

(b) Se dice que G es un grupo *GP-nuclear,* o que G tiene la *propiedad de Grothendieck-Pietsch,* cuando G es débilmente GP-nuclear y además la identidad $(\ell_1(G), (\tau_G)) \to (\ell_1\{G\}, \{\tau_G\})$ es un isomorfismo topológico.

Por la Prop. 29.1,

- G es débilmente GP-nuclear $\Leftrightarrow$ $\ell_1(B, G) = \ell_1\{B, G\}$ para un conjunto infinito B $\Leftrightarrow$ $\ell_1(A, G) = \ell_1\{A, G\}$ para cualquier $A \neq \emptyset$.
- G es GP-nuclear $\Leftrightarrow$ $\ell_1(B, G) = \ell_1\{B, G\}$, algebraica y topológicamente, para un conjunto infinito B $\Leftrightarrow$ $\ell_1(A, G) = \ell_1\{A, G\}$, algebraica y topológicamente, para cualquier $A \neq \emptyset$.

Recogemos a continuación algunos ejemplos elementales de grupos GP-nucleares:

EJEMPLO 29.4. (a) *Los grupos abelianos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{T}$, dotados de sus topologías usuales respectivas, son GP-nucleares.*

(b) *Todo grupo topológicamente no arquimediano es GP-nuclear.*

DEMOSTRACIÓN. (a) se demuestra en el Ej. 25.15.

(b) Sea $c_0(G)$ el grupo de las sucesiones convergentes a cero en G. De los Ejs. 20.10 y 25.3(b) se deduce que $\ell_1(G) = \ell_1\{G\} = c_0(G)$. Si U es un subgrupo abierto de G, se cumplen trivialmente las igualdades

$$\{U\}_{\mathbb{N}} = c_0(G) \cap U^{\mathbb{N}} = (U)_{\mathbb{N}}.$$

Como los subgrupos abiertos forman base de $\mathcal{N}_0(G)$, se deduce que la identidad $\ell_1(G) \to \ell_1\{G\}$ es un isomorfismo topológico.

□

Los grupos TNA son de hecho nucleares (28.8(d)) y como veremos más adelante (Teor. 31.2), todo grupo nuclear es GP-nuclear; esto proporciona una demostración indirecta del Ej. 29.4(b).

29.2. Propiedades de permanencia.

PROPOSICIÓN 29.5. *Sean G y H dos grupos abelianos topológicos localmente isomorfos. Si G verifica cualquiera de las propiedades GPI, GPI', GPII, GPII', también la verifica H. En particular si G es débilmente GP-nuclear (resp. GP-nuclear) también lo es H.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \in \mathcal{N}_0(G)$, $V \in \mathcal{N}_0(H)$ y $\varphi : U \to V$ un isomorfismo local. Es sencillo demostrar que

(a) para todo $U' \in \mathcal{N}_0(G)$ contenido en U se cumple

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (U')_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (\varphi(U'))_{\mathbb{N}}$$

(b) para todo $U' \in \mathcal{N}_0(G)$ contenido en U y todo $x \in U$, $k_{U'}(x) = k_{\varphi(U')}(\varphi(x))$. En particular $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{U'\}_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \{\varphi(U')\}_{\mathbb{N}}$.

Teniendo en cuenta que dados un grupo abeliano topológico F y un entorno de cero W en F, podemos caracterizar las sucesiones presumables y absolutamente sumables en F de la forma

(a') $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es presumable si y sólo si para todo $W' \in \mathcal{N}_0(F)$ contenido en W, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\geq N} \in (W')_{\mathbb{N}}$

(b') $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente sumable si y sólo si para todo $W' \in \mathcal{N}_0(F)$ contenido en W, se verifica $\sum_{n=1}^{\infty} k_{W'}(x_n) < \infty$,

de (a) y (a') se deduce que una sucesión (x_n) es presumable en G si y sólo si existe un $N \in \mathbb{N}$ con $x_n \in U$ para todo $n \geq N$ y la sucesión $(\varphi(x_n))_{n\geq N}$ es presumable en H; y de (b) y (b') la equivalencia análoga para sucesiones absolutamente sumables. De estas caracterizaciones se deriva la afirmación referida a las propiedades GPI y GPII. Análogamente, la verificación de las condiciones GPI' y GPII' se puede reducir a los entornos de cero contenidos en uno dado, y de nuevo usando (a) y (b) es inmediato que si alguna de estas propiedades se cumple en G, también lo hace en H. □

PROPOSICIÓN 29.6. *Sean G, G_i $(i \in I)$ grupos abelianos topológicos de Hausdorff y $u_i : G \to G_i$, $i \in I$ homomorfismos de grupos. Supongamos que G_i tiene la propiedad GPI (resp. GPI', GPII, GPII') para todo $i \in I$ y que la topología de G es la inicial con respecto a la familia de homomorfismos u_i, $i \in I$. Entonces G también tiene la propiedad GPI (resp. GPI', GPII, GPII'). En particular si cada uno de los grupos G_i es débilmente GP-nuclear (resp. GP-nuclear), también lo es G.*

DEMOSTRACIÓN. De las Props. 20.15 y 25.6 se deduce trivialmente que si todos los grupos G_i verifican la propiedad GPI (resp. la propiedad GPII), también lo hace G.

Supongamos ahora que todos los grupos G_i verifican la propiedad GPI'. Fijamos un entorno básico arbitrario $U = \bigcap_{j=1}^m u_{i_j}^{-1}(U_j)$ con $U_j \in \mathcal{N}_0(G_{i_j})$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $\{i_1, \ldots, i_m\} \in \mathfrak{F}(I)$. Es inmediato demostrar que

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (U)_{\mathbb{N}} \;\Leftrightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad (u_{i_j}(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (U_j)_{\mathbb{N}} \tag{29.1}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe un $V_j \in \mathcal{N}_0(G_{i_j})$ con $\{V_j\}_{\mathbb{N}} \subset (U_j)_{\mathbb{N}}$. Si llamamos $V = \bigcap_{j=1}^m u_{i_j}^{-1}(V_j)$, se verifica $\{V\}_{\mathbb{N}} \subset (U)_{\mathbb{N}}$. En efecto

$$\begin{aligned}
(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{V\}_{\mathbb{N}} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_V(x_n) < 1 \\
&\overset{(25.2)}{\Rightarrow} \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} k_{V_j}(u_{i_j}(x_n)) < 1 \\
&\Rightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \;\; (u_{i_j}(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \{V_j\}_{\mathbb{N}} \\
&\Rightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \;\; (u_{i_j}(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (U_j)_{\mathbb{N}} \\
&\overset{(29.1)}{\Rightarrow} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (U)_{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Supongamos que los grupos G_i cumplen la propiedad GPII'. Sea $U = \bigcap_{j=1}^m u_{i_j}^{-1}(U_j)$ un entorno básico de cero en G como arriba. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, fijamos $U_j' \in \mathcal{N}_0(G_{i_j})$ con (Prop. 5.3) $k_{U_j}(y) \leq \frac{1}{m} k_{U_j'}(y)$ para todo $y \in U_j'$, y $V_j \in \mathcal{N}_0(G_{i_j})$ con $(V_j)_{\mathbb{N}} \subset \{U_j'\}_{\mathbb{N}}$. Si llamamos $V = \bigcap_{j=1}^m u_{i_j}^{-1}(V_j)$, se cumple $(V)_{\mathbb{N}} \subset \{U\}_{\mathbb{N}}$ ya que

$$\begin{aligned}
(x_n) \in (V)_{\mathbb{N}} \quad &\overset{(29.1)}{\Rightarrow} \quad (u_{i_j}(x_n)) \in (V_j)_{\mathbb{N}} \; \forall j \in \{1, \ldots, m\} \\
&\Rightarrow \quad (u_{i_j}(x_n)) \in \{U_j'\}_{\mathbb{N}} \; \forall j \in \{1, \ldots, m\} \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_U(x_n) \overset{(25.2)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} k_{U_j}(u_{i_j}(x_n)) \\
&\qquad \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} k_{U_j'}(u_{i_j}(x_n)) < \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{m} = 1 \\
&\Rightarrow \quad (x_n) \in \{U\}_{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

□

29.7. De la Prop. 29.6 se deduce en particular que las condiciones GPI, GPI', GPII, GPII' y por lo tanto, las propiedades débil y fuerte de Grothendieck-Pietsch, se conservan al tomar subgrupos y formar productos de grupos que las verifiquen, y que para cualquier grupo abeliano topológico G, el grupo $(G, \sigma(G, G^\wedge))$ es GP-nuclear.

29.3. Grupos GP-nucleares localmente cuasiconvexos. El hecho de que el grupo de las sucesiones absolutamente sumables esté contenido, con inclusión continua, en el de las presumables, se obtiene habitualmente en el contexto de los espacios vectoriales topológicos haciendo uso de la desigualdad triangular (cf. Prop. 30.1) , y por lo tanto se cumple de forma automática en los espacios localmente convexos, en los que la topología viene determinada por una familia de seminormas (cf. las definiciones de los espacios $l_A^1(E)$ (Subsec. 23.2) y $l_A^1\{E\}$ (25.27)). Existe un análogo natural para grupos, que recogemos a continuación, de esta propiedad de los espacios localmente convexos:

PROPOSICIÓN 29.8. *Sea G un grupo abeliano topológico localmente cuasiconvexo. Toda familia absolutamente sumable en G es presumable, y además la inclusión $\ell_1\{A, G\} \hookrightarrow \ell_1(A, G)$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos un $V \in \mathcal{N}_0(G)$. Como $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ es absolutamente sumable, teniendo en cuenta el Lema 14.4(a) se deduce que la familia $(\|x_\alpha\|_V)_{\alpha \in A}$ es sumable en $\mathbb{R}$; por lo tanto existe un subconjunto finito $\Delta_0 \subset A$ tal que, para cualquier $\Delta \in \mathfrak{F}(A)$ con $\Delta \cap \Delta_0 = \emptyset$ se tiene

$$\|\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha\|_V \leq \sum_{\alpha \in \Delta} \|x_\alpha\|_V \leq \sqrt{2}.$$

Supongamos que V es cuasiconvexo. Entonces la desigualdad de arriba implica que $\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha \in V$. Como G es localmente cuasiconvexo, deducimos que (x_α) es presumable en G. El carácter continuo de la inclusión es consecuencia de la relación $[V]_A \subset (V)_A$, válida para cualquier $V \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo. □

PROPOSICIÓN 29.9. *Sea G un grupo localmente cuasiconvexo. Son equivalentes:*

(a) *G es GP-nuclear.*
(b) *$\ell_1(G) \subset \ell_1\{G\}$ con inclusión continua.*
(c) *Para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe $V \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que*

$$n \in \mathbb{N}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in G, \quad ||\sum_{n \in \Delta} x_n||_V \leq \sqrt{2} \;\; \forall \Delta \subset \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ||x_i||_U \leq \sqrt{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. (a)⇔(b) es consecuencia de que en todo grupo localmente cuasiconvexo se tiene la inclusión continua $\ell_1\{G\} \subset \ell_1(G)$ (Prop. 29.8).

(b)⇔(c) es una adaptación de la Prop. 29.1(II') al caso localmente cuasiconvexo, teniendo en cuenta la determinación de las topologías de $\ell_1(G)$ y $\ell_1\{G\}$ por las familias de pseudonormas s_V y r_V, respectivamente (Props. 23.5 y 25.18). □

EJEMPLO 29.10. *El hecho de que para un grupo abeliano topológico general G se cumpla $\ell_1(G) \subset \ell_1\{G\}$ con inclusión continua no implica que G sea localmente cuasiconvexo. Sean E un espacio normado y H un subgrupo discreto de E tal que E/H no sea* *localmente cuasiconvexo (cf. Ej. 13.34). Es inmediato que $\ell_1\{E\} \subset \ell_1(E)$ con inclusión continua (cf. 30.4); dado que E y E/H son localmente isomorfos (2.1), se tiene (Prop. 29.5) la inclusión continua $\ell_1\{E/H\} \subset \ell_1(E/H)$.*

Veremos a continuación un ejemplo de un grupo abeliano topológico metrizable G para el que $\ell_1(G)$ es un subgrupo propio de $\ell_1\{G\}$.

EJEMPLO 29.11. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo dotado de una valuación no arquimediana y no trivial $|\cdot|$. Consideremos el $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico $l_1(\mathbb{F})$, descrito en el Ej. 18.17. El grupo abeliano topológico subyacente a $l_1(\mathbb{F})$ tiene estrictamente más sucesiones absolutamente sumables que presumables.*

DEMOSTRACIÓN. Si para todo $\varepsilon > 0$ denotamos por U_ε el conjunto de todos los $x \in l_1(\mathbb{F})$ con $||x||_1 \leq \varepsilon$, es inmediato que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in U_\varepsilon \quad nx \in U_\varepsilon$$

y en particular (Ej. 25.3(b)) las familias absolutamente sumables en el grupo pseudonormado $l_1(\mathbb{F})$ coinciden con las convergentes a cero. Luego toda sucesión presumable en G es absolutamente sumable.

Consideremos una sucesión $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{F}$ convergente a cero y tal que $\alpha_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i|\alpha_i| \geq 1$. Definimos la sucesión de números naturales

$$n_0 = 0, \quad n_m = \sum_{i=1}^{m} k_i \;\; \forall m \in \mathbb{N}$$

y la sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $l_1(\mathbb{F})$ asociada

$$x_j = \alpha_i e_j \quad \text{si } j \in \{n_{i-1}+1, \ldots, n_i\},$$

siendo $e_j \in l_1(\mathbb{F})$ el j-ésimo elemento de la base canónica de $l_1(\mathbb{F})$

$$e_j(j) = 1, \quad e_j(i) = 0 \;\; \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{j\}.$$

Es claro que $||x_j||_1 = |\alpha_i|$ si $j \in \{n_{i-1}+1, \ldots, n_i\}$, y por lo tanto (x_j) es una sucesión convergente a cero en $l_1(\mathbb{F})$, luego absolutamente sumable. Sin embargo, para todo $i \in \mathbb{N}$

$$|| \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} x_j ||_1 = k_i|\alpha_i| \geq 1$$

y (x_j) no es presumable. $\square$

Teniendo en cuenta la Prop. 29.8, del Ej. 29.11 se deduce en particular que $l_1(\mathbb{F})$ no es localmente cuasiconvexo, aunque este hecho ya se demostró en el Ej. 18.17.

La topología de un grupo localmente cuasiconvexo G viene caracterizada por la familia de n-grupos asociada a los entornos cuasiconvexos de cero en G. Análogamente a lo que ocurre en el caso vectorial (Teor. 28.3), se puede dar una caracterización del carácter GP-nuclear en términos de estos grupos y los homomorfismos naturales que se establecen entre ellos.

TEOREMA 29.12. *Sea G un grupo localmente cuasiconvexo. Son equivalentes:*

(a) *G es GP-nuclear.*
(b) *Para todo $U \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo existe un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo tal que el homomorfismo $\phi_{VU} : G_V \to G_U$ es sumante.*

Demostración. • (a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que G es GP-nuclear, y sea $U \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo. Existe un $V \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo tal que $(V)_{\mathbb{N}} \subset [U]_{\mathbb{N}}$, es decir,

$$(x_n) \in G^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\Delta} x_n \in V \ \forall\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_U \leq \sqrt{2}.$$

Equivalentemente (Prop. 14.6)

$$(x_n) \in G^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\Delta} \varphi_V(x_n) \in \varphi_V(V) \ \forall\Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} ||\varphi_U(x_n)||_{\varphi_U(U)} = \sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_{VU}(\varphi_V(x_n))||_{\varphi_U(U)} \leq \sqrt{2},$$

y teniendo en cuenta que $\varphi_U(U)$ es un entorno distinguido y cuasiconvexo (Prop. 14.6(c)), de la Prop. 25.20(b) se deduce que ϕ_{VU} es sumante.

• (b) $\Rightarrow$ (a): Sea $U \in \mathcal{N}_0(G)$ cuasiconvexo. Sea V el entorno cuasiconvexo de 0 que podemos asociarle a U supuesto cierto (b). Como $\phi_{VU} : G_V \to G_U$ es sumante y G_V es metrizable, $(\phi_{VU})^s : \ell_1(G_V) \to \ell_1\{G_U\}$ es continuo (Teor. 26.8) y por lo tanto existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\varphi_V(x_n)) \in (\varphi_V(V_{(N)}))_{\mathbb{N}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ||\varphi_U(x_n)||_{\varphi_U(U)} \leq \sqrt{2},$$

es decir (Prop. 14.6)

$$(x_n) \in (V_{(N)})_{\mathbb{N}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_U \leq \sqrt{2}.$$

Luego $(V_{(N)})_{\mathbb{N}} \subset [U]_{\mathbb{N}}$ y está demostrado el carácter GP-nuclear de G.

□

29.4. Grupos GP-nucleares metrizables. En el caso metrizable es posible llegar a otra reducción, ya que para estos grupos la identidad algebraica entre el grupo de las sucesiones presumables y el de las absolutamente sumables implica la topológica:

Teorema 29.13. *Sea G un grupo abeliano topológico metrizable.*

(a) *Si toda sucesión absolutamente sumable en G es presumable, entonces la inclusión de $\ell_1\{G\}$ en $\ell_1(G)$ es continua.*
(b) *Si toda sucesión presumable en G es absolutamente sumable, entonces la inclusión de $\ell_1(G)$ en $\ell_1\{G\}$ es continua.*
(c) *Si G es débilmente GP-nuclear, entonces es GP-nuclear.*

DEMOSTRACIÓN. (b) se deduce aplicando el Teor. 26.8 a la identidad de G, que por hipótesis es un homomorfismo sumante. (a) se deduce del Teorema del Grafo Cerrado de forma totalmente análoga a la descrita en la demostración del Teor. 26.8. (c) es consecuencia de (a) y (b). $\square$

En el Teor. 29.13 no se puede prescindir del carácter metrizable de G, como veremos en el Ej. 29.19.

29.5. Carácter GP-nuclear de las sumas directas. Dedicaremos el resto de esta sección a establecer algunos resultados referidos a las propiedades débil y fuerte de Grothendieck-Pietsch en sumas directas. Recordemos que en el caso de I numerable las topologías $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_f$ coinciden en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ (Prop. 12.8(c)) y que para I arbitrario, las tres topologías tienen asociadas las mismas sucesiones presumables y las mismas sucesiones absolutamente sumables (Props. 20.16 y 25.7).

PROPOSICIÓN 29.14. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos de Hausdorff. Consideramos en el grupo abeliano $\bigoplus_{i\in I} G_i$ cualquiera de las topologías $\mathcal{T}_f$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_r$. Se tiene*

(a) *Si $\ell_1\{G_i\} \subset \ell_1(G_i)$ $\forall i \in I$ entonces $\ell_1\{\bigoplus_{i\in I} G_i\} \subset \ell_1(\bigoplus_{i\in I} G_i)$.*
(b) *Si $\ell_1(G_i) \subset \ell_1\{G_i\}$ $\forall i \in I$ entonces $\ell_1(\bigoplus_{i\in I} G_i) \subset \ell_1\{\bigoplus_{i\in I} G_i\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T}$ la topología escogida en $\bigoplus_{i\in I} G_i$. Es consecuencia de que dada una sucesión presumable o absolutamente sumable en $(\bigoplus_{i\in I} G_i, \mathcal{T})$ existe un $\Delta \in \mathfrak{F}(I)$ tal que la sucesión está contenida en $\sum_{i\in\Delta} v_i(G_i)$ (Props 20.16, 25.7); con la topología inducida, este subgrupo es identificable con el producto topológico $\prod_{i\in\Delta} G_i$ (12.6, Prop. 12.8(b)), y basta tener en cuenta que el producto conserva las propiedades GPI y GPII de los factores (Prop. 29.6). $\square$

La demostración del siguiente resultado es trivial:

LEMA 29.15. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos topológicos. Sea $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ para todo $i \in I$, y $\mathbf{U}_r = \bigoplus_{i\in I}^{(r)} U_i$ el $\mathcal{T}_r$-entorno básico de cero asociado a la familia $(U_i)_{i\in I}$.*

(a) *Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\bigoplus_{i\in I} G_i$,*
$$(x_n) \in (\mathbf{U}_r)_{\mathbb{N}} \iff (x_n(i))_{n\in\mathbb{N}} \in (U_i)_{\mathbb{N}} \quad \forall i \in I.$$
(b) *Para cualquier $x = (x(i))_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, se tiene la igualdad*
$$k_{\mathbf{U}_r}(x) = \max_{i\in I} k_{U_i}(x(i)).$$

PROPOSICIÓN 29.16. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia numerable de grupos abelianos topológicos de Hausdorff, y consideremos en $\bigoplus_{i\in I} G_i$ la topología $\mathcal{T} = \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_a = \mathcal{T}_f$. (Prop. 12.8(c))*

(a) *Si para todo $i \in I$ se cumple $\ell_1\{G_i\} \subset \ell_1(G_i)$ con inclusión continua, entonces $\ell_1\{\bigoplus_{i\in I} G_i\} \subset \ell_1(\bigoplus_{i\in I} G_i)$ con inclusión continua.*

(b) *Si para todo* $i \in I$ *se cumple* $\ell_1(G_i) \subset \ell_1\{G_i\}$ *con inclusión continua, entonces* $\ell_1(\bigoplus_{i\in I} G_i) \subset \ell_1\{\bigoplus_{i\in I} G_i\}$ *con inclusión continua.*

Demostración. (a) Por la Prop. 29.14(a) sabemos que $\ell_1\{\bigoplus_{i\in I} G_i\} \subset \ell_1(\bigoplus_{i\in I} G_i)$. Sea $(U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$; consideramos el correspondiente $\mathcal{T}_r$-entorno de cero $\mathbf{U}_r = \bigoplus_{i\in I} U_i$. Encontraremos una familia $(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$ tal que para el correspondiente entorno $\mathbf{V}_r = \bigoplus_{i\in I} V_i$ se tenga la inclusión $\{\mathbf{V}_r\}_{\mathbb{N}} \subset (\mathbf{U}_r)_{\mathbb{N}}$.

Para cada $i \in I$, por hipótesis existe $V_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ tal que tal que $\{V_i\}_{\mathbb{N}} \subset (U_i)_{\mathbb{N}}$. Para todo $(x_n) \in \{\mathbf{V}_r\}_{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} k_{\mathbf{V}_r}(x_n) \overset{\text{Lema 29.15}(b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{i\in I} k_{V_i}(x_n(i)) < 1 \\ \Rightarrow \quad & \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} k_{V_i}(x_n(i)) < 1 \quad \forall i \in I \\ \Rightarrow \quad & (x_n(i))_{n\in\mathbb{N}} \in \{V_i\}_{\mathbb{N}} \subset (U_i)_{\mathbb{N}} \quad \forall i \in I \overset{\text{Lema 29.15}(a)}{\Longrightarrow} (x_n) \in (\mathbf{U}_r)_{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

(b) Podemos suponer $I \subset \mathbb{N}$. Por la Prop. 29.14(b) sabemos que $\ell_1(\bigoplus_{i\in I} G_i) \subset \ell_1\{\bigoplus_{i\in I} G_i\}$.

Sea $(U_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_0(G_i)$ y como en (a), consideremos el correspondiente entorno $\mathbf{U}_r$. Encontraremos una familia $(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{N}_{0_i}(G_i)$ tal que para el correspondiente $\mathbf{V}_r$ se cumpla la inclusión $(\mathbf{V}_r)_{\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{U}_r\}_{\mathbb{N}}$.

Para cada $i \in I$, por la Prop. 5.3 existe $W_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ con

$$k_{U_i}(x) \leq \frac{1}{2^i} k_{W_i}(x) \quad \forall x \in W_i,$$

y por hipótesis existe $V_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ tal que $(V_i)_{\mathbb{N}} \subset \{W_i\}_{\mathbb{N}}$.

Sea $(x_n) \in (\mathbf{V}_r)_{\mathbb{N}}$. Por el Lema 29.15(a), $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}} \in (V_i)_{\mathbb{N}}$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}} \in \{W_i\}_{\mathbb{N}}$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} k_{W_i}(x_n(i)) < 1$. De aquí, dado que i es arbitrario, se deduce

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} k_{\mathbf{U}_r}(x_n) &\overset{\text{Lema 29.15}(b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{i\in I} k_{U_i}(x_n(i)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i\in I} k_{U_i}(x_n(i)) \\ &= \sum_{i\in I} \sum_{n=1}^{\infty} k_{U_i}(x_n(i)) \leq \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} \sum_{n=1}^{\infty} k_{W_i}(x_n(i)) < \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} \leq 1. \end{aligned}$$

□

De las Props. 29.14 y 29.16 se deduce el siguiente

Teorema 29.17. *Sea* $(G_i)_{i\in I}$ *una familia de grupos abelianos topológicos de Hausdorff.*

(a) *Si* G_i *es un grupo débilmente GP-nuclear para todo* $i \in I$, *entonces los grupos* $\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i$, $\bigoplus_{i\in I}^{(a)} G_i$, $\bigoplus_{i\in I}^{(f)} G_i$ *son débilmente GP-nucleares.*

(b) *Si* I *es numerable y* G_i *es un grupo GP-nuclear para todo* $i \in I$, *entonces el grupo* $\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i = \bigoplus_{i\in I}^{(a)} G_i = \bigoplus_{i\in I}^{(f)} G_i$ *es GP-nuclear.*

29.18. Notar que en la demostración de la Prop. 29.16(a) no se ha utilizado el carácter numerable de I, pero en el caso no numerable las topologías no son intercambiables. Como en la demostración hemos utilizado los entornos correspondientes a la topología rectangular, podemos enunciar: *Si I es un conjunto no vacío arbitrario y para todo $i \in I$ se cumple $\ell_1\{G_i\} \subset \ell_1(G_i)$ con inclusión continua, entonces $\ell_1\{\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i\} \subset \ell_1(\bigoplus_{i\in I}^{(r)} G_i)$ con inclusión continua.*

A continuación mostraremos mediante un ejemplo que no se puede prescindir en general de la condición de numerabilidad exigida en el Teor. 29.17(b). El ejemplo consiste en una suma directa $\bigoplus_{i\in I} G_i$ con I no numerable y $G_i = \mathbb{R}\ \ \forall i \in I$; utilizaremos las notaciones introducidas en el Ej. 12.7.

EJEMPLO 29.19. *Consideremos la suma directa $\mathbb{R}_0^I$ con I no numerable. Los grupos abelianos topológicos $(\mathbb{R}_0^I)_r := (\mathbb{R}_0^I, \mathcal{T}_r)$, $(\mathbb{R}_0^I)_a := (\mathbb{R}_0^I, \mathcal{T}_a)$ son débilmente GP-nucleares, pero ninguno de ellos es GP-nuclear; concretamente, ninguna de las dos identidades*

$$\ell_1((\mathbb{R}_0^I)_r) \to \ell_1\{(\mathbb{R}_0^I)_r\}, \qquad \ell_1((\mathbb{R}_0^I)_a) \to \ell_1\{(\mathbb{R}_0^I)_a\}$$

es continua.

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que $(\mathbb{R}_0^I)_r$ y $(\mathbb{R}_0^I)_a$ son débilmente GP-nucleares se deduce del Teor. 29.17(a), ya que $\mathbb{R}$ es un grupo GP-nuclear. Supongamos que la identidad $\ell_1((\mathbb{R}_0^I)_r) \to \ell_1\{(\mathbb{R}_0^I)_r\}$ (resp. la identidad $\ell_1((\mathbb{R}_0^I)_a) \to \ell_1\{(\mathbb{R}_0^I)_a\}$) es continua. Denotamos por (1) la familia $(\gamma_i) \in]0,\infty[^I$ definida por $\gamma_i = 1\ \ \forall i \in I$. Teniendo en cuenta el Lema 25.26 y nuestra hipótesis, existe $\Lambda = (\lambda_i) \in]0,\infty[^I$ tal que $(R_\Lambda)_\mathbb{N} \subset \pi^{-1}_{R_{(1)}}[0,1]$ (resp. $(A_\Lambda)_\mathbb{N} \subset \pi^{-1}_{A_{(1)}}[0,1]$). Para cada $y \in \mathbb{R}_0^I$ definimos

$$||y||_1 := \sum_{i\in I} |y(i)|, \quad ||y||_\infty := \max_{i\in I} |y(i)|.$$

Entonces, para todo $(x_n) \in \ell_1((\mathbb{R}_0^I)_r)$ se tiene

$$\text{(29.2a)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_\infty = p_{\pi^{-1}_{R_{(1)}}[0,1]}((x_n)) \leq p_{(R_\Lambda)_\mathbb{N}}((x_n)) = \sup_{\Delta\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \max_{i\in I}(\frac{1}{\lambda_i}|\sum_{n\in\Delta} x_n(i)|),$$

resp., para todo $(x_n) \in \ell_1((\mathbb{R}_0^I)_a)$ se tiene

$$\text{(29.2b)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_1 = p_{\pi^{-1}_{A_{(1)}}[0,1]}((x_n)) \leq p_{(A_\Lambda)_\mathbb{N}}((x_n)) = \sup_{\Delta\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \sum_{i\in I}(\frac{1}{\lambda_i}|\sum_{n\in\Delta} x_n(i)|).$$

Para llegar a una contradicción, usamos el carácter no numerable de I, del que se deduce que para algún subconjunto numerable e infinito $J \subset I$ se cumple $\lambda_0 := \inf\{\lambda_i : i \in J\} > 0$. Teniendo esto en cuenta, se deduce de (29.2a)

$$\text{(29.3a)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_\infty \leq \frac{1}{\lambda_0} \sup_{\Delta\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} ||\sum_{n\in\Delta} x_n||_\infty \quad \forall (x_n) \in \ell_1((\mathbb{R}_0^I)_r) \cap \sum_{i\in J} v_i(\mathbb{R}),$$

resp., se deduce de (29.2b)

$$\text{(29.3b)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_1 \leq \frac{1}{\lambda_0} \sup_{\Delta \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} ||\sum_{n\in\Delta} x_n||_1 \quad \forall (x_n) \in \ell_1((\mathbb{R}_0^I)_a) \cap \sum_{i\in J} v_i(\mathbb{R}),$$

La desigualdad (29.3a) implica que en el espacio normado infinitodimensional $(\sum_{i\in J} v_i(\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ cualquier sucesión presumable es absolutamente sumable, y la misma conclusión puede deducirse para el espacio normado infinitodimensional $(\sum_{i\in J} v_i(\mathbb{R}),$ $||\cdot||_1)$ de la desigualdad (29.3b). Estas conclusiones contradicen el teorema de Dvoretzky-Rogers (Teor. 30.6). □

NOTA 29.20. El hecho de que $(\mathbb{R}_0^I)_a$, para I no numerable, no es GP-nuclear se puede demostrar también teniendo en cuenta que es el grupo abeliano topológico subyacente al espacio vectorial $\mathbb{R}_0^I$ dotado de la topología de la suma directa localmente convexa. Es conocido que este último espacio no es nuclear si I es no numerable ([**67**, 4.3.4], [**4**, Ex. 20.27]), y los resultados de la siguiente sección incluyen el hecho de que un espacio localmente convexo es nuclear si y sólo si el grupo subyacente es GP-nuclear.

30. Grupos vectoriales topológicos GP-nucleares

Las propiedades débil y fuerte de Grothendieck-Pietsch, es decir, la coincidencia algebraica y en su caso, topológica de los grupos de sucesiones presumables y absolutamente sumables, constituyen, bajo diferentes formulaciones, un tema recurrente en Análisis Funcional. En esta sección veremos cómo se plasman estas propiedades en distintas clases de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ con estructura topológica compatible. En general se puede decir que al analizar en estas clases particulares de grupos abelianos topológicos las condiciones que caracterizan lo que hemos llamado grupos GP-nucleares, la inclusión continua del espacio de las sucesiones absolutamente sumables en el de las sumables viene habitualmente garantizada por la hipótesis de convexidad local, mientras que la inclusión opuesta tiene implicaciones más profundas y se relaciona con el carácter nuclear del espacio, como establecen en particular los resultados fundamentales de Grothendieck y Pietsch para espacios localmente convexos. Por lo que respecta a la primera de las dos condiciones, situaremos el problema directamente en el contexto general de los grupos vectoriales topológicos, mientras que para la segunda nos detendremos en los casos particulares de los espacios normados y los espacios vectoriales topológicos; este esquema conduce a solapamientos, pero pone de manifiesto la relación con conceptos y resultados conocidos (algunos de ellos clásicos) en dichos espacios.

A lo largo de toda la sección y salvo mención en contra, el cuerpo base $\mathbb{F}$ es el de los números reales o el de los complejos, indistintamente.

30.1. Convexidad local e inclusión $\ell_1\{E\} \subset \ell_1(E)$.

PROPOSICIÓN 30.1. *Sea $\mathbb{F}$ el cuerpo de los números reales o el de los complejos, y E un $\mathbb{F}$-grupo vectorial topológico localmente equilibrado. Son equivalentes:*

(a) *E es un grupo vectorial localmente convexo.*

(b) *Toda sucesión absolutamente sumable en E es presumable y la inclusión $\ell_1\{E\} \hookrightarrow \ell_1(E)$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) $\Rightarrow$ (b): Por el Lema 25.26, los conjuntos de la forma $\pi_U^{-1}[0,1]$, $U \in \mathcal{N}_0(E)$, donde $\pi_U((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} p_U(x_n)$ para toda sucesión absolutamente sumable (x_n), constituyen una base de entornos de cero en $(\ell_1\{E\}, \{\tau_E\}_{\mathbb{N}})$. Sea $U \in \mathcal{N}_0(E)$ convexo, equilibrado y M-cerrado. Como p_U cumple la desigualdad triangular y $U = \{x \in E : p_U(x) \leq 1\}$, para cualquier $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} p_U(x_n) \leq 1 \\ \Rightarrow \quad & p_U(\sum_{n\in\Delta} x_n) \leq \sum_{n\in\Delta} p_U(x_n) \leq 1 \quad \forall \Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{n\in\Delta} x_n \in U \quad \forall \Delta \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \ \Rightarrow \ (x_n) \in (U)_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (Prop. 18.12) que los entornos convexos, equilibrados y M-cerrados forman base de $\mathcal{N}_0(E)$, se deduce que $\ell_1\{E\} \subset \ell_1(E)$ con inclusión continua.

(b) $\Rightarrow$ (a): Supongamos que E no es localmente convexo; entonces podemos encontrar un $U \in \mathcal{N}_0(E)$ tal que $\operatorname{co} V$ no está contenido en U, para todo $V \in \mathcal{N}_0(E)$. Como la inclusión $(\ell_1\{E\}, \{\tau_E\}) \hookrightarrow (\ell_1(E), (\tau_E))$ es continua, para U existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ tal que

$$\pi_V^{-1}[0,1] \subset (U)_{\mathbb{N}}.$$

Entonces claramente se tiene

$$n \in \mathbb{N}, \ \ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset E, \ \ \sum_{k=1}^{n} p_V(x_k) \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \in U. \tag{30.1}$$

Dado que $\operatorname{co} V$ no está contenido en U, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ y $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ con $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, tales que

$$\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \notin U. \tag{30.2}$$

Ahora, $x_k \in V \Rightarrow p_V(x_k) \leq 1$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n} p_V(t_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} t_k p_V(x_k) \leq 1.$$

Aplicando (30.1) a $t_1 x_1, \ldots, t_n x_n$ obtenemos $\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \in U$, contradicción con (30.2). □

NOTA 30.2. La implicación (a)$\Rightarrow$(b) de la Prop. 30.1 se puede deducir de la análoga en grupos: si E es un grupo vectorial localmente convexo, en particular es localmente cuasiconvexo como grupo (Teor. 18.13), y la Prop. 29.8 implica la validez de la inclusión continua $\ell_1\{E\} \subset \ell_1(E)$. Sin embargo, la demostración directa de arriba, sin intervención de la dualidad, resulta preferible.

En el caso metrizable y localmente equilibrado, en la implicación (b)$\Rightarrow$(a) se puede prescindir de la hipótesis de continuidad de la inclusión:

PROPOSICIÓN 30.3. *Si E es metrizable y localmente equilibrado y en E toda sucesión absolutamente sumable es presumable, entonces E es un grupo vectorial localmente convexo.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración proporcionada en [**75**, Prop. 7.3.1] para espacios vectoriales topológicos es válida sin cambios para grupos vectoriales localmente equilibrados. $\square$

30.2. La propiedad de Grothendieck-Pietsch en espacios normados. Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado sobre $\mathbb{F}$. De 25.24 se deduce que las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolutamente sumables son aquéllas para las que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, y de 25.27, que la norma

$$(x_n) \in \ell_1\{E\} \mapsto ||(x_n)||_{ab} = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$$

genera la topología $\{\tau_E\}_{\mathbb{N}}$ en $\ell_1\{E\}$. Análogamente, es inmediato que la norma

$$(x_n) \in \ell_1(E) \mapsto ||(x_n)||_{pr} = \sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})} ||\sum_{n\in\Delta} x_n||$$

está bien definida y genera la topología $(\tau_E)_{\mathbb{N}}$ en $\ell_1(E)$, de modo que los grupos de las sucesiones presumables y absolutamente sumables en E tienen estructura natural de espacios normados.

30.4. Aunque es un corolario de la Prop. 30.1, el hecho de que la inclusión $\ell_1\{E\} \hookrightarrow \ell_1(E)$ está bien definida y es continua se deduce de la desigualdad trivial

$$\sup_{\Delta\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})} ||\sum_{n\in\Delta} x_n|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \qquad \forall (x_n) \in \ell_1\{E\},$$

que de hecho muestra además que la norma de este operador es menor o igual que 1.

Con respecto a la inclusión $\ell_1(E) \subset \ell_1\{E\}$, hay una diferencia fundamental entre los casos de dimensión finita e infinita. El primero se puede reducir al del cuerpo base $\mathbb{F}$: un $\mathbb{F}$-espacio normado de dimensión $d \in \mathbb{N}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{F}^d$ con la norma euclídea, y la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq c \max_{\Delta\subset\{1,\ldots,N\}} |\sum_{n\in\Delta} x_n| \qquad \forall N \in \mathbb{N},\ \forall\,(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{F}^N$$

((20.1)), que permite demostrar la relación de contenido y el carácter continuo de la inclusión en el caso escalar, se generaliza fácilmente a este espacio normado. Haremos sin embargo esta generalización para un espacio normado de dimensión finita general, de forma que podamos obtener además una cota de la norma del operador inclusión correspondiente.

PROPOSICIÓN 30.5. *Sea E un $\mathbb{F}$-espacio normado de dimensión d. La inclusión $(\ell_1(E), ||\cdot||_{pr}) \hookrightarrow (\ell_1\{E\}, ||\cdot||_{ab})$ está bien definida y tiene norma menor o igual que cd, donde $c = 2$ en el caso real y $c = 4$ en el complejo.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que

$$\sum_{n=1}^{N} ||x_n|| \leq cd \max_{\Delta\subset\{1,\ldots,N\}} ||\sum_{n\in\Delta} x_n|| \qquad \forall N \in \mathbb{N},\ \forall\,(x_1,\ldots,x_N) \in E^N.$$

Por el Lema de Auerbach ([**23**, 6.26]), existen bases $(e_1,\ldots,e_d)$ en E y $(e_1^*,\ldots,e_d^*)$ en E^* tales que

$$||e_i|| = 1, \quad ||e_i^*|| = 1, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,d\}$$

(consideramos en E^* la norma dual de la fijada en E). Es inmediato que la bola unidad cerrada de E^* está contenida en el conjunto de los $x^* = \sum_{i=1}^d \alpha_i e_i^*$ tales que $\max_{1\leq i\leq d} |\alpha_i| \leq 1$. Fijados $x_1,\ldots,x_N$ en E,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} ||x_n|| &\leq \sum_{n=1}^{N} \sup\{|\sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i^*(x_n)| : \max_{1\leq i\leq d} |\alpha_i| \leq 1\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{d}\sum_{n=1}^{N} |e_i^*(x_n)| \overset{(20.1)}{\leq} \sum_{i=1}^{d} c \max_{\Delta\subset\{1,\ldots,N\}} |e_i^*(\sum_{n\in\Delta} x_n)| \\
&\leq cd \max_{\Delta\subset\{1,\ldots,N\}} ||\sum_{n\in\Delta} x_n||.
\end{aligned}$$

□

En cuanto al caso infinitodimensional, la inclusión $\ell_1(E) \subset \ell_1\{E\}$, es falsa siempre, como muestra el conocido

TEOREMA 30.6. *(Dvoretzky-Rogers) Dados un espacio normado infinitodimensional $(E, ||\cdot||)$ y cualquier sucesión (α_n) de números reales no negativos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$, existe en E una sucesión presumable (x_n) con $||x_n|| = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Este resultado, cuya demostración requiere herramientas bastante sofisticadas, implica claramente que en cualquier espacio normado de dimensión infinita existen sucesiones presumables no absolutamente sumables.

30.3. La propiedad de Grothendieck-Pietsch en espacios vectoriales topológicos. Los siguientes resultados fundamentales (4.2.4 y 4.2.5 en [**67**]), que transcribimos en la notación introducida en esta referencia para espacios de sucesiones presumables y absolutamente sumables en un espacio localmente convexo (ver Subsec. 23.2 y 25.27), establecen la conexión entre la definición de espacio nuclear (Def. 28.1) y la coincidencia de las sucesiones absolutamente sumables con las presumables:

TEOREMA 30.7. (a) *(Grothendieck) Sea E un espacio localmente convexo metrizable. E es nuclear si y sólo si los subespacios $l^1_{\mathbb{N}}(E)$ y $l^1_{\mathbb{N}}\{E\}$ de $E^{\mathbb{N}}$ coinciden.*

(b) *(Pietsch) Sea E un espacio localmente convexo. E es nuclear si y sólo si*

– *los subespacios $l^1_{\mathbb{N}}(E)$ y $l^1_{\mathbb{N}}\{E\}$ de $E^{\mathbb{N}}$ coinciden y*

– *la ε-topología y la π-topología coinciden en $l^1_{\mathbb{N}}(E) = l^1_{\mathbb{N}}\{E\}$.*

Teniendo en cuenta que los grupos topológicos aditivos asociados a los espacios localmente convexos $l^1_{\mathbb{N}}(E)$ (con la ε-topología) y $l^1_{\mathbb{N}}\{E\}$ (con la π-topología) son respectivamente $(\ell_1(E), (\tau_E)_{\mathbb{N}})$ y $(\ell_1\{E\}, \{\tau_E\}_{\mathbb{N}})$ (Prop. 23.9; 25.27), podemos reformular el Teor. 30.7 en los siguientes términos:

TEOREMA 30.8. (a) *Sea E un espacio localmente convexo metrizable. E es nuclear si y sólo si es débilmente GP-nuclear como grupo.*

(b) *Sea E un espacio localmente convexo. E es nuclear si y sólo si es GP-nuclear como grupo.*

Notar que en el Teor. 30.8, (a) se deduce de (b) y el Teor. 29.13.

30.4. La propiedad GP en grupos vectoriales topológicos.

PROPOSICIÓN 30.9. *Sea E un grupo vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. Sea U un entorno de cero convexo, equilibrado y M-cerrado en E. El homomorfismo de grupos $g_U : E_{(U)} \to E_U$, dado por $g_U(\Lambda_U(x)) = \varphi_U(x)$, está bien definido y es un encajamiento topológico abierto.*

DEMOSTRACIÓN. La definición de E_U (Sec. 14) tiene sentido ya que U es cuasiconvexo (Prop. 18.10). Consideremos el espacio vectorial topológico $(\operatorname{sp} U, p_U)$. El conjunto $U^{\triangleright}$ es el mismo, considerando U como subconjunto del grupo aditivo de $(\operatorname{sp} U, p_U)$ o del grupo aditivo del subespacio $\operatorname{sp} U$ de E, con la topología inducida:

$$U^{\triangleright} = \{\chi : \operatorname{sp} U \to \mathbb{T} : \chi \text{ homomorfismo de grupos, } \chi(U) \subset \mathbb{T}_+\}$$

(13.2(a)). Consecuentemente el valor de $\sup\{|1 - \chi(x)| : \chi \in U^{\triangleright}\}$ para un $x \in \operatorname{sp} U$ es el mismo considerando en $\operatorname{sp} U$ cualquiera de las dos topologías y, dado que los subgrupos abiertos son dualmente embebidos (13.8), coincide con la restricción a $\operatorname{sp} U$ de la cuasinorma $||\cdot||_U$. Las desigualdades (Lema 23.7(b))

$$||x||_U \leq \frac{\pi}{2} p_U(x) \quad \forall x \in \operatorname{sp} U, \qquad p_U(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||x||_U \quad \forall x \in U,$$

válidas en el espacio vectorial topológico $(\operatorname{sp} U, p_U)$, se pueden enunciar con el significado habitual en el grupo vectorial topológico E. De aquí se deduce que el homomorfismo definido en el enunciado está bien definido y es un encajamiento topológico abierto. □

TEOREMA 30.10. *Sea E un grupo vectorial localmente convexo. Son equivalentes:*

(a) *E es un grupo vectorial nuclear.*

(b) *El grupo aditivo de E es GP-nuclear.*

Demostración. Sean V y U dos entornos de cero convexos, simétricos y M-cerrados tales que $V \subset U$. V y U son cuasiconvexos (Prop. 18.10) y por la Prop. 30.9, existen encajamientos topológicos $g_V : E_{(V)} \to E_V$, $g_U : E_{(U)} \to E_U$ tales que $g_V(E_{(V)})$ es un subgrupo abierto de E_V, $g_U(E_{(U)})$ es un subgrupo abierto de E_U y $\Lambda_{VU} \circ g_V = g_U \circ \phi_{VU}$. Es claro que en estas condiciones, ϕ_{VU} es sumante si y sólo si lo es Λ_{VU}; la equivalencia entre (a) y (b) se sigue del Teor. 28.3 ((a)$\Leftrightarrow$(b)) y del Teorema 29.12. $\square$

30.11. Notar que en el Teor. 30.10 podemos sustituir "localmente convexo" por "localmente equilibrado" debido a que cualquier grupo vectorial localmente equilibrado y GP-nuclear es localmente convexo (Prop. 30.1(a)).

Obtenemos seguidamente una simplificación del Teor. 30.10 para el caso metrizable:

Proposición 30.12. *Sea E un grupo vectorial localmente convexo metrizable. Son equivalentes:*

(a) *E es un grupo vectorial nuclear.*
(b) *Toda sucesión presumable en E es absolutamente sumable.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) es un caso particular de la correspondiente implicación del Teor. 30.10. En cuanto a (b)$\Rightarrow$(a), teniendo en cuenta que por ser E un grupo vectorial localmente convexo, toda sucesión absolutamente sumable en E es presumable (Prop. 30.1), suponiendo que (b) es cierto se deduce que E es débilmente GP-nuclear como grupo y por lo tanto (Teor. 29.13(c)) GP-nuclear; basta aplicar el Teor. 30.10. $\square$

La Prop. 30.12 y el Teor. 30.10 son generalizaciones de los resultados de Grothendieck y Pietsch para espacios localmente convexos recogidos aquí como Teor. 30.7.

31. Grupos nucleares y GP-nucleares

En lo que sigue investigaremos la relación entre el carácter nuclear de un grupo y el hecho de que verifique las propiedades débil y/o fuerte de Grothendieck-Pietsch; concretamente se verá que los grupos nucleares resultan ser GP-nucleares, mientras que la verdad o falsedad de la afirmación opuesta es un problema abierto en general.

El resultado fundamental que afirma que en un grupo nuclear toda sucesión presumable es absolutamente sumable fue demostrado por Banaszczyk en [**8**]. El núcleo de la prueba lo constituye el siguiente resultado, del que de hecho, como veremos (Teor. 31.2), también se puede deducir el carácter continuo de la inclusión.

Lema 31.1. *([**8**, Lem. 9]) Sea E un espacio vectorial y p, q seminormas prehilbertianas definidas en E y tales que $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_p, B_q) < 1$. Sea H un subgrupo de E y $x_1, \ldots, x_n$ en E tales que $\sum_{i\in\Delta} x_i \in B_p + H$ para todo $\Delta \subset \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} k_{H+3B_q}(x_i) \leq 11$.*

Teorema 31.2. *Todo grupo nuclear es GP-nuclear.*

Demostración. Dado que los grupos nucleares son localmente cuasiconvexos (28.8(d)), sólo hay que probar que $\ell_1(G) \subset \ell_1\{G\}$ con inclusión continua ((a)$\Rightarrow$ (b) en Prop. 29.9). Por 28.7, G es topológicamente isomorfo a un cociente H/F, donde H es un subgrupo de un $\mathbb{R}$-grupo vectorial localmente convexo E y F es un subgrupo cerrado de H; dado que cualquier subgrupo de un grupo GP-nuclear es GP-nuclear (29.7), podemos suponer $H = E$. Sea $\varphi : E \to E/F$ la aplicación canónica. Por la Prop. 29.1(II'), es suficiente demostrar que para cualquier $U \in \mathcal{N}_0(E)$ existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ tal que dado un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y $x_1, x_2, \dots, x_n$ en E con

$$\sum_{i\in\Delta} \varphi(x_i) \in \varphi(V) \quad \forall\Delta \subset \{1, \dots, n\},$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} k_{\varphi(U)}(\varphi(x_i)) < 1,$$

equivalentemente, que para cualquier $U \in \mathcal{N}_0(E)$ existe $V \in \mathcal{N}_0(E)$ tal que dado un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y $x_1, x_2, \dots, x_n$ en E con

$$\sum_{i\in\Delta} x_i \in V + F \quad \forall\Delta \subset \{1, \dots, n\} \tag{31.1}$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} k_{U+F}(x_i) < 1. \tag{31.2}$$

Sea U un entorno de cero en E. Por el Teor 28.4 ((a)$\Rightarrow$(d)) existe un subespacio vectorial E de E y seminormas prehilbertianas p, q definidas en E y tales que $q \le p$, $3^5 B_q \subset U$, $B_p \in \mathcal{N}_0(E)$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_p, B_q) < 1. \tag{31.3}$$

Veamos que para $V = B_p$ y para cualquier sucesión finita $(x_1, \dots, x_n)$ que verifique (31.1), se cumple la condición (31.2). Por el Lema 31.1, de (31.1) y (31.3) se deduce $\sum_{i=1}^{n} k_{F+3B_q}(x_i) \le 11$. Claramente,

$$(F + 3B_q) + \overset{3^4}{\dots} + (F + 3B_q) = F + 3^5 B_q \subset F + U.$$

Además, dado que $B_p \subset B_q$, la condición (31.1) implica

$$x_i \in F + B_q \subset F + 3B_q, \quad i = 1, \dots, n$$

Utilizando la Prop. 5.3(c) deducimos

$$k_{F+U}(x_i) \le \frac{1}{2^4} k_{F+3B_q}(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} k_{F+U}(x_i) \le \frac{1}{2^4} \sum_{i=1}^{n} k_{F+3B_q}(x_i) \le \frac{11}{2^4} < 1,$$

es decir, se cumple (31.2).

□

NOTA 31.3. En general constituye un problema abierto la cuestión de si todo grupo GP-nuclear es nuclear; de admitir una respuesta afirmativa ésta implicaría, junto con el Teor. 31.2, la equivalencia de ambas nociones y por lo tanto proporcionaría una caracterización intrínseca del carácter nuclear de un grupo. (El Teor. 31.4 demuestra que ambos conceptos son equivalentes en la clase de grupos vectoriales topológicos localmente equilibrados.)

Se sabe que todo grupo nuclear es localmente cuasiconvexo (28.8(f)) pero no si la misma propiedad es cierta para los grupos GP-nucleares; la existencia de un grupo GP-nuclear no localmente cuasiconvexo resolvería negativamente en general la cuestión planteada arriba, aunque seguiría teniendo gran interés el problema de si todo grupo GP-nuclear y localmente cuasiconvexo es o no nuclear.

TEOREMA 31.4. *Sea E un grupo vectorial topológico localmente equilibrado, sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Son equivalentes:*

(a) *E es un grupo vectorial nuclear.*
(b) *El grupo abeliano topológico subyacente a E es nuclear.*
(c) *El grupo abeliano topológico subyacente a E es GP-nuclear.*

DEMOSTRACIÓN. • (a)$\Rightarrow$ (b) es consecuencia del Teor. 28.6, o bien del Teor. 28.4 y la propia definición de grupo nuclear.

- (b) $\Rightarrow$ (c) es corolario del Teor. 31.2.
- (c) $\Rightarrow$ (a): Si E es un grupo vectorial topológico localmente equilibrado y GP-nuclear como grupo, en particular $\ell_1\{E\} \subset \ell_1(E)$ con inclusión continua y por lo tanto (Prop. 30.1) E es un grupo vectorial localmente convexo. Basta aplicar el Teor. 30.10.

$\square$

NOTA 31.5. La equivalencia entre (a) y (b) del Teorema 31.4 para grupos vectoriales localmente convexos se demuestra en el Theor. 20.20 de [**4**]; este resultado generaliza el análogo conocido para espacios vectoriales topológicos ([**7**, Prop. 8.9]).

Bibliografía

[1] P. Antosik, C. Swartz, *Matrix Methods in Analysis.* Lecture Notes in Mathematics, 1113. Springer-Verlag, 1985.

[2] D. L. Armacost, *The Structure of Locally Compact Abelian Groups.* Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 68. Marcel Dekker. New York, 1981.

[3] L. Außenhofer, *A Survey on Nuclear Groups.* Nuclear Groups and Lie Groups (Proceedings of the Workshop on Topological Groups and Lie Groups, Madrid, 1999). Research and Exposition in Mathematics, 24. Heldermann Verlag, 2001, pp. 1-30.

[4] L. Außenhofer, *Contributions to the duality theory of Abelian topological groups and to the theory of nuclear groups.* Diss. Math., 384. Warsaw, 1999.

[5] G. Bachman, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory.* Academic paperbacks. Academic Press. New York, London, 1964.

[6] R. W. Bagley y J. S. Yang, *k-spaces and function spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 703-705.

[7] W. Banaszczyk, *Additive subgroups of topological vector spaces.* Lecture Notes in Math., 1466. Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.

[8] W. Banaszczyk, *Summable families in nuclear groups.* Studia Mathematica 105-3 (1993), 271-282.

[9] W. Banaszczyk, E. Martín Peinador, *Weakly pseudocompact subsets of nuclear groups.* J. of Pure and Appl. Algebra 138 (1999), 99-106.

[10] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique: Espaces vectoriels topologiques.* Masson, Paris, 1981.

[11] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique: Topologie générale.* Diffusion C. C. L. S. Paris, 1971.

[12] R. Brown, P. J. Higgins, S. A. Morris, *Countable products and sums of lines and circles: their closed subgroups, quotients and duality properties.* Math. Proc. Camb. Phi. Soc. (1975), 78, pp. 19-32.

[13] M. Bruguera Padró, *Grupos topológicos y grupos de convergencia: Estudio de la dualidad de Pontryagin.* Tesis doctoral. Barcelona, 1999.

[14] M. Bruguera, E. Martín Peinador, *Open subgroups, compact subgroups and Binz-Butzmann reflexivity.* Top. Appl. 72 (1996), 101-111.

[15] G. L. Cain, *Introduction to General Topology.* Addison-Wesley, 1994.

[16] A. Castejón, E. Corbacho, V. Tarieladze, *Metric monoids and integration.* Preprint, 2001.

[17] M. J. Chasco, E. Martín-Peinador, V. Tarieladze, *On Mackey topology for groups.* Studia Mathematica 132 (3) (1999), pp. 257-284.

[18] C. Constantinescu, *Spaces of measures.* De Gruyter studies in Mathematics, 4. De Gruyter, Berlin-New York, 1984.

[19] V. M. Dergačev, *Topological vector groups.* Russian Mathematical Surveys 33:4 (1978), 251-252. (Versión inglesa de: *O topologičeskih vektornyh gruppah.* Uspekhi Mat. Nauk 33:4 (1978), 209-210.)

[20] P. Dierolf, *Summable sequences and associated Orlicz-Pettis topologies.* Special issue dedicated to Władysław Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday. Comment. Math. Special Issue 2 (1979), 71–88.

[21] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces.* Springer-Verlag, 1983.

[22] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector measures.* Mathematical Surveys, 15. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1977.

[23] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tong *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press. Cambridge, 1995.

[24] D. Dikranjan, *The lattice of group topologies and compact representations.* Nuclear Groups and Lie Groups (Proceedings of the Workshop on Topological Groups and Lie Groups, Madrid, 1999). Research and Exposition in Mathematics, 24. Heldermann Verlag, 2001, pp. 105-126.

[25] D. N. Dikranjan, L. N. Stoyanov, I. R. Prodanov, *Topological Groups.* Monographs and texts in pure and applied mathematics, 130. Marcel Dekker, 1989.

[26] J. Dixmier, *Quelques propriétés des groupes abéliens localement compacts.* Bull. Sci. Math. 81, 38-48 (1957)

[27] X. Domínguez, V. Tarieladze, *GP-nuclear groups.* Nuclear Groups and Lie Groups (Proceedings of the Workshop on Topological Groups and Lie Groups, Madrid, 1999). Research and Exposition in Mathematics, 24. Heldermann Verlag, 2001, pp. 127-161.

[28] X. Domínguez, V. Tarieladze, *Nuclear and GP-nuclear groups.* Acta Math. Hungar. 88 (2000), 301-322.

[29] R. M. Dudley, *Random Linear Functionals.* Trans. Amer. Math. Soc., 136 (1969), 1-24.

[30] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 36 (1950), 192-197.

[31] A. Dvoretzky, *On series in linear topological spaces.* Israel J. of Math. 1 (1963), 37-57.

[32] R. E. Edwards, *Functional Analysis.* New York, 1965.

[33] L. Fuchs, K. H. Hofmann, *Extensions of compact abelian groups by discrete ones and their duality theory, I.* J. of Algebra 196, 578-594 (1997)

[34] L. Fuchs, K. H. Hofmann, *Extensions of compact abelian groups by discrete ones and their duality theory, II.* Abelian groups, module theory, and topology (Padua, 1997), 205–225, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 201, Dekker, New York, 1998.

[35] J. Galindo, *Structure and analysis on nuclear groups.* Houston J. Math. 26 (2000), no. 2, 315-334.

[36] J. Galindo; S. Hernndez, *On the completion of a MAP group.* Papers on general topology and applications (Gorham, ME, 1995), 164–168, Ann. New York Acad. Sci., 806, New York Acad. Sci., New York, 1996.

[37] I. Glicksberg, *Uniform boundedness for groups.* Canad. J. Math 14 (1962), 269-276.

[38] A. Grothendieck, *Topological vector spaces.* Notes on Mathematics and its Applications. Gordon and Breach, 1973.

[39] A. Guichardet, *Analyse Harmonique Commutative.* Monographies universitaires de mathématiques. Dunod, París, 1968.

[40] S. Hernández, J. Galindo, S. Macario, *A characterization of the Schur property by means of the Bohr topology.* Topology Appl., 1-2 (1999), pp. 99-108.

[41] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[42] P. J. Higgins, *Coproducts of topological Abelian groups.* Journal of Algebra (1) 44 (1977), 152-159.

[43] P. J. Higgins, *Introduction to Topological Groups.* London Mathematical Society Lecture Notes Series, 15. Cambridge University Press, 1974.

[44] T. Husain, *Introduction to topological groups.* Saunders Mathematical Books. W. B. Saunders. Philadelphia and London, 1966.

[45] S. Kwapień, A. Pelczyński, *The main triangle projection in matrix spaces and its applications.* Studia Mathematica XXXIV (1970), 43-67.

[46] A. W. Ingleton, *The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 48, 41-45 (1952)

[47] G. Itzkowitz, *Projective limits and balanced topological groups.* Topology and its Appls. 110 (2001), 163-183.

[48] R. C. James, *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 37 (1951), 147-177.

[49] G. J. O. Jameson, *Topology and Normed Spaces.* Chapman and Hall Mathematics Series. Chapman and Hall, 1974.

[50] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces.* Mathematische Leiftäden. B.G. Teubner. Stuttgart, 1981.

[51] V. M. Kadets, M. I. Kadets, *Rearrangements of series in Banach spaces.* Translations of mathematical monographs, v. 86. American Mathematical Society, 1991.

[52] N. J. Kalton, *Subseries convergence in topological groups and vector spaces.* Israel J. Math., 10 (1971), 402-411.

[53] S. Kaplan, *Extensions of the Pontrjagin duality I: infinite products.* Duke Math. J. 15 (1948), pp. 649-658.

[54] S. Kaplan, *Extensions of the Pontrjagin duality II: direct and inverse sequences.* Duke Math. J. 17 (1950), 419-435.

[55] J. L. Kelley, *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics, 27. Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin, 1975.

[56] D. Landers, L. Rogge, *The Hahn-Vitali-Saks and the uniform Boundednes Theorem in topological groups.* Manuscripta Mathematica 4 (1971), 351-359.

[57] J. Martínez Maurica, C. Pérez García, *The Hahn-Banach extension property in a class of normed spaces.* Quaestiones Mathematicae, 8 (1986), 335-341.

[58] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory.* Graduate Texts in Mathematics, 183. Springer-Verlag, 1998.

[59] A. F.Monna, *Analyse non-archimédienne.* Springer-Verlag, 1970.

[60] Monna, A. F., *Espaces localement convexes sur un corps valué.* Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 62, 391-405 (1959).

[61] S. A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 29. Cambridge University Press. Cambridge, 1977.

[62] P. Nickolas, *Reflexivity of topological groups.* Procs. of the A. M. S., vol. 65, n 1 (1977), 137-141.

[63] P. Nickolas, *Coproducts of Abelian topological groups.* Preprint, 2001.

[64] J. W. Nienhuys, *Some examples of monothetic groups.* Fundamenta Mathematicae 88 (1975), 163-171.

[65] N. Noble, *k-groups and duality.* Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970), 551-561.

[66] K. Phillips, *A note on local field duality.* Rocky Mountain J. of Math., vol. 8, n. 3 (1978), 433-437.

[67] A. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces.* Springer-Verlag, 1972.

[68] A. Pietsch, *Operator Ideals.* North-Holland Mathematical Library. North-Holland. Berlin, 1980.

[69] J. D. Pryce, *A device of R. J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions.* Proc. London Math. Soc (3) 23 (1971), 532-546.

[70] D. A. Raĭkov, *On B-complete topological vector groups.* (En ruso) Studia Math. 31 (1968), 295-306.

[71] D. Remus, F. J. Trigos-Arrieta, *Abelian groups which satisfy Pontryagin duality need not respect compactness.* Proc. of the Amer. Math. Soc., vol. 117, n 4 (1993), 1195-1200.

[72] A. P. Robertson, *On unconditional convergence in topological vector spaces.* Proc. Royal Soc. Edinburgh 68 (1970), 145-157.

[73] W. Roelcke, S. Dierolf, *Uniform Structures on Topological Groups and Their Quotients.* McGraw-Hill, New York, 1981.

[74] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis.* Pure and Applied Mathematics, 51. Marcel Dekker. New York, 1978.

[75] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces.* Mathematics and its applications. Reidel Publishing Company. Varsovia, 1985.

[76] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups.* Wiley Classics Library. John Wiley and Sons. New York, 1990.

[77] H. Samelson, *On the self-duality of* $\mathbb{Q}_p$. J. Algebra 177 (1995), no. 1, 240-241.

[78] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, 1970.

[79] W. H. Schikhof, K. U. Nijmegen, *Locally convex spaces over nonspherically complete valued fields I, II.* Bull. Soc. Math. Belg. Sér B 38 (1986), 187-224.

[80] N. Shilkret (Shell), *Non-Archimedean orthogonality.* Arch. Math. (Basel) 27 (1976) 67-78.

[81] M. F. Smith, *The Pontrjagin theorem in linear spaces.* Annals of Mathematics, vol. 56, n. 2 (1952), 248-253.

[82] V. Tarieladze, *On Ito-Nisio type theorems for DS-groups.* Georgian Mathematical Journal 4 (5), 1977, pp. 477-500.

[83] J. T. Tate, *Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions.* Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965) pp. 305–347 Thompson, Washington, D.C., 1967

[84] M. Tkačenko, *Introduction to topological groups.* Topology and its Applications, 86 (1998), 179-231.

[85] G. Turnwald, *Duality theory of abelian topological groups.* Infinite-dimensional harmonic analysis (Tbingen, 1995), 224–233, Grbner, Tbingen, 1996.

[86] L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras.* Lecture Notes in Math., 230. Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg. 1971.

[87] S. Warner, *Topological Fields.* North-Holland Mathematics Studies, 157. North-Holland, 1989.

[88] L. Washington, *On the self-duality of* $\mathbb{Q}_p$. Amer. Math. Monthly 81 (1974), 369-371.

[89] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Actualités Sci. Indust., nos. 869, 1145, Hermann, Paris, 1940, 1951.

[90] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces.* McGraw-Hill. New York, 1978.