

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I**



**MODELIZACIÓN DE LA DEFORMACIÓN Y  
VARIACIONES DE GRAVEDAD CAUSADAS  
POR ACTIVIDAD VOLCÁNICA**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTOR POR**

María Charco Romero

Bajo la dirección de los Doctores:

José Fernández Torres  
Francisco Luzón Martínez

**Madrid, 2004**

**ISBN: 84-669-2590-2**



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I  
Sección departamental de Astronomía y Geodesia

---

# MODELIZACIÓN DE LA DEFORMACIÓN Y VARIACIONES DE GRAVEDAD CAUSADAS POR ACTIVIDAD VOLCÁNICA

---

Memoria que presenta

**María Charco Romero**

para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Directores:

Dr. José Fernández Torres

Dr. Francisco Luzón Martínez

Madrid, 2003



Intentar enumerar en una sola página a todas las personas que han hecho posible la finalización de esta memoria sería imposible. En cualquier caso, agradezco a todos los que de una manera u otra me han ayudado durante estos años por todo el apoyo prestado.

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a los directores de este trabajo: el Dr. José Fernández Torres y el Dr. Francisco Luzón Martínez, que me han apoyado en todo momento con sus comentarios y consejos.

Al Departamento de Física de la Tierra, Astronomía, Astrofísica I, a la Sección Departamental de Astronomía y Geodesia y al Instituto de Astronomía y Geodesia, donde principalmente he desarrollado este trabajo.

Durante estos años he tenido el placer de realizar varias estancias en centros españoles y en el extranjero con el fin de completar mi formación. Debo agradecer la ayuda prestada por el personal del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Almería, del Departamento de Geología de la Universidad de California en Davis y del CIRES en Colorado, entre otros. En especial, quiero recordar a Kristy Tiampo por las indicaciones y ayuda prestada, gracias Kristy por ser más que una “colega”.

Quiero agradecer a Gerard Jentzsch y a Maurizio Battaglia que me hayan dejado disponer de los datos necesarios para realizar algunos de los ejemplos mostrados en esta memoria.



Esta tesis se ha desarrollado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología AMB99-1015, REN2002-03450 y REN2002-04198-C02-02/RIES, y el Proyecto “Geodesy applied to volcanic and seismic monitoring. Theoretical and observational approaches.” del New Del Amo Program de la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad de California, Estados Unidos.

Mi más sincero agradecimiento a todos mis compañeros y amigos. Ellos han soportado mis quebraderos de cabeza durante todos estos años. Este trabajo no podría haberse llevado a cabo sin su apoyo y comprensión. Como tampoco podría haberse llevado a cabo sin la ayuda, colaboración y ánimos constantes de mi familia. Me gustaría agradecer a Pedro la ayuda, comprensión, paciencia, confianza y estímulo, que ha mantenido en todo momento. Muchas gracias Pedro. Sería injusto por mi parte terminar sin citar a mis padres y hermanos, gracias a ellos porque siempre han confiado en mí.

# Índice

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>INTRODUCCIÓN</b>                                                                        | 1  |
| <b>CAPÍTULO 1. MODELOS DE DEFORMACIÓN</b>                                                  | 7  |
| 1.1. MODELOS PIONEROS.                                                                     | 8  |
| 1.2. MODELOS CON FUENTES DE DIFERENTES FORMAS GEOMÉTRICAS.                                 | 9  |
| 1.3. EFECTOS DE LAS HETEROGENEIDADES MECÁNICAS Y VISCOELÁSTICAS DEL MEDIO.                 | 10 |
| 1.4. MODELOS ELÁSTICO-GRAVITATORIO Y VISCOELÁSTICO-GRAVITATORIO.                           | 11 |
| <b>CAPÍTULO 2. MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO</b>                                            | 15 |
| 2.1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.                                           | 15 |
| 2.1.1. Esfuerzos y deformaciones.                                                          | 16 |
| 2.1.2. Condiciones para el equilibrio.                                                     | 19 |
| 2.1.3. Ecuaciones de Navier de equilibrio.                                                 | 22 |
| 2.1.4. Ecuaciones del modelo elástico-gravitatorio.                                        | 23 |
| 2.2. MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO ESTRATIFICADO.                                           | 28 |
| 2.2.1. Descripción del modelo.                                                             | 29 |
| 2.2.2. Funciones fuente.                                                                   | 34 |
| 2.2.3. Descomposición de soluciones. Linealidad.                                           | 34 |
| 2.2.4. Formulación numérica. Integración numérica de las funciones núcleo.                 | 35 |
| 2.2.5. Programas de cálculo.                                                               | 38 |
| 2.3. VARIACIONES DE GRAVEDAD.                                                              | 41 |
| 2.3.1. Corrección del conjunto de programas GRAVW en el cálculo de variaciones de gravedad | 46 |

|                                                                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>CAPÍTULO 3. ESTUDIO CUANTITATIVO DE LAS ECUACIONES DEL MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO</b>                            | <b>51</b>  |
| 3.1. ESTUDIO CUANTITATIVO.                                                                                            | 52         |
| 3.2. EJEMPLOS TEÓRICOS                                                                                                | 62         |
| <b>CAPÍTULO 4. APLICACIÓN PRÁCTICA DEL MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO</b>                                               | <b>69</b>  |
| 4.1. LONG VALLEY CALDERA (CALIFORNIA).                                                                                | 70         |
| 4.1.1. Reactivación de la caldera, periodos de inflación y observaciones gravimétricas.                               | 72         |
| 4.1.2. Aplicación del modelo elástico-gravitatorio a Long Valley Caldera.                                             | 76         |
| 4.2. INVERSIÓN DE VARIACIONES DE GRAVEDAD EN LONG VALLEY CALDERA.                                                     | 81         |
| 4.2.1. Técnica de inversión.                                                                                          | 83         |
| 4.2.2. Función de evaluación.                                                                                         | 87         |
| 4.2.3. Sensibilidad del AG.                                                                                           | 87         |
| 4.2.4. Resultados de la inversión realizada con el AG en Long Valley.                                                 | 90         |
| 4.3. VOLCÁN MAYON, ISLAS FILIPINAS.                                                                                   | 98         |
| 4.3.1. Modelado e interpretación de las variaciones de gravedad observadas en Mayon.                                  | 103        |
| <b>CAPÍTULO 5. ESTUDIO 3D DEL EFECTO DE LA TOPOGRAFIA SOBRE EL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS Y VARIACIONES DE GRAVEDAD</b> | <b>107</b> |
| 5.1. ESTUDIO PRELIMINAR DEL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA EN UN MEDIO ELÁSTICO-GRAVITATORIO.                                | 109        |
| 5.2. EL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS EN LA FRONTERA.                                                                 | 113        |
| 5.2.1. Ideas básicas.                                                                                                 | 113        |

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.2.2. Funciones de Green.                                                                     | 115 |
| 5.2.3. Formulación integral sobre la frontera. Teorema de reciprocidad de Betti.               | 118 |
| 5.2.4. Identidad de Somigliana.                                                                | 120 |
| 5.2.5. Representación integral de la formulación indirecta.                                    | 123 |
| <b>5.3. DESPLAZAMIENTOS PRODUCIDOS EN UN MEDIO CON IRREGULARIDAD TOPOGRÁFICA SUPERFICIAL .</b> | 125 |
| 5.3.1. Discretización.                                                                         | 126 |
| 5.3.2. Integración gaussiana.                                                                  | 137 |
| <b>5.4. VARIACIONES DE GRAVEDAD.</b>                                                           | 137 |
| <b>5.5. EFECTO DE UNA TOPOGRAFÍA 3D EN LAS DEFORMACIONES Y VARIACIONES DE GRAVEDAD.</b>        | 138 |
| <b>CAPÍTULO 6. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE FUENTE CONSIDERANDO EL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA</b>  | 145 |
| 6.1. METODOLOGÍA CUASI-ANALÍTICA.                                                              | 146 |
| 6.2. COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO CUASI-ANALÍTICO Y EL IBEM.                                    | 149 |
| 6.3. APLICACIÓN AL VOLCÁN MAYON (FILIPINAS).                                                   | 158 |
| <b>CONCLUSIONES</b>                                                                            | 163 |
| <b>REFERENCIAS</b>                                                                             | 173 |



# INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la humanidad han sido numerosos los ejemplos del poder destructivo de los volcanes: erupciones catastróficas han producido cientos de miles de víctimas, así como incontables daños materiales. En contrapartida, los volcanes son piezas clave para la formación y evolución del planeta. Las posibilidades que ofrecen las zonas volcánicas (riqueza de los suelos, fuentes energéticas, mineras, etc.), así como el gran crecimiento demográfico mundial han propiciado un aumento de la población en dichas zonas. Pero la naturaleza no atiende a razones. Cada año, las catástrofes naturales se cobran en el mundo miles de víctimas y causan importantes daños materiales.

Las erupciones volcánicas son el resultado de grandes y complejos procesos físicos y geológicos. Entre éstos se encuentran la generación de magma en el manto terrestre o en la corteza, su ascenso hacia zonas más superficiales y su almacenamiento y diferenciación en cavidades de roca encajante. Todos estos fenómenos se manifiestan mediante variaciones que afectan tanto a la forma del edificio volcánico como al medio circundante. Por

## INTRODUCCIÓN

tanto, hoy en día la volcanología es una ciencia multi e interdisciplinar que combina la actuación complementaria de geólogos, geofísicos, geodestas, matemáticos e ingenieros entre otros. Sin embargo, la complejidad del fenómeno junto con la dificultad que, en algunas ocasiones, presenta la adquisición de datos hacen que el conocimiento del proceso volcánico sea todavía insuficiente.

Durante el ascenso de magma hacia la superficie terrestre, éste interacciona con la roca encajante y los fluidos que se encuentran en el medio. Este proceso origina una serie de efectos que pueden considerarse como precursores a una erupción. La vigilancia volcánica incluye técnicas geofísicas, geodésicas o geoquímicas para detectarlos, así como su análisis e interpretación. Los datos registrados mediante este tipo de técnicas (medidas de deformación, gravedad, temperatura, sismicidad, variación de las emanaciones gaseosas, etc.) proporcionan información sobre los procesos físicos relacionados con el movimiento de magma y otros fenómenos asociados. Sin embargo, el ascenso de material puede llevar, o no, asociada su afloramiento sobre la superficie terrestre. Uno de los principales retos ante los que se encuentran los científicos que trabajan en áreas volcánicas es determinar, a partir de la interpretación y análisis de los efectos detectados, si un proceso de intrusión conlleva o no una erupción. Las deformaciones del terreno y variaciones de gravedad pueden ser fenómenos precursores, por ello, siguiendo las recomendaciones de la Asociación Internacional de Vulcanología y Química del Interior de la Tierra (International Association of Volcanology and Chemistry of Earth's Interior, IAVCEI), son objeto de este tipo de vigilancia.

La mayoría de las técnicas geodésicas utilizadas con el fin de detectar deformaciones del terreno proporcionan datos sobre la superficie terrestre o en sus proximidades. Entre las técnicas clásicas se encuentran, por ejemplo, la

medida electromagnética de distancias mediante distanciómetros láser o de infrarrojos y el uso de teodolitos en redes planimétricas. Para medir la inclinación del edificio volcánico producida por el proceso de intrusión se utilizan clinómetros mientras que la deformación horizontal que causa la apertura de fracturas en la corteza se puede medir mediante extensómetros. El desarrollo reciente del GPS (Sistema de posicionamiento Global) continuo y de la interferometría SAR (Radar de Apertura Sintética) ha revolucionado la adquisición y precisión de los datos de observación. Mediante este tipo de técnicas, los datos se adquieren rápidamente, incluso en condiciones meteorológicas adversas. La interferometría SAR proporciona además un campo de deformación del medio continuo espacialmente, adquirido cada 35 días. Junto a estas técnicas, la vigilancia gravimétrica está siendo cada más aplicada para el estudio de volcanes activos. Los cambios de densidad bajo la superficie terrestre que pueden producir los movimientos de magma y la variación del grado de vesiculación de este material, se pueden detectar a partir de la medida de variaciones de gravedad. Este tipo de fenómenos puede causar variaciones de la aceleración de la gravedad de entre 10-100  $\mu\text{Gal}$  ( $1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ ) que son capaces de detectar los gravímetros modernos.

Una vez se han registrado deformaciones y variaciones de gravedad en una zona volcánica, su interpretación se realiza mediante modelos físico-matemáticos. Un modelo es una abstracción matemática simplificada que se utiliza para simular la respuesta del medio ante una perturbación determinada. Cada modelo está caracterizado por un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen la física del problema. Algunas veces la solución de este tipo de ecuaciones está formada por funciones analíticas. Los avances tecnológicos, que se han producido durante las últimas décadas, y la creciente precisión de las técnicas geodésicas de observación han permitido plantear y resolver problemas cada vez más complejos.



## INTRODUCCIÓN

Dentro de este marco, los objetivos que presenta este trabajo son dos:

1. Estudiar cualitativa y cuantitativamente la influencia del campo gravitatorio en la modelización de deformaciones y variaciones de gravedad. La mayoría de modelos empleados para la interpretación de deformaciones y variaciones de gravedad consideran medios elásticos sin tener en cuenta el campo gravitatorio. Frente a la sencillez de los modelos elásticos, el modelo elástico-gravitatorio permite considerarlo. Mediante este estudio plantearemos la necesidad de entender correctamente las ecuaciones del modelo con el fin de aplicarlo apropiadamente en la interpretación de datos de observación.
2. Estudiar, modelar y cuantificar el efecto de la topografía del terreno, no sólo en las deformaciones sino también en las variaciones de gravedad. Los modelos empleados habitualmente para la interpretación de deformaciones y variaciones de gravedad consideran la Tierra como un medio semi-infinito plano. Sin embargo, muchas zonas volcánicas están asociadas a un relieve topográfico acusado. Considerar el efecto de la topografía del terreno supone un cambio en el dominio de definición del problema.

Con el fin de alcanzar estos objetivos hemos estructurado la memoria en seis capítulos. Como hemos señalado, para interpretar fenómenos precursores de actividad se utilizan modelos físico-matemáticos. En el primer capítulo introduciremos brevemente algunos de los que se utilizan habitualmente para el análisis e interpretación de deformaciones y variaciones de gravedad observadas en áreas volcánicas.

En el Capítulo 2 se realiza un breve resumen de la teoría de elasticidad de medios continuos, que es la base para obtener las ecuaciones de los

modelos elástico y elástico-gravitatorio. También en este capítulo se resumen los resultados obtenidos previamente por otros autores para obtener las soluciones de un medio elástico-gravitatorio, estratificado en capas planas, isótropas y homogéneas.

El objetivo del Capítulo 3 es mostrar las diferencias observadas al interpretar deformaciones y variaciones de gravedad mediante un modelo elástico y otro elástico-gravitatorio. Para ello, hemos realizado un análisis dimensional de las ecuaciones de este último. A partir de este análisis podemos observar la importancia de incluir el campo gravitatorio en la interpretación de variaciones de gravedad. Para finalizar, algunos ejemplos teóricos ilustran este hecho.

En el Capítulo 4 se muestran dos aplicaciones prácticas del modelo elástico-gravitatorio: (1) Long Valley Caldera en California, EE.UU., donde recientemente se han producido varios periodos de inflación sin que se hayan producido erupciones entre ellos; y (2) el volcán Mayon en Filipinas. Las variaciones de gravedad producidas en Long Valley están principalmente causadas por la deformación del terreno inducida por la expansión volumétrica de la cámara, por lo que un modelo elástico puede explicar las variaciones de gravedad observadas en esta zona. Sin embargo, en el volcán Mayon se han observado variaciones de gravedad sin deformación significativa del terreno, por lo que el modelo elástico no permite explicar los cambios observados.

Muchas zonas volcánicas (p. e., el volcán Mayon, Teide, etc.) están asociadas con un relieve significativo del terreno. Así, en los dos últimos capítulos se estudia la influencia de la topografía del terreno en la modelización. En el Capítulo 5 se muestra cómo esta influencia puede enmascarar el acoplamiento elástico-gravitatorio. Para cuantificar el efecto topográfico hemos desarrollado un modelo tridimensional. La resolución de

## INTRODUCCIÓN

las ecuaciones que lo caracterizan se realiza mediante el método indirecto de elementos en la frontera, técnica numérica que permite tener en cuenta de forma realista la superficie libre del medio. Con este modelo se pueden calcular desplazamientos y variaciones de gravedad causados tanto por la dilatación/contracción de la cámara magmática como por la masa de material inyectado. El principal efecto de la topografía que podemos observar es una reducción de la magnitud de los desplazamientos y variaciones de gravedad. Además al ser el modelo empleado tridimensional, proporciona soluciones globales que pueden simular el comportamiento de una zona en su totalidad. Por ejemplo, puede simular el campo de deformación continuo que proporciona la observación radar por satélite sin necesidad de realizar las simplificaciones habituales.

Por último, en el Capítulo 6, con el fin de incluir el efecto de la topografía en la determinación de parámetros de fuente, hemos empleado un método aproximado: la metodología de variación de profundidad de fuente. La elección de esta metodología esta justificada por la disminución de tiempo de cálculo que supone frente a otros métodos numéricos como el método indirecto de elementos en la frontera. Esta técnica permite estimar de forma fiable el efecto de la topografía en deformaciones verticales y variaciones de gravedad. Como aplicación, hemos caracterizado la fuente de perturbación situada bajo el volcán Mayon utilizando un algoritmo genético simple.

Para finalizar la memoria, se muestran las conclusiones principales extraídas de este trabajo junto con las posibilidades de trabajo futuro que se nos han planteado tras su desarrollo.

# **CAPÍTULO 1**

## **MODELOS DE DEFORMACIÓN**

El volcanismo es uno de los procesos normalmente asociados a los márgenes activos de placas. Representa la culminación de varios procesos geológicos y geofísicos que incluyen la generación de magmas en el manto o en la corteza terrestre, su ascenso hacia niveles superficiales, su almacenamiento y diferenciación y finalmente su afloramiento en superficie. Así, aunque tradicionalmente el estudio de los fenómenos volcánicos encontraba su marco dentro de diferentes disciplinas geológicas como la petrología, la geología estructural, la geoquímica o la geomorfología, hoy en día la vulcanología se ha convertido en una ciencia multidisciplinar, en la que participan de forma complementaria geólogos, físicos, matemáticos o ingenieros.

Una de las principales responsabilidades de los equipos que gestionan la investigación en áreas volcánicas es definir el sistema más adecuado de vigilancia. Este término se refiere a los estudios científicos que abarcan la observación, registro, análisis e interpretación de las variaciones que se producen en zonas volcánicas activas. Por tanto, dentro de la vigilancia de estas zonas podemos englobar, tanto la observación sistemática y de precisión de los fenómenos físicos que aparecen como

consecuencia de un proceso de intrusión magmática en la corteza, como el aspecto teórico del modelado de estos efectos, lo que permite su interpretación posterior.

En este capítulo vamos a introducir, de forma breve, los modelos de deformación empleados para el análisis e interpretación de variaciones de gravedad y deformaciones del terreno observadas en áreas volcánicas, entendidos éstos como posibles efectos precursores a una erupción. La evolución de los modelos ha venido determinada, entre otros aspectos, por el sorprendente desarrollo de las máquinas de cálculo. Así, los métodos más antiguos (anteriores al “boom” de los ordenadores) trabajaban preferentemente por vía analítica, buscando parametrizaciones adecuadas y aplicando procedimientos algebraicos. Sin embargo, cada día se tiende más a aceptar la complejidad de los problemas acudiendo a resoluciones numéricas basadas en la asombrosa capacidad de cálculo de las máquinas actuales.

### **1.1. MODELOS PIONEROS.**

La distribución de esfuerzos y deformaciones existentes en zonas volcánicas y sus correspondientes efectos de deformación observables en superficie constituyen un sistema físico de cierta complejidad. Para obtener formulaciones matemáticas con las que representar dichos fenómenos complejos, se ha acudido a hipótesis simplificadoras que requieren un número reducido de parámetros característicos.

Mogi (1958) fue el primero en modelar la elevación/subsidencia del terreno observada en un volcán mediante una fuente de presión situada en un medio semi-infinito, homogéneo y elástico, para establecer una relación entre las erupciones de los volcanes Sakurazima (Japón) y Kiluaea (Hawái) y las deformaciones observadas en sus inmediaciones. En este modelo, la fuente de presión se considera como un núcleo de deformación (en la terminología de Love, 1927), es decir, una fuente puntual en la que se produce una expansión radial, lo que se asemejaría a la expansión volumétrica de una cavidad esférica. El modelo de Mogi no puede explicar la deformación observada en algunas ocasiones sin considerar incrementos de

presión demasiado elevados (Bonafede *et al.*, 1986). Yokoyama (1971) propuso un modelo similar al de Mogi. Una característica importante de este modelo es que necesita una presión inferior, para obtener un desplazamiento vertical máximo igual al que se obtiene mediante el modelo de Mogi.

## **1.2. MODELOS CON FUENTES DE DIFERENTES FORMAS GEOMÉTRICAS.**

La aplicación del modelo de Mogi para modelar la deformación observada en zonas volcánicas ha sido muy amplia. En muchos casos se han obtenido resultados satisfactorios, principalmente en la componente vertical del campo de desplazamientos (p.e., Mogi, 1958; Dvorak *et al.*, 1983, Berrino *et al.*, 1984; Dvorak y Berrino, 1991). No obstante, este modelo presenta dificultades al modelar desplazamientos horizontales. Dieterich y Decker (1975), describen un modelo para representar fuentes de diferentes formas geométricas. Resolviendo sus ecuaciones numéricamente mediante el método de elementos finitos, mostraron que el patrón de los desplazamientos verticales producidos por fuentes simétricas distintas, localizadas a profundidad diferente en un semiespacio, era similar. Sin embargo, observaron que el patrón de la deformación horizontal es dependiente de la forma de la fuente. Okada (1985) proporcionó expresiones analíticas para calcular el desplazamiento producido por fuentes puntuales y extensas que representan un mecanismo de fractura en un semiespacio. Davis (1986) obtuvo expresiones aproximadas de la deformación en superficie causada por un elipsoide de tres ejes orientado arbitrariamente en el interior de un semiespacio elástico. McTigue (1987) dedujo una solución analítica aproximada, que incluye términos de orden superior, para representar los desplazamientos y el campo de esfuerzos causados por la presurización de una cavidad esférica situada en un semiespacio elástico.

### **1.3. EFECTOS DE LAS HETEROGENEIDADES MECÁNICAS Y VISCOELÁSTICAS DEL MEDIO.**

Las deformaciones calculadas en un semiespacio elástico y homogéneo pueden estar afectadas por la presencia de inhomogeneidades en los parámetros elásticos que caracterizan el medio. Diferentes autores han estudiado el campo de deformación utilizando modelos de Tierra no homogénea. Por ejemplo, Bianchi *et al.* (1987) estudiaron el efecto de las heterogeneidades existentes en el interior de una caldera volcánica. Sus resultados reflejan que el efecto de la heterogeneidad (menor rigidez en el centro, donde se sitúa la fuente) en la deformación no es significativo si se consideran valores de rigidez normales.

Las soluciones numéricas del problema elástico han permitido calcular desplazamientos en superficie y esfuerzos en el medio, considerando diferentes propiedades. En áreas volcánicas es muy común la presencia de fallas. Las calderas volcánicas se forman al colapsar la cámara magmática, lo que causa la aparición de discontinuidades litológicas en el área de contacto. De Natale y Pingue (1993) y De Natale *et al.* (1997) presentaron un método para la simulación del efecto de discontinuidades laterales en el campo de deformación producido por una fuente de presión. El principal efecto descrito por estos autores es una fuerte influencia de la localización de las discontinuidades en la extensión de la zona deformada. De hecho, las discontinuidades del medio relativizan la dependencia existente entre el tamaño del área deformada y la profundidad de la fuente.

Por otra parte, la Tierra es un medio heterogéneo formado por materiales de composición y propiedades distintas. Una forma de tener en cuenta este hecho es mediante modelos de Tierra estratificada en capas planas formadas por materiales de composición, densidad y propiedades elásticas diferentes (p.e., Rundle, 1980; 1982; Roth, 1993; Fernández y Rundle, 1994a, b; Fernández *et al.*, 1997). Por ejemplo, los resultados de Fernández y Rundle (1994a, b) indican que, los cambios en las propiedades elásticas del medio, tienen un efecto más significativo que las variaciones

de densidad, tanto sobre desplazamientos superficiales como sobre variaciones de gravedad.

La presencia de altas temperaturas en zonas volcánicas puede causar un comportamiento del medio distinto al predicho mediante un modelo elástico (p.e., Bonafede *et al.*, 1986; Dragoni y Magnanensi, 1989). El comportamiento de la corteza también está influido por la fracturación intensa del medio que existe en zonas volcánicas. Bonafede *et al.* (1986) y Bonafede (1990) obtuvieron expresiones analíticas para representar el campo de desplazamientos producido por diferentes fuentes situadas en el interior de un semiespacio viscoelástico y homogéneo. También calcularon el campo de esfuerzos asociado y mostraron que la perturbación causada por fuentes puntuales diferentes en un semiespacio viscoelástico puede reproducir las elevaciones observadas mediante incrementos de presión factibles en el interior de una cámara ( $< 10$  MPa). Dragoni y Magnanensi (1989) obtuvieron, a su vez, la solución analítica para representar una cámara de magma rodeada por una capa de propiedades viscoelásticas con la que reprodujeron el orden de magnitud de la elevación observada en Campi Flegrei, sin necesidad de un gran incremento de presión. Folch *et al.* (2000) estudian las diferencias entre las deformaciones viscoelásticas producidas por fuentes puntuales y fuentes tridimensionales extensas, utilizando, respectivamente, un modelo que proporciona soluciones analíticas y otro en el que las soluciones se obtienen numéricamente.

#### **1.4. MODELOS ELÁSTICO-GRAVITATORIO Y VISCOELÁSTICO-GRAVITATORIO.**

A pesar del éxito obtenido al aplicarlo para interpretar las deformaciones observadas en áreas volcánicas, el modelo elástico no permite reproducir las variaciones de gravedad observadas en algunas ocasiones (p. e., Rymer, 1994). Rundle (1980) obtiene y resuelve las ecuaciones que representan el problema elástico-gravitatorio para un semiespacio estratificado en capas planas, isótropas y homogéneas, utilizando la técnica de las matrices propagantes (Thompson, 1950;



## CAPÍTULO 1

Haskell, 1953; Gilbert y Backus, 1966). Una de las aplicaciones de este modelo es el cálculo de los gradientes geométrico y ortométrico de la gravedad causados por intrusiones magmáticas sobre la superficie terrestre. Dadas las propiedades de la fuente, ambas cantidades pueden ser utilizadas para relacionar la variación de gravedad observada en superficie con el cambio de elevación, para convertir una cantidad en la otra, o para estudiar la dinámica de la intrusión (Rundle, 1982). Fernández *et al.* (1997) muestran, mediante ejemplos, que para el ajuste e interpretación de las variaciones de gravedad observadas en zonas activas es necesario considerar el campo gravitatorio terrestre. Este hecho se pondrá de manifiesto en los siguientes capítulos mediante un análisis cuantitativo de las ecuaciones del modelo, así como mediante ejemplos de aplicación práctica.

Estos autores también consideran otras características del medio como sus propiedades no elásticas. Rundle (1978a) estudia el problema de la presencia de un “núcleo de deformación” en una capa elástica situada sobre un semiespacio viscoelástico, que representa el efecto de la astenosfera. Hofton *et al.* (1995) extendieron los trabajos realizados por Rundle (1980), para incluir la existencia de un dique en el medio descrito anteriormente. Para ello, utilizaron los modelos propuestos por Fernández *et al.* (1996a, b), que calculan la deformación que produce la actividad en fallas de la corteza terrestre. Fernández *et al.* (2001a) describen un modelo viscoelástico-gravitatorio que considera fuentes puntuales en un medio estratificado.

En resumen, podemos observar que se han propuesto numerosos modelos para interpretar la deformación observada en áreas volcánicas. En la mayoría se supone que el medio posee un comportamiento elástico lineal, hipótesis válida en situaciones de deformación o dilataciones de cámara relacionadas con desplazamientos producidos en espacios de tiempo cortos (de meses a pocos años). Al centrarse los estudios realizados en efectos observados en las inmediaciones del volcán (campo cercano), es suficiente con considerar modelos de semiespacio plano despreciando la curvatura terrestre. Aunque en estos modelos se supone que los desplazamientos predichos son cero en el infinito, estos tienden a cero

suficientemente rápido a distancias superiores a la profundidad de la fuente, por lo que la deformación del medio puede considerarse como un fenómeno local.

Este tipo de modelos se puede utilizar para interpretar la deformación en volcanes en los que la topografía del terreno se puede considerar plana, como por ejemplo el Kilauea en Hawai o del volcán Krafla en Islandia. En estos volcanes las irregularidades del terreno sobre las deformaciones observadas son demasiado pequeñas frente a la incertidumbre de los datos (Cayol y Cornet, 1997). Sin embargo, existen volcanes que poseen gran relieve. Entre estos volcanes podemos citar el Etna en Italia, el Merapi en Indonesia, el Mayon en Filipinas o el Teide en Canarias. Existen diferentes trabajos (p.e., McTigue y Segall, 1988; Cayol y Cornet, 1998a, b; Williams y Wadge, 1998; 2000; Folch *et al.*, 2000) que estudian la influencia de la topografía en la deformación producida por la expansión/contracción de una cámara magmática. La conclusión a la que se llega en todos ellos es que la topografía tiene un efecto significativo sobre la deformación del terreno.



## **CAPÍTULO 2**

# **MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO**

### **2.1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.**

Para el estudio e interpretación de deformaciones y variaciones de gravedad es necesario definir una serie de conceptos, por lo que la teoría de la elasticidad será introducida brevemente. La teoría de la elasticidad estudia las relaciones existentes entre las fuerzas que actúan en los cuerpos y las deformaciones que producen. Así, veremos que las ecuaciones de equilibrio representan el balance de las fuerzas que están actuando en el medio y describen cómo varían los desplazamientos (o esfuerzos) en su interior.

Son muchos los textos donde se pueden encontrar los contenidos de este apartado, por lo que nuestro propósito es proporcionar un resumen de las bases necesarias para el desarrollo de las ecuaciones diferenciales que describen los modelos de deformación. En este estudio hemos seguido los tratados de Love (1911, 1927), Fung (1965), Bhatia y Singh (1986), Mal y Singh (1991) y Udías (1999) que no

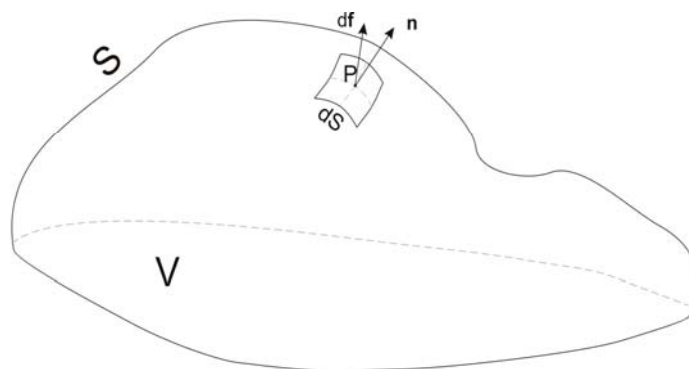
citaremos para proporcionar mayor continuidad a la lectura. Además, salvo que se indique lo contrario, utilizaremos notación indicial.

### 2.1.1. Esfuerzos y deformaciones.

Se define un medio continuo como una idealización de un medio material en el que la distancia entre dos puntos contiguos puede hacerse tan pequeña como se desee. La densidad se define en estos medios como el límite del cociente entre su masa y volumen, cuando este último tiende a cero. En este contexto, cada partícula del medio viene representada mediante un punto geométrico.

En un sólido pueden actuar dos tipos de fuerzas externas: fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Las fuerzas de cuerpo o de volumen actúan sobre cada elemento de volumen del sólido. Entre este tipo de fuerzas se encuentran las fuerzas gravitatorias. Las fuerzas de superficie o de contacto producen esfuerzos, es decir, fuerzas por unidad de superficie. Además de las fuerzas externas hay fuerzas internas debidas a la interacción entre las partículas del medio.

Cuando sometemos un cuerpo a la acción de un sistema de fuerzas, sus partículas se desplazan ligeramente hasta que se alcanza el equilibrio. Consideremos una región del medio de volumen  $V$ , delimitada por una superficie cerrada  $S$  (Figura 2.1) y en ella un punto  $P$  de coordenadas espaciales  $(x_1, x_2, x_3)$ .



**Figura 2.1.** Fuerzas superficiales sobre el punto  $P$ .

Con el fin de especificar los esfuerzos que actúan sobre el área infinitesimal  $dS$ , a la que pertenece el punto  $P$ , se supone que las fuerzas debidas a la acción material del medio exterior a  $V$ , que actúan a través de este área elemental, se reducen a  $d\mathbf{f}$  (Figura 2.1) y que el siguiente límite existe:

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{dS}. \quad (2.1)$$

Este límite se conoce como tracción o vector de esfuerzos. En general, se descompone en: una componente perpendicular al área infinitesimal (tracción normal) y una componente sobre su plano tangente (tracción de cizalla). Alternativamente, el vector de esfuerzos se puede descomponer en sus componentes cartesianas. Si  $\mathbf{n}_j$  es la normal exterior a  $dS$ , las componentes cartesianas de la tracción ejercida por el medio exterior sobre  $dS$  se denotan por  $t_1^{(n)}$ ,  $t_2^{(n)}$  y  $t_3^{(n)}$ , respectivamente.

Considerando diversos planos que pasen por  $P$  se describen los correspondientes vectores de tracción sobre los elementos diferenciales de superficie. Eligiendo tres planos ortogonales, resultarán tres vectores independientes, suficientes para caracterizar el sistema puntual de esfuerzos. Así pues, el estado de esfuerzos en un punto del medio también se puede definir a partir del tensor de esfuerzos,  $\sigma_{ij}$ , cuyos nueve elementos representan los esfuerzos ejercidos a través de tres planos ortogonales a los ejes coordenados. Según la notación anterior, las componentes de la tracción que actúa sobre el plano cuya normal es paralela al eje  $x_i$ , son  $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$  y  $t_3^{(i)}$ . En adelante vamos a utilizar la siguiente notación:

$$t_1^{(1)} = \sigma_{11}, \quad t_2^{(1)} = \sigma_{12}, \quad t_3^{(1)} = \sigma_{13}. \quad (2.2)$$

De forma análoga, las componentes de la tracción sobre la cara cuya normal está orientada en el sentido de  $x_2$  son  $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ , mientras que  $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$  son las

## CAPÍTULO 2

componentes del vector de esfuerzos sobre la superficie perpendicular al eje  $x_3$ . De acuerdo con la relación de Cauchy, el estado de esfuerzos a través de un plano orientado arbitrariamente cuya normal es  $n_j$  se obtiene a partir de este tensor,

$$t_i^j = \sigma_{ij} n_j, \quad (2.3)$$

En adelante, para definir el vector de tracciones se suprimirá el superíndice.

Las deformaciones se definen como el cambio de forma o volumen que experimenta un cuerpo cuando se le aplica una fuerza. Si  $P$  tiene coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , antes de que se produzca la deformación y coordenadas  $(x_1', x_2', x_3')$  tras producirse la deformación, el vector desplazamiento del medio,  $u_j$ , se define mediante,

$$u_i = x_i' - x_i. \quad (2.4)$$

Vamos a suponer que el campo de desplazamiento es continuo y dos veces diferenciable. La teoría de elasticidad en la que se desprecian los productos y cuadrados de las derivadas parciales del vector desplazamiento, frente a las derivadas parciales *per se*, se conoce como teoría infinitesimal o lineal. De esta forma, despreciando los términos de orden superior, se define el tensor de deformaciones infinitesimales, también denominado tensor de Cauchy, mediante:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.5)$$

La coma significa derivada parcial con respecto a la componente cuyo subíndice le sigue. El tensor  $e_{ij}$  es, por definición, simétrico.

La relación entre esfuerzos y deformaciones puede ser muy compleja en medios reales, pero hay modelos teóricos, relativamente simples, que dan una

aproximación del comportamiento del medio bajo ciertas condiciones. En la teoría infinitesimal, la ley de Hooke establece que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones, es decir,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (2.6)$$

$C_{ijkl}$  es el tensor elástico. En general, al ser de cuarto orden, tiene 81 elementos independientes. Debido a las condiciones de simetría expuestas anteriormente, estos se reducen a 21. Para el caso de un medio homogéneo e isotrópico, los elementos del tensor se pueden expresar como combinación lineal de dos constantes  $\lambda$  y  $\mu$ , denominadas parámetros de Lamé. Bajo estas condiciones, el tensor viene dado por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.7)$$

donde  $\delta_{mn}$  es la delta de Kronecker. Así, la relación entre esfuerzos y deformaciones se puede expresar como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}. \quad (2.8)$$

### 2.1.2. Condiciones para el equilibrio.

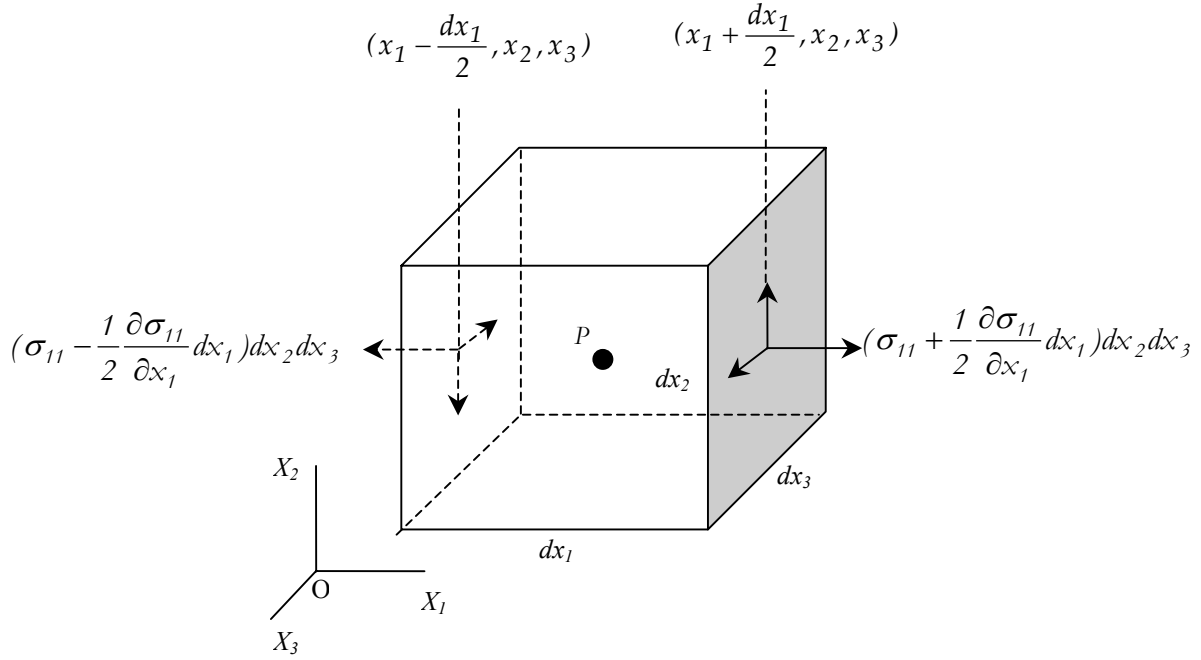
La relación de equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo viene dada mediante tres ecuaciones en derivadas parciales de las componentes del tensor de esfuerzos. Si consideramos que  $f_i$  son las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, para obtener las fuerzas por unidad de volumen, sólo hace falta multiplicar  $f_i$  por la densidad del material,  $\rho$ . Por tanto, las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el elemento de volumen,  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ , vienen dadas por  $\rho f_i dx_1 dx_2 dx_3$ . La condición de equilibrio establece que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido, suma de las fuerzas de cuerpo y de los esfuerzos, debe ser cero. Para tener en cuenta los esfuerzos consideramos un paralelepípedo infinitesimal centrado en  $P$ ,  $(x_1, x_2,$



## CAPÍTULO 2

$x_3$ ), cuyas aristas  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$ , son paralelas a los ejes coordenados de un sistema de referencia cartesiano (Figura 2.2). Los puntos centrales de cada cara tienen coordenadas:

$$(x_1 \pm \frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2 \pm \frac{1}{2}dx_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3 \pm \frac{1}{2}dx_3)$$



**Figura 2.2.** Esfuerzos actuando sobre las caras de un paralelepípedo infinitesimal de volumen  $dV$ .  
(modificada de Bhatia y Singh, 1986)

Si  $\sigma_{ij}$  son los esfuerzos actuando sobre  $P$  y la normal exterior de la cara centrada en  $(x_1 + dx_1/2, x_2, x_3)$  se encuentra orientada en dirección  $x_1$ , entonces las tracciones sobre esta cara vienen dadas por:

$$\left( \sigma_{1j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3. \quad (2.9)$$

Para el resto de caras se pueden escribir expresiones similares. Por tanto, sumando todas las fuerzas que actúan en dirección  $x_1$ , se obtiene que,

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \left( \sigma_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \\
& - \left( \sigma_{21} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \left( \sigma_{31} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \left( \sigma_{31} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
& + \rho f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

de donde, operando y dividiendo por el volumen del elemento, queda,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = 0. \tag{2.11}$$

De forma general, utilizando el convenio de la suma de índices repetidos (los subíndices repetidos indican la suma de sus valores), el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un sólido se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0. \tag{2.12}$$

Las ecuaciones de equilibrio son válidas para cualquier medio continuo, independientemente de sus propiedades elásticas, que vienen determinadas por los parámetros de Lamé.

Otra de las condiciones para que el sólido esté en equilibrio es que el momento de todas las fuerzas respecto a los ejes coordenados debe ser cero.

El momento de las fuerzas respecto al eje  $x_i$  es debido a las fuerzas tangenciales que actúan en las caras paralelas a dicho eje:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} dx_2 \left( \sigma_{23} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 + \frac{1}{2} dx_2 \left( \sigma_{23} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 \\
& - \frac{1}{2} dx_3 \left( \sigma_{32} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} dx_3 \left( \sigma_{32} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Por tanto, dividiendo de nuevo por el volumen, la condición de momento se puede expresar como:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}. \tag{2.14}$$

De igual forma, tomando los momentos en las direcciones  $x_2$  y  $x_3$ , genéricamente se obtiene que:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tag{2.15}$$

es decir, el tensor de esfuerzos es simétrico, y por tanto, sólo 6 de sus 9 elementos son independientes.

### 2.1.3. Ecuaciones de Navier de equilibrio.

La ecuación de equilibrio se puede expresar en función de diversos parámetros. Por ejemplo, (2.12), se ha expresado en función de los esfuerzos que actúan sobre el sólido. Para expresar esta ecuación en función de los desplazamientos que se producen en el medio, tenemos que conocer la relación existente entre esfuerzos,  $\sigma_{ij}$  y deformaciones,  $e_{ij}$ , es decir, la ley de Hooke. Para un medio elástico, isótropo y homogéneo viene dada mediante (2.8). El parámetro  $\mu$  también se denomina módulo de cizalla o rigidez del medio. Sustituyendo (2.8) en (2.12), utilizando la definición del tensor de deformaciones (2.5), se obtiene la ecuación de Navier para el caso estático:

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = 0. \quad (2.16)$$

Al introducir la razón de Poisson,

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (2.17)$$

se obtiene que el vector desplazamiento de un medio elástico, isótropo y homogéneo satisface la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, que podemos expresar en forma vectorial:

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho}{\mu} \mathbf{f} = 0. \quad (2.18)$$

#### 2.1.4. Ecuaciones del modelo elástico-gravitatorio.

Cada punto material de un sólido está influido por la fuerza gravitatoria que ejercen otras partículas del mismo u otros cuerpos exteriores. Los desplazamientos que se producen en la Tierra como consecuencia de una perturbación en el medio, están afectados por la acción del campo gravitatorio, al igual que los desplazamientos influyen en el campo gravitatorio. Por tanto, las ecuaciones que gobiernan el desplazamiento del medio y el campo gravitatorio que genera, están acopladas.

Gilbert y Backus (1968) acoplaron, explícitamente, los efectos elásticos y gravitatorios en un problema de fractura, suponiendo que la Tierra posee simetría esférica y que es un medio estratificado. Del mismo modo, Rundle (1980) propuso un método similar para calcular la deformación producida por fuentes puntuales de perturbación, en la superficie de un medio semi-infinito, estratificado en capas planas, isótropas y homogéneas. El problema consiste en determinar el sistema de esfuerzos para el que un medio, que genera un campo gravitatorio propio, esté en equilibrio. Love (1927) supuso que los esfuerzos en un punto del medio se pueden

## CAPÍTULO 2

describir mediante dos sistemas de esfuerzos o estados superpuestos. En el primero, la presión hidrostática en el interior se encuentra equilibrada con la aceleración gravitatoria del medio. Este constituye el estado de esfuerzos inicial o estado de referencia. El segundo estado consiste en un sistema de esfuerzos relacionado con los desplazamientos.

Veamos primero como se obtienen las ecuaciones correspondientes al problema elástico-gravitatorio acoplado para un modelo de Tierra con simetría esférica sin rotación, para a continuación trasladar las ecuaciones a un modelo de semiespacio.

Sabemos que con respecto a un sistema de referencia inercial  $(O, x_1, x_2, x_3)$  con origen,  $O$ , situado en el centro de masas de la Tierra, el campo hidrostático de esfuerzos,  $T_{ij}$  y la presión hidrostática,  $p_0$ , están relacionados (Lanzano, 1982):

$$T_{ij} = -p_0 \delta_{ij}, \quad \partial p_0 / \partial x_i = \rho_0 g_{0i}. \quad (2.19)$$

siendo  $\rho_0$  la densidad de masa correspondiente al estado de referencia.  $g_{0i}$  son las componentes del campo gravitatorio que se obtienen a partir de potencial gravitatorio,  $\phi_0$ :

$$g_{0i} = -\partial \phi_0 / \partial x_i. \quad (2.20)$$

Este potencial verifica la ecuación de Poisson en el interior de las masas,

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (2.21)$$

donde  $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  es la Constante de Gravitación Universal.

Para considerar un modelo terrestre realista, hay que tener en cuenta el efecto de las fuerzas elásticas (Love, 1927). Para ello, se supone un campo de esfuerzos

adicional,  $\tau_{ij}$ , que produce el desplazamiento de las partículas del medio elástico e isótropo, con respecto a su estado de referencia. Este campo adicional viene dado por la ley de Hooke:

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.22)$$

Puesto que se suponen deformaciones infinitesimales, se puede considerar que en la ecuación (2.22) cada punto del medio tiene las mismas coordenadas que tenía antes de que se produjera la deformación provocada por los esfuerzos adicionales (Lanzano, 1982). Sin embargo, para el campo hidrostático no se puede realizar la misma hipótesis. La deformación infinitesimal ha producido una variación del campo hidrostático inicial que habrá que restar, puesto que la partícula estará rodeada del mismo entorno material (Love, 1927; Lanzano, 1982). Así, después de que se produzca la deformación,  $\sigma_{ij}$  viene dado por:

$$\sigma_{ij} = T_{ij} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} u_k + \tau_{ij}. \quad (2.23)$$

Ahora bien, el gradiente de los esfuerzos hidrostáticos se obtiene a partir de la expresión (2.19):

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_k} \delta_{ij} = -\rho_0 g_{0k} \delta_{ij}. \quad (2.24)$$

Con respecto al sistema de referencia inercial, la ecuación (2.12) representa el equilibrio del medio. Tras producirse la deformación, la densidad será igual a la suma de  $\rho_0$ , densidad de masa en el estado de referencia y  $\rho_r$ , que representa la variación de densidad producida por la dilatación del medio. Esta variación está relacionada con el campo de desplazamientos mediante la ecuación de continuidad (Mal y Singh, 1991):

## CAPÍTULO 2

$$\rho_1 = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 u_i) \quad (2.25)$$

Como hemos mencionado anteriormente, entre las fuerzas de cuerpo que actúan en el medio, estamos considerando el campo gravitatorio, que es conservativo por lo que en la expresión (2.12), las fuerzas se expresan como:

$$f_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (2.26)$$

donde  $\phi$  es el potencial total, suma del potencial que genera el medio cuando se encuentra en el estado de referencia,  $\phi_0$ , y el potencial perturbador,  $\phi_1$ . Este último es debido a la redistribución de masas que produce la deformación,  $\phi_1^*$ , y al potencial externo,  $\phi_e$ , que representa la acción gravitatoria de cuerpos exteriores ( $\phi_1 = \phi_1^* + \phi_e$ ).  $\phi_1$ , al igual que  $\phi_0$ , satisface la ecuación de Poisson en el interior de la Tierra:

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (2.27)$$

Ya que el potencial externo,  $\phi_e$ , verifica la ecuación de Laplace en el interior de las masa terrestres, tan sólo  $\phi_1^*$  contribuye a la parte derecha de (2.27). La contribución del potencial externo,  $\phi_e$ , se considera al establecer las condiciones de contorno sobre la superficie libre del medio. Por tanto, teniendo en cuenta el Principio de Superposición, las componentes del vector gravedad vendrán dadas por:

$$g_i = g_{0i} + g_{1i}, \quad (2.28)$$

donde

$$g_{1i} = -\partial \phi_1 / \partial x_i. \quad (2.29)$$

Despreciando términos de segundo orden, como  $\rho_{kg}^{g_{lb}}$  y utilizando las expresiones (2.23) y (2.24), la ecuación fundamental que establece el equilibrio del medio se puede escribir de la siguiente forma:

$$\rho_0 g_{li} + \rho_l g_{oi} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 g_{ok} u_k) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (2.30)$$

que en forma vectorial, considerando la componente vertical del vector gravedad, se expresa mediante (Rundle, 1980):

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\rho_0 g}{\mu} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z) - \frac{\rho_0}{\mu} \nabla \phi_l - \frac{\rho_0 g}{\mu} \mathbf{e}_z \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.31)$$

Esta ecuación está acoplada con la ecuación (2.27) que proporciona variaciones de potencial.

Como se ha visto en el Capítulo 1, las características del modelo terrestre utilizado para la interpretación de efectos asociados con actividad volcánica son importantes. Para estudiar efectos producidos en zonas cercanas, es suficiente considerar modelos de semiespacio, despreciando la curvatura terrestre. En el desarrollo anterior hemos considerado que la Tierra poseía simetría esférica. El problema de acoplar explícitamente el efecto de la gravitación del medio es más complicado para el caso de un semiespacio elástico, puesto que el problema de orden cero (estado de referencia) no está bien definido. Al considerar un espacio de extensión infinita, la gravedad en superficie se podría calcular como la de una lámina Bouguer de espesor infinito. Dicha lámina produciría gravedad infinita. Por tanto, la ecuación del equilibrio hidrostático (2.19), conduciría a problemas de singularidad al equilibrar el gradiente de presión con la gravedad del medio. Para evitar estas singularidades, Rundle (1980) señala que se puede adaptar el estado de referencia inicial correspondiente a un medio con simetría esférica al estado de esfuerzos adicional (estado perturbado) correspondiente al semiespacio. Para que el problema del semiespacio esté bien definido se imponen una serie de condiciones de contorno



con el fin de que en el límite apropiado, la solución del sistema formado por las ecuaciones (2.27) y (2.31) coincida con la solución correspondiente al problema esférico (Rundle, 1980). En particular se supone que  $g$  es constante e igual a su valor en superficie. Pero, con el fin de obtener un límite apropiado cuando la densidad disminuye, es decir, para que la solución del problema elástico-gravitatorio converja a la solución del problema elástico, se supone que  $g$  depende linealmente de la densidad, lo que es consistente con el problema de Tierra esférica para el que:

$$g = -G \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|^2} dV'. \quad (2.32)$$

La variación de  $g$  con la profundidad se desprecia puesto que sólo contribuye a efectos de orden superior (Rundle, 1980). Como condiciones de contorno se establece que todas las cantidades perturbadas tiendan a cero en el infinito. Además, el potencial perturbador tiene que ser igual al potencial externo en la superficie libre del semiespacio. Bajo estas condiciones este problema está bien definido (Rundle, 1980).

En el siguiente apartado vamos a describir, de forma breve, la resolución del sistema de ecuaciones que gobierna la respuesta del medio elástico-gravitatorio ante la acción perturbadora de una fuente puntual. Su resolución se encuentra descrita en diversos trabajos (p. e., Rundle, 1980; 1982; Fernández, 1992).

## 2.2. MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO ESTRATIFICADO.

Love (1927) mostró que el campo de desplazamientos producido por un centro de expansión en un medio elástico, se puede obtener a partir de su función de Green. En particular, en aplicaciones como la que nos atañe, interesa conocer la respuesta de un semiespacio ante una perturbación súbita del medio. Rundle (1980) señala que en estos casos la estructura vertical del medio se puede introducir mediante la superposición de capas horizontales de distintas propiedades. Thompson



## CAPÍTULO 2

Cada capa  $n$  tiene un espesor  $d_n$ , de forma que la suma de los espesores,  $H$ , se corresponde con la profundidad a la que se encuentra situado un semiespacio continuo. La densidad y las constantes elásticas de cada capa se denotarán por  $\rho_n$ ,  $\lambda_n$  y  $\mu_n$ , respectivamente. Suponiendo que el medio consta de  $p-1$  capas, el semiespacio será la capa  $p$ -ésima. La interfase entre las capas  $n$  y  $n+1$  se denota por  $z_n$ , con lo que  $z_0 = 0$ , representa la superficie del terreno y  $z_{p-1} = H$ , es la frontera entre la capa más profunda y el semiespacio. Se considera un sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \theta, z)$  y la base de vectores unitarios  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  correspondiente a este sistema. El origen del sistema es la proyección de la fuente, situada a una profundidad  $c$ , en superficie, y el eje  $z$  apunta hacia el interior del semiespacio de forma que la gravedad que proporciona el modelo es positiva.

La respuesta de cada capa ante la perturbación, viene dada mediante el siguiente sistema de ecuaciones (Love, 1911; Rundle, 1980):

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho_0 g}{\mu} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z) - \frac{\rho_0}{\mu} \nabla \phi - \frac{\rho_0 g}{\mu} \mathbf{e}_z \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho_0 G \nabla \cdot \mathbf{u}$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitatorio producido por la intrusión,  $\mathbf{u}$  es el desplazamiento causado por ésta,  $\rho_0$  es la densidad, constante no perturbada,  $G$  es la Constante de Gravitación Universal y  $\mu$  es el módulo de rigidez.

Para resolver el sistema (2.33) hay que integrar la segunda ecuación. Integrándola sobre un volumen arbitrario y teniendo en cuenta que el operador laplaciano es igual a la divergencia del gradiente, se obtiene:

$$\int_V (\nabla^2 \phi + 4\pi G \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_V (\nabla \cdot (\nabla \phi + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u})) dV = 0, \quad (2.34)$$

de donde, al aplicar el teorema de la divergencia,

$$\int_{\partial V} (\nabla \phi + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0, \quad (2.35)$$

$\partial V$  es la superficie que engloba el volumen considerado,  $d\Sigma$  es el elemento de superficie y  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario exterior a  $V$ . Teniendo en cuenta esta expresión, se define la siguiente cantidad:

$$\mathcal{Q} = [\nabla \phi + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}. \quad (2.36)$$

Esta cantidad se utiliza para obtener las variaciones de gravedad en el medio (Rundle, 1980). Para resolver el sistema (2.33), se imponen las siguientes condiciones de contorno: todas las perturbaciones tienden a cero en el infinito; la superficie  $\zeta = 0$  está libre de esfuerzos. También necesitamos la existencia de un potencial gravitatorio continuo a través de la superficie  $\zeta = 0$  y que se anule cuando  $\zeta \rightarrow -\infty$ . Se exige, además, que  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathbf{u}$ , las tracciones normales  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\zeta}$ , y  $\phi$  sean continuos en  $\zeta$  salvo a través de planos singulares,  $\zeta = \text{cte}$ , en los que se sitúan las fuentes internas de perturbación.

Las soluciones de este problema en el espacio tridimensional euclídeo se utilizan para obtener, a partir del método de matrices propagantes, la solución correspondiente a un medio estratificado en capas planas.

La solución global y única (Rundle, 1982) sobre la superficie,  $\zeta = 0$ , viene dada por las siguientes expresiones (p. e., Rundle, 1980, Fernández *et al.*, 1997; Charco *et al.*, 2002):

$$\mathbf{u} = M \int_0^\infty \{x'_0(k) \mathbf{P}_0 + y'_0(k) \mathbf{B}_0\} k dk, \quad (2.37)$$

$$\phi = M \int_0^\infty \omega'_0(k) J_0(kr) k dk, \quad (2.38)$$

$$dg = -\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = -M \int_0^\infty q'_0(k) J_0(kr) k dk + \beta_0 u_{\zeta}, \quad (2.39)$$

$$T = \frac{\partial u_{\tilde{x}}}{\partial r} = -M \int_0^\infty x_0'(0) J_1(kr) k^2 dk, \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{\partial u_{\tilde{x}}}{\partial r}(r) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \int_0^\infty y_0'(0) J_0(kr) k^2 dk, \quad (2.41)$$

$$d\xi = \frac{M}{2g} \int_0^\infty x \omega_0'(0) \cdot (J_0(kr) + J_2(kr)) \cdot k^3 dk, \quad (2.42)$$

$$d\eta = \frac{M}{2g} \int_0^\infty y \omega_0'(0) \cdot (J_0(kr) + J_2(kr)) \cdot k^3 dk, \quad (2.43)$$

donde  $dg$  es la variación de gravedad,  $T$  es la inclinación del terreno,  $\varepsilon_{\tilde{x}}$  es la deformación vertical del medio y  $d\xi$ ,  $d\eta$  corresponden al efecto de la intrusión en las componentes de la desviación de la vertical. En estas expresiones,  $M$  es la masa de la intrusión y  $x_0'(0)$ ,  $y_0'(0)$ ,  $\omega_0'(0)$  y  $q_0'(0)$  son las funciones núcleo, cuyas expresiones se obtendrán seguidamente.  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  dependen de las funciones de Bessel de orden cero,  $J_0(kr)$ .  $\beta_0 = 4\pi G_0 \rho_0$  y  $r$  es la distancia radial a la proyección de la fuente sobre el plano  $\tilde{x}=0$ .  $x$  e  $y$  son las coordenadas cartesianas del punto de cálculo.

Las funciones núcleo se expresan en la forma (Fernández *et al.*, 1997):

$$\begin{aligned} x_0'(0) &= E_{11} A_{0P} + E_{13} B_{0P} + E_{15} D_{0P} - F_1, \\ y_0'(0) &= E_{21} A_{0P} + E_{23} B_{0P} + E_{25} D_{0P} - F_2, \\ \omega_0'(0) &= E_{51} A_{0P} + E_{53} B_{0P} + E_{55} D_{0P} - F_5, \\ q_0'(0) &= E_{61} A_{0P} + E_{63} B_{0P} + E_{65} D_{0P} - F_6. \end{aligned} \quad (2.44)$$

con  $E_{ij}$  y  $F_k$  elementos la matriz  $[E]$  y el vector  $[F]$  respectivamente, que dependen de las características del medio y se obtienen utilizando las soluciones correspondientes al sistema (2.33) en un medio infinito (Rundle, 1980). Los coeficientes  $A_{0P}$ ,  $B_{0P}$  y  $D_{0P}$  están dados por:

$$A_{0P} = \left\{ (kF_5 - F_6) \cdot E_{35}^{34} + (kE_{53} - E_{63}) \cdot E_{F5}^{43} + (kE_{55} - E_{65}) \cdot E_{F3}^{34} \right\} / \Delta,$$

$$\begin{aligned}
B_{0p} &= \left\{ (kE_{51} - E_{61}) \cdot E_{F5}^{34} + (kF_5 - F_6) \cdot E_{15}^{43} + (kE_{55} - E_{65}) \cdot E_{F1}^{34} \right\} / \Delta, \\
D_{0p} &= \left\{ (kE_{51} - E_{61}) \cdot E_{F3}^{43} + (kE_{53} - E_{63}) \cdot E_{F1}^{34} + (kF_5 - F_6) \cdot E_{13}^{34} \right\} / \Delta,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

siendo

$$\Delta = (kE_{51} - E_{61}) \cdot E_{35}^{34} + (kE_{53} - E_{63}) \cdot E_{15}^{34} + (kE_{55} - E_{65}) \cdot E_{13}^{34}$$

y

$$\begin{aligned}
E_{kl}^{ij} &= E_{ik} E_{jl} - E_{il} E_{jk}, \\
E_{Fk}^{ij} &= F_i E_{jk} - F_j E_{ik}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

La matriz  $[E]$  viene dada por:

$$[E] = [a^1] \cdot [a^2] \cdot \dots \cdot [a^{p-1}] \cdot [Z^p(H)], \tag{2.47}$$

donde  $[a^n]$  es la matriz de capa  $n$  definida por Singh (1970),

$$[a^n] = [Z^n(-d_n)] [Z^n(0)]^{-1}. \tag{2.48}$$

La matriz  $[Z^n(z)]$ , de orden  $6 \times 6$ , se muestra explícitamente en Rundle (1980, 1982) y Fernández (1992). Sus elementos dependen de las características de cada capa.

El vector  $[F]$  está definido por el producto,

$$[F] = [a^1] \cdot [a^2] \cdot \dots \cdot [a^{S_l}] \cdot [D] \tag{2.49}$$

donde la matriz de capa  $\begin{bmatrix} a^{s_l} \end{bmatrix}$  se corresponde con la de la capa cuya interfase superior es  $z_s$  y su frontera inferior es  $z_{s_l}$  ( $z_{s_l} = c$ ), donde se introduce la discontinuidad. El vector  $[D]$  es el vector que representa a la fuente. Rundle (1981a), Fernández (1992) y Fernández *et al.* (1997) muestran los elementos de la matriz  $[E]$  y del vector  $[F]$  en función del número de capas que se consideren en el semiespacio estratificado.

### 2.2.2. Funciones fuente.

Una intrusión de magma, considerada como una fuente puntual de masa  $M$  situada a una profundidad  $c$ , se va a representar mediante discontinuidades de salto sobre las cantidades perturbadoras. Estas están dadas en el vector  $[D]$ . Sus componentes no nulas son (Rundle, 1980, 1982; Fernández y Rundle, 1994a):

$$\begin{aligned} [D]_1 &= \frac{2pa^3(1-\nu)\delta}{\mu(1+\delta)}, \\ [D]_3 &= \frac{-Mg}{4\pi k}, \\ [D]_4 &= \frac{2pa^3(1-\nu)\delta}{1+\delta}, \\ [D]_6 &= 2GM, \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde  $p$  es el incremento de presión que produce la expansión de la cámara de magma,  $a$  es su radio y  $\delta=1/(\beta-4\nu)$ .  $[D]_3$  y  $[D]_6$  reflejan la interacción entre la masa y el campo de gravedad y las restantes componentes no nulas reflejan los efectos causados por un cambio de presión en la cámara, lo que produce su expansión o contracción volumétrica

### 2.2.3. Descomposición de soluciones. Linealidad.

En el problema que estamos tratando, los efectos debidos a la expansión/contracción de una cámara magmática producida por la variación de presión en su interior que causa un influjo de material externo y/o una variación de

su temperatura, se pueden aproximar mediante la combinación de los efectos producidos por un centro de expansión y los producidos por una masa puntual esférica, si consideramos que el tamaño de la fuente, que viene representado por su radio,  $a$ , es despreciable frente a su profundidad,  $c$  ( $a \ll c$ ). Mediante esta aproximación y debido a la linealidad de los operadores que aparecen en el sistema de ecuaciones que define el modelo elástico-gravitatorio, los efectos producidos por la inflación/contracción de la cámara, se pueden expresar como (Fernández y Rundle, 1994b):

$$\mathcal{E} = M\varphi(r, c; \tau) + pa^3\chi(r, c; \tau). \quad (2.50)$$

$\varphi$  y  $\chi$  representan, respectivamente, los efectos calculados para una masa unitaria y un centro de expansión cuya intensidad, dependiente de  $pa^3$ , es unitaria. Ambas funciones dependen de la distancia radial a la proyección de la intrusión en superficie,  $r$ , de la profundidad de la fuente,  $c$ , y de los parámetros que definen el modelo cortical,  $\tau$  (densidad, constantes de Lamé y espesores de capa). Los efectos causados por un centro de expansión se obtienen multiplicando por  $pa^3$ , y los causados por una masa puntual se obtienen multiplicando por la magnitud de ésta,  $M$ . Una vez fijadas las características del modelo  $\varphi$  y  $\chi$ , sólo dependen de la distancia radial y de la profundidad de la fuente.

#### 2.2.4. Formulación numérica e integración de las funciones núcleo.

Las soluciones globales (2.37)-(2.43) del sistema que define el modelo (2.33), permiten calcular el campo de desplazamientos, las variaciones de gravedad y potencial, así como el efecto de una intrusión de magma en la desviación de la vertical. Con el fin de desarrollar un programa que realice estos cálculos, es necesario obtener explícitamente los núcleos de integración,  $x_o'(0)$ ,  $y_o'(0)$ ,  $\omega_o'(0)$  y  $q_o'(0)$ , a partir de los elementos de la matriz  $[E]$  y del vector  $[F]$ . Fernández (1992) y Fernández y Rundle (1994a, b) obtienen las expresiones correspondientes a la existencia de dos capas sobre un semiespacio, ampliando la formulación de Rundle (1981a). La



## CAPÍTULO 2

formulación numérica general y su particularización a medios compuestos por una, dos, tres y cuatro capas se describe en Fernández *et al.* (1997).

Una vez que se han obtenido los núcleos de integración, el principal problema que aparece al integrar es que estas funciones pueden tener algún polo en el eje real. Si aparece algún polo, éste coincide con el valor correspondiente al número de onda elástico-gravitatorio que se define mediante la siguiente expresión (Rundle, 1981a):

$$k_g = (\eta^2 \varsigma + \rho \beta \varsigma)^{1/2}, \quad (2.51)$$

en la que,

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \rho_0 g / \mu \equiv \rho g, \\ \varsigma &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \\ \beta &\equiv 4\pi G_0 \rho_0 \equiv 4\pi G \rho, \end{aligned} \quad (2.52)$$

con

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 / \mu, \\ G &= G_0 \mu \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz  $[Z^n(\tilde{z})]$  a partir de la que se obtienen los núcleos de integración, son reales o complejos, dependiendo del valor de  $k$ . Si  $k \geq k_g$ , sus elementos serán reales, mientras que serán complejos si  $k < k_g$ . La formulación numérica desarrollada para obtener la matriz  $[E]$  y el vector  $[F]$  tan sólo se aplica para el caso real. Para el caso complejo, es más fácil calcular las funciones núcleo directamente mediante los procedimientos algebraicos mostrados en la Sección 2.2.1

(Fernández y Rundle, 1994b). Debemos recordar también que, puesto que cada capa posee sus propias constantes elásticas, en cada problema existirán tantos números de onda gravitatorios como número de capas más uno (este último valor correspondiente al medio semi-infinito inferior). En general, el valor de  $k_g$  es diferente para cada capa. El número de diferentes  $k_g$ , determinará el número de intervalos de integración en los que aplicar la formulación numérica citada. Yu *et al.* (1996) y Fernández *et al.* (1997) demostraron que la integración de las funciones núcleo alrededor de sus polos, no contribuye a la solución final en gran medida, por lo que se puede obviar, facilitando la integración y ahorrando tiempo de ejecución.

Otro aspecto a tener en cuenta al integrar las funciones núcleo, es que el límite superior de la integral no es finito. Rundle (1980, 1981a) demuestra que la solución correspondiente al problema elástico-gravitatorio acoplado se reduce a la solución del problema elástico en el límite  $k \gg k_g$ . Esta propiedad proporciona un aumento en la velocidad de integración ya que, desde el punto de vista práctico, podemos considerar la integración de las funciones núcleo elástico-gravitatorias entre  $0 \rightarrow k_{max}$  en lugar de integrar de  $0 \rightarrow \infty$ , restando el correspondiente núcleo elástico. La solución del problema elástico-gravitatorio, la obtendremos sumando la forma integrada del correspondiente núcleo elástico (p.e., Mindlin, 1936). De esta forma:

$$\mathcal{E} = S_e^I + \int_0^{k_{max}} (X_{eg} - X_e) k dk, \quad (2.53)$$

donde  $\mathcal{E}$  es una solución del problema elástico-gravitatorio.  $S_e^I$  es la solución analítica del problema elástico, forma integrada de la función núcleo elástica,  $X_e$  y  $X_{eg}$  es la función núcleo elástico-gravitatoria. Si la fuente de perturbación es un centro de expansión,  $S_e^I$  es la solución correspondiente al modelo de Mogi (1958). El criterio que se sigue en la práctica para determinar  $k_{max}$  es (Fernández y Rundle, 1994b):

$$\max \left| X_{eg} - X_e \right| \leq 10^{-6}, \quad k \geq k_{max}. \quad (2.54)$$

### 2.2.5. Programas de cálculo.

El conjunto de programas GRAVW, desarrollado en FORTRAN 77 por Fernández *et al.* (1997), basándose en los programas GRAVW (Rundle, 1982) y GRAV1 (Fernández y Rundle, 1994a, b) permite calcular desplazamientos (horizontales y verticales), la inclinación, la deformación vertical (“vertical strain”), los cambios de potencial, gravedad y nivel del mar causados por una intrusión de magma situada a una profundidad  $c$  en el medio. Posteriormente, Charco *et al.* (2002) han modificado este paquete informático introduciendo el cálculo de la perturbación en las componentes de la desviación de la vertical sobre la superficie  $z = 0$ . Este nuevo paquete informático se denomina DVGRAVW y está formado por los programas DVGRAVW1, DVGRAVW2, DVGRAVW3 y DVGRAVW4. El número incluido en el nombre del programa indica el número de capas consideradas. Así, DVGRAVW1 calcula desplazamientos (horizontales,  $u_r$  y verticales,  $u_z$ ), inclinación,  $T$ , deformaciones verticales,  $\varepsilon_z$ , cambios de potencial,  $\phi$ , gravedad,  $dg$ , variaciones del nivel del mar,  $dl$  y perturbaciones en las componentes de la desviación de la vertical,  $d\xi$  y  $d\eta$ , sobre la superficie,  $z = 0$ , de un medio formado por una capa sobre un medio semi-infinito.

Como ejemplo, en la Tabla 2.1 se describe la función de las subrutinas que componen el programa DVGRAVW1. Además de estas subrutinas, los programas utilizan diferentes subprogramas de las librerías IMSL (1982) y LINPACK (2003).

La Tabla 2.2 muestra el fichero de entrada del programa DVGRAVW2, para un ejemplo particular. Para la entrada de datos utilizamos la sentencia NAMELIST. Los datos necesarios para ejecutar el programa son los siguientes: las características del modelo de corteza, es decir, el espesor de cada capa denominado  $D_i$ ;  $H$  que corresponde a la profundidad a la que se encuentra el medio semi-infinito continuo, es decir,  $H = D_1 + D_2 + \dots + D_{n-1}$ , siendo  $n-1$  la última capa situada sobre el medio continuo; las constantes de Lamé,  $\mu_i$  y  $\lambda_i$  que se denominan  $AMU_i$  y  $ALAM_i$ ,

---

**PROGRAMA DVGRAVW1:** lee los datos y calcula la deformación, variaciones del nivel del mar, de potencial y gravedad, y las componentes de la desviación de la vertical utilizando las subrutinas HLFSPC y THLTT.

**SUBROUTINA ALAYER:** determina la capa donde está la intrusión.

**SUBROUTINA HLFSPC:** calcula los efectos debidos a una intrusión de magma en un semiespacio homogéneo con las mismas características de la capa en la se encuentra la intrusión.

**SUBROUTINA THFLT:** integra las funciones de Green

**SUBROUTINA CALKRN:** calcula la integración de la diferencia de los núcleos elástico y elástico-gravitatorio.

**SUBROUTINA EMAT:** calcula la matriz  $[E]$ .

**SUBROUTINA AMAT:** calcula las matrices de capa  $n$ ,  $[a^n]$ .

**SUBROUTINA ZCOMPC:** calcula la matriz  $[Z^n(z)]$  para  $k < \min\{k_{gi}, i=1,2\}$ .

**SUBROUTINA Z0INVC:** calcula la matriz  $[Z^n(z)]^{-1}$  para  $k < \min\{k_{gi}, i=1,2\}$ .

**SUBROUTINA ZCPC:** calcula la matriz  $[Z^n(z)]$  para  $\min\{k_{gi}, i=1,2\} < k < \max\{k_{gi}, i=1,2\}$ .

**SUBROUTINA ZCPIN:** calcula la matriz  $[Z^n(z)]^{-1}$  para  $\min\{k_{gi}, i=1,2\} < k < \max\{k_{gi}, i=1,2\}$ .

**SUBROUTINA ZCOMPR:** calcula la matriz  $[Z^n(z)]$  para  $\max\{k_{gi}, i=1,2\} < k$ .

**SUBROUTINA Z0INVR:** calcula la matriz  $[Z^n(z)]^{-1}$  para  $\max\{k_{gi}, i=1,2\} < k$ .

**SUBROUTINA FM1:** calcula el vector  $[F]$  para una intrusión situada en la capa 1.

**SUBROUTINA FM2:** Calcula el vector  $[F]$  para una intrusión en el semiespacio.

**SUBROUTINA GFINT:** realiza la integración de las funciones de Green.

**SUBROUTINA AKNINT:** integra las funciones de Green a lo largo de un contorno considerado.

**SUBROUTINA EI:** calcula las diferencias dadas en la expresión (36) de Fernández (1992).

**SUBROUTINA EBAR:** calcula las funciones  $E_{ij}^{kl}$  dadas en la ecuación (32) de Fernández (1992).

**SUBROUTINA EFA:** calcula las funciones  $E_{ij}^{kl}$  dadas en la expresión (34) de Fernández (1992) para una intrusión en la capa 1.

**SUBROUTINA EFB:** calcula las funciones  $E_{ij}^{kl}$  dadas en la expresión (35) de Fernández (1992) para una intrusión en el semiespacio.

**SUBROUTINA CK10L1:** calcula las funciones núcleo para una intrusión localizada en la capa 1.

**SUBROUTINA CK10L2:** calcula las funciones núcleo para una intrusión en el semiespacio.

**SUBROUTINA BJCALC:** calcula las funciones de Bessel de orden 2,  $J_2(kr)$ , mediante las relaciones de Bessel.

---

**Tabla 2.1.** Unidades del programa DVGRAVW1 (modificada de Fernández *et al.*, 1997).

respectivamente (para cada capa  $i$ -ésima entre las que se incluye el medio semi-infinito inferior); las densidades de capa,  $RHOL_i$  y del semiespacio,  $RHOH$ ; la masa ( $AMASS$ ), incremento de presión ( $PMAGMA$ ) y radio ( $RMAGMA$ ) de la cámara. En este fichero también hay que incluir las coordenadas  $x, y$ , de los puntos estación en el caso de que la variable  $INDIC$ , situada en el programa principal, tome el valor 1. Si  $INDIC = 0$  el programa genera automáticamente un perfil en el que calcula todos los efectos a partir de un paso dado en el fichero de datos, donde  $YSTART$  es el primer valor para la coordenada  $y$ ,  $X$  es el valor considerado para la coordenada que denota. El efecto de la gravedad se suprime si  $RHOFACT$  es igual a un valor pequeño (por ejemplo  $10^{-3}$ ).  $NSTEP$  es el número de intervalos de integración. El número de variables que se incluye en el fichero de datos de entrada depende del número de capas que consideremos, es decir, dependerá del programa  $DVGRAVW$  que utilicemos. Las unidades de cada valor correspondiente a las variables de entrada son: km para las distancias,  $10^3 \text{ kg/m}^3$  para densidades,  $10^{10} \text{ Pa}$  para los parámetros elásticos,  $10^{12} \text{ kg}$  ( $10^{12} \text{ kg} = 1 \text{ Unidad de Masa, UM}$ ) para la masa y  $0.1 \text{ MPa}$  para los valores de presión. Si se quieren calcular variaciones del nivel del mar  $DWATER$  es la anchura de la capa de agua situada sobre el medio y  $RHOW$  su densidad.

---

#### DVGRAVW2.DAT

```
&REEDIN
D1=10.0D0,D2=5.0D0,C=5.0D0,ALAM=3.0D0,ALAM1=3.0D0,AMU=3.0D00,AMU1=3.0D0,
&END
&YINIT YSTART=0.0D0,DELY=0.1D0,X=0.1D0,NNYY=500,INDIC=0, &END
&GRED RHOL1=3.0d0,RHOH=3.00D0,RHOFACT=1.0D0,NSTEP=150, &END
&WATER DWATER=0.0D0,RHOW=0.0D0, &END
&CHAMBR PMAGMA=1.D4,RMAGMA=1.0D0,AMASS=1.0D0, &END
```

---

**Tabla 2.2** Fichero de entrada del programa DVGRAVW2.

Cada programa tiene cuatro ficheros de salida. En un fichero se escriben las características del modelo terrestre, junto con los efectos calculados para cada punto. Otro fichero proporciona las coordenadas o distancias radiales, el desplazamiento vertical, el radial, la inclinación, la deformación vertical, el cambio de gravedad en superficie, aire-libre y Bouguer, el cambio del nivel del mar y las componentes de la desviación de la vertical. Un tercer fichero contiene los valores de las diferencias

entre los núcleos elástico y elástico-gravitatorio,  $X_{eg}-X_e$ . El cuarto proporciona, para comparación, los resultados correspondientes a un semiespacio homogéneo de las mismas características de la capa en la que está la intrusión.

### 2.3. VARIACIONES DE GRAVEDAD.

La vigilancia microgravimétrica, junto con otras técnicas de observación geodésica, está siendo aplicada, cada vez más, en el estudio de volcanes activos (p.e., Rymer, 1996; Jousset *et al.*, 2000). Desde el punto de vista del tipo de observación y de su finalidad, se pueden llevar a cabo dos tipos de campañas gravimétricas en áreas volcánicas. Las campañas que tienen por objeto proporcionar datos sobre la estructura del interior del medio consisten en la observación de la gravedad en varias estaciones de campo, tomando una de ellas como estación de referencia. Las variaciones de gravedad que se obtienen así están distribuidas en una determinada región del espacio, es decir, son variaciones espaciales. Tras corregir las observaciones por diferencia de latitud, altura y del efecto de la atracción gravitatoria del material existente entre las distintas estaciones que configuran la red, hay que calcular las diferencias relativas con respecto a la gravedad observada en la estación tomada como referencia. Posteriormente, los datos se mostrarán en un mapa de anomalías, que proporcionará información sobre estructuras de densidad bajo la superficie terrestre. Esta técnica ha sido ampliamente empleada en volcanología para determinar el tamaño de cámaras magmáticas, las dimensiones de conductos de alimentación, la extensión de alteraciones hidrotérmicas en el sistema volcánico, etc. (p.e., Yokoyama, 1989; Rymer y Brown, 1986). El orden de magnitud de estas anomalías va desde las decenas hasta las centenas de miligales (Rymer, 1994). El otro propósito de los estudios microgravimétricos llevados a cabo en zonas volcánicas, es proporcionar variaciones de masa y densidad temporales con el fin de obtener información sobre los procesos dinámicos del volcán. Para ello, aparte de la información espacial se obtienen variaciones temporales del campo de gravedad en un conjunto de estaciones representativo de la zona.

## CAPÍTULO 2

Las variaciones de gravedad temporales, es decir, las diferencias entre observaciones realizadas en diferentes instantes de tiempo, son generalmente de menor magnitud que las espaciales, estando normalmente su orden de magnitud entre 10 y 100  $\mu\text{Gal}$  ( $1 \text{ Gal} = 10^{-2}\text{ms}^{-2}$ ) (Rymer, 1994). Por ello, tanto en la adquisición de datos como en su análisis, se deben utilizar técnicas de alta precisión. La instrumentación utilizada en campañas dinámicas es esencialmente la misma que la empleada en campañas estáticas; la diferencia fundamental se limita al diseño de la campaña, que dependerá de factores como el tamaño y profundidad de la fuente bajo la superficie terrestre, lo que origina determinadas variaciones. Los errores en las medidas restringen, en este caso, la precisión microgravimétrica a aproximadamente 15  $\mu\text{Gal}$ , lo que es equivalente a una incertidumbre inferior a 5 cm en la elevación del terreno (Gottsmann y Rymer, 2002).

Una vez eliminados los factores instrumentales (deriva, calibración del gravímetro, taras inducidas térmica o mecánicamente) y el efecto de la marea considerado en la reducción de datos, las variaciones de gravedad temporales observadas,  $dg_s$ , se podrán descomponer en (Eggers, 1987):

$$dg_s = dg_{FA} + dg_B + dg_M. \quad (2.55)$$

El primer término de esta expresión,  $dg_{FA}$ , es la variación de gravedad causada por el efecto aire-libre, debido a los desplazamientos verticales del medio,  $u_z$ , que produce la fuente. Esta variación es igual a la corrección del efecto aire-libre que produce la masa deformada, es decir,  $dg_{FA} = \gamma_{FA} u_z$  ( $\gamma_{FA} = 0.3086 \gamma_{FA} \text{ mGal/m}$ ).  $dg_B$ , es el efecto Bouguer que representa la atracción de la masa deformada. Finalmente,  $dg_M$  es el efecto gravitatorio causado por las variaciones de densidad en el medio. Estas últimas pueden ser debidas a varios factores como, por ejemplo, cambios en la cantidad y/o posición del material de la cámara, formación de huecos o relleno de los existentes, movimientos laterales o verticales de magma en el edificio volcánico, etc.

La interpretación de estas observaciones conlleva la utilización de modelos cada vez más realistas. Existen múltiples trabajos que analizan las variaciones de gravedad producidas por intrusiones de magma en la corteza. Todos ellos, mediante diferentes caminos, llegan a la conclusión de que las variaciones de gravedad producidas por una fuente de dilatación/contracción esférica puntual en un semiespacio elástico, son debidas al efecto de la elevación del terreno. Por ejemplo, a partir de cálculos numéricos, Rundle (1978b) concluye que la variación total de gravedad producida por una fuente de dilatación/contracción en un semiespacio elástico, no difiere significativamente del efecto aire-libre debido a la elevación del terreno. Posteriormente, Walsh y Rice (1979) obtuvieron las expresiones analíticas para calcular las variaciones de gravedad en superficie producidas por varios tipos de fuente entre los que se encontraba el caso especial de una fuente de dilatación/contracción con simetría esférica en un semiespacio elástico. Estos autores señalan que, si observamos la variación de gravedad producida por este tipo de fuentes mediante un gravímetro fijo en un punto de la superficie del medio, esta variación es cero. Puesto que las observaciones se hacen sobre el terreno, que se deforma consecuencia de la dilatación/contracción de la fuente, a estas medidas hay que aplicarles la corrección aire-libre de la masa deformada, es decir,

$$dg_S = \gamma_{EA} u_{\xi} . \quad (2.56)$$

En este análisis se supone que la roca que alberga la cámara está saturada, es decir, no se produce inyección de nuevo material. Por tanto, si consideramos la masa de la intrusión como una fuente de masa puntual esférica, obtenemos que:

$$dg_S = \gamma_{EA} u_{\xi} + \frac{GM\epsilon}{R^3} , \quad (2.57)$$

con  $M$  el incremento de masa,  $\epsilon$  la profundidad de la fuente y  $R$  la distancia radial del punto de observación a la fuente, es decir,  $R^2 = x^2 + y^2 + \epsilon^2$ . Este resultado coincide con el que muestra Okubo (1991) al obtener expresiones analíticas de las deformaciones y variaciones de gravedad producidas por varias fuentes puntuales.



Para calcular las variaciones de gravedad en superficie mediante el modelo elástico-gravitatorio de tierra continental, hay que resolver la ecuación de Poisson, que en el modelo elástico-gravitatorio se encuentra acoplada con la ecuación de equilibrio estático. Aplicando la definición de derivada direccional a la expresión (2.36) se obtiene que:

$$(\nabla\phi + 4\pi G\rho u) \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - 4\pi G\rho u_z. \quad (2.58)$$

Consideremos ahora la condición de continuidad del potencial perturbador y el potencial gravitatorio externo,  $\phi_e$ , a través de la superficie  $z = 0$  (Rundle, 1982). En ausencia de masas,  $\phi_e$  satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi_e = 0. \quad (2.59)$$

Por tanto, sobre la superficie se verifica que:

$$\phi = \phi_e, \quad (2.60)$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} - 4\pi G\rho u_z = -\frac{\partial\phi_e}{\partial z}.$$

La cantidad observable mediante un gravímetro es el cambio de gravedad externo, que está referenciado a un cambio cero a una altura infinita sobre el semiespacio (condición de contorno). Hasta ahora, no se ha tenido en cuenta la deformación del medio que produce la fuente de perturbación. Así, como señalaron Walsh y Rice (1979), la variación de gravedad medida en superficie,  $dg_s$ , se obtiene añadiendo la variación aire-libre (Rundle, 1982):

$$dg_S = -\frac{\partial \phi_e}{\partial \zeta} + \gamma_{EA} u_{\zeta} = -\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - 4\pi G \rho u_{\zeta} + \gamma_{EA} u_{\zeta} \quad (2.61)$$

Esta cantidad representa las variaciones de gravedad en superficie que se deben comparar con las variaciones de gravedad observadas para su interpretación. A partir de esta expresión se pueden obtener las variaciones de gravedad aire-libre y Bouguer, que eliminan el efecto de la deformación del medio. Así, restando el efecto aire-libre causado por la elevación del terreno, se obtienen las variaciones de gravedad aire-libre,  $dg_{EA}$ ,

$$dg_{EA} = dg_S - \gamma_{EA} u_{\zeta} = -\frac{\partial \phi_e}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - 4\pi G \rho u_{\zeta}, \quad (2.62)$$

que reflejan sólo redistribuciones de masa en el medio, incluyendo las producidas por la atracción de la masa deformada. La variación de gravedad Bouguer,  $dg_B$ , se obtiene al eliminar la atracción de una lámina plana e infinita de altura igual a la deformación vertical del medio (p.e., Rundle, 1982):

$$dg_B = dg_{EA} + 2\pi G \rho u_{\zeta} = -\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - 2\pi G \rho u_{\zeta}. \quad (2.63)$$

Esta corrección es similar a la que se aplica en la reducción de datos gravimétricos en las campañas para obtener las anomalías Bouguer y resulta como consecuencia de la variación de las masas topográficas que produce la deformación.  $dg_B$  proporciona información acerca de la redistribución de masas que se produce en el interior del medio como consecuencia de la perturbación.

### 2.3.1. Corrección del conjunto de programas GRAVW en el cálculo de variaciones de gravedad.

Tras estudiar y realizar varias pruebas de cálculo con el conjunto de programas GRAVW (Fernández *et al.*, 1997) hemos detectado un error en la obtención de variaciones de gravedad. El error detectado parece tener su origen en la intención de los autores de calcular por separado y de forma conjunta el efecto que causan ambos tipos de fuente, masa y presión. Se produce al calcular variaciones de gravedad producidas por una fuente de masa puntual y es debido a la corrección que hay que aplicar al gradiente del potencial perturbador para obtener el gradiente del potencial externo (2.61). Cuando se calcula de forma conjunta el efecto de la masa y de la presión el error desaparece. El objetivo de este apartado es mostrar este error y cómo ha sido solucionado.

Las líneas de código de los programas GRAVW que proporcionan las variaciones de gravedad calculadas a partir del modelo elástico-gravitatorio, son:

#### (a) En el programa principal

```

. . . . .
CALL THFLT(T, NL, AMU, ALAM, AMU1, ALAM1, H, C, Y0)
. . . . .
Y0(2,J) = Y0(2,J) +ANS(2,J)
Y0(2,J)=Y0(2,J)-1.D3*BETAL*Y0(1,J)
C
C NOTE THAT Y0(2,J) IS NOW MINUS THE GRADIENT OF THE EXTERNAL
POTENTIAL
IF (DABS(AMC).GT.0.D0) Y0(2,J)=Y0(2,J) -1.D3*BETAL*Y0(1,J)
IF (DABS(PMC).GT.0.D0) Y0(2,J)=Y0(2,J)+1.D3*BETAL*Y0(1,J)
. . . . .
GSURF=Y0(2,J)+0.003085D0*Y0(1,J)
. . . . .

```

donde la subrutina THFLT proporciona las integrales de las funciones de Green.  $Y0(2,J)$  se obtiene integrando la diferencia de los núcleos de integración correspondientes a la variación de gravedad (ver Sección 2.2.4, ecuación (2.53)). Al sumarle la solución del problema elástico para un semiespacio de características las de la capa donde se halla la fuente,  $ANS(2,J)$ , y la corrección  $-1.D3*BETAL*Y0(1,J)$ , se

transforma en menos la componente vertical del gradiente del potencial externo, que se corresponde con la cantidad observable en superficie (2.61).  $BETAL=4\pi G\rho$  e  $Y0(1,J)$  es la variable que proporciona el desplazamiento vertical del medio. Los parámetros AMC y PMC se corresponden con el incremento de masa y presión. Para obtener las variaciones de gravedad en superficie, GSURF, hemos de tener en cuenta la reducción aire-libre,  $0.003085*Y0(1,J)$ . Las variaciones de gravedad que se obtienen se expresan en miligales.

**(b) En la subrutina CALKRN**, con la que calculamos las funciones núcleo, las líneas correspondientes son:

```
. . . . .
GKERN = -GBIG*AMC*DEXP (-CK)
PKERN = -GBIG*AMC*DEXP (-CK/AK)
G10R = G10R-GKERN-BETAL*X10R
IF (DABS (AMC) .GT.0.D0) G10R = G10R-BETAL*X10R
IF (DABS (PMC) .GT.0.D0) G10R = G10R+BETAL*X10R
P10R = P10R-PKERN
Y10R=Y10R-YKERN
. . . . .
```

GKERN es el núcleo elástico correspondiente al potencial perturbador generado por la masa AMC, G10R es la parte real del núcleo elástico-gravitatorio que proporciona el potencial perturbador y X10R es la parte real del núcleo elástico-gravitatorio correspondiente a los desplazamientos verticales del medio.

Vamos a realizar un estudio de las líneas de código señaladas. Analíticamente hemos visto, que para el caso elástico-gravitatorio (ecuación (2.61)), el término dependiente de  $\beta = 4\pi G\rho$ , tan sólo hay que restarlo una vez para obtener las variaciones de gravedad en superficie, por lo que para que el valor de la expresión calculada, en el caso de la masa puntual, coincida con el de la expresión analítica, hay que realizar la siguiente modificación del código fuente:

## CAPÍTULO 2

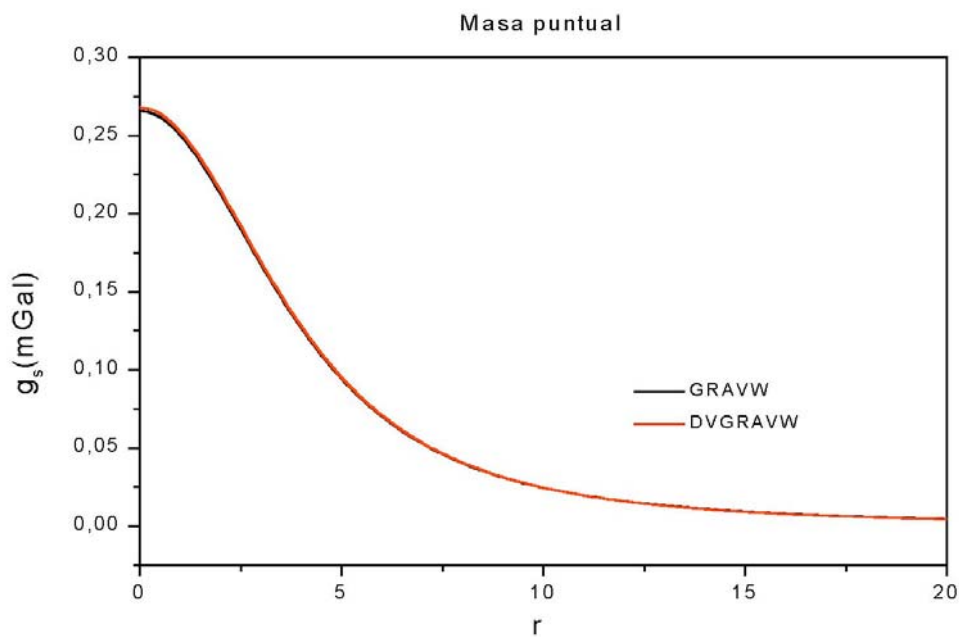
```
Y0(2,J) = Y0(2,J) + ANS(2,J) -1.D3*BETAL*Y0(1,J)  
IF((PMC).GT.0.D0).AND.((AMC).EQ.0.D0)Y0(2,J)=Y0(2,J)+1.D3*BETAL*Y0(1,J),
```

sentencias que sustituirán las sentencias de condición marcadas en rojo en el programa principal. En la subrutina CALKRN, las nuevas sentencias son:

```
G10R = G10R-GKERN-BETAL*X10R  
IF((DABS(PMC).GT.0.D0).AND.(DABS(AMC).EQ.0.D0))G10R=G10R+BETAL*X10R
```

Estas correcciones afectan al cálculo de las variaciones de gravedad producidas por un incremento de masa, sin que se produzca una variación de presión en la cámara. Al aplicar esta sentencia de condición, las variaciones de gravedad en superficie vendrán dadas mediante la siguiente sentencia:

```
Y0(2,J) = Y0(2,J)+ANS(2,J)-1.D3*BETAL*Y0(1,J)
```



**Figura 2.4.** Diferencias entre los distintos casos: programa elástico-gravitatorio original (GRAVW), programa elástico-gravitatorio modificado (DVGRAVW)

La Figura 2.4 muestra las diferencias que se producen al modificar el código mediante un ejemplo particular, en el que se reflejan las diferencias entre las

variaciones de gravedad producidas por 1 UM ( $1 \text{ UM} = 10^{12} \text{ kg}$ ) situada a 5 km de profundidad en un semiespacio elástico-gravitatorio. El medio elástico-gravitatorio consta de una capa sobre semiespacio, que posee las mismas características que el semiespacio continuo. En este medio  $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$  y las constantes elásticas  $\lambda$  y  $\mu$  son iguales a 30 GPa.

En general, la diferencia entre la solución elástico-gravitatoria, obtenida con el código original y la solución elástico-gravitatoria, calculada con la modificación señalada, es del orden de  $|4\pi G \rho \mu_{\kappa}|$ , donde los desplazamientos verticales son debidos a la masa de la intrusión. Puesto que los desplazamientos del medio son principalmente debidos a la expansión volumétrica de la fuente, siendo la aportación de la masa inyectada nula desde el punto de vista práctico si se considera la precisión de las observaciones (Rundle, 1981a), esta modificación del código no es importante a la hora de interpretar variaciones de gravedad.



## **CAPÍTULO 3**

# **ESTUDIO CUANTITATIVO DE LAS ECUACIONES DEL MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO**

En el Capítulo 2 se han mostrado las expresiones que proporcionan los desplazamientos producidos por una fuente puntual esférica situada en un semiespacio elástico-gravitatorio estratificado. Estas expresiones son diferentes a las de los desplazamientos causados por una fuente de las mismas características en medio estratificado puramente elástico (p.e., Singh, 1970). Al comparar ambas expresiones, surge una cuestión de interés: ¿cuál es el efecto del acoplamiento elástico-gravitatorio sobre el campo de desplazamientos?.

Hasta ahora, trabajos como los de Rundle (1981a) y Fernández *et al.* (1997) han mostrado algunos resultados al respecto, mediante la comparación numérica de soluciones particulares y estudios teóricos parciales. En este capítulo hemos realizado un estudio cuantitativo de las ecuaciones del modelo elástico-gravitatorio, considerando como fuente una intrusión magmática, con el fin de validar y generalizar los resultados obtenidos previamente.



### 3.1. ESTUDIO CUANTITATIVO.

Rundle (1981a) señala que el efecto del acoplamiento de las ecuaciones del sistema (2.33) no es importante sobre el campo de desplazamientos si se consideran efectos producidos en campo cercano y periodos de tiempo que abarcan desde meses a pocos años. Los resultados de este autor, para el caso particular de una falla en la corteza, indican que la diferencia entre la solución elástica y la solución elástico-gravitatoria es del orden de  $10^{-7}$ , por lo que el acoplamiento elástico-gravitatorio se puede despreciar a la hora de calcular desplazamientos co- y post-sísmicos. Así, concluye que, para estudiar la relajación post-sísmica se pueden despreciar los términos dependientes de  $G$ , responsables del acoplamiento del sistema de ecuaciones. De esta forma la primera ecuación del sistema (2.33) se reduce a (Rundle, 1981b):

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho_0 g}{\mu} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z) - \frac{\rho_0 g}{\mu} \mathbf{e}_z \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

lo que supone una simplificación matemática considerable.

Pollitz (1997) realiza un estudio teórico de las ecuaciones del modelo elástico-gravitatorio, en el contexto sísmico, similar al que vamos a proponer en esta sección. Recientemente, Battaglia (2001) ha trasladado este estudio de las ecuaciones del modelo elástico-gravitatorio al contexto volcanológico. En este último trabajo se llega a la conclusión de que el acoplamiento elástico-gravitatorio no es relevante en el cálculo de desplazamientos y variaciones de gravedad si se consideran las escalas de tiempo propias de los problemas elásticos. Los periodos de tiempo, representados por un problema elástico, abarcan los estados previos a una erupción, co-eruptivos y post-eruptivos dentro del ciclo volcánico (Rundle, 1982 y Fernández *et al.*, 1999).

Para determinar la influencia del acoplamiento elástico-gravitatorio en el problema volcánico, podemos realizar un análisis dimensional del sistema de ecuaciones del problema elástico-gravitatorio sin necesidad de resolverlo. Este tipo

de análisis proporciona la aportación de cada término de una ecuación frente al resto. Si se elige la escala adecuada, se pueden despreciar los términos de la ecuación cuya aportación al problema es pequeña frente al resto (p.e., Logan, 1987).

La primera ecuación del sistema (2.33) la podemos escribir en forma vectorial:

$$\frac{\rho_0 g}{\mu} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z) - \frac{\rho_0 g}{\mu} \mathbf{e}_z \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\rho_0}{\mu} \nabla \phi_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.2)$$

donde se ha producido un cambio de notación con respecto a la ecuación (2.33) debido a la necesidad de considerar diferentes tipos de fuente. En esta ecuación el primer término representa la interacción existente entre el campo gravitatorio y los desplazamientos verticales del medio,  $u_z$ . El segundo corresponde a la acción del campo gravitatorio sobre la densidad perturbada. El acoplamiento de las ecuaciones del modelo es debido al tercer término de la ecuación, que proviene de las variaciones de densidad producidas por la deformación. El último término es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.3)$$

El potencial perturbador,  $\phi_1$ , es solución de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi G \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

donde  $-\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}$  corresponde al efecto Bouguer causado por la variación de densidad que produce la dilatación,  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ . A partir de las nociones introducidas en el capítulo segundo, se puede observar fácilmente, que todos los términos de la ecuación (3.2) son tensores de primer orden. Los tres primeros términos de esta ecuación dependen de  $g$  o de  $G$ , es decir, proporcionan los efectos sobre el campo de desplazamientos relacionados con la aceleración gravitatoria,  $g$ , o con el campo gravitatorio.

### CAPÍTULO 3

Para escalar las ecuaciones dadas mediante las expresiones (3.2) y (3.4), es necesario conocer la longitud característica, es decir, la longitud más pequeña a la que se observan variaciones. Estamos aproximando la Tierra mediante un semiespacio elástico que es un medio no acotado de dimensión infinita. Sin embargo, sólo nos interesan los desplazamientos y variaciones de gravedad sobre la superficie del medio,  $z = 0$ . Las condiciones de contorno del problema elástico-gravitatorio establecen que todas las cantidades perturbadas tienden a cero en el infinito. Rundle (1981a) observa que los desplazamientos y variaciones de gravedad decaen rápidamente a profundidades superiores a la profundidad de la fuente. Por tanto, podemos considerar la profundidad de la fuente,  $c$ , como longitud característica en la dirección definida por el eje  $z$ . En cuanto a las dimensiones radiales del dominio, también podemos tomar  $c$  como longitud característica, puesto que, tanto desplazamientos como variaciones de gravedad, son despreciables a distancias cuyo orden de magnitud es superior al orden de la profundidad de la fuente (ver p. e., Rundle, 1982).

El primer y segundo término de la ecuación (3.2) escalan como:

$$g\rho_0 |\mathbf{u}|/c, \quad (3.5)$$

ya que tan sólo dependen de las derivadas parciales de primer orden del campo de desplazamientos.

El tercer término de esta ecuación es función del potencial perturbador. La dependencia de este potencial con los desplazamientos del medio se establece mediante la ecuación (3.4). Al integrar en un volumen arbitrario y aplicar el teorema de la divergencia a la expresión (3.4) se obtiene la expresión (2.35). De aquí obtenemos que el término dependiente de la Constante de Gravitación Universal es del orden de:

$$4\pi G\rho_0^2 |\mathbf{u}|. \quad (3.6)$$

La magnitud de la divergencia de los esfuerzos elásticos en (3.2), se obtiene a partir de

$$\mu |\mathbf{u}| / c^2, \quad (3.7)$$

ya que, como se observa en la expresión (3.3), este término depende del laplaciano y del gradiente de la divergencia del vector desplazamiento, operadores que proporcionan derivadas parciales de segundo orden.

Todos los términos poseen dimensiones de  $[ML^{-2}T^2]$ , donde  $M$  indica dimensiones de masa,  $L$  de distancia y  $T$  las correspondientes al tiempo.

Teniendo en cuenta estas acotaciones, la relación entre los términos dependientes de  $G$  y los términos correspondientes a los esfuerzos elásticos, se puede estudiar mediante la siguiente razón adimensional:

$$\frac{4\pi G \rho_0^2 |\mathbf{u}|}{\mu |\mathbf{u}| / c^2} = \frac{4\pi G \rho_0^2 c^2}{\mu}. \quad (3.8)$$

Utilizando valores de  $\rho_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  para la densidad y de  $\mu = 30 \text{ GPa}$  para la rigidez del medio, que se emplean habitualmente en zonas volcánicas, esta relación tiene un valor de  $10^{-5}$  para una fuente situada a 10 km de profundidad y de  $10^{-7}$  para una fuente situada a 1 km. El orden de magnitud de esta razón aumenta proporcionalmente a la profundidad de la fuente,  $z$ . Por tanto, la influencia de los términos  $G$ -dependientes será mayor al aumentar la profundidad de la fuente de perturbación. Las profundidades típicas de cámara varían entre 1 – 10 km (Battaglia *et al.* 1999; Folch, 2000). A efectos prácticos, teniendo en cuenta estas profundidades y los resultados de las estimaciones que proporciona la relación (3.8), el término correspondiente al campo gravitatorio que genera el medio aporta, aproximadamente,  $1 \mu\text{m}$  sobre una deformación máxima de 1 metro. Por tanto, el término correspondiente al acoplamiento elástico-gravitatorio no juega un papel importante

### CAPÍTULO 3

dentro de los efectos gravitatorios que interactúan sobre el campo de desplazamientos causado por una intrusión magmática. Además, su aportación es despreciable frente a la precisión que se alcanza en medidas de campo.

Del mismo modo, realizamos un análisis para estimar la magnitud del efecto que producen los términos  $g$ -dependientes frente a la magnitud del término correspondiente a los esfuerzos elásticos, es decir, de los dos primeros términos de la ecuación (3.2) frente al último. Así, la razón entre estos términos,

$$\frac{g\rho_0|\mathbf{u}|/c}{\mu|\mathbf{u}|/c^2} = \frac{g\rho_0 c}{\mu}, \quad (3.9)$$

va desde  $10^{-2}$ , para una fuente de perturbación situada a una profundidad de 10 km, hasta  $10^{-3}$  para una fuente de profundidad igual a 1 km, si utilizamos los mismos valores que en el caso anterior. Por tanto, despreciar la aportación de los términos dependientes de la aceleración gravitatoria producirá un error por debajo del 1% del orden de magnitud del desplazamiento máximo. Este error se produce cuando la fuente está situada a 10 km de profundidad. Por tanto, si tenemos en cuenta que para este tipo de fuentes los desplazamientos que se observan son del orden del centímetro, el error que se produce al despreciar el primer y segundo término de la ecuación (3.2) es del orden de la décima del milímetro.

A partir de este análisis podemos concluir que la gravedad del medio no es relevante para la interpretación de los desplazamientos producidos por una intrusión en la corteza, suponiendo que la profundidad real de la intrusión es del orden de entre 1-10 km. Cuando la rigidez del medio disminuye, el efecto del campo gravitatorio sobre el campo de desplazamientos aumentará, al aparecer este parámetro elástico en el denominador de las expresiones (3.8) y (3.9). De esta forma, el efecto de la aceleración de la gravedad y del campo gravitatorio sobre el campo de desplazamientos será importante cuando la fuente de perturbación se encuentre inmersa en un medio viscoelástico, ya que a escalas de tiempo suficientemente grandes, se producirá una relajación del medio (disminución de  $\mu$ ) considerable.

Rundle (1981a) llegó a la misma conclusión mediante el número de onda elástico-gravitatorio,  $k_g$  (2.51), ya que este número es inversamente proporcional a la rigidez del medio,  $\mu$ . Además, este autor señala que el efecto del acoplamiento sobre el campo de desplazamientos se puede detectar a grandes distancias radiales, que no son relevantes a la hora de diseñar la vigilancia de una zona volcánica. Por tanto, cuando disminuye la rigidez del medio, el efecto del campo gravitatorio terrestre sobre el campo de desplazamientos se propaga hacia el origen.

Hasta ahora, no hemos considerado la aportación del término fuente, correspondiente a las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el medio. Este término jugará el papel de la intrusión magmática, es decir, simulará la combinación de la variación volumétrica de las paredes de la cámara junto con el emplazamiento súbito de una masa en el medio que se produce como consecuencia de la inyección de material en la cámara. Realizando una simplificación despreciamos en (3.2) los términos dependientes de la aceleración de la gravedad y los  $G$ -dependientes. Así, obtenemos una nueva ecuación (p.e., Mindlin, 1936; Aki y Richards, 2002):

$$\nabla \cdot \sigma + f \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) - \rho_0 \nabla \phi_2 = 0, \quad (3.10)$$

donde  $f$  es la fuerza debida al incremento de presión en la cámara,  $\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$  es la delta de Dirac en el punto en el que se sitúa la fuente,  $\mathbf{r}_c$  y  $-\rho_0 \nabla \phi_2$  es la fuerza conservativa que genera la masa de la intrusión. El potencial que genera esta masa,  $\phi_2$ , verifica la ecuación de Poisson en el interior del medio:

$$\nabla^2 \phi_2 = 4\pi G \rho_m \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c), \quad (3.11)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de la intrusión. Aki y Richards (2002) señalan que la fuerza de cuerpo debida a la presurización de la cámara magmática, se puede obtener mediante la divergencia de un tensor de esfuerzos adecuado (Aki y Richards, 2002). Además, señalan que dicha fuente es equivalente a la superposición de tres dipolos mutuamente ortogonales. Por tanto, puesto que este tipo de fuentes se puede

### CAPÍTULO 3

obtener mediante la divergencia de un tensor de esfuerzos, escalará de la misma forma que el último término de la ecuación (3.2). Su magnitud vendrá dada por el siguiente parámetro  $\mu|u|/c^2$  (Mindlin, 1936; Battaglia; 2001). Por tanto, si consideramos (3.7), este término posee la misma importancia relativa que el término que proporciona los esfuerzos elásticos,  $\nabla \cdot \sigma$  en la ecuación (3.10). Para obtener las dimensiones del término que representa la atracción ejercida por la masa de la intrusión (tercer término de la expresión 3.10), hemos de tener en cuenta que, a profundidades suficientemente grandes ( $a \ll \ell$ ), la atracción de una distribución de masas esférica, se puede aproximar por la atracción de una masa puntual. Además, la variación volumétrica que experimentan las paredes de una cámara magmática de radio  $a$ , como consecuencia del incremento de presión que genera la inyección de magma, es igual a (McTigue, 1987):

$$4\pi a^2 \Delta a, \quad (3.12)$$

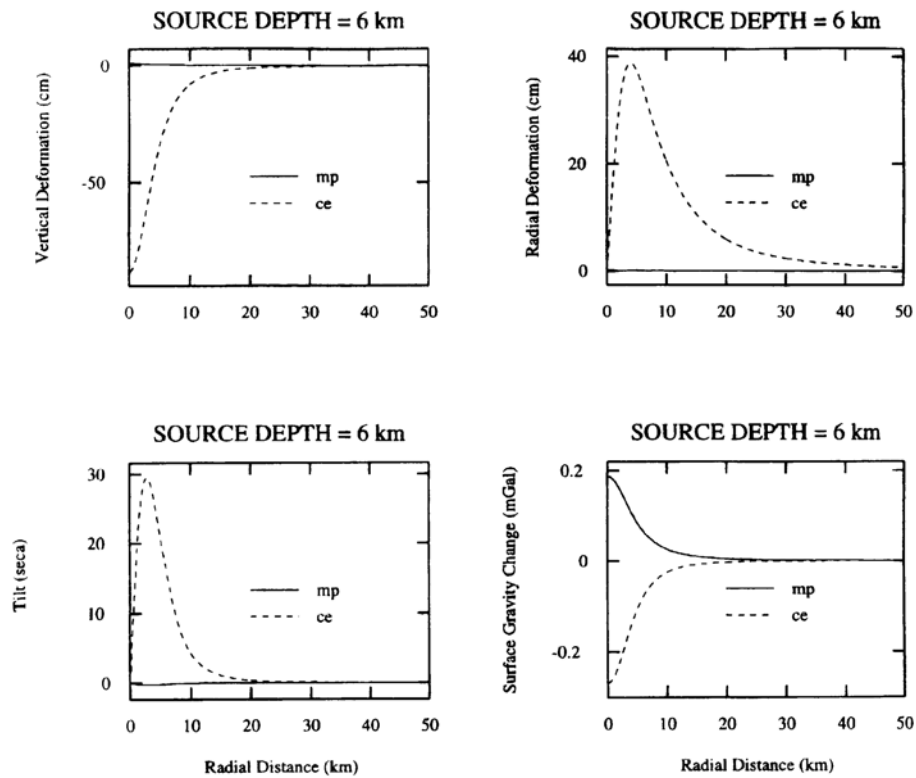
donde se supone que esta variación sólo depende del desplazamiento radial de sus paredes,  $\Delta a$ . Para obtener esta expresión hemos considerado que la variación que se ha producido es pequeña con respecto al tamaño original de la cámara, es decir,  $\Delta a \ll a$ . De este modo, el término dependiente de  $\rho_0 \nabla \phi_2$  tiene dimensiones de:

$$4\pi G \rho_0 \rho_m a^2 \Delta a / c^2. \quad (3.13)$$

La aportación de la atracción gravitatoria que ejerce la masa de la intrusión frente a los esfuerzos elásticos, y, por tanto, frente a la fuerza que origina la dilatación/contracción de la cámara, la podemos obtener a partir de la siguiente relación:

$$\frac{4\pi G \rho_0 \rho_m a^2 \Delta a / c^2}{\mu|u|/c^2} = \frac{4\pi G \rho_0 \rho_m a^2 \Delta a}{\mu|u|}. \quad (3.14)$$

Suponiendo una intrusión basáltica de densidad próxima a  $3.10^3 \text{ kg m}^{-3}$  (Rundle, 1982; Battaglia *et al.* 1999) y que la variación volumétrica de la roca que alberga la cámara,  $d^2\Delta a$ , es del orden de  $0.1 \text{ km}^3$ , esta razón es igual a  $10^{-4}$ , cuando los desplazamientos observados en la superficie terrestre son del orden del metro. Aunque esta razón aumenta conforme disminuye el orden de magnitud de los desplazamientos observados podemos despreciar el término fuente correspondiente a la atracción gravitatoria que ejerce la intrusión de magma en la ecuación (3.10) sin pérdida de precisión. Por tanto, los desplazamientos del medio están producidos, principalmente por la expansión/contracción de la cámara. Fernández *et al.*, (1997) mostraron un ejemplo numérico en el que se observa este efecto (Figura 3.1).



**Figura 3.1.** Desplazamientos verticales y horizontales, inclinación del terreno y variaciones de gravedad en superficie producidas por un centro de expansión de radio  $a = 1 \text{ km}$ , con un incremento de presión de  $1 \text{ MPa}$  y una masa puntual de  $1 \text{ UM}$ , situadas a  $6 \text{ km}$  de profundidad en el modelo de corteza para la isla de Lanzarote descrito en Fernández y Rundle (1994a) (Fernández *et al.*, 1997).

Los resultados indican que el parámetro  $\beta = 4\pi G\rho$ , que muestra el efecto de la interacción de la fuente con el medio elástico-gravitatorio, se puede ignorar en el cálculo numérico de desplazamientos. A efectos prácticos, equivaldría a calcular



### CAPÍTULO 3

desplazamientos puramente elásticos mediante la ecuación (3.10), ignorando el término dependiente de  $-\rho_0 \nabla \phi_2$ . Una vez se ha obtenido el campo de desplazamientos, las variaciones de gravedad se obtendrían resolviendo (3.4).

Sin embargo, si consideramos las variaciones de gravedad que produce la masa de la intrusión y calculamos de forma conjunta desplazamientos y variaciones de gravedad, no podemos ignorar tan fácilmente el acoplamiento elástico-gravitatorio. En este caso, el potencial perturbador que genera la fuente verifica la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = -4\pi G \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 4\pi G \rho_m \Delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c). \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.12), observamos que el laplaciano del potencial causado por la masa de la intrusión,  $\phi_2$  escala como  $4\pi G \rho_m a^2 \Delta a / c^3$ . Así, si comparamos los potenciales  $\phi_1$ , debido al acoplamiento elástico-gravitatorio, dado mediante la expresión (3.4), y  $\phi_2$ , obtenemos la siguiente razón, que proporciona la magnitud relativa entre ambos:

$$\frac{4\pi G \rho_0 |\mathbf{u}| / c}{4\pi G \rho_m a^2 \Delta a / c^3} = \frac{|\mathbf{u}| c^2}{a^2 \Delta a}. \quad (3.16)$$

Para una fuente situada a 1 km de profundidad esta relación es igual a  $10^{-1}$ , mientras que es igual a 1 para  $c = 10$  km. Ambos potenciales son del mismo orden, es decir, no se puede despreciar uno frente a otro. Además, el término correspondiente a la fuente de masa es del mismo orden que los términos  $G$ -dependientes en la ecuación (3.2). Así, la relación (3.16) muestra que, si tenemos en cuenta las variaciones de gravedad que produce la masa de la intrusión, no podemos despreciar el acoplamiento elástico-gravitatorio que produce el término correspondiente al potencial  $\phi_1$  en (3.15), cuya influencia también aparece en la ecuación de equilibrio dada mediante la expresión (3.2).

Battaglia (2001) obtiene estimaciones similares de la aportación de cada uno de los términos del sistema formado por (3.2) y (3.15). A partir de aquí, indica que, según los trabajos de Rundle (1978b) y Walsh y Rice (1979) las variaciones de gravedad producidas por una fuente esférica inmersa en un medio homogéneo se deben tan sólo a la masa de la intrusión. Por ello, consideran que la variación de gravedad debida al acoplamiento se cancela (es decir,  $\nabla\phi_I = 0$ ), con lo que el acoplamiento elástico-gravitatorio no es relevante para la interpretación de variaciones de gravedad.

En el capítulo anterior hemos resumido las conclusiones de los trabajos de Rundle (1978b) y Walsh y Rice (1979). Ambos muestran que las variaciones de gravedad sobre la superficie de un medio puramente elástico y homogéneo, que causa una fuente de presión, son iguales al efecto aire-libre que origina la deformación del medio. Para realizar este estudio, estos autores supusieron que la cámara esta saturada. Si consideramos la masa de la intrusión, las variaciones de gravedad se obtienen al sumar la atracción que ejerce la masa deformada y la que ejerce la masa de la intrusión (Okubo, 1991). Así, de los trabajos de Rundle (1978b) y Walsh y Rice (1979), en los que consideran medios puramente elásticos sin tener en cuenta el acoplamiento y el efecto del término fuente correspondiente a la masa de la intrusión, no se puede deducir que el acoplamiento existente entre gravedad y deformación es despreciable.

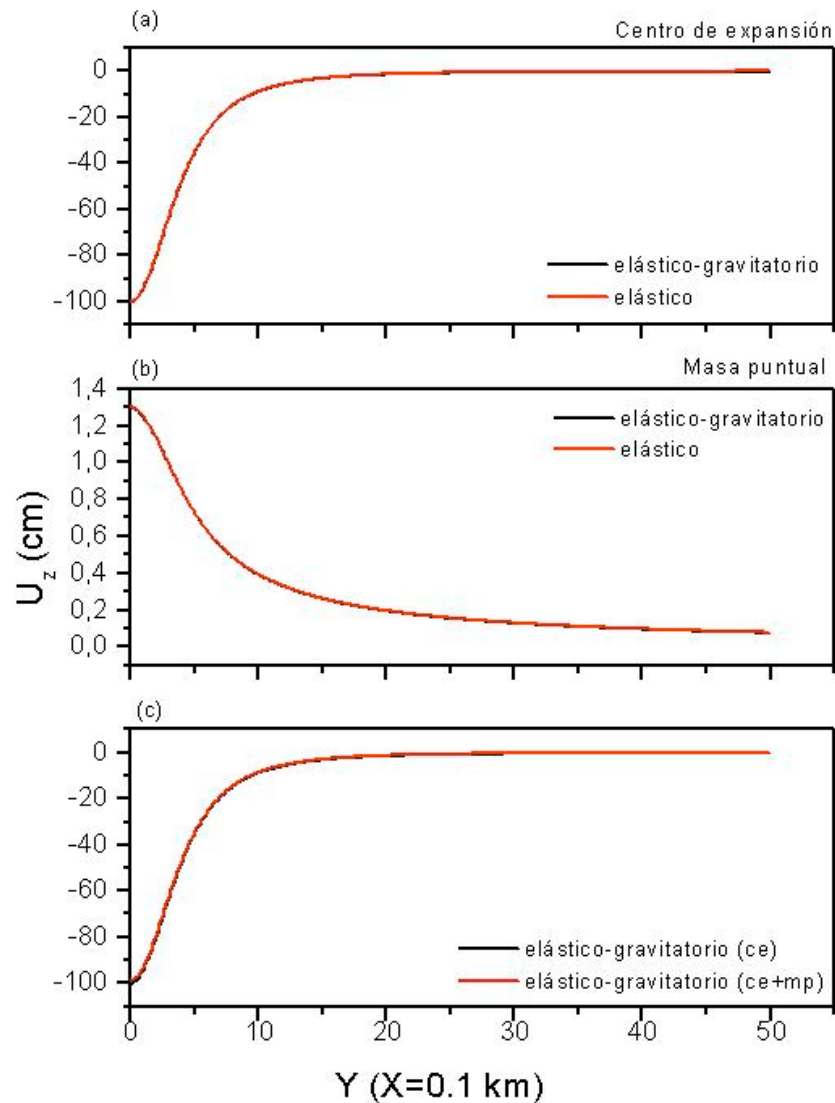
Por otro lado, la relación (3.16) muestra que la atracción que ejerce la masa de la intrusión es significativa para el cálculo de variaciones de gravedad. Fernández *et al.* (1997) muestran, en el ejemplo de la Figura 3.1, que el efecto de la masa de la intrusión sobre las variaciones de gravedad observadas en superficie puede ser importante. Como consecuencia de nuestro estudio, podemos deducir que para interpretar variaciones de gravedad hemos de considerar la masa de la intrusión. Además, al ser el potencial gravitatorio que provoca la masa del mismo orden que el que genera el acoplamiento elástico-gravitatorio, tampoco se puede ignorar la interacción de la masa de la intrusión con el campo gravitatorio. Esta interacción se debe a las diferencias que proporcionan las relaciones (3.8), (3.9) y (3.14). El error

que se comete al despreciar los términos que representan el efecto del acoplamiento elástico-gravitatorio y el efecto de la masa en la ecuación (3.2) se transmite al calcular variaciones de gravedad puesto que  $\phi_i$  depende de  $\mathbf{u}$  y la ecuación (3.15) es continua. Por tanto, el acoplamiento elástico-gravitatorio así como la atracción de la masa de la intrusión pueden modificar considerablemente las variaciones de gravedad producidas por la deformación del medio.

### 3.2. EJEMPLOS TEÓRICOS.

Una vez hemos estimado teóricamente la influencia del campo gravitatorio sobre los desplazamientos y variaciones de gravedad, el objetivo de este apartado es mostrar, mediante ejemplos, los resultados y conclusiones del análisis dimensional de las ecuaciones del modelo elástico-gravitatorio. La primera conclusión, que hemos extraído del análisis, es que despreciar la gravedad no supone un error significativo en el cálculo de desplazamientos.

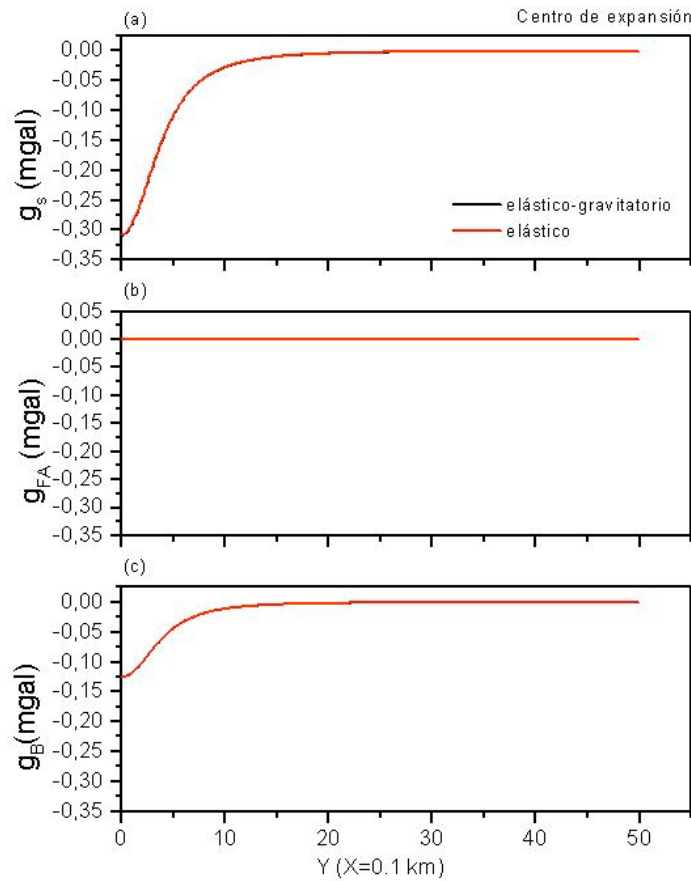
La Figura 3.2 muestra los desplazamientos producidos por un centro de expansión en un medio elástico, junto con los producidos por la misma fuente en un medio elástico-gravitatorio, siendo ambos medios homogéneos y de características idénticas. Los medios poseen una densidad igual a  $3000 \text{ kg cm}^{-3}$  y parámetros de Lamé  $\lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ . El centro de expansión, de radio  $1 \text{ km}$  y con un incremento de presión de  $10^3 \text{ MPa}$ , está situado a  $5 \text{ km}$  de profundidad. Gráficamente, se observa que los desplazamientos producidos por un centro de dilatación en un semiespacio elástico son prácticamente iguales a los producidos por la misma fuente situada a cierta profundidad en un medio elástico-gravitatorio. Como hemos mostrado mediante el análisis de las ecuaciones, el efecto del acoplamiento del medio es despreciable siendo ambas soluciones cualitativa y cuantitativamente similares. Los desplazamientos producidos por la masa de la intrusión se pueden despreciar frente a los causados por un incremento de presión en la cámara (Figuras 3.2b y 3.2c). Es decir, la expansión/contracción del edificio volcánico está producida principalmente por la variación volumétrica de la fuente.



**Figura 3.2.** Desplazamientos verticales producidos por: **(a)** un centro de expansión de las características descritas en el texto en un medio homogéneo puramente elástico (línea roja) y en un medio elástico-gravitatorio (línea negra), **(b)** una masa puntual y **(c)** un centro de dilatación/contracción de las características descritas en el texto (línea negra) y por la combinación de la masa y de la presurización de la cámara (línea roja). El eje  $z$  apunta hacia el interior del medio de forma que **(a)** y **(c)** muestran una elevación del terreno y **(b)** un hundimiento.

Para mostrar gráficamente los resultados, obtenidos en el apartado anterior, sobre la influencia del medio al calcular las variaciones de gravedad, vamos a considerar los siguientes casos: (1) variación de la presión en el interior de la cámara y (2) inyección de magma junto con la presurización de la cámara que produce el proceso de intrusión y/o variaciones de temperatura.

La Figura 3.3 muestra las variaciones de gravedad en superficie, aire-libre y Bouguer causadas por un centro de dilatación/contracción de las características descritas en el ejemplo anterior.



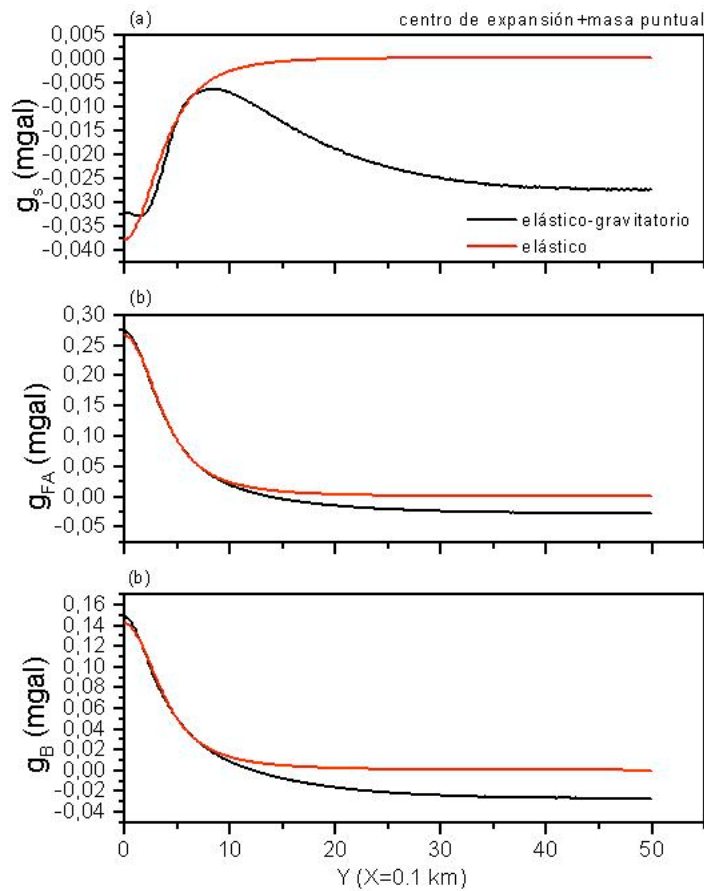
**Figura 3.3.** (a). Variaciones de gravedad en superficie,  $g_s$ , producidas por un centro de expansión de las características descritas en el texto. El efecto del centro de expansión en un medio elástico-gravitatorio se muestra mediante la línea negra. La línea roja muestra el efecto en un medio puramente elástico. (b) Idem para las variaciones de gravedad aire-libre,  $g_{FA}$ . (c) Variaciones de gravedad Bouguer,  $g_B$ .

Las variaciones de gravedad están causadas, en este caso, por la variación de densidad que produce la deformación del medio. Se observa que las variaciones de gravedad en superficie son iguales al efecto aire-libre (Figura 3.3b). Por tanto, las variaciones de gravedad son iguales a las producidas por el mismo tipo de fuente (centro de expansión) en un medio elástico, lo que permite despreciar el acoplamiento del sistema (2.33), si no se tiene en cuenta el término fuente correspondiente a la masa de la intrusión.

Desde el punto de vista físico es imposible que se produzca un incremento de la masa en la cámara sin una variación de presión en su interior. La cantidad de magma inyectada en la cámara,  $\Delta V_{magma}$ , será una combinación de su expansión ( $\Delta V_\beta$ ) y de la compresión del magma almacenado ( $\Delta V_\alpha$ ), es decir,  $\Delta V_{magma} = \Delta V_\beta + \Delta V_\alpha$  (Delaney y McTigue, 1994). La compresión volumétrica del magma dependerá de las condiciones del medio en el que se encuentre la cámara. Si la cavidad rocosa que alberga el depósito no es rígida, la dilatación de la cámara será resultado de la deformación elástica de sus paredes. El volumen de la cámara no aumenta significativamente en este caso (Murase y McBirney, 1973). Por tanto, como ya señaló Blake (1981), podemos considerar que el magma contenido en la cámara se comprime para acomodar la cantidad de magma entrante, pero no se produce una expansión volumétrica de la cámara importante. Si consideráramos tan sólo la masa de la intrusión para calcular variaciones de gravedad, las diferencias entre las calculadas a partir del modelo elástico y las calculadas a partir del modelo elástico-gravitatorio son despreciables al eliminar el término correspondiente al acoplamiento en la ecuación (3.15).

Como hemos señalado, la controversia entre los autores que trabajamos en este problema surge al estudiar las variaciones de gravedad producidas por la combinación de ambos tipos de fuente en un medio en el que se considera el campo gravitatorio. Las variaciones de gravedad producidas en un medio elástico son debidas a la masa de la intrusión, siendo el efecto de la variación volumétrica de la cámara igual al efecto aire-libre de la masa deformada. En este trabajo hemos visto que los potenciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son del mismo orden en la ecuación (3.15), por lo que las variaciones de densidad producidas por la dilatación de la fuente,  $(\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u})$  no son despreciables en un medio elástico-gravitatorio.

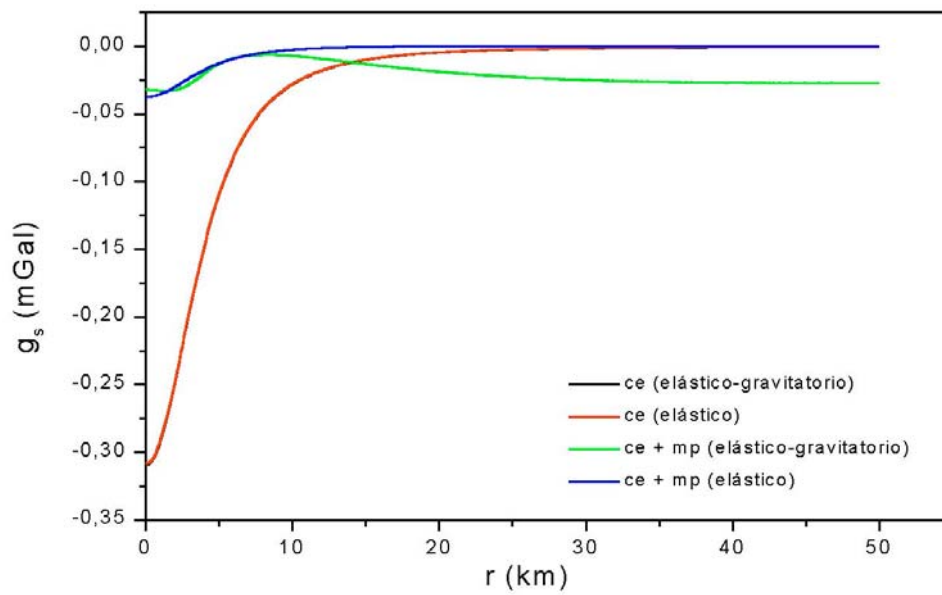
La Figura 3.4 muestra las diferencias que se producen al considerar dos medios distintos, uno elástico y otro elástico-gravitatorio, además de la masa de la intrusión y su interacción con el campo gravitatorio. Se combinan los efectos producidos por el centro de expansión descrito previamente y los producidos por 1 UM ( $=10^{12}$  kg) situada a 5 km de profundidad.



**Figura 3.4.** Variaciones de gravedad producidas por la combinación de una fuente de dilatación/contracción y la carga puntual que representa la inyección de magma en la cámara en un medio elástico (línea roja) y en un medio elástico-gravitatorio (línea negra), **(a)** en superficie,  $g_s$ , **(b)** aire-libre,  $g_{FA}$ , y **(c)** Bouguer,  $g_B$ .

En este ejemplo, el efecto del acoplamiento elástico-gravitatorio se observa en las proximidades del origen (proyección de la fuente en superficie) y a una distancia radial de, aproximadamente, 2 veces la profundidad de la fuente. El cambio de patrón, signo y magnitud de las variaciones de gravedad corregidas por el efecto aire-libre y Bouguer de la masa deformada, indican que el efecto de la masa de la intrusión no se puede ignorar. Al eliminar el efecto de la masa deformada, Figura 3.4(b) y (c), observamos también como disminuye el efecto del acoplamiento elástico-gravitatorio lo que indica que las variaciones de gravedad están afectadas por el error que se introduce al despreciar los términos dependientes de  $G$  y de  $g$  en la ecuación (3.2). La Figura 3.5 muestra la comparación de estos resultados con los obtenidos en el ejemplo anterior. El efecto del acoplamiento elástico-gravitatorio, aunque de menor magnitud que el efecto de la masa como se puede observar en la

Figura (3.5), se puede detectar mediante observaciones de precisión. Por tanto, para la interpretación de variaciones de gravedad observadas en zonas volcánicas es necesario tener en cuenta la masa de la intrusión así como del campo gravitatorio.



**Figura 3.5.** Comparacion entre las variaciones de gravedad causadas por el centro de expansión y las causadas por el centro de expansión+la masa puntual descritos en el texto en un medio elástico y otro elástico-gravitatorio.





## CAPÍTULO 4

# APLICACIÓN PRÁCTICA DEL MODELO ELÁSTICO-GRAVITATORIO

La vigilancia geodésica de zonas activas conlleva, entre otras disciplinas, la interpretación mediante modelos matemáticos de las deformaciones y variaciones de gravedad observadas. Históricamente, los datos gravimétricos y de desplazamientos se han interpretado por separado, debido, fundamentalmente, a problemas de logística, limitaciones de cálculo y disponibilidad de modelos. Sin embargo, su interpretación conjunta proporciona información sobre la dinámica de la cámara (p. e., Rundle, 1982; Berrino *et al.*, 1992; Rymer y Williams-Jones, 2000; Fernández *et al.*, 2001a) y, por tanto, información de los procesos que se están produciendo en su interior. El modelo elástico-gravitatorio permite interpretar conjuntamente ambos tipos de datos (p.e., Fernández *et al.*, 1997).

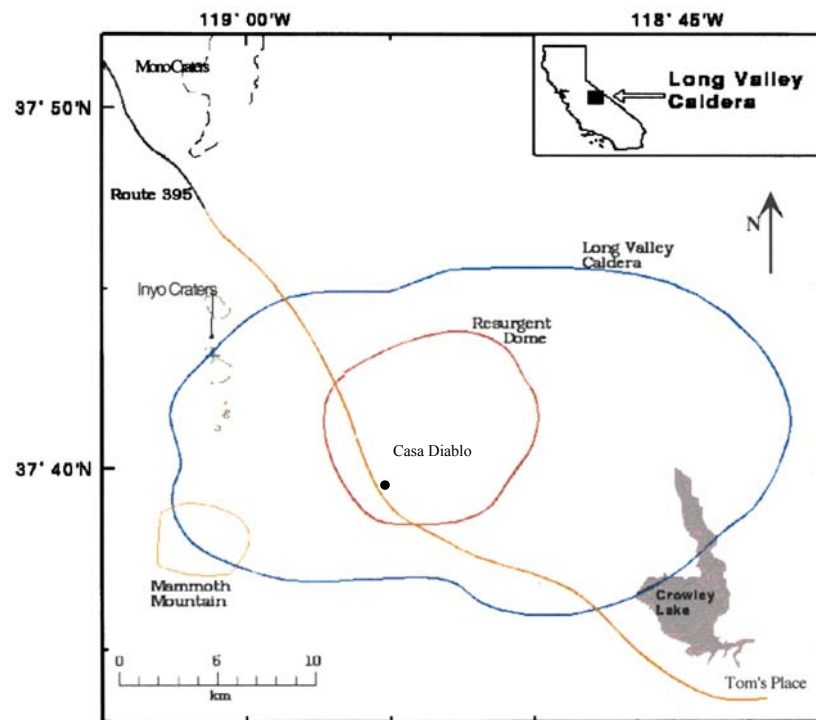
En este capítulo vamos a mostrar, con ejemplos reales, lo que hemos visto teóricamente: es más apropiado utilizar el modelo elástico-gravitatorio que utilizar modelos elásticos que no consideren la atracción gravitatoria de la masa ni su interacción con el campo gravitatorio. Por tanto, siempre que sea posible, las

deformaciones y variaciones de gravedad se deberán interpretar conjuntamente. Su interpretación por separado puede generar errores al determinar los parámetros de la fuente de perturbación.

### **4.1. LONG VALLEY CALDERA (CALIFORNIA).**

Esta caldera, de forma elíptica (Figura 4.1), se extiende 32 km en dirección Este-Oeste por 17 km de Norte a Sur. Está situada al Este de la cordillera de Sierra Nevada (California). Su elevación media es de 2200 m sobre el nivel del mar. Se formó a partir de una erupción explosiva que tuvo lugar hace 0.7 millones de años y que produjo, aproximadamente, 600 km<sup>3</sup> de magma y aproximadamente 300 km<sup>3</sup> de cenizas que se dispersaron hacia el Oeste de la zona (Abers, 1985). El colapso de la cámara magmática tras la erupción produjo un hundimiento del terreno, de más de 2 km de profundidad. A continuación, comenzó a desarrollarse un domo en su parte Centro-Oeste. Bailey *et al.*, (1976) proporcionan una descripción detallada de la evolución de la caldera y de las fases volcánicas posteriores a su formación. Como resumen, podemos señalar que en los últimos 500.000 de años se han producido, de forma ocasional, algunas erupciones en el interior de la caldera o en sus márgenes. Las erupciones más recientes tuvieron lugar hace, aproximadamente, 500 ó 600 años. Como consecuencia, se formaron tres nuevos domos, localizados en la cadena volcánica de Inyo. La mayor parte del magma que alimentó estas erupciones provenía de una cámara situada bajo esta cadena volcánica, situada al Norte de Long Valley. La erupción reciente más importante se produjo en su margen Oeste hace, aproximadamente, 100.000 años (Bailey, *et al.*, 1976; Hill, 1984).

(a)



(b)

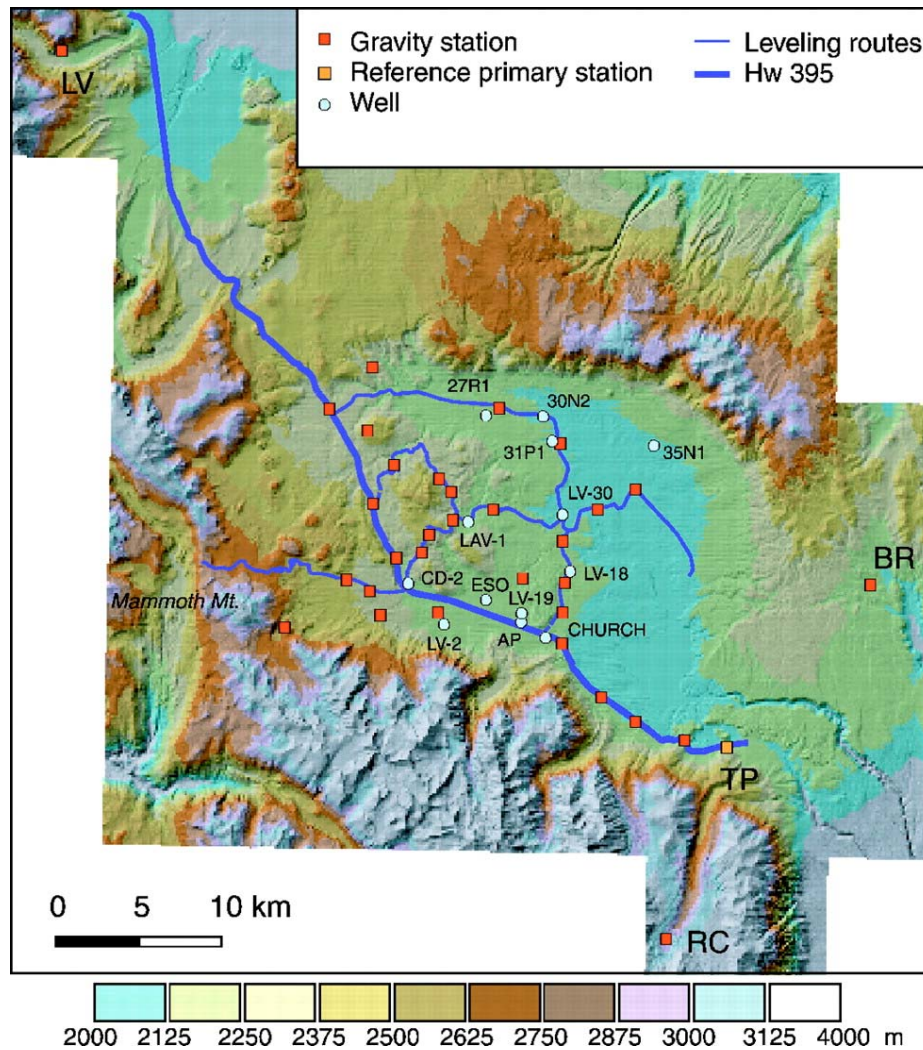


**Figura 4.1.** (a) Esquema de la geología de Long Valley (Tiampo *et al.*, 2000). (b) Vista de la caldera tomada desde Mammoth Mountain

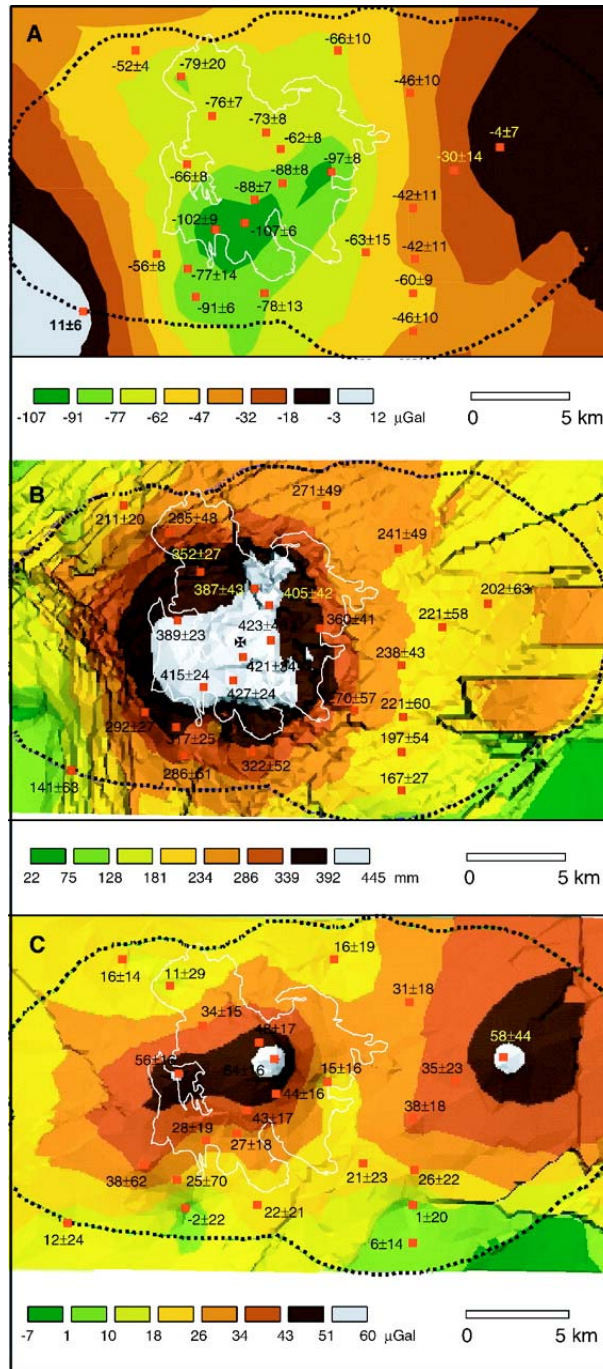
#### **4.1.1. Reactivación de la caldera, periodos de inflación y observaciones gravimétricas.**

Desde 1978 se han producido varios episodios de elevación del terreno y actividad sísmica en Long Valley Caldera. Mientras que la elevación del terreno se ha producido principalmente en el domo central de la caldera, la actividad sísmica se ha concentrado al Sur de esta. Como consecuencia, la “California Division of Highways” decidió nivelar la autopista 395, que surca la caldera desde Tom’s Place hasta la ciudad de Lee Vining, situada al Norte de la caldera (Figura 4.1a). El resultado de esta nivelación fue que se había producido una elevación de 200-250 mm desde el año 1975, en el que se había realizado la campaña anterior (Denlinger y Riley, 1984). En 1982 y 1983 se llevaron a cabo nuevas campañas que demostraron que esta elevación comenzó después de 1975, probablemente en 1978 ó 1979 y continuó, a velocidad constante, hasta 1983 (Castle *et al.*, 1984). El segundo periodo de inflación del domo central, detectado en Long Valley, comenzó en octubre de 1989, tras varios años de calma relativa (p. e., Tiampo *et al.*, 2000). La sismicidad en la caldera aumentó junto con su actividad sobre Mammoth Mountain. En 1992 se alcanzó una elevación de 8 cm sobre la línea de nivelación establecida a lo largo de la autopista 395 y de 11 cm, cerca de la central térmica de Casa Diablo. Después, el terreno comenzó a restablecer su forma original, situándose de nuevo en los niveles de 1988 (Langbein, 1989; Langbein *et al.*, 1993, 1995). El último episodio de actividad tuvo lugar entre 1997 y 1998 (p. e., Fialko *et al.*, 2001).

A comienzos de junio de 1980 se definió una red gravimétrica de precisión en la región (Roberts *et al.*, 1988). La Figura 4.2 muestra la localización de las estaciones que la componen. La estación de referencia se encuentra localizada en Tom’s Place. La red se extiende desde la cadena montañosa de Sierra Nevada, al Oeste de Lee Vining, en dirección Sureste, hacia la estación de White Mountains, situada al Este de Bishop. La red se observó anualmente desde su definición hasta el año 1985. Las variaciones de gravedad espaciales y temporales, observadas en el intervalo de 1980-1983, sugirieron que se estaba produciendo una inyección de magma, acompañada de la elevación del terreno descrita anteriormente (Jachens y Roberts, 1985).



**Figura 4.2.** Mapa de Long Valley donde se muestra las redes diseñadas para las observaciones gravimétricas, de nivelación y nivel freático. Estaciones gravimétricas: BR, Benton Range; LV, Lee Vining; RC, Rock Creek; y TP, Tom's Place (Battaglia *et al.*, 1999).



**Figura 4.3.** (A) Variaciones de gravedad ( $\mu\text{Gal}$ ) en Long Valley (1982-1998). La línea blanca es la frontera del domo. (B) Elevación en Long Valley Caldera entre 1982 y 1998. (C) Variaciones de gravedad aire-libre (Battaglia *et al.*, 1999).

Battaglia *et al.* (1999) realizaron una campaña durante el mes de julio de 1998. Midieron la gravedad en 34 estaciones de la red, tomando como referencia la estación situada en Tom's Place. Estos autores observaron que, entre julio de 1982 y julio de 1992, la gravedad disminuyó considerablemente en el interior de la caldera. Las medidas revelaron un descenso de  $-107 \pm 6 \mu\text{Gal}$  centrado sobre el domo, mientras que las estaciones que se tomaron como control no reflejaron tal variación. Después de corregir las medidas del efecto de la deformación del terreno (efecto aire-libre) y del efecto de las variaciones del nivel freático, las variaciones de gravedad mostraban un máximo de  $64 \pm 16 \mu\text{Gal}$  sobre el domo (Figura 4.3). A partir de estos datos Battaglia *et al.* (1999) estiman un valor de  $3300 \text{ kg m}^{-3}$  para la densidad de la intrusión. Este valor lo interpretan como indicador de que, en Long Valley, se estaba produciendo una intrusión basáltica.

Aunque los modelos utilizados para interpretar los periodos de carga que se han observado en Long Valley difieren significativamente, la mayoría tiene en común dos fuentes de deformación: una situada a una profundidad de 7-10 km bajo el domo central y otra fuente secundaria localizada en el margen sur de la caldera a una profundidad de entre 4 y 8 km. Algunos autores también consideran una falla que sitúan al sur de la caldera, donde se ha concentrado principalmente la actividad sísmica.

Tiampo *et al.* (2000) modelaron el segundo periodo de expansión invirtiendo datos de nivelación y distanciometría de alta precisión mediante un algoritmo genético (AG). En este trabajo, compararon los resultados obtenidos al invertir los datos observados suponiendo que éstos estaban causados por dos fuentes esféricas tipo Mogi (Mogi, 1958) con los obtenidos al considerar dos elipsoides de tipo Yang-Davis (Davis, 1986; Yang *et al.*, 1988). Los parámetros que caracterizaban las fuentes esféricas proporcionaron datos sintéticos (valores calculados a partir de un modelo) que ajustaban mejor las observaciones. La fuente más grande, de volumen de  $0.036 \text{ km}^3$ , estaba situada a una profundidad de 9.9 km bajo el domo, mientras que la segunda, de tan sólo  $0.008 \text{ km}^3$ , se encontraba a una profundidad de 7.3 km bajo el margen sur de la caldera. La profundidad de las fuentes de geometría elipsoidal



estaba intercambiada: la más grande, con un volumen de  $0.037 \text{ km}^3$ , se encontraba a 9.6 km de profundidad y la más pequeña, con un volumen de  $0.002 \text{ km}^3$ , a 11.8 km. Además, señalaron la necesidad de incluir fuentes adicionales en el proceso de inversión. En particular, propusieron incluir en el modelo una de las fallas existentes al Noroeste de la caldera.

#### 4.1.2. Aplicación del modelo elástico-gravitatorio a Long Valley Caldera.

El modelo de deformación elástico-gravitatorio permite realizar combinaciones entre la variación de presión que se produce en el interior de la cámara y la masa de la intrusión, sin necesidad de suponer que la variación volumétrica de la cámara se debe, exclusivamente, a un incremento de masa. Este hecho permite interpretar casos particulares como aquellos en los que las variaciones de gravedad se producen sin deformaciones del terreno. Además, debido a su generalidad, el modelo elástico-gravitatorio permite incluir estructuras elásticas que pueden darse, de forma ocasional, en regímenes volcánicos, como por ejemplo, características del medio poco corrientes o rellenos de cámara con material de baja densidad. En este caso, vamos a comparar los resultados obtenidos mediante el modelo elástico-gravitatorio con los que se obtienen a partir del modelo elástico para interpretar las deformaciones y variaciones de gravedad observadas en Long Valley Caldera durante el segundo periodo de inflación (1989-1992). Para ello, partimos de los resultados obtenidos por Battaglia *et al.* (1999) y por Tiampo *et al.* (2000).

Consideremos dos fuentes puntuales de deformación con simetría esférica. El incremento de masa y presión finales, los podemos obtener a partir de los resultados de Tiampo *et al.* (2000), considerando la variación de volumen que se produjo en el primer periodo de inflación y el radio inicial de las fuentes. En la ecuación (McTigue, 1987):

$$p = 4\mu \frac{\Delta a}{a_1}, \quad (4.1)$$

$p$  es la variación de presión de la fuente,  $\mu$  es la constante de rigidez del medio,  $a_i$  es el radio inicial de la intrusión y  $\Delta a_i$  es la variación que sufre este parámetro como consecuencia de la variación de volumen que causa  $p$ . La relación existente entre el radio y su variación la podemos calcular a partir de la variación volumétrica de la cámara, que denotaremos por  $\Delta V_f$ . Así, si consideramos una fuente esférica (Charco *et al.*, 2002):

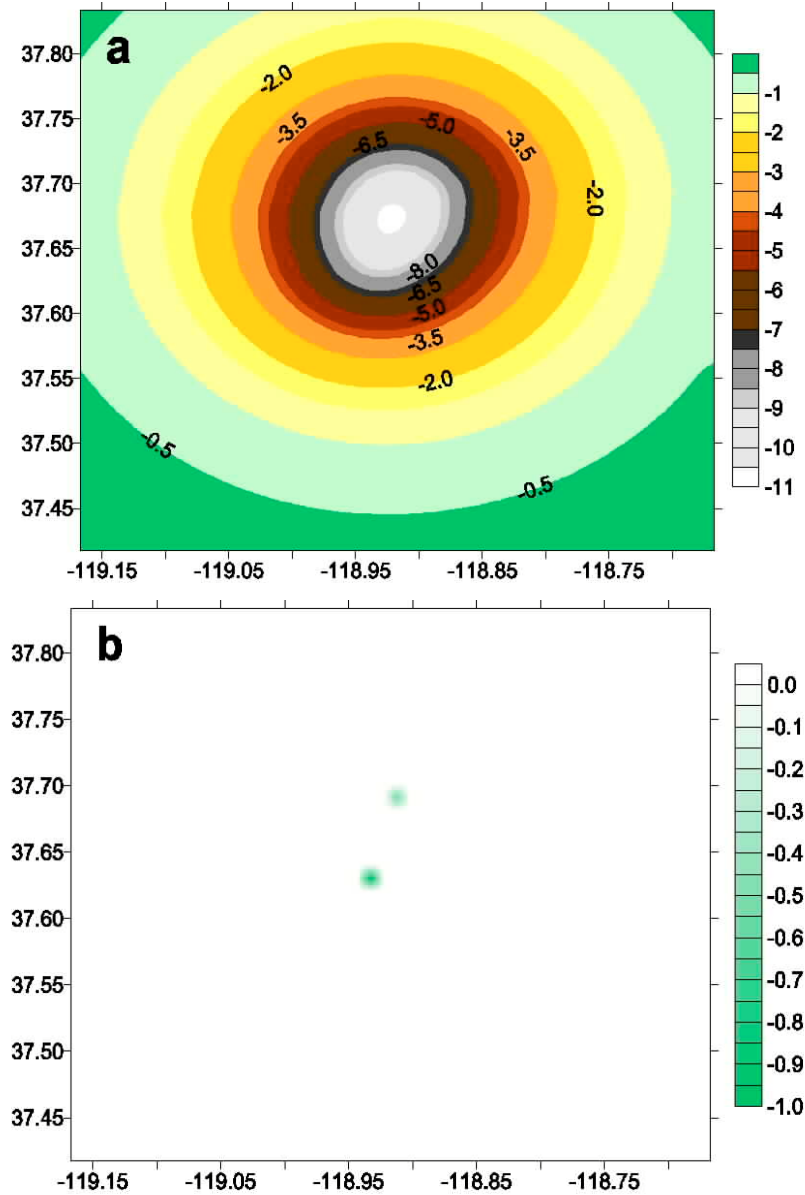
$$p = 4\mu \left[ \left( \frac{3\Delta V_f}{4\pi a_i^3} + 1 \right)^{1/3} - 1 \right]. \quad (4.2)$$

En este caso, el radio inicial de las fuentes,  $a_i$ , será igual a 4 km para la fuente más profunda (Elbring y Rundle, 1986) y de 1.5 km para la fuente situada bajo el margen sur (Sanders, 1984). También nos interesa conocer el incremento de masa que se produjo en la cámara durante el segundo periodo de inflación. Utilizando la misma aproximación realizada por Battaglia *et al.* (1999), es decir, sin considerar el volumen de compresión del magma existente en la cámara, el incremento de masa,  $M$ , será:

$$M = \rho_m \Delta V_f, \quad (4.3)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad del magma. Una densidad del magma igual a  $3300 \text{ kg m}^{-3}$  (Battaglia *et al.*, 1999) proporciona, teniendo en cuenta las expresiones (4.1) y (4.2), los siguientes valores:  $p = 9 \text{ MPa}$  para la fuente bajo el domo, con un incremento de masa de 0.1188 UM y un incremento de presión de 37.7 MPa para la fuente más superficial con  $M = 0.026 \text{ UM}$ . Estos valores son necesarios tanto para la aplicación del modelo elástico como para la del elástico-gravitatorio.

La Figura 4.4 muestra los desplazamientos y variaciones de gravedad calculados mediante un modelo elástico. El medio, en el que se sitúan las dos fuentes de presión puntuales con simetría esférica, es un semiespacio homogéneo con  $\nu = 0.25$ . Los desplazamientos verticales de la superficie son similares a los observados en Long Valley durante el segundo periodo de inflación (Langbein *et al.*, 1993;

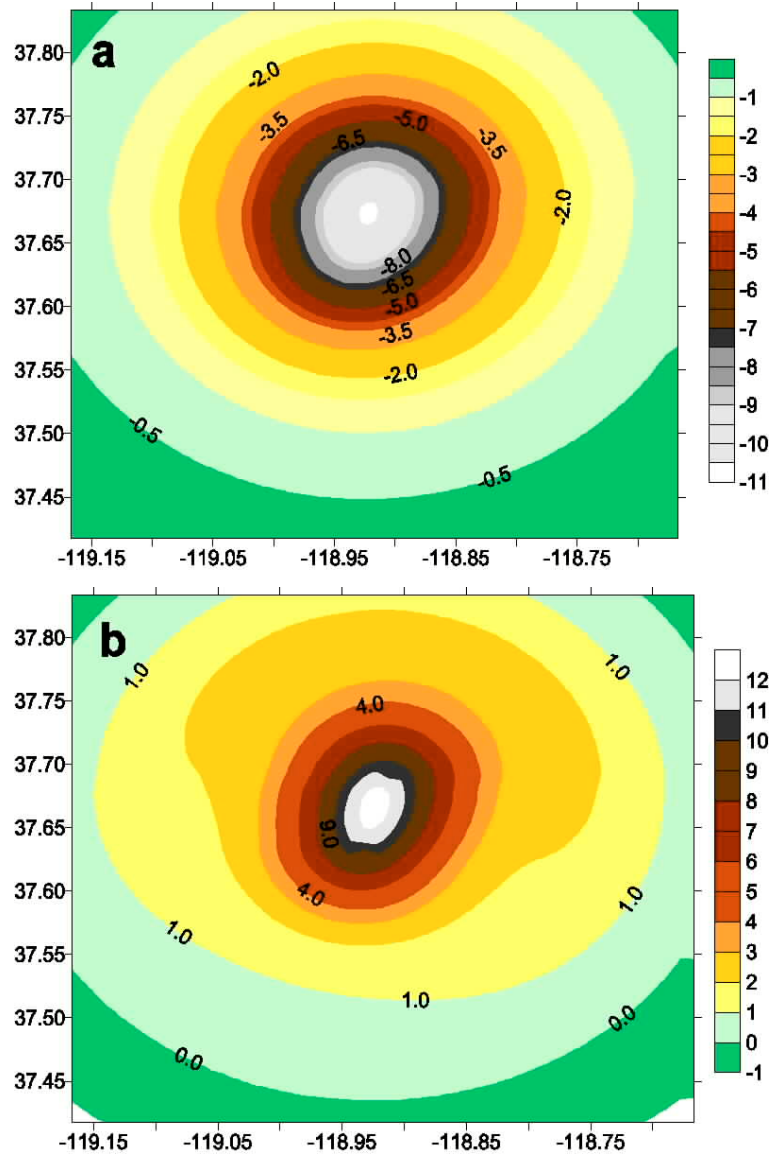


**Figura 4.4.** Resultados obtenidos considerando un semiespacio homogéneo y dos fuentes de Mogi de características dadas en el texto. (a) Desplazamientos verticales en cm (b) Variaciones de gravedad aire-libre en  $\mu\text{Gal}$  (modificada de Fernández *et al.*, 2001b).

Langbein *et al.*, 1995; Tiampo *et al.*, 2000). Sin embargo, las variaciones de gravedad aire-libre son nulas, como hemos visto en el análisis de las ecuaciones realizado en el capítulo anterior. Puesto que para la modelización elástica no hemos considerado la masa de la intrusión ni el acoplamiento elástico-gravitatorio, este resultado confirma, como ya señalaron Battaglia *et al.*, (1999), que las variaciones de gravedad observadas en Long Valley fueron producidas por un cambio de la masa en el sistema.

En la Figura 4.5 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el modelo elástico-gravitatorio. En esta modelización, además del incremento de presión que causa la dilatación de la cámara, se tienen en cuenta las variaciones de masa y su interacción con el campo gravitatorio terrestre. Los desplazamientos verticales (Figura 4.5a) coinciden con los desplazamientos que se muestran en la Figura 4.4a. El patrón de las variaciones de gravedad aire-libre es similar al de las variaciones observadas (Battaglia *et al.* 1999), con un máximo de signo positivo situado sobre el domo central de la caldera.

Mediante la aplicación práctica del modelo elástico-gravitatorio, las Figuras 4.4 y 4.5 reflejan lo que se obtuvo en el Capítulo 3: la intensidad del centro de expansión es responsable de los desplazamientos del medio, mientras que la masa de la intrusión juega un papel determinante en la interpretación de variaciones de gravedad. Por ello se recomienda, cuando sea posible, la inversión conjunta de ambos tipos de observación, con el fin de discriminar el papel determinante de los parámetros de la fuente sobre los efectos observados y obtener, así, sus valores adecuados. Los resultados del modelo elástico-gravitatorio ponen de manifiesto su generalidad. Aunque en esta zona volcánica, un modelo elástico puede explicar las observaciones realizadas, siempre y cuando se tenga en cuenta la masa de la intrusión, mediante el modelo elástico-gravitatorio hemos obtenido resultados comparables a los de Battaglia *et al.* (1999) sin necesidad de realizar la hipótesis adicional de que la expansión volumétrica de la cámara es igual a la variación de masa que se produce en su interior.

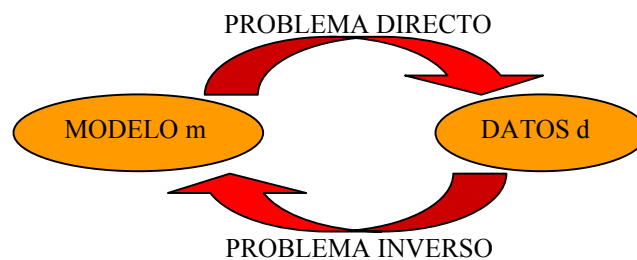


**Figura 4.5.** (a) Desplazamientos verticales calculados mediante el modelo elástico-gravitatorio considerando el efecto de la masa y del centro de expansión emplazado en un semiespacio homogéneo elástico-gravitatorio. (b) Variaciones de gravedad aire-libre en  $\mu\text{Gal}$ . Las características de las fuentes están descritas en el texto (modificado de Fernández *et al.*, 2001b).

## 4.2. INVERSIÓN DE VARIACIONES DE GRAVEDAD EN LONG VALLEY CALDERA.

En el apartado anterior hemos utilizado los parámetros de fuente calculados por otros autores para estudiar el efecto de la masa y del campo gravitatorio en la modelización. Los desplazamientos y variaciones de gravedad sintéticos, calculados a partir del modelo elástico-gravitatorio, han mostrado la generalidad y eficacia de este modelo. Por ello, en este apartado procederemos a interpretar las variaciones de gravedad observadas en Long Valley Caldera por Battaglia *et al.* (1999) utilizando este modelo de deformación.

Uno de los problemas de la geodesia y geofísica es determinar, mediante datos de observación, las propiedades del interior de la Tierra o de una fuente que está causando un determinado fenómeno. Esto se denomina problema inverso y se encuentra dentro de la disciplina matemática que se conoce como optimización (p.e., Tarantola, 1987). El problema directo consiste en obtener una relación matemática entre los datos y un determinado modelo terrestre que simula el comportamiento del medio (Figura 4.6).



**Figura 4.6.** Definición tradicional del problema directo e inverso.

Normalmente, los datos de observación que se utilizan en este tipo de problemas son finitos, puesto que han sido obtenidos en un número finito de estaciones y están contaminados por ruidos de tipo diferente. Sin embargo, en muchos problemas de inversión, el modelo de parámetros que queremos determinar es una función continua, por lo que los datos no suelen proporcionar información suficiente para determinar este modelo de forma única. Además, muchos problemas

no son lineales, lo que da lugar a funciones de evaluación irregulares, que presentan numerosos máximos (o mínimos) relativos. Para obtener información sobre el conjunto de parámetros que controla un determinado fenómeno se han propuesto diferentes técnicas de optimización lineal multiparamétrica. Tradicionalmente, se empleaban técnicas locales como el método del gradiente conjugado o determinados métodos iterativos, que se basan en la información que proporciona el gradiente de una función de evaluación para mejorar cierto modelo de partida (origen). Este tipo de técnicas evita la exploración intensa del espacio muestral que configuran los posibles modelos-solución, y depende en gran medida del origen. La búsqueda a la que conducen estas técnicas puede converger a un máximo (o mínimo) relativo de la función de evaluación correspondiente a un modelo-solución erróneo o conllevar la inestabilidad del método. Con el fin de evitar la ambigüedad inherente al problema inverso se utilizan técnicas de optimización global.

Los métodos de Monte-Carlo, que utilizan información aleatoria para maximizar (o minimizar) la función de evaluación representativa del problema (p.e., Sambridge y Mosegaard, 2002), se encuentran entre las técnicas de optimización globales. Recientemente, se han propuesto métodos de inversión basados en algoritmos genéticos (AG) para resolver numerosos problemas geofísicos (p. e., Stoffa y Sen, 1991; Billings *et al.*, 1994; Boschetti *et al.*, 1996; Beauducel *et al.*, 2000; Montesinos, 2002). Los AG también utilizan procesos aleatorios para encontrar una solución “próxima” a la solución óptima, que proporciona el máximo (o mínimo) absoluto de la función de evaluación. Sin embargo, su habilidad de incorporar información adicional sobre el modelo, cuando todavía se está explorando el espacio muestral, lo convierte en un método de búsqueda dirigida. La exploración exhaustiva que realizan los métodos de Monte-Carlo sugiere que los AG son más eficientes en este sentido (Gallagher *et al.*, 1991).

#### 4.2.1. Técnica de inversión.

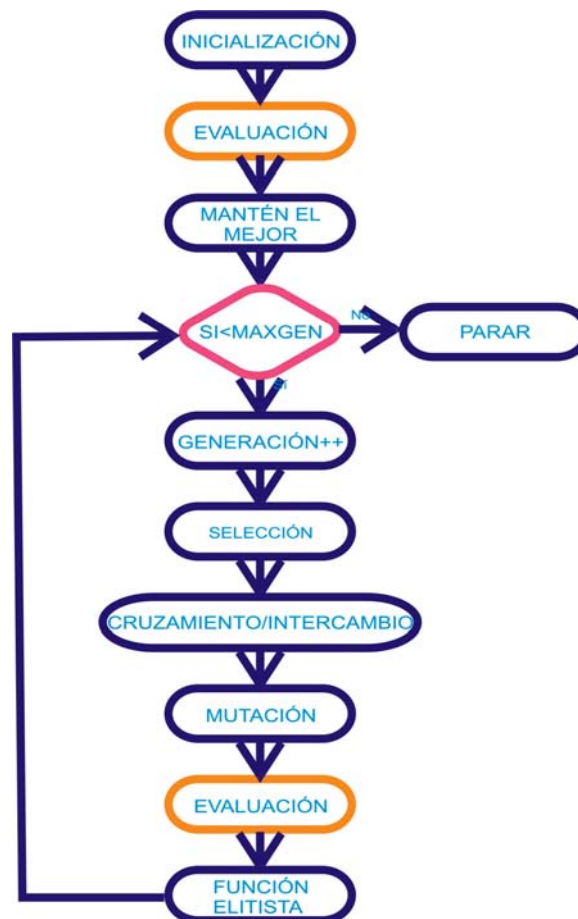
El desarrollo original de los AG se atribuye a Holland (Holland, 1975). Están basados en las leyes de evolución propuestas por Darwin hace dos siglos: los individuos más capaces de adaptarse a su habitat natural tendrán mas oportunidades de sobrevivir y reproducirse, lo que significará que sus genes se transmitirán generación tras generación.

Como hemos mencionado, el problema inverso consiste en buscar los parámetros que controlan la respuesta del medio ante una determinada perturbación. Este conjunto de parámetros representa el modelo óptimo. Utilizando el AG, los parámetros se codifican como si fueran los genes de un individuo. Para cada uno de los parámetros que forman el modelo, se establecen unos límites entre los que se tiene que encontrar la solución del problema. Comenzando con un número de parámetros que forman un conjunto inicial generado de forma aleatoria, este algoritmo modifica la solución mediante el uso de operadores de evolución: selección, cruzamiento y mutación, que alteran la composición de cada uno de los conjuntos. El grado de bondad de cada individuo es evaluado mediante una función que juega el papel del hábitat natural. Después, los mejores individuos de cada generación se combinan, utilizando reglas probabilísticas, para formar una nueva generación de descendientes. A los individuos que proporcionan datos sintéticos que ajustan mejor los datos de observación, se les da un mayor número de oportunidades para que intercambien su información genética cruzándolos. Esto proporciona descendientes que comparten características comunes a ambos padres. Después del cruzamiento, generalmente se aplica un proceso de mutación aleatorio, con el fin de alterar alguno de los parámetros que constituye una determinada cadena genética. Este procedimiento se aplica para que la población mantenga cierta diversidad, que se va perdiendo gradualmente durante el proceso. Puesto que la mutación afecta a un solo parámetro de alguno de los modelos, la exploración total que realiza el AG, se verá poco perturbada siendo esta perturbación comparable a una búsqueda aleatoria local (Gallagher *et al.*, 1991). Cuando la probabilidad de aplicar la mutación aumenta, aumenta el grado de aleatoriedad y, por tanto, el algoritmo se asemejará a un método



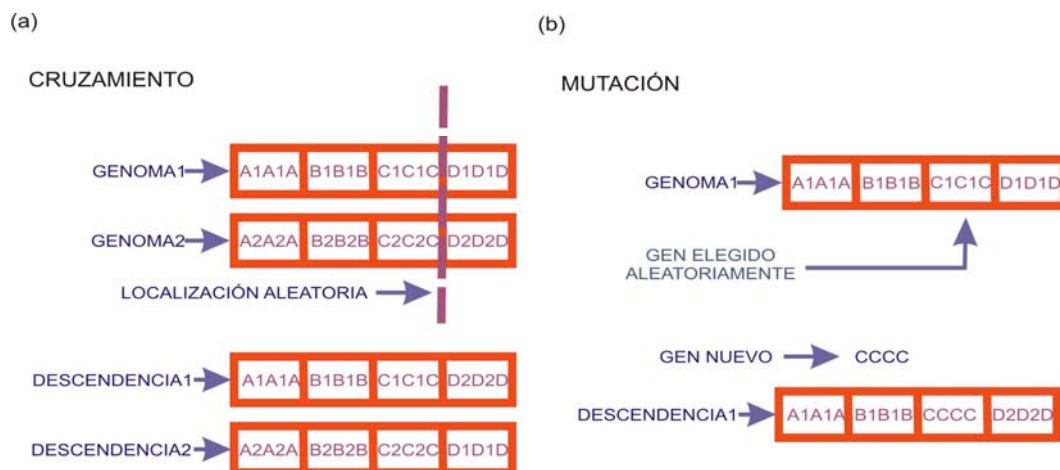
de Monte-Carlo. Normalmente, para asegurarse de que en cada generación se obtienen mejores descendientes, se asigna una probabilidad alta al cruzamiento (superior a 0.7). La probabilidad de mutación se establece, normalmente, mediante el inverso del número de parámetros que configuran el modelo (Goldberg, 1989; Wright, 1991).

La Figura 4.7 muestra un esquema del programa que vamos a emplear en este trabajo. Este programa desarrollado por Tiampo *et al.* (2000, 2003) ha sido modificado para una de las aplicaciones realizadas en esta memoria. En particular, hemos modificado la función de evaluación teniendo en cuenta la linealidad del modelo elástico-gravitatorio.



**Figura 4.7.** Esquema del programa donde se aplica el algoritmo genético simple (modificada de Tiampo *et al.*, 2000).

Tras generarse una primera población aleatoriamente, los individuos se clasifican, del mejor al peor, mediante una función que mide el grado de bondad de cada individuo. Esta función se obtiene a partir de la distribución  $\chi^2$ , que mide la diferencia ente las medidas reales y los datos sintéticos que proporciona cada modelo. Se seleccionan los miembros que dan diferencias más pequeñas, al compararlos con la evaluación relativa del resto de modelos que configuran la muestra. Entonces, el cruzamiento y la mutación alteran la nueva población seleccionada, mediante un proceso controlado de intercambio aleatorio de información (Figura 4.8). Al completar estos procesos, la población se vuelve a evaluar y se repite de nuevo el procedimiento, explotando la información que proporcionan las generaciones previas para mejorar la búsqueda, hasta que alguna de las poblaciones verifica una condición establecida a priori.



**Figura 4.8.** Operadores que intervienen en el código mostrado en la Figura 4.7. **(a)** Cruzamiento, dos individuos emparejados aleatoriamente, intercambian sus genes en base a una posición elegida aleatoriamente; **(b)** mutación o alteración aleatoria de alguno de los genes del individuo (modificada de Tiampo *et al.* 2000).

Una de las características específicas del AG empleado es que la codificación de los genes es real (Tiampo *et al.*, 2000). Normalmente, estos genes se representan mediante cadenas en código binario. Al utilizar valores reales, se aumenta la eficacia del algoritmo puesto que se elimina la conversión a código binario que hay que realizar cuando se evalúa cada modelo. Tampoco hay pérdida de precisión por no

## CAPÍTULO 4

considerar una representación binaria ya que las subrutinas que se encargan del cruzamiento y de la mutación de los individuos se modifican para tal fin (Wright, 1991).

En los procesos de evolución hay dos factores importantes: la diversidad de la población y la presión selectiva (Whitley, 1989). Estos factores están relacionados fuertemente. El aumento de la presión selectiva disminuye la diversidad en la población (Michalewicz, 1992). Por tanto, es importante extraer un balance de ambos. La “función elitista” es uno de los mecanismos para conseguirlo. Esta función fuerza a que se preserve el mejor miembro de la generación actual y el correspondiente a su generación antecesora, permitiendo, así, el incesto entre padres e hijos.

Al aplicar el AG surgen varios problemas, entre los que se encuentra la convergencia prematura. Cuando se genera un modelo relativamente bueno frente al resto, puede ocurrir que el AG realice múltiples copias de éste, aunque no esté próximo a ser el modelo óptimo, sustituyendo así al resto de la población. Esto, particularmente pasa cuando la población es pequeña. Otro de los problemas que surge relacionado con la convergencia prematura es que, al copiarse el individuo antes mencionado, disminuye la variabilidad de las funciones de evaluación, es decir, no habrá modelos que destaquen, por lo que se reducirá de nuevo la presión selectiva del algoritmo. Para prevenir que la búsqueda se estanque y que se produzca la convergencia prematura, este algoritmo utiliza una “función de ventanado”. Esta función sustrae el valor de evaluación que proporciona el peor miembro de la generación antecesora del valor de evaluación que proporciona cada miembro de la nueva generación. Después se calcula el grado de bondad teniendo en cuenta estos nuevos valores, lo que proporcionará mayor presión selectiva. Este proceso asegura que los miembros de mejor evaluación relativa se incluyan en mayor proporción en subsecuentes generaciones (Tiampo *et al.*, 2000).

### 4.2.2. Función de evaluación.

El AG busca el conjunto de parámetros que caracteriza el modelo que proporciona un valor de la función de evaluación mejor, es decir, el modelo que proporciona unos datos sintéticos más próximos a los datos de observación. La evaluación de cualquier modelo se realiza en una subrutina, que contiene la información geofísica referente a cada problema. El código utilizado en este ejemplo, trata de encontrar los parámetros (localización  $x$ - $y$ , profundidad, radio, masa e incremento de presión en la cámara) que minimizan la diferencia entre la respuesta del modelo y las medidas de gravedad descritas en el apartado anterior. Por tanto, la función de evaluación será alguna de las funciones apropiadas para medir esta diferencia. En este trabajo se emplea la función  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(y_k - f(x_k))^2}{\sigma_k^2}, \quad (4.3)$$

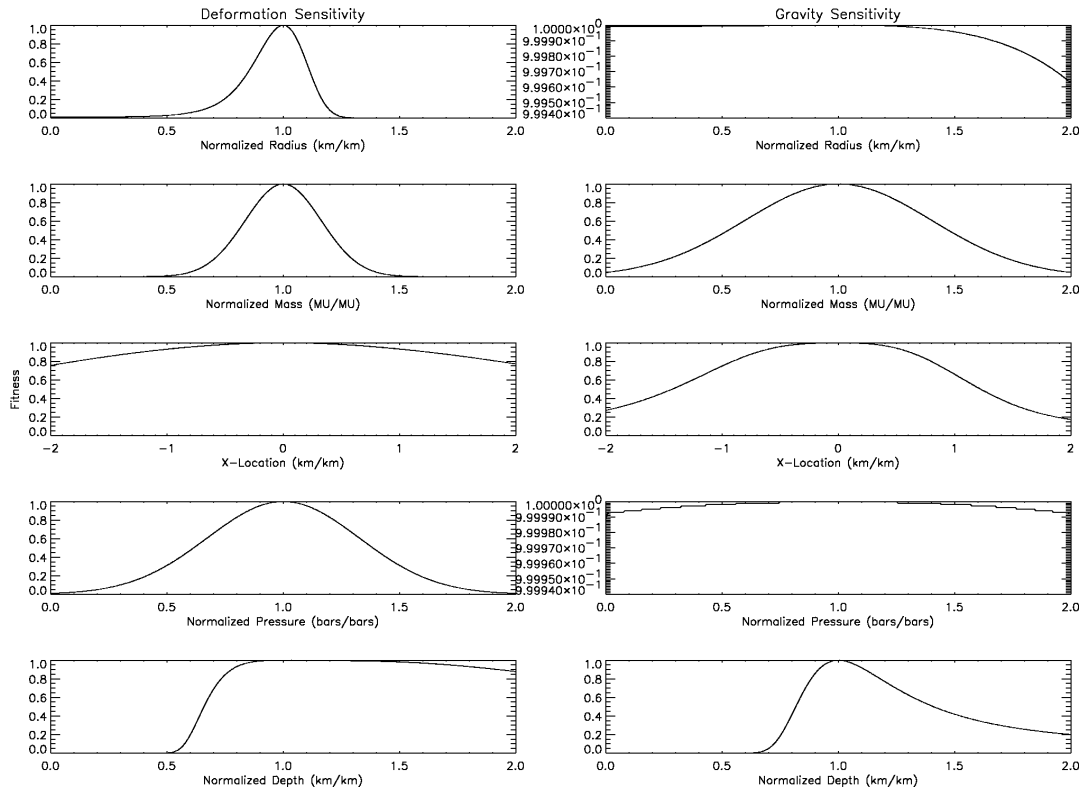
siendo  $y_k$  las variaciones de gravedad aire-libre medidas,  $f(x_k)$  las variaciones de gravedad calculadas mediante el modelo y  $\sigma_k$  la desviación típica de cada medida, con  $k$  el número de medida (Taylor, 1982; Bevington y Robinson, 1992). Por tanto, nuestro problema consiste en minimizar la expresión (4.3), lo que es equivalente a maximizar su inversa, que denominamos  $FV$ :

$$FV = \frac{1}{\chi^2}. \quad (4.4)$$

### 4.2.3. Sensibilidad del AG.

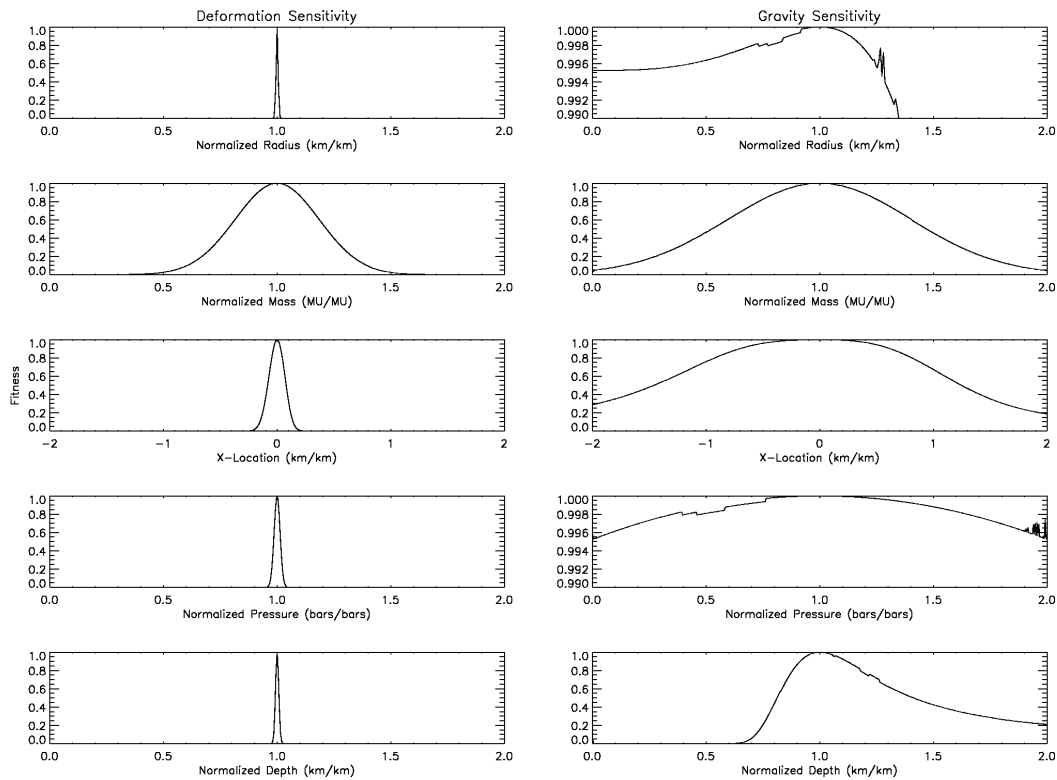
Para estudiar la eficacia del AG para obtener los parámetros de la fuente correctos al invertir medidas de observación, hemos realizado un test de sensibilidad considerando dos fuentes diferentes. Ambas fuentes, con una masa igual a 1 UM, las hemos situado a una profundidad de 2 km. El tamaño de cada una es diferente. A la más grande, de radio 1.5 km, se le asigna un incremento de presión de 250 bares,

mientras que la pequeña, de presión igual a 80 bares, tiene un radio de 0.75 km. En cada caso, para estudiar la sensibilidad de cada parámetro, consideramos diferentes modelos en los que uno de los parámetros varía mientras que los cinco restantes permanecen fijos. Los datos sintéticos que se obtienen a partir de estos modelos se invierten mediante el AG, obteniéndose, así, diferentes valores de la función  $FV$ . En este ejemplo, estudiamos tanto eficacia del AG para resolver los parámetros de la fuente considerando deformaciones como su eficacia al considerar medidas gravimétricas. Las Figuras 4.9 y 4.10 muestran los resultados. En cada caso, frente a la variable en cuestión normalizada se representa el valor de la función  $FV$ , dada mediante la expresión (4.4).



**Figura 4.9.** Sensibilidad de la inversión a varios parámetros del modelo elástico-gravitatorio, relativo a la deformación del terreno (izquierda) y a las variaciones de gravedad (derecha). Fuente de presión igual a 80 bares con radio de 0.75 km. (Tiampo *et al.*, 2003)

La pendiente de las gráficas correspondientes a las variables que proporcionan la localización de la fuente,  $x$  (o  $y$ ), varía. Estas gráficas tienen, bien definido, un sólo máximo para ambos tipos de medidas, lo que muestra la capacidad del AG para resolver estos parámetros ya que el patrón de los datos depende fuertemente de la localización de la fuente. Sin embargo, para la fuente de menor tamaño, las medidas gravimétricas resuelven mejor el parámetro  $x$ , mientras que para la mayor, son las medidas de deformación las que mejor resuelven este parámetro. Para el parámetro profundidad, ocurre justamente lo contrario, lo que ilustra de nuevo la importancia de incluir ambos tipos de medidas para interpretar los procesos volcánicos.



**Figura 4.10.** Sensibilidad de la inversión a varios parámetros del modelo elástico-gravitatorio, relativo a la deformación del terreno (izquierda) y a las variaciones de gravedad (derecha). Fuente de presión igual a 250 bares con radio de 1.5 km. (Tiampo *et al.*, 2003)

Las gráficas que muestran la sensibilidad del AG para obtener la masa de la intrusión tienen, también, un máximo bien definido. Mientras que las medidas de deformación son muy sensibles a los parámetros radio e incremento de presión, las medidas gravimétricas no lo son. Sin embargo, al aumentar la presión, las medidas gravimétricas son cada vez más sensibles a ambos parámetros, al verse enmascarado el efecto de la masa por el efecto aire-libre. Para el parámetro radio, la función  $FV$  permanece casi plana hasta que alcanza un determinado valor, a partir del cual, su gráfica decrece rápidamente. Esto implica que el AG tiende a proporcionar valores pequeños para el radio.

#### 4.2.4. Resultados de la inversión realizada con el AG en Long Valley.

Para obtener los parámetros-fuente a partir de las medidas gravimétricas descritas anteriormente, utilizamos un modelo elástico-gravitatorio, en el que fijamos las propiedades del medio. Éstas se muestran en la Tabla 4.1.

|             | Espesor | $\rho$                    | $\mu$                | $\lambda$            |
|-------------|---------|---------------------------|----------------------|----------------------|
| Capa        | (km)    | ( $10^3 \text{ kg/m}^3$ ) | $10^{10} \text{ Pa}$ | $10^{10} \text{ Pa}$ |
| 1           | 2.0     | 2.56                      | 1.5                  | 3.82                 |
| Semiespacio |         | 2.65                      | 5.0                  | 2.7                  |

**Tabla 4.1.** Densidad y parámetros de Lamé para el modelo cortical empleado en Long Valley Caldera.

La densidad y los parámetros de Lamé que se muestran en esta tabla, los hemos estimado a partir de la información geológica que proporcionan Hill *et al.* (1985) mediante la metodología que describen Fernández y Díez (1995). La capa superior, de 2 km de espesor, representa el depósito consolidado de cenizas y piedras pómez que se formó durante la erupción que originó la formación de Long Valley Caldera, junto con los sedimentos y productos volcánicos depositados posteriormente. Los granitos, que se encuentran por debajo de esta capa, tienen una rigidez igual a 50 GPa. Representan el basamento prevolcánico del área (Bailey, 1989). La toba que cubre los alrededores de Bishop se encuentra a una determinada

profundidad en la caldera y también aparece como inclusiones en las riolitas presentes en el interior de la caldera (Hill *et al.*, 1985). Abers (1985) asigna una densidad de  $2.4 \text{ g m}^{-3}$  a la toba, bien asentada, situada en los alrededores de Bishop. En este trabajo, le asignamos una densidad de  $2.56 \text{ g m}^{-3}$  que se encuentra dentro de los límites calculados por este autor a partir de las velocidades observadas en las diferentes capas que conforman su modelo, utilizando la relación velocidad-densidad de Nafe-Drake (p. e., Grant y West, 1965).

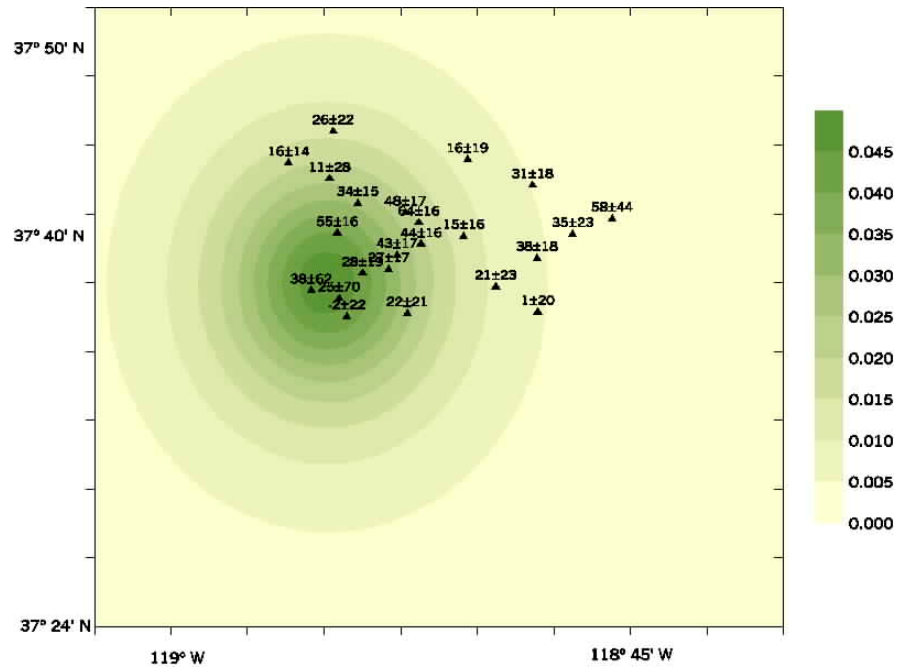
En primer lugar, estimamos los parámetros de localización ( $x$  e  $y$ ), profundidad, variación de presión, radio e incremento de masa de una fuente puntual esférica inmersa en un semiespacio elástico-gravitatorio de características descritas anteriormente. Los valores obtenidos para estos parámetros se muestran en la Tabla 4.2.

| Parametro                                   | Valor         |
|---------------------------------------------|---------------|
| $\lambda$                                   | 118° 53' 59"W |
| $\phi$                                      | 37° 41' 58" N |
| Profundidad, $c$ (km)                       | 8.4           |
| Incremento de presión, $P$ (MPa)            | 33.2          |
| Radio, $a$ (km)                             | 0.4           |
| Incremento de masa, $M$ (1UM= $10^{12}$ kg) | 0.53 UM       |

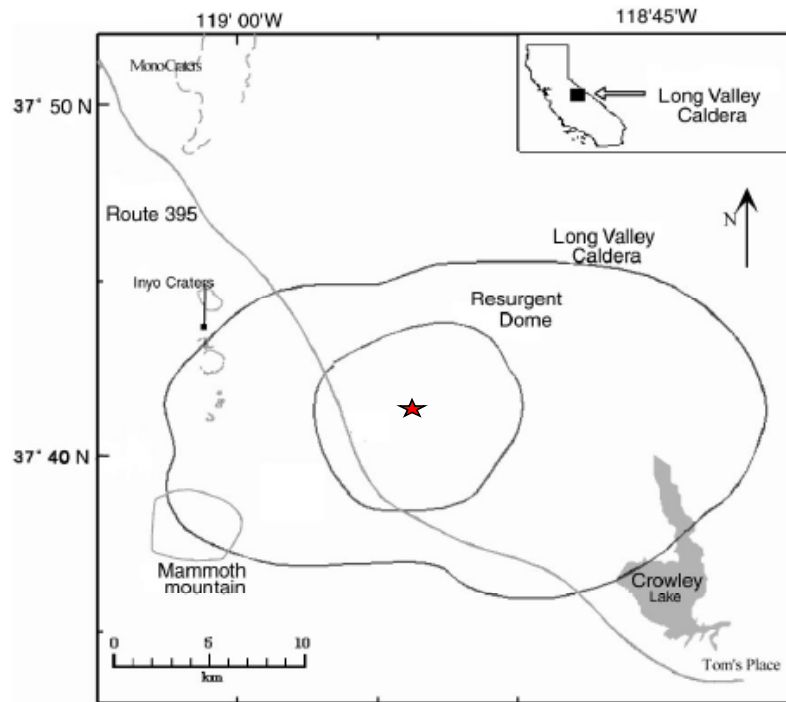
**Tabla 4.2.** Parámetros de la fuente obtenidos mediante el AG considerando una sola fuente.

La Figura 4.11 muestra las variaciones de gravedad aire-libre calculadas a partir de estos parámetros, junto con la gravedad residual de los puntos estación. El máximo de  $50 \text{ } \mu\text{Gal}$ , que se predice con el modelo, se encuentra bajo el domo central de la caldera, que se ha elevado en varias ocasiones durante los últimos 20 años.





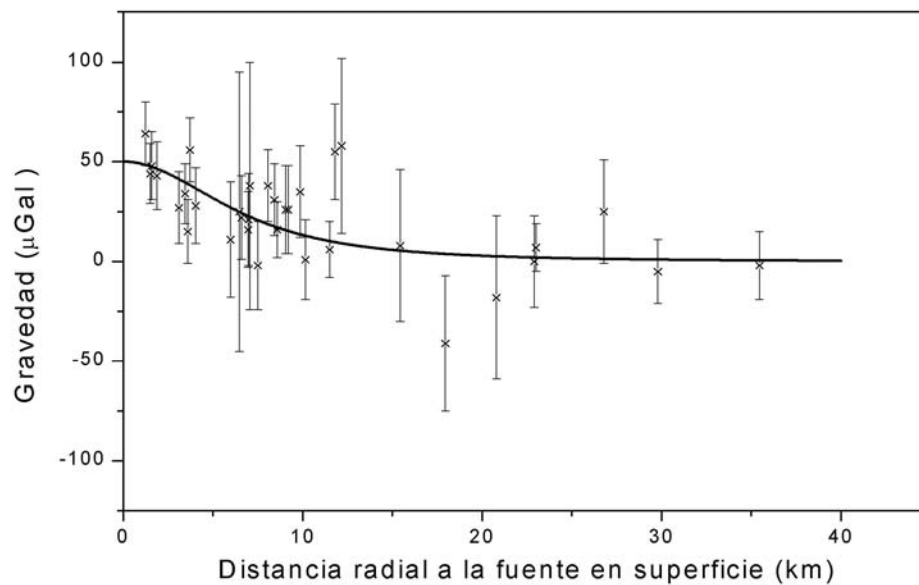
(a)



(b)

**Figura 4.11.** (a) Variaciones de gravedad aire-libre en miligales calculadas a partir de los resultados de la inversión realizada para una fuente esférica puntual inmersa en el medio descrito en la Tabla 4.1. Los valores numéricos indican la variación de gravedad aire-libre con su error en  $\mu\text{Gal}$  en cada una de las estaciones de la red. (b) Localización de la fuente en la caldera.

En la Figura 4.12. se muestra una comparación entre las variaciones de gravedad aire-libre calculadas y observadas en el periodo comprendido entre 1982 y 1998, en función de la distancia radial a la fuente.



**Figura 4.12.** Comparación de las variaciones de gravedad aire-libre observadas y calculadas, a partir de los parámetros que se muestran en la Tabla 4.2, en función de la distancia radial a la proyección de la fuente en superficie.

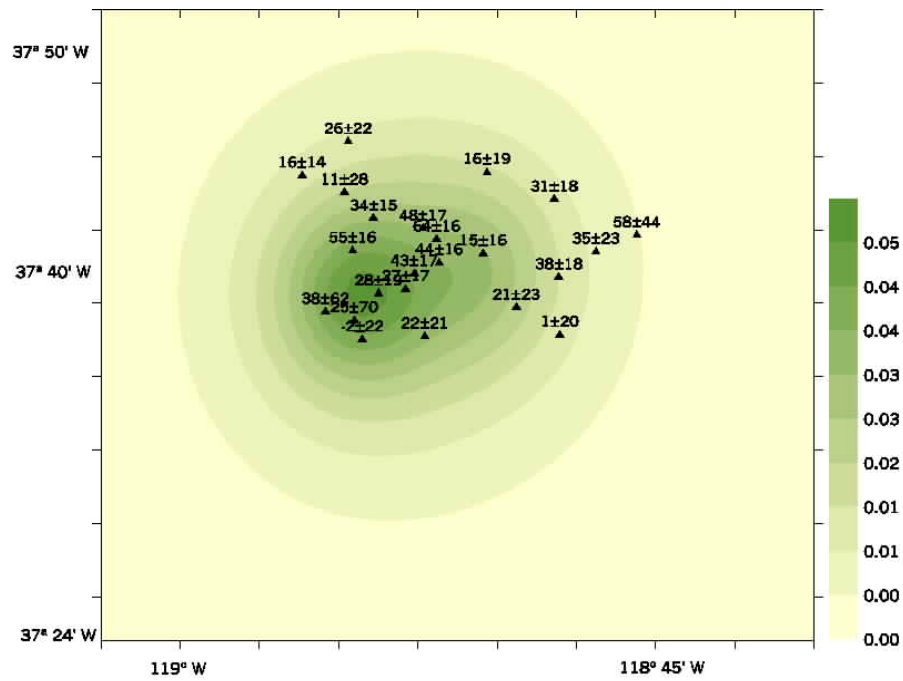
Las variaciones de gravedad modeladas están causadas principalmente por un incremento de masa en la cámara. El efecto de la presión de la cámara sobre las variaciones de gravedad es proporcional a  $pa^3$ . Como hemos señalado, las medidas gravimétricas no son muy sensibles a los parámetros que proporcionan el radio e incremento de presión en la cámara por lo que los valores estimados para estos parámetros son pequeños (Tabla 4.2). Aunque el patrón de las observaciones (Figura 4.3c) es diferente al patrón de las variaciones de gravedad calculadas, las Figuras 4.11 y 4.12 muestran que en Long Valley debe haber habido inyección de magma junto con cierto incremento de presión en la cámara existente bajo la caldera, conclusión a la que llegábamos también en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta este hecho y que algunos modelos utilizados para interpretar las deformaciones y variaciones de gravedad observadas en Long Valley consideran más de una fuente (p. e., Hill *et al.*, 1985; Langbein *et al.*, 1995; Fialko *et al.*, 2001; Tiampo *et al.*, 2000; Battaglia *et al.*, 2003), hemos intentado modelar las variaciones de gravedad observadas entre 1982 y 1998 utilizando dos fuentes. En este caso se dobla el número de incógnitas a determinar. Al ser el modelo elástico-gravitatorio lineal la solución del problema directo es la suma de los efectos que causa cada una de ellas. Esta modelización es consistente con los resultados de diferentes experiencias geológicas y geofísicas realizadas en Long Valley (p.e., Bailey, 1989; Weiland *et al.*, 1995). En principio, la fuente más profunda representa la situada bajo el domo central de la caldera, mientras que la secundaria representa la fuente situada en el margen sur de la caldera (Langbein *et al.*, 1995).

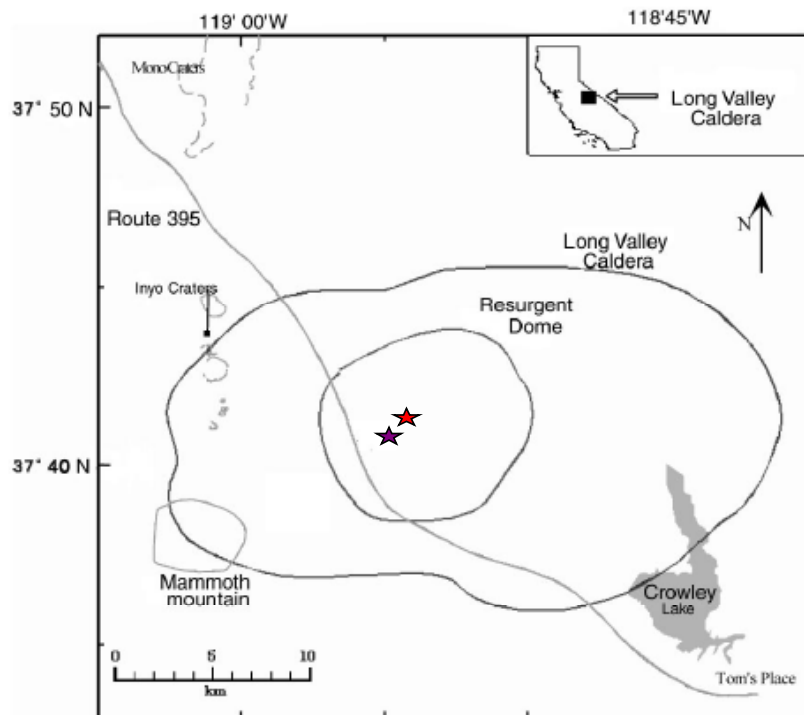
La Tabla 4.3 muestra los parámetros obtenidos a partir de la inversión de los datos gravimétricos. En la Figura 4.13 podemos observar las variaciones de gravedad aire-libre calculadas a partir de estos valores.

| Parámetros                                        | Fuente 1      | Fuente 2     |
|---------------------------------------------------|---------------|--------------|
| $\lambda$                                         | 118° 54' 17"W | 118°55'22"W  |
| $\phi$                                            | 37° 41'23.8"N | 37° 37' 51"N |
| Profundidad c (km)                                | 6.6           | 7.5          |
| Incremento de presión $P$ , (MPa)                 | 9.6           | 23.7         |
| Radio a (km)                                      | 0.5           | 0.2          |
| Incremento de masa, $M$ (1UM=10 <sup>12</sup> kg) | 0.27 UM       | 0.2 UM       |

**Tabla 4.3.** Parámetros de las dos fuentes consideradas al invertir los datos gravimétricos descritos en el apartado anterior.



(a)



(b)

**Figura 4.13.** Idem a la Figura 4.11 para el caso de la inversión de dos fuentes puntuales esféricas.

Al considerar dos fuentes de perturbación, en la Figura 4.13 observamos un cambio de patrón en las variaciones de gravedad aire-libre. La situación del valor máximo se encuentra más cercana a la situación del observado de lo que lo estaba en el caso anterior. Este valor es del mismo orden que el valor que se obtuvo al considerar una sola fuente. Mientras que el modelo de una fuente ajusta la magnitud de las variaciones de gravedad (dentro de los límites que proporcionan el error cuadrático medio de los datos), el modelo de dos fuentes ajusta tanto la magnitud como el patrón.

La Tabla 4.4 proporciona una comparación de cómo se ajustan las variaciones de gravedad calculadas a los datos de observación considerando una o dos fuentes. La bondad del ajuste,  $R^2$ , se define mediante:

$$R^2 = 1 - \frac{\chi^2}{\sum_k y_k^2 / \sigma_k^2}, \quad (4.5)$$

lo que representa la habilidad del modelo para ajustar los datos de observación. Esta es ligeramente inferior para el modelo de dos fuentes, puesto que es más difícil resolver los parámetros de la fuente secundaria. El error de los datos de observación es muy grande (Figura 4.12) y al introducir esta fuente en la modelización aumenta el número de grados de libertad del problema. La solución que se obtiene con el modelo de dos fuentes, en particular la proximidad de ambas fuentes, sugiere que las variaciones de gravedad pueden estar causadas por una fuente extensa de gran tamaño situada bajo el domo central de la caldera y no por lo que múltiples trabajos sobre Long Valley se denomina fuente del margen sur.

| Número de fuentes | $\chi^2$ | $R^2$ |
|-------------------|----------|-------|
| 1                 | 13.04    | 0.85  |
| 2                 | 17.7     | 0.79  |

**Tabla 4.4.** Ajuste del modelo de una y dos fuentes.  $\chi^2$ , es el valor de esta función que viene dada en la expresión (4.3).  $R^2$  es la bondad del ajuste. Si  $R^2=1$  el modelo es capaz de explicar los datos de observación. Si  $R^2=0$  el modelo no tiene esta habilidad.

Fialko *et al.* (2001) realizaron una inversión conjunta de datos InSAR y de datos de distanciometría correspondientes al periodo comprendido entre 1996 y 1998. Esta inversión sugiere que la fuente de deformación situada a aproximadamente 7 km de profundidad tiene forma elipsoidal. Battaglia *et al.* (2003) modelaron la fuente de expansión/contracción situada bajo Long Valley utilizando conjuntamente medidas de deformación y de microgravedad. La fuente de deformación, un elipsoide orientado verticalmente en el interior del medio, estaba situada a 5.9 km de profundidad bajo el domo central. Por tanto, los resultados de estos autores junto con los obtenidos mediante la segunda inversión (dos fuentes) sugieren que no podemos desechar la hipótesis de que las variaciones de gravedad estén causadas por una única fuente, que no es puntual sino que posee cierta distribución espacial, representada, de forma aproximada, mediante las dos fuentes puntuales (Figura 4.13b).

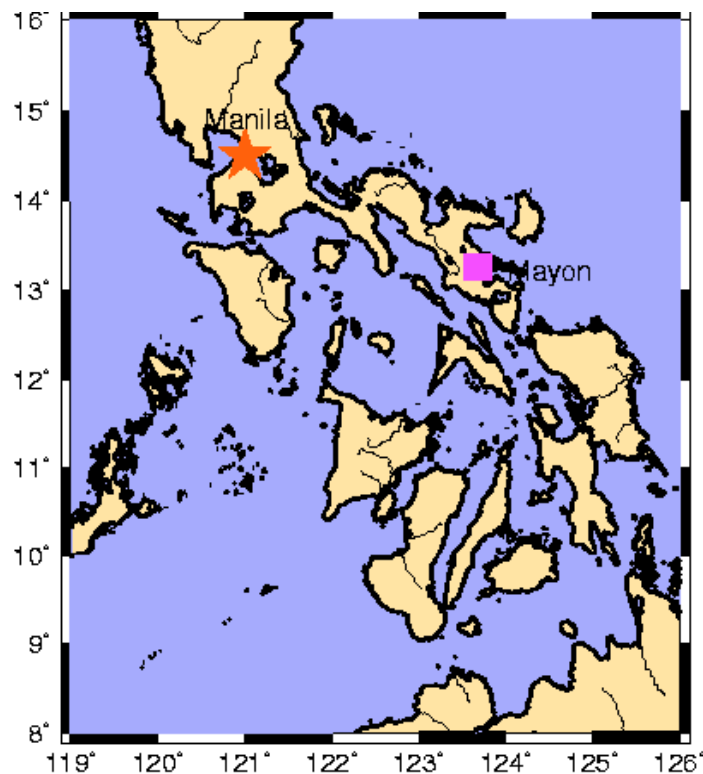
Los resultados del test de sensibilidad mostrado en la sección anterior nos sugirieron realizar una nueva inversión considerando un rango mayor de variación para el incremento de presión de la fuente principal y para el radio y masa de la segunda fuente. Aunque el valor de la función  $FV$  que se obtiene es también inferior al valor que se obtiene si se considera una única fuente, la diferencia de los incrementos de presión que se producen como consecuencia de la inyección de material en ambas fuentes es despreciable (43.5 y 46.7 MPa, respectivamente). Esto indica de nuevo que las variaciones de gravedad pueden estar causadas por una fuente extensa no puntual, es decir, ambas fuentes representarían una única cámara magmática.

La variación de volumen que se produce en la cámara es una combinación del magma inyectado en su interior y de otros factores, entre los que se encuentra la compresión del magma depositado previamente en la cámara. La variación de volumen que se produce en el edificio volcánico es resultado de la expansión de la cámara y de la deformación que produce la dilatación del medio. Por tanto, la variación de volumen de la fuente que causa un exceso de presión en su interior puede no ser igual al volumen de magma que entra en la cámara como consecuencia

de la inyección de material nuevo. Además, hemos visto a lo largo de este apartado que la deformación está causada principalmente por la presurización de la fuente mientras que las medidas gravimétricas no son muy sensibles a los parámetros que representan el incremento de presión y radio. Este hecho nos lleva a concluir que las variaciones de presión calculadas mediante la inversión podrían no ser capaces de reproducir los desplazamientos verticales observados en Long Valley Caldera durante 1982-1998. De hecho, eso es lo que ocurre. Sin embargo, si consideramos que la expansión volumétrica de la cámara ha sido causada por un incremento de masa de densidad  $3300 \text{ kg m}^{-3}$  (Battaglia *et al.*, 1999) obtenemos valores de deformación que se encuentran dentro de los límites estimados por Battaglia *et al.* (1999). Estos datos sintéticos ajustan la elevación del terreno observada en este amplio periodo de tiempo. Por tanto, este resultado junto los que se han obtenido anteriormente destaca otra vez la importancia de invertir conjuntamente datos de deformación y de gravedad.

### 4.3. VOLCÁN MAYON, ISLAS FILIPINAS.

En el Capítulo 3 hemos visto, teóricamente, cómo el modelo elástico-gravitatorio permite explicar variaciones de gravedad sin que se haya producido deformación del terreno y viceversa, incluyendo la combinación adecuada de masa e incremento de presión en la fuente. Esto representa una ventaja frente a los modelos elásticos empleados habitualmente e incapaces de modelar estas situaciones. En este apartado se aplica el modelo elástico-gravitatorio a uno de estos casos reales: el volcán Mayon. Este volcán forma parte de la cadena montañosa de Bicol situada en la isla de Luzón ( $13^{\circ} 15.4' \text{ N}$ ,  $123^{\circ} 41.1' \text{ E}$ ), que pertenece al archipiélago filipino (Figura 4.14). Las Islas Filipinas forman parte de un arco de islas, de gran extensión, situado en el océano Pacífico. Su posición, entre dos zonas de subducción de la corteza, le confiere una situación tectónica compleja, caracterizada por la presencia de fallas y alineamientos, que se extienden a través de la corteza hasta el manto superior (Bischke *et al.*, 1990; Aurelio, 1992). Este régimen tectónico es la causa de los terremotos y de la actividad volcánica que se produce en la zona.



**Figura 4.14.** Situación del volcán Mayon.

En la cadena volcánica de Bicol existen más de 10 estratovolcanes alineados de los cuales Mayon es el más famoso. Presenta una forma cónica casi perfecta, de 2462 m de altura (Figura 4.15). Al Suroeste de Mayon, en dirección NO-SE se extiende el Alineamiento de Legazpi, cruzando la ciudad que lleva su nombre. Legazpi, ciudad en la que viven alrededor de 100.000 personas, se encuentra a tan sólo 12 km del cráter del volcán. Este volcán experimentó 10 periodos de actividad distribuidos a intervalos regulares durante el siglo pasado. Recientemente, se han producido erupciones en 1984, 1993, 1999 y 2000, siendo estas dos últimas de menor magnitud que la primera.

La actividad del volcán junto con la elevada densidad de población de la zona propició que se iniciara su vigilancia. Así, desde noviembre de 1992 se han llevado a cabo 5 campañas gravimétricas combinadas con observaciones GPS (Völksen y Seeber, 1995; Jahr *et al.*, 1998; Jentzsch *et al.*, 2001). La instalación de las estaciones

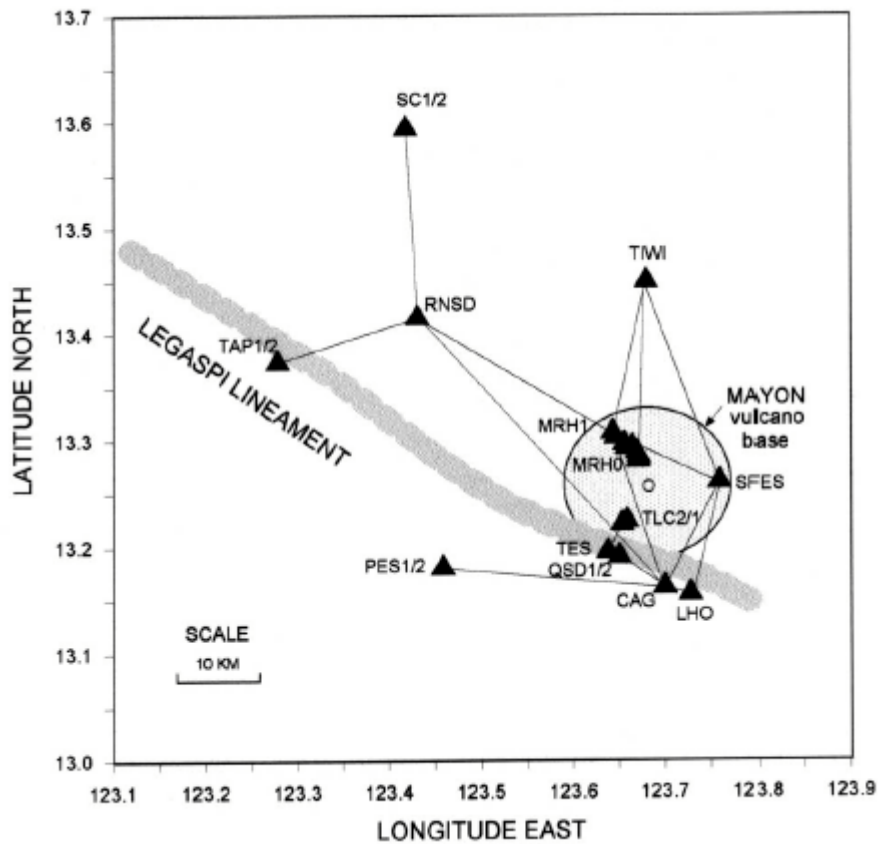


## CAPÍTULO 4

alrededor de Mayon se realizó en el verano de 1992. En total, la red está formada por 26 puntos distribuidos en: (1) una red local alrededor del volcán, (2) una red que conecta puntos de referencia situados a 50 km de la red local y (3) dos perfiles que se dirigen hacia la cima del volcán en direcciones Noreste y Suroeste, de acuerdo con las posibilidades de acceso que permite el área. Además, hay dos puntos al otro lado del Alineamiento de Legazpi, alejados de los límites de influencia del volcán, que están conectados con la red de referencia (Figura 4.16). Las estaciones están situadas en humerales y áreas de roca basáltica.

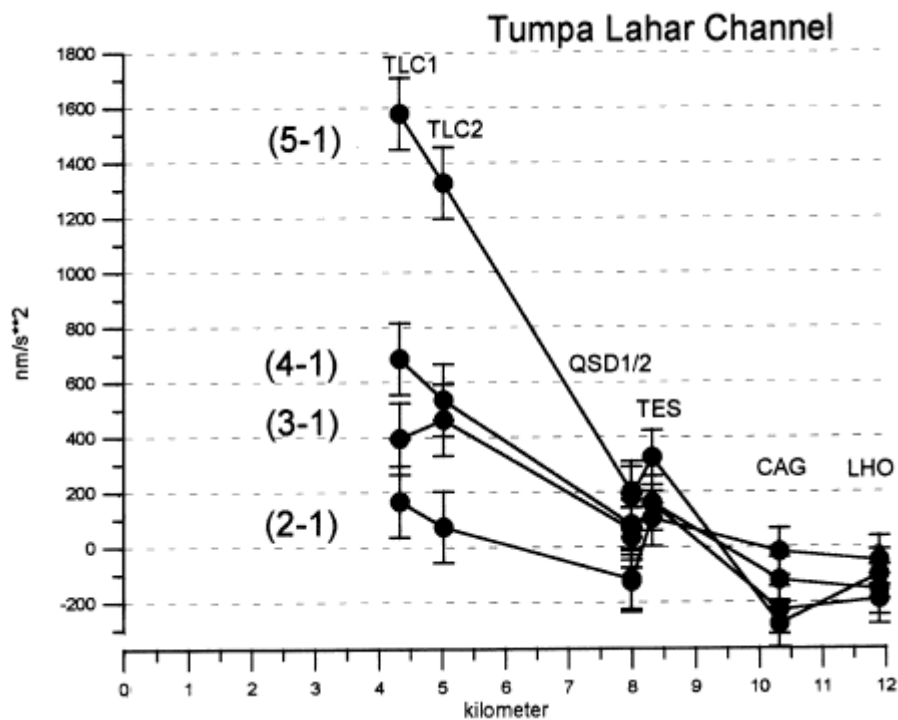


**Figura 4.15.** Fotografía del volcán Mayon donde se aprecia su simetría cónica. Sus características físicas se recogen en la siguiente lista: Altura: 2462 m Base de la circunferencia: 62.8 km Tipo de volcán: Estratovolcán, compuesto de una secuencia de flujos de lava y piroclastos.



**Figura 4.16.** Estaciones de la red gravimétrica y de GPS instalada en los alrededores del volcán (Jentzsch *et al.*, 2001)

Las observaciones realizadas tienen una precisión de  $\pm 12 \mu\text{Gal}$  (Jentzsch *et al.*, 2001). Aunque la actividad del volcán se reanudó en febrero/marzo de 1993, entre diciembre de 1992 y mayo de 1993 no se observaron variaciones de gravedad significativas. Sin embargo, entre mayo de 1993 y diciembre de 1996 se produjo un incremento de  $+150 \mu\text{Gal}$  ( $10 \text{ nm s}^{-2} = 1 \mu\text{Gal}$ ) en los perfiles. Teniendo en cuenta las campañas llevadas a cabo en diciembre de 1992, mayo de 1993, mayo de 1994, diciembre de 1994 y diciembre de 1996, las observaciones a lo largo del perfil “Tumpa Lahar Channel” muestran un incremento, más o menos continuo, de aproximadamente  $30 \mu\text{Gal}$  por año. Las variaciones más importantes se concentran en los alrededores de la cima del volcán ( $< 10 \text{ km}$ ) (Figura 4.17).



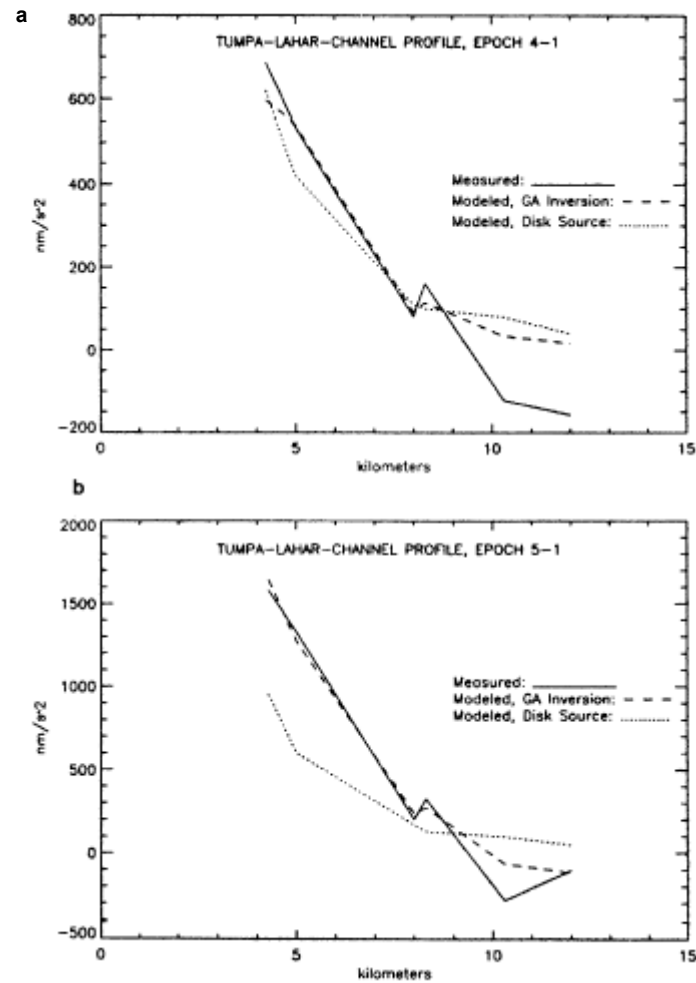
**Figura 4.17.** Variaciones de gravedad producidas en el perfil “Tumpa Lahar Channel” correspondientes a las épocas: (2-1), es decir, diferencias gravimétricas observadas entre mayo de 1993 y diciembre de 1992; (3-1), diferencias entre mayo de 1994 y diciembre de 1992, (4-1), diferencias correspondientes al periodo comprendido entre diciembre de 1994 y diciembre de 1992, y (5-1), diferencia entre las medidas realizadas en diciembre de 1996 y diciembre de 1992 (Jentzsch *et al.*, 2001).

En cada campaña, se llevaron a cabo observaciones simultaneas con GPS para obtener información sobre los posibles desplazamientos del terreno. La red de referencia se descompuso en triángulos, estando compuesta por 15 líneas de base. Con estas medidas se observó que, a lo largo de los perfiles que forman la red, no se produjeron deformaciones significativas (por encima del límite de precisión de  $\pm 4$  cm) ni en la componente vertical ni en la horizontal. Por tanto, la relación entre las medidas gravimétricas y GPS no muestra un gradiente que pueda ser interpretado mediante un modelo elástico (p.e., Rymer, 1996). Jentzsch *et al.* (2001) señalan que en este periodo de tiempo se estaba produciendo un aumento de las variaciones de gravedad acompañado de un descenso de la actividad volcánica.

#### 4.3.1. Modelado e interpretación de las variaciones de gravedad observadas en Mayon.

La correlación negativa entre las variaciones de gravedad y el descenso de la actividad volcánica observada en Mayon, no se puede explicar mediante el modelo de Mogi (1958). Las variaciones de gravedad obtenidas mediante este modelo son debidas a la deformación del terreno, lo que en este caso conllevaría una variación volumétrica de la cámara que causaría un hundimiento del orden de 0.5-1 m en el edificio volcánico, que no se observó durante las campañas. Este hecho, junto con la concentración de las variaciones de gravedad observadas en los alrededores de la cima del volcán, condujeron a que Jentzsch *et al.*, (2001) propusieran otro modelo de deformación. Así, intentaron explicar las variaciones de gravedad a partir de una redistribución de la masa contenida en una columna, que representaba la estructura del conducto volcánico, sin que se produjera su eyección sobre la superficie terrestre. Esta redistribución produciría una variación de la masa concentrada bajo los puntos gravimétricos y por tanto, un aumento de gravedad. El modelo que propusieron es simple. Consiste en un cilindro vertical que juega el papel del conducto volcánico. La masa alojada en el conducto, se distribuye en una capa situada bajo el volcán. El radio del cilindro es la variable de control (para detalles del modelo, ver p. e., Jahr *et al.*, 1998). Con este modelo, estos autores pueden explicar el patrón de la señal gravimétrica pero no la magnitud (línea punteada de la Figura 4.18).

Las erupciones que tuvieron lugar en 1999 y 2000 nos llevó a pensar que se había producido una inyección de material en el sistema volcánico más que una redistribución de magma sin afloramiento exterior. Para comprobar esta hipótesis, invertimos los datos mediante un algoritmo genético simple utilizando, como modelo directo, el modelo elástico-gravitatorio. Los resultados de esta inversión correspondientes a las épocas (4-1) y (5-1) se muestran en la Figura 4.18 (línea discontinua). Los parámetros de la fuente estimados para ambas épocas se dan en la Tabla 4.5.



**Figura 4.18.** Variaciones de gravedad observadas en el perfil “Tumpa-Lahar Channel” en la época 4-1 (línea continua) junto con las variaciones calculadas con los diferentes modelos (línea discontinua correspondiente al modelo elástico-gravitatorio; la línea punteada corresponde al modelo de redistribución de masas) (Fernández *et al.*, 2001c).

| Parámetros                                | Época 4-1                       | Época 5-1                       |
|-------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                                           | (diciembre 1992-diciembre 1994) | (diciembre 1992-diciembre 1996) |
| Profundidad $c$ (km)                      | 1.95                            | 1.82                            |
| Incremento de presión $P$ , (Kbar)        | 0.21                            | 0.31                            |
| Radio $a$ (km)                            | 1.65                            | 1.71                            |
| Incremento de masa, $M$ (1UM= $10^{12}$ ) | 0.474 UM                        | 0.841 UM                        |

**Tabla 4.5.** Parámetros de la fuente bajo la cima del volcán correspondientes a la inversión de las variaciones de gravedad observadas entre diciembre de 1992 y diciembre de 1994 y entre diciembre de 1992 y diciembre de 1996.

Los datos sintéticos, calculados a partir de estos parámetros mediante el modelo elástico-gravitatorio, reproducen tanto el patrón como la magnitud de las observaciones correspondientes al perfil “Tumpa-Lahar Channel”. Por otro lado, los resultados indican que las variaciones de gravedad observadas, se explican mejor considerando que se ha producido inyección de material que considerando una redistribución del magma en el interior del volcán. Esta hipótesis es consistente con la erupción que se produjeron posteriormente a las campañas. De igual forma que en los ejemplos anteriores, señalamos aquí la necesidad de interpretar variaciones de gravedad y deformaciones del terreno de forma conjunta con el fin de discriminar los efectos producidos por la expansión volumétrica de la cámara de los producidos por la masa de la intrusión, relevantes para la interpretación de variaciones de gravedad.

Estos resultados muestran tanto la habilidad como la generalidad del modelo elástico-gravitatorio en la interpretación de algunas “situaciones” que otros modelos, más simples, son incapaces de explicar con hipótesis realistas



## **CAPÍTULO 5**

# **ESTUDIO 3D DEL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA SOBRE EL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS Y VARIACIONES DE GRAVEDAD**

Los modelos utilizados habitualmente suponen que la superficie libre del medio es plana. Sin embargo, la superficie terrestre, en la que se producen las deformaciones, no es plana sino que presenta irregularidades. Por tanto, las deformaciones estarán influidas por las características topográficas del terreno. El efecto de la topografía en volcanes de poca altura, como el Kilauea en Hawai o el Krafla en Islandia, es tan pequeño que se encuentra dentro del límite de error de los datos de observación (Cayol y Cornet, 1997), pudiéndose utilizar modelos de semiespacio con superficie libre plana para la interpretación de variaciones. Sin embargo, las características topográficas en volcanes de mayor elevación, como pueden ser el Etna en Italia, el Merapi en Indonesia o el Teide en España, afectan críticamente las deformaciones observadas (McTigue y Segall, 1988).

Entre los trabajos que estudian el efecto de la topografía sobre la deformación observada podemos citar a McTigue y Stein (1984) y McTigue y Segall



(1988) que estudiaron el efecto de la topografía en modelos 2D. Cayol y Cornet (1997; 1998a, b) estudiaron el efecto de la topografía en modelos 3D mediante la aplicación de una técnica numérica que denominaron método mixto de elementos en la frontera. Williams y Wadge (1998) introdujeron una metodología aproximada para estimar el efecto de la topografía que permite obtener soluciones cuasi-analíticas. Williams y Wadge (2000) adaptaron la formulación desarrollada por McTigue y Stein (1984) para el caso tridimensional, con el fin de suplir los inconvenientes de su modelo aproximado. Folch *et al.* (2000) estudiaron el efecto topográfico sobre el campo de deformación producido en un medio viscoelástico. La conclusión a la que se llega en estos trabajos es que el relieve del terreno ejerce una influencia significativa sobre las deformaciones observadas, por lo que la aproximación del medio mediante un semiespacio plano puede conducir, en algunas ocasiones, a errores en la interpretación de registros.

El objetivo de este capítulo es estudiar, cuantificar y modelar la influencia de la topografía del terreno, no sólo sobre el campo de desplazamientos, sino también sobre las variaciones de gravedad que producen tanto la dilatación/contracción de la cámara como la inyección de nuevo material en su interior.

En primer lugar, vamos a realizar un estudio teórico para estimar la influencia de la topografía en un modelo elástico-gravitatorio. Para ello, vamos a suponer que este efecto está causado principalmente por la distancia entre la fuente y la superficie libre del medio. El objetivo de este estudio es comprobar si los términos correspondientes al acoplamiento elástico-gravitatorio se pueden despreciar frente al efecto topográfico.

### 5.1. ESTUDIO PRELIMINAR DEL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA EN UN MEDIO ELÁSTICO-GRAVITATORIO.

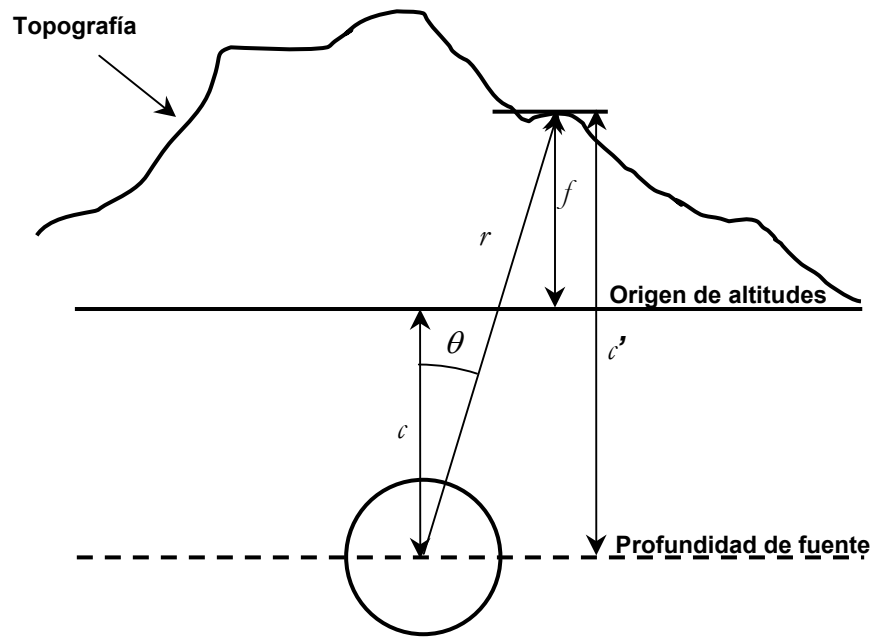
En este apartado, utilizando una solución aproximada, realizaremos un estudio previo del efecto de la topografía del terreno. Para ello, se realizará un análisis dimensional de igual forma que en el Capítulo 3 se utilizó para estudiar el efecto del acoplamiento elástico-gravitatorio sobre el campo de desplazamientos y variaciones de gravedad causados por una intrusión de magma en la corteza.

Como hemos señalado anteriormente, para la interpretación cuantitativa del campo de deformación será necesario considerar modelos tridimensionales que incluyan las características topográficas del medio. A lo largo de este capítulo veremos que este tipo de modelos no sólo es necesario para interpretar correctamente el campo de deformación sino que también es importante para la interpretación de variaciones de gravedad observadas en áreas volcánicas. Puesto que algunas cámaras magmáticas se sitúan a profundidades superficiales en el interior del edificio volcánico, el campo de desplazamientos que genera la variación volumétrica de sus paredes se ve afectado por la forma de dicha cámara. Sin embargo, Folch *et al.* (2000) señalan que despreciar el efecto de la topografía puede introducir un error superior al de considerar una fuente puntual. Por ello, para cuantificar exclusivamente el efecto de la topografía, seguiremos considerando fuentes puntuales.

Williams y Wadge (1998) estudiaron el efecto de la topografía mediante una técnica que permite obtener soluciones aproximadas de forma analítica. En esta metodología, que utiliza la solución correspondiente al semiespacio plano, se considera que la fuente tiene profundidad variable, dependiendo de la altura que tiene en cada punto el relieve del terreno (Figura 5.1), es decir, la profundidad de fuente se sustituye por una función dependiente de la posición,

$$c' = c + f(r, \theta), \quad (5.1)$$

donde  $c$  es la profundidad de la fuente respecto al origen de altitudes, constante para cada punto y,  $f$ , que depende de la distancia radial,  $r$ , y del ángulo  $\theta$  en el sistema de coordenadas local, representa la altitud de cada punto de la superficie del medio.



**Figura 5.1.** Modelo de profundidad variable de fuente. Se supone que la profundidad de la fuente,  $c$ , medida desde la superficie origen de altitudes se transforma en una función  $c'$ , dependiente de la altitud de cada punto,  $f$ .

Para estudiar el efecto que supone el cambiar el dominio de definición del problema, al tener en cuenta el relieve del terreno, vamos a sustituir en los términos de las ecuaciones del modelo. (3.2) y (3.15), la profundidad de la fuente por la función  $c'$ , dependiente de la altura. Como hemos señalado en el Capítulo 3, el término más importante para la magnitud del campo de desplazamientos de la ecuación (3.2), es el correspondiente a los esfuerzos elásticos del medio,  $\nabla \cdot \sigma$ , cuyas dimensiones dependen inversamente del cuadrado de la profundidad de la fuente,

$$\frac{\mu|u|}{|c'|^2}. \quad (5.2)$$

Al variar  $c'$  en la expresión (5.2), observamos que a mayor profundidad de la fuente, el efecto del término  $\nabla \cdot \sigma$  sobre el campo de desplazamientos es más pequeño.

La magnitud del término,  $-\rho_0 \nabla \phi_1$  de la ecuación (3.2), responsable del acoplamiento del sistema de ecuaciones, es independiente de  $c'$ . Por tanto, este término continuará sin ser relevante para el cálculo de desplazamientos.

La segunda ecuación del sistema que representa el comportamiento del medio elástico-gravitatorio ante una perturbación, (3.15), proporciona el potencial perturbador causado por la intrusión de magma. Como hemos señalado anteriormente, el primer término de esta ecuación escala como  $4\pi G \rho_0 |u|/|c'|$ , mientras que una estimación de la magnitud del segundo viene dada por  $4\pi G \rho_m a^2 \Delta a / |c'|^3$ , donde hemos sustituido  $c$  por la función  $c'$ . El efecto de la topografía está implícito en ambos términos. Al estar  $c'$  en el denominador de ambas expresiones, éstas serán tanto menores cuanto mayor sea la profundidad de la fuente, lo que implica que el efecto topográfico será más importante cuanto más superficial es la fuente. Posteriormente, veremos algunos ejemplos en los que se mostrará cualitativamente el efecto de la topografía en las deformaciones y variaciones de gravedad producidas por fuentes situadas a diferentes profundidades.

Para estudiar el efecto del acoplamiento de las ecuaciones sobre las variaciones de gravedad hemos analizado la relación (3.16), sustituyendo el parámetro profundidad de la fuente. Así, se obtiene la siguiente razón:

$$\frac{4\pi G \rho_0 |u|/|c'|}{4\pi G \rho_m a^2 \Delta a / |c'|^3}. \quad (5.3)$$

Cuando la profundidad de la fuente va disminuyendo el denominador de esta expresión va cobrando más relevancia en el análisis. Como además este término representa el efecto de la masa y el numerador proporciona el efecto del acoplamiento debido a la redistribución de densidades, una solución no acoplada que considere las características topográficas del terreno será más exacta que una solución acoplada que no tenga en cuenta el efecto de la topografía, si se consideran las profundidades típicas de fuente empleadas en volcanología.

En consecuencia en este trabajo, para estudiar el efecto de la topografía vamos a considerar que las tensiones y esfuerzos elásticos del medio prevalecen sobre el campo gravitatorio, y por lo tanto, los desplazamientos del medio,  $\mathbf{u}$ , vendrán dados por la solución de la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (5.4)$$

El potencial perturbador y, por tanto, las variaciones de gravedad, se obtienen entonces introduciendo el campo de desplazamientos calculado a partir de (5.4) en la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 4\pi G \rho_m \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \quad (5.5)$$

La linealidad del sistema formado por estas dos ecuaciones permite considerar el efecto de la masa de la intrusión junto con el de la variación volumétrica del medio. Por tanto, no es necesario realizar la hipótesis adicional de que la variación de volumen que se produce en la fuente como consecuencia de un incremento de presión sea igual al volumen de material inyectado en la cámara.

## 5.2. EL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS EN LA FRONTERA.

Para describir el efecto de la topografía utilizaremos el método indirecto de elementos en la frontera (conocido por su acrónimo inglés, IBEM). Este método ha sido utilizado en sismología para determinar la respuesta sísmica de estructuras geológicas superficiales en problemas bidimensionales (p.e., Sánchez-Sesma y Campillo, 1991; 1993; Luzón *et al.*, 1995) y tridimensionales (p.e., Sánchez-Sesma y Luzón, 1995; Luzón *et al.*, 1997). En este caso, se ha desarrollado para determinar el efecto de la topografía del terreno en las deformaciones y variaciones de gravedad producidas por una intrusión de magma en la corteza. Aunque existen trabajos en los que se estudia la influencia de la topografía mediante la formulación directa del método (p.e., Cayol y Cornet, 1997, 1998b) hemos optado por utilizar su formulación indirecta en la que las incógnitas son las densidades de fuerza en cada elemento en lugar del desplazamiento *per se*. De esta forma desaparecen las singularidades de las funciones de Green cuando la posición del elemento coincide con la del punto donde se evalúa la solución. La formulación directa e indirecta del método están estrechamente relacionadas y vamos a observar, a lo largo de este apartado, que ambas son matemáticamente equivalentes.

### 5.2.1. Ideas básicas.

El método de elementos en la frontera es un método numérico para resolver ecuaciones en derivadas parciales mediante el uso de las funciones de Green apropiadas. Jaswon (1963) desarrolló la primera técnica numérica asimilable al método de elementos en la frontera, que denominó “método indirecto”, para resolver las ecuaciones integrales de Fredholm que aparecen en el estudio de problemas de potencial. Algo más tarde Rizzo (1967) publicó el llamado “método directo” para resolver problemas referentes a la teoría de la elasticidad, basándose en la solución fundamental de Kelvin para un medio elástico e infinito. Cruse (1969) adaptó este método numérico a dominios elásticos tridimensionales.

Los métodos numéricos, como el método de elementos finitos o el de diferencias finitas, se basan en la discretización del dominio de definición del problema en subdominios, celdas o elementos. Por construcción, la aproximación numérica a la solución del problema verificará de forma parcial o total las condiciones de contorno. Por ello, se dice que esta clase de técnicas pueden clasificarse dentro de lo que se conoce como métodos numéricos de dominio. En contraposición, mediante los métodos de frontera, las funciones utilizadas para construir la aproximación numérica del problema deben verificar las ecuaciones que lo definen aunque, de entrada, no cumplan las condiciones de contorno. Con respecto al problema que vamos a tratar, el método de elementos en la frontera tienen las siguientes ventajas frente a otros métodos:

1. Reduce la dimensión del problema, de forma que si estamos ante uno planteado en el espacio tridimensional, éste pasa a ser bidimensional. La razón es que este método requiere la discretización de una ecuación integral definida sobre el contorno del dominio,  $\Gamma = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$ , que es equivalente al problema diferencial definido sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . El problema pasa entonces a tener menos incógnitas lo que supone un ahorro de memoria y de tiempo de cálculo CPU.
2. Permite tratar más fácilmente problemas que involucran dominios infinitos, puesto que no tenemos que definir la frontera remota del dominio al considerarse implícitamente en el problema las condiciones de contorno correspondientes a la “frontera lejana”.

En los apartados siguientes vamos a presentar, de forma abreviada, la aplicación del método al problema elástico. Desde que Cruse (1969) adaptó la técnica numérica al problema elástico tridimensional han sido muchas sus aplicaciones. Numerosos trabajos recogen su desarrollo. Entre ellos podemos citar como ejemplo a Jaswon y Symm (1977), y Brebbia y Domínguez (1992), que junto con el de Cruse (1969), Sánchez-Sesma y Luzón (1995) y Luzón *et al.* (1997) constituyen los trabajos

que hemos utilizado, a continuación, para describir la formulación integral empleada en el método numérico.

### 5.2.2. Funciones de Green.

Para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales comúnmente se emplean tres métodos: separación de variables, métodos variacionales y el método de la función de influencia o función de Green. Para obtener la formulación de las ecuaciones integrales sobre la frontera del dominio de definición, que se describirá en las siguientes secciones, se utilizará la solución de la ecuación de Navier en un dominio elástico e infinito que está sometido a la acción de una fuerza puntual y unitaria. Esta solución se conoce como solución fundamental o función de Green.

Si las ecuaciones de equilibrio dadas mediante la expresión (2.12) se expresan en función del vector desplazamiento teniendo en cuenta las expresiones que relacionan esfuerzos, deformaciones y desplazamientos (Capítulo 2) se obtiene la ecuación de Navier para el caso estático:

$$\frac{1}{1-2\nu} U_{jji} + U_{iij} + \frac{1}{\mu} f_i = 0, \quad (5.6)$$

donde las fuerzas de cuerpo aparecen multiplicadas por la densidad del medio para obtener fuerzas por unidad de volumen,  $f_i$ . La solución fundamental se obtiene al considerar la acción de una fuerza unitaria aplicada sobre el punto  $\mathbf{x}$  y orientada según el vector unitario  $e_i$ , es decir,  $f_i = \delta^k_i e_k$ , donde  $\delta^k_i$  es la delta de Dirac que desde el punto de vista físico se utiliza para representar el efecto de una fuerza unitaria concentrada sobre un punto del medio.

Una forma de obtener la solución de este problema es utilizar el vector de Galerkin,  $\Gamma_b$ , que se define de forma que el campo de desplazamientos verifica la siguiente condición (Mindlin y Cheng, 1950):



$$U_j = \Gamma_{j,mm} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \Gamma_{m,jm}. \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.7) en la ecuación (5.6) obtenemos que,

$$\Gamma_{l,mmij} + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0, \quad (5.8)$$

o en forma vectorial:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Gamma_l) + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0. \quad (5.9)$$

Sea  $F_l = \nabla^2 \Gamma_l$ , entonces (5.9) se reduce a:

$$\nabla^2 F_l + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0. \quad (5.10)$$

La expresión (5.10) es similar a la ecuación de Laplace para el potencial por lo que siguiendo a Kellogg (1953) su solución será de la forma,

$$F_l = \frac{1}{4\pi R \mu} e_l, \quad (5.11)$$

donde  $R$  es la distancia entre el punto donde queremos obtener la solución y el punto de aplicación de la fuerza. Por tanto, el vector de Galerkin y, como consecuencia, el campo de desplazamientos a partir del cual se ha definido, se obtendrán al resolver la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \Gamma_l = \frac{1}{4\pi R \mu} e_l. \quad (5.12)$$

Cuyas soluciones se pueden obtener de la misma manera que para el caso anterior (Brebbia y Dominguez, 1992),

$$\Gamma_l = \Gamma \cdot e_l, \quad (5.13)$$

con

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi\mu} R. \quad (5.14)$$

Considerando que cada una de las fuerzas que actúan en el sistema es independiente del resto, se puede utilizar la siguiente notación (Cruse, 1969),

$$\Gamma_{lk} = \Gamma \delta_{lk}, \quad (5.15)$$

donde  $\Gamma_{lk}$  representa la componente  $k$ -ésima del vector de Galerkin en un punto cuando se aplica una fuerza orientada en la dirección  $l$  sobre el punto  $\mathbf{x}$ . Siguiendo esta notación el desplazamiento de cualquier punto del medio se puede escribir mediante:

$$U_k = G_{lk} e_l, \quad (5.16)$$

$G_{lk}$  representa la componente  $k$ -ésima del vector desplazamiento cuando aplicamos en el punto  $\mathbf{x}$  una fuerza orientada según la dirección definida por  $e_l$ . De acuerdo con la definición del vector de Galerkin (5.7):

$$G_{lk} = \Gamma_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \Gamma_{lm,km}. \quad (5.17)$$

Sustituyendo en esta expresión (5.14) y (5.15) se obtiene el campo de desplazamientos, solución fundamental de nuestro problema:

$$G_{lk} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R} [(\beta - 4\nu)\delta_{lk} + R_{,l} R_{,k}]. \quad (5.18)$$

Como en casos anteriores, la coma significa diferenciar con respecto a la variable indicada tras ella. Estas diferenciales representan la razón entre las proyecciones del vector  $R_i$  sobre los ejes coordenados y el módulo de dicho vector, es decir:

$$R_{,l} = \frac{R_l}{R}. \quad (5.19)$$

A partir de los desplazamientos se pueden calcular los esfuerzos mediante la ley de Hooke, (2.8) y la relación lineal deformación/desplazamiento (2.5). Así,

$$T_k = T_{lk} e_l, \quad (5.20)$$

con

$$T_{lk} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \left[ \frac{\partial R}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{lk} + 3R_{,l} R_{,k} \right] + (1-2\nu)(n_l R_{,k} - n_k R_{,l}) \right], \quad (5.21)$$

donde  $n_l$  y  $n_k$  son los cosenos directores del vector normal a una superficie dada.

### 5.2.3. Formulación integral sobre la frontera. Teorema de reciprocidad de Betti.

Consideremos  $V \subset \mathfrak{R}^3$ , el dominio de definición del problema, cuya frontera,  $S$ , es una superficie continua. Sea  $n_s$  la normal exterior a dicha frontera, el problema consiste en encontrar una función que verifique la siguiente ecuación de equilibrio,

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \text{ en } V \quad (5.22)$$

que es equivalente a (5.3) en función de los esfuerzos elásticos del medio,  $\sigma_{ij}$ , suponiendo la existencia de fuerzas de cuerpo. Sobre la frontera del dominio se

pueden imponer condiciones de contorno en función del vector desplazamiento o del vector de esfuerzos (tracciones).

Estamos interesados en minimizar (5.22), por lo que podemos ponderar la ecuación mediante una función  $U_i$  de tal forma que el siguiente producto escalar sea cero:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \cdot U_i dV = 0. \quad (5.23)$$

El espacio de funciones de ponderación se puede formar a partir de una base de funciones de naturaleza global, es decir, funciones que adoptan valores no nulos en la mayor parte del dominio de integración. Las funciones  $U_i$  pueden elegirse de muchas maneras. Lo normal es escoger el espacio de funciones de ponderación definido por la solución fundamental del problema, que hemos descrito en la sección anterior.

Si realizamos la integración por partes del primer término de la ecuación que aparece en (5.22) y reagrupamos sus términos, se obtiene que:

$$-\int_V \sigma_{ij} \cdot E_{ij} dV + \int_V f_i \cdot U_i dV = -\int_S t_i \cdot U_i dS, \quad (5.24)$$

donde  $E_{ij}$  resulta de diferenciar la función  $U_i$  y  $t_i$  son las tracciones elásticas del medio que resultan de aplicar la relación de Cauchy al tensor de esfuerzos,  $\sigma_{ij}$ . Al realizar de nuevo otra integración por partes, es decir,

$$\int_V \Sigma_{ij,j} \cdot u_i dV + \int_V f_i \cdot U_i dV = -\int_S t_i \cdot U_i dS + \int_S T_i \cdot u_i dS, \quad (5.25)$$

se obtiene la expresión matemática del llamado teorema de reciprocidad de Betti (Brebbia y Dominguez, 1992), que muchas veces se toma como punto de partida para obtener la formulación integral de un determinado problema. Si  $U_i$  es la solución

fundamental entonces  $\Sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos correspondiente a este vector desplazamiento.

#### 5.2.4. Identidad de Somigliana.

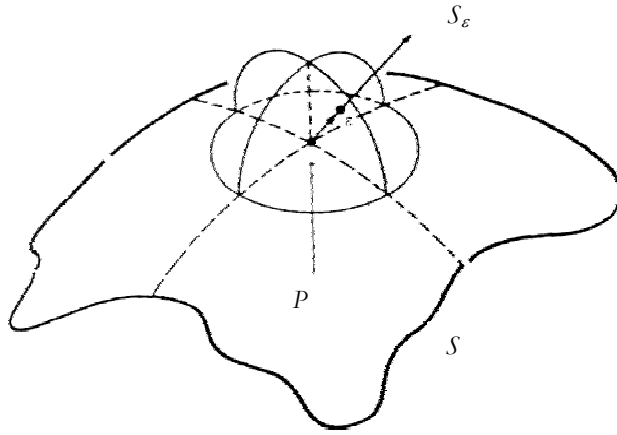
Una vez establecidos el teorema de Betti y las soluciones fundamentales del problema (funciones de Green), se obtiene que el primer sumando de la expresión (5.25) es igual a,

$$\int_V \Sigma_{lj,j} \cdot u_l dV = -\int_V \Delta u_l e_l dV = -u_l(\mathbf{x}), \quad (5.26)$$

donde  $u_l(\mathbf{x})$  representa la componente  $l$ -ésima del campo de desplazamientos en el punto  $\mathbf{x}$ . Puesto que  $l = 1,2,3$ , según el teorema de Betti, las tres componentes del vector desplazamiento en el punto  $\mathbf{x}$  vienen dadas por:

$$u_l(\mathbf{x}) + \int_S T_{lk} u_k dS = \int_S G_{lk} t_k dS + \int_V G_{lk} f_k dV. \quad (5.27)$$

Nótese que cuando se considera una carga puntual orientada según la dirección  $e_j$ , las tracciones y desplazamientos tienen componentes en las tres direcciones del espacio mientras que los términos del tipo  $\sigma_{lj,j}$  son distintos de cero sólo en la dirección que actúa la carga, lo que conlleva que el primer término de (5.25) proporcione desplazamientos en dicha dirección, como hemos visto mediante (5.26). La expresión (5.27) se conoce como identidad de Somigliana y proporciona el valor de los desplazamientos para cada punto interno al dominio a partir de los valores que las funciones  $u_k$  y  $t_k$  toman sobre el contorno,  $S$ , de las fuerzas de cuerpo aplicadas en el medio y de las soluciones particulares del problema fundamental. Sin embargo, merece la pena estudiar el caso particular en el que el punto de cálculo se sitúa en la frontera del dominio, puesto que la evaluación de las integrales que aparecen en (5.27) presenta una singularidad. En efecto, como se observa en la expresión (5.18), la solución fundamental,  $G_{lk}$ , no está definida en el punto  $\mathbf{x}$  ( $R=0$ ).



**Figura 5.2.** Superficie esférica  $S_\varepsilon$  utilizada para la integración. (Modificada de Brebbia y Dominguez, 1992).

Si se considera que la superficie de contorno es una superficie suave en un entorno de  $\mathbf{x}$ , se puede considerar una esfera de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $\varepsilon$ , tal que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , como la que mostramos en la Figura 5.2. Entonces, la primera de las integrales de superficie que aparece a la derecha de la igualdad (5.27) se puede descomponer en:

$$\int_S G_{lk} t_k dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G_{lk} t_k dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon} G_{lk} t_k dS, \quad (5.28)$$

donde la segunda integral es igual a la integral sobre toda la superficie de contorno cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La primera de las integrales en el lado izquierdo de la igualdad (5.28) es:

$$t_k(\mathbf{x}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G_{lk} dS. \quad (5.29)$$

Sustituyendo (5.19) en (5.18) sobre los puntos que están en la esfera de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $\varepsilon$ , se tiene que la función de Green (expresión (5.18)), es del orden de  $1/\varepsilon$ , lo que implica que la primera integral tras la igualdad en (5.28) es del orden de  $\varepsilon^2$  y por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G_{lk} dS = 0, \quad (5.30)$$

es decir, la integral estudiada no se verá afectada por la singularidad. La otra integral que nos queda por analizar a la izquierda de la igualdad (5.27) se comporta de forma distinta. Al igual que antes la podemos descomponer en:

$$\int_S T_{lk} u_k dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{lk} u_k dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon} T_{lk} u_k dS, \quad (5.31)$$

donde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{lk} u_k dS = u_k(\mathbf{x}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{lk} dS. \quad (5.32)$$

De igual forma sustituyendo (5.19) en (5.21) sobre los puntos de la esfera de centro  $\mathbf{x}$  y radio  $\varepsilon$  se tiene que el valor de las tracciones es del orden de  $1/\varepsilon^2$ , mientras que el área de la superficie esférica (Figura 5.2) es del orden de  $\varepsilon^2$ , por lo que en este caso, (5.32) no decae a cero sino que produce un término independiente:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{lk} dS = -\frac{1}{2} \delta_{lk}. \quad (5.33)$$

Por tanto, de la expresión (5.31) resulta que:

$$\int_S T_{lk} u_k dS - \frac{1}{2} \delta_{lk} u_k(\mathbf{x}) = \int_S T_{lk} u_k dS - \frac{1}{2} u_l(\mathbf{x}), \quad (5.34)$$

donde la integral de superficie se define en el sentido de valor principal de Cauchy. La identidad de Somigliana se transforma entonces en:

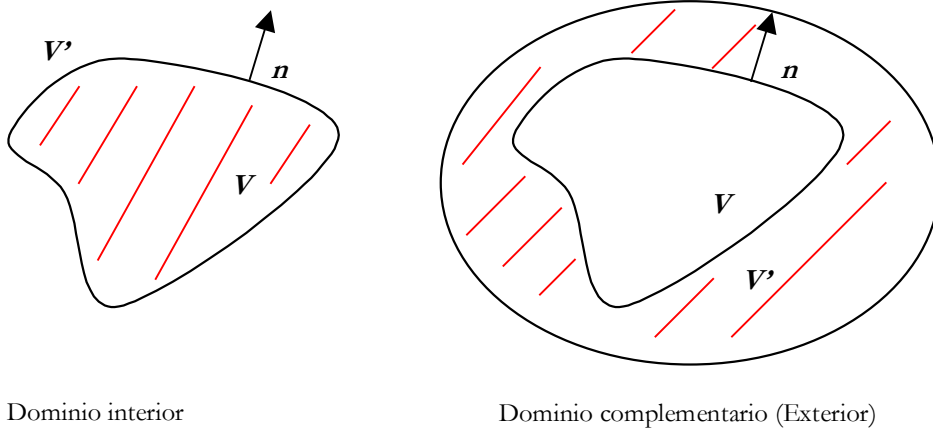
$$c_{lk} u_k(\mathbf{x}) + \int_S T_{lk} u_k dS = \int_S G_{lk} t_k dS + \int_V G_{lk} f_k dV, \quad (5.35)$$

donde  $c_{lk} = \frac{1}{2} \delta_{lk}$ . La expresión (5.35) permite resolver el problema planteado de manera general. Si se conocen los desplazamientos sobre la superficie de contorno,

(5.35) proporciona una ecuación integral de Fredholm de 1ª clase mientras que si lo que se especifica como condiciones de contorno son las tracciones, (5.35) proporciona una ecuación integral de Fredholm de 2ª clase. Cuando lo que se proporciona es una combinación de ambos tipos de condiciones de contorno se obtendrá una ecuación integral mixta.

### 5.2.5. Representación integral de la formulación indirecta.

La expresión (5.27) proporciona los desplazamientos en el dominio  $V$  a partir del valor que toman las tracciones y desplazamientos en la frontera. Se denominan formulaciones indirectas a aquellas representaciones integrales en las que los desplazamientos se expresan en función de variables que no son explícitamente desplazamientos o tracciones sobre la frontera.



**Figura 5.3.** Dominio interior y exterior, que se utiliza para definir el estado complementario.

Si se considera  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $u_j$  y  $t_j$  sobre el dominio de la Figura 5.3, se pueden definir  $\sigma'_{ij}$ ,  $e'_{ij}$ ,  $u'_j$  y  $t'_j$  sobre el dominio complementario  $V'$ , donde las tracciones sobre  $V'$  se refieren a la normal exterior,  $n_j$ , del dominio interno  $V$ . Se puede establecer la siguiente relación de reciprocidad entre la solución fundamental aplicada en un punto interior a  $V$  y el estado complementario indicado por primas (Brebbia y Dominguez, 1992):

$$\int_S G_{lk} t'_k dS - \int_S T_{lk} u'_k dS = 0. \quad (5.36)$$



## CAPÍTULO 5

Si sustraemos (5.36) de la expresión (5.27), donde por simplicidad no se incluye el término correspondiente a las fuerzas de cuerpo, se obtiene que:

$$u_l(\mathbf{x}) = \int_S G_{lk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (t_k(\boldsymbol{\xi}) - t'_k(\boldsymbol{\xi})) dS + \int_S T_{lk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (u'_k(\boldsymbol{\xi}) - u_k(\boldsymbol{\xi})) dS. \quad (5.37)$$

Puesto que el estado complementario se ha definido arbitrariamente, se puede suponer que los desplazamientos son iguales en la superficie contorno, es decir,

$$u'_k = u_k \quad \text{en } S. \quad (5.38)$$

Denominando  $\phi_k$  a la diferencia entre las tracciones,  $\phi_k = t_k - t'_k$ , la integral (5.37) se puede escribir como:

$$u_l(\mathbf{x}) = \int_S G_{lk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi_k(\boldsymbol{\xi}) dS. \quad (5.39)$$

$u_l(\mathbf{x})$  es la componente  $l$ -ésima del desplazamiento que se produce en el punto  $\mathbf{x}$  de  $V$ .  $\phi_k$  se puede interpretar como la densidad de fuerza en la dirección  $k$ -ésima en el punto  $\boldsymbol{\xi}$  (Luzón *et al.*, 1997), por tanto,  $\phi_k dS$  representa una distribución de fuerzas. Kupradze (1963) demostró que si  $\phi_k(\boldsymbol{\xi})$  es continua sobre la superficie de contorno, entonces el campo de desplazamientos es continuo a través de  $S$ . La representación integral (5.39) es un potencial de capa simple de densidad  $\phi_k$  (ver p. e., Jaswon y Symm, 1977). Otra posibilidad que ofrece la expresión (5.37), es suponer que el estado complementario es tal que

$$t'_k = t_k \quad \text{en } S, \quad (5.40)$$

de donde se obtiene de forma similar la expresión integral de un potencial de capa doble.

Normalmente, cuando se utiliza una representación integral basada en un potencial de capa simple se habla del método indirecto de elementos en la frontera

(IBEM) mientras que si se utiliza una representación basada en un potencial de capa doble se denomina método de discontinuidad en los desplazamientos (DD).

### 5.3. DESPLAZAMIENTOS PRODUCIDOS EN UN MEDIO CON IRREGULARIDAD TOPOGRÁFICA SUPERFICIAL.

En esta sección vamos a utilizar la representación integral mostrada anteriormente para describir el campo de desplazamientos elásticos producido en un medio con una irregularidad topográfica superficial. Posteriormente, mediante las condiciones de contorno obtendremos un sistema de ecuaciones lineales a partir de un proceso de discretización de la superficie-frontera del problema. Consideremos un semiespacio elástico en cuya superficie existe una irregularidad topográfica como la que se muestra de forma esquemática en la Figura 5.1. En esta configuración el campo de desplazamientos en cualquier punto del medio se puede expresar como (Luzón *et al.*, 1997):

$$u_i = u_i^{(t)} + u_i^{(0)}, \quad (5.41)$$

donde  $u_i^{(0)}$  es la solución correspondiente al desplazamiento en el espacio completo y  $u_i^{(t)}$  el campo debido a la existencia de la superficie libre de la irregularidad. De acuerdo a la ecuación (5.39), el campo producido por la topografía superficial se puede escribir como:

$$u_i^{(t)}(\mathbf{x}) = \int_S G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi_j(\boldsymbol{\xi}) dS. \quad (5.42)$$

En este problema las condiciones de contorno implican tracciones nulas sobre la superficie libre, es decir,

$$t_i^{(t)} + t_i^{(0)} = 0, \quad (5.43)$$

donde los superíndices tienen el mismo significado que los que aparecen sobre el campo de desplazamientos (5.41). La ley de Hooke permite obtener los esfuerzos y tracciones a partir del campo de desplazamientos. Así,  $t_i^{(t)}$  se puede obtener aplicando esta ley al campo de desplazamientos  $u_i^{(t)}$ , si exceptuamos el punto  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , en el que la función de Green, (5.18), posee una singularidad. En este punto es necesario realizar un límite de forma similar al que se realizó en la sección 5.2.4. Así:

$$t_i^{(t)}(\mathbf{x}) = b\phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS, \quad (5.44)$$

donde  $b = 1/2$  o  $-1/2$  si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde el interior del semiespacio o  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde el exterior cuando se realiza el límite, respectivamente, y  $T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  es la función de Green para las tracciones. Si  $\mathbf{x}$  no está sobre la superficie de contorno, el primer término tras la igualdad de (5.44) es igual a cero. En nuestro caso, esta condición la podemos expresar mediante:

$$t_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS = 0, \quad (5.45)$$

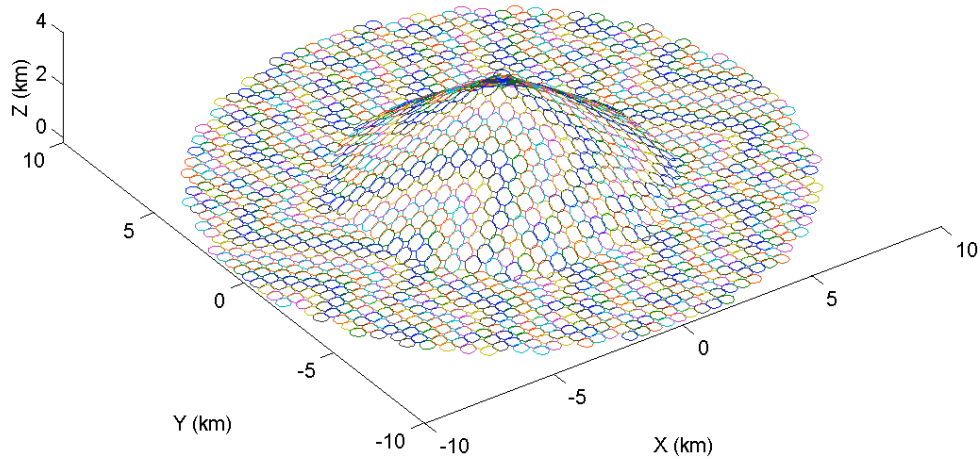
que es una ecuación integral de Fredholm de segunda clase.

### 5.3.1. Discretización.

Para resolver el sistema de ecuaciones integrales formado por (5.45) es necesario discretizar estas expresiones sobre una porción de la superficie que incluye el relieve topográfico y parte de la extensión lateral del medio. La discretización de una superficie no es tarea fácil aunque existen numerosos algoritmos para resolver este problema (p.e., George, 1991). La elección del esquema de discretización depende del problema y de la formulación matemática necesaria para desarrollarlo. Por ejemplo, en muchas aplicaciones, que utilizan como método numérico el de elementos en la frontera, se emplean elementos triangulares planos para discretizar superficies (p. e., Brebbia y Domínguez, 1992). Para este problema tridimensional, vamos a utilizar un esquema simplificado en el que se utilizan círculos de varios

tamaños para discretizar la superficie-frontera del problema. Esta elección, guiada por la simplicidad de integración de las funciones de Green sobre cada elemento, proporciona una formulación simple y una implantación numérica sencilla (Sánchez-Sesma y Luzón, 1995). Hemos dividido la superficie libre en bandas paralelas, cada una de las cuales ha sido cubierta con círculos planos. El radio de cada elemento es tal que la suma de las áreas de los círculos que ocupan cada una de las bandas es igual al área de dicha banda. Tras esta discretización, seleccionamos los elementos que se sitúan a una distancia radial menor o igual que una distancia pre-establecida. En la Figura 5.4 mostramos un ejemplo de discretización de una de las superficies topográficas empleadas en este trabajo. Las representaciones cónicas que hemos utilizado para considerar el efecto de la topografía son de clase infinito si exceptuamos su vértice, punto que hemos eliminado al realizar los cálculos. Por tanto, tienen vector normal en cada uno de sus elementos de superficie lo que es necesario para el cálculo de las funciones de Green.

CONO



**Figura 5.4.** Discretización de la superficie de un cono en elementos circulares.

Vamos a suponer que las funciones de densidad,  $\phi(\xi)$ , son constantes sobre cada elemento que cubre la superficie de contorno. Si  $N$  es el número de elementos

## CAPÍTULO 5

de frontera y  $\phi_j(\xi_p)$  el número de incógnitas (con  $j = 1, 2, 3$  y  $p = 1, \dots, N$ ), entonces podemos obtener el siguiente sistema lineal de ecuaciones,

$$\sum_{p=1}^N \phi_j(\xi_p) t_{ij}(\mathbf{x}_q, \xi_p) = -t_i^{(0)}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, N, \quad (5.46)$$

con

$$t_{ij}(\mathbf{x}_q, \xi_p) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{qp} + \int_{\Delta S} T_{ij}(\mathbf{x}_q, \xi_p) dS, \quad (5.47)$$

donde  $\Delta S$  es el área de cada uno de los elementos de superficie. En este sistema que contiene  $3N$  incógnitas, las integrales se resuelven numéricamente utilizando integración gaussiana (p.e., Abramowitz y Stegun, 1972), excepto cuando  $\mathbf{x}_q = \xi_p$ , donde, a partir de (5.47) obtenemos que,

$$t_{ij}(\mathbf{x}_q, \xi_p) = \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad (5.48)$$

puesto que la integral de las funciones de Green,  $T_{ij}$  que aparece es cero si la superficie de integración es circular y plana. De hecho, si observamos las expresiones de las funciones de Green, ecuación (5.21), resulta que son funciones pares singulares cuyo valor principal de Cauchy es cero. El sistema de ecuaciones (5.47) lo podemos expresar de forma matricial,

$$\mathbf{M}\Phi = -\mathbf{t}, \quad (5.49)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de coeficientes, que se obtiene al desarrollar la expresión (5.46),  $\mathbf{t}$  es el vector de términos independientes y el vector  $\Phi$ , cuyas componentes son las funciones de densidad, es el vector incógnita. Una vez resuelto este sistema lineal, mediante una descomposición LU, obtenemos los valores de  $\phi_j(\xi)$  a partir de los cuales se obtiene el campo de desplazamientos como:

$$u_i^{(t)}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^N \phi_j(\boldsymbol{\xi}_p) g_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_p), \quad (5.50)$$

donde

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_p) = \int_{\Delta S} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS. \quad (5.51)$$

Estas integrales también se calculan numéricamente excepto cuando el punto  $\mathbf{x}$  está en las proximidades de  $\boldsymbol{\xi}_p$ . En este caso se realiza una integración analítica mediante un cambio de variable para eliminar la singularidad. Así, por ejemplo, cuando la posición del punto-estación coincide con la del elemento de radio  $r$ , esto es,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , la integral de la función de Green es:

$$\int_{\Delta S} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS = \frac{r}{4\mu} [(F+1)\delta_{ij} + (F-1)n_i n_j], \quad (5.52)$$

donde,

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \right). \quad (5.53)$$

Para estimar la extensión lateral y el número de elementos necesario para obtener resultados óptimos mediante el IBEM, hemos realizado una comparación con la solución analítica del problema elástico para un semiespacio plano considerando fuentes a distinta profundidad. Tanto los desplazamientos como las variaciones de gravedad presentan una zona de variación importante cuyas dimensiones dependen de la profundidad a la que esté situada la fuente (ver p.e., Rundle, 1981a). Por ello, para tener una discretización con la que se obtengan resultados fiables es necesario que, como mínimo, la extensión lateral de la superficie discretizada sea del orden de la profundidad de fuente. Además, la resolución de la malla también influye de forma considerable en el cálculo. Como es usual, si el

tamaño de los elementos es de orden superior al de la profundidad de la fuente las soluciones numéricas no representan de forma fiable las soluciones analíticas.

Experimentalmente hemos comprobado que, para obtener una solución numérica que esté suficientemente cerca de la solución analítica, la extensión lateral de la superficie de discretización debe ser de 3 a 4 veces la profundidad de fuente y el radio de los elementos del orden del 13% de dicha profundidad. Esto se puede ver en el siguiente un ejemplo que considera un modelo en el que la fuente de dilatación, supuesta esférica y puntual, se sitúa a 5 km de profundidad en un semiespacio elástico de rigidez,  $\mu = 10$  GPa y razón de Poisson,  $\nu = 0.25$ . Los desplazamientos calculados analíticamente mediante el modelo de Mogi (1958) se comparan con los resultados numéricos del IBEM. Para estimar la precisión de los resultados numéricos hemos utilizado el error relativo medio, definido en tantos por cien por:

$$\Delta(U)(\%) = \frac{\sum_{i=1}^N |U_i^{IBEM} - U_i^{AN}|}{\sum_{i=1}^N |U_i^{AN}|} \cdot 100, \quad (5.53)$$

donde  $U_i^{IBEM}$  es el desplazamiento calculado en el punto estación  $x_i$  mediante el método de elementos en la frontera,  $U_i^{AN}$  es el resultado correspondiente al modelo analítico y  $N$  es el número total de puntos estación. En la Tabla 5.1 mostramos los resultados correspondientes a superficies cuya discretización se ha extendido hasta (a) 17.5 km y (b) 20 km. El parámetro  $r$  denota el radio de cada elemento. Los resultados se encuentran en tantos por cien.

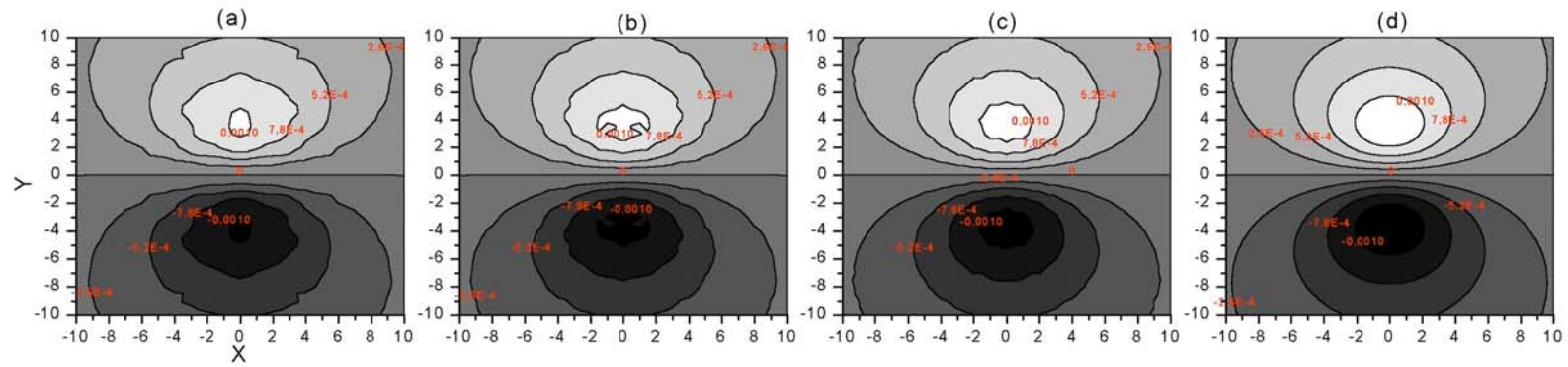
El error que se comete al utilizar la solución numérica en este caso, es siempre menor al 10%. Los porcentajes de error no varían significativamente entre la solución correspondiente a una malla de extensión lateral igual a 17.5 km y a otra de 20 km, por lo que observamos que, efectivamente, la extensión lateral de la malla idónea se encuentra entre 3-4 veces la profundidad de fuente. Además, observamos que la influencia del radio del elemento disminuye para radios situados entre 0.8 y 0.5 km, es decir, entre un 16 y un 10% de la profundidad de la fuente. Las Figuras 5.5 y

5.6 muestran gráficamente los resultados obtenidos para una discretización de extensión lateral igual a 17.5 km, mientras que en las Figuras 5.7 y 5.8 la extensión lateral de la malla es igual a cuatro veces la profundidad de la fuente. Los resultados numéricos se aproximan paulatinamente a la solución analítica. La exactitud de los resultados numéricos correspondientes a la componente en la dirección del eje  $y$  (Figuras 5.5 y 5.7), es ligeramente superior a la de la componente vertical del campo de desplazamientos (Figuras 5.6 y 5.8).

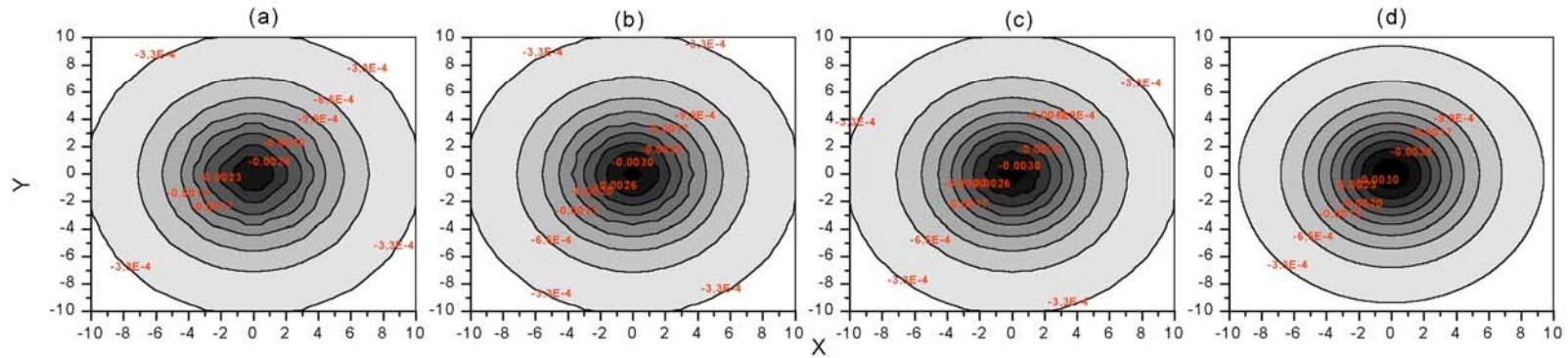
| <b>(a)</b>   | $r = 1.32 \text{ km}$ | $r = 0.79 \text{ km}$ | $r = 0.53 \text{ km}$ |
|--------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\Delta U_z$ | 9.2                   | 8.0                   | 7.5                   |
| $\Delta U_y$ | 10.0                  | 6.7                   | 5.0                   |
| <b>(b)</b>   | $r = 1.33 \text{ km}$ | $r = 0.84 \text{ km}$ | $r = 0.53 \text{ km}$ |
| $\Delta U_z$ | 8.2                   | 6.7                   | 6.3                   |
| $\Delta U_y$ | 9.5                   | 6.4                   | 4.3                   |

**Tabla 5.1 (a)** Error relativo medio (%) entre la solución analítica correspondiente al semiespacio elástico plano y la solución numérica calculada con el IBEM. La extensión lateral de la malla es igual a 17.5 km, es decir, a 3.5 veces la profundidad de la fuente. **(b)**. Error relativo medio (%) entre la solución analítica correspondiente al semiespacio elástico plano y la solución numérica calculada con el IBEM. La extensión lateral de la malla es igual a 20 km, es decir a 4 veces la profundidad de la fuente.

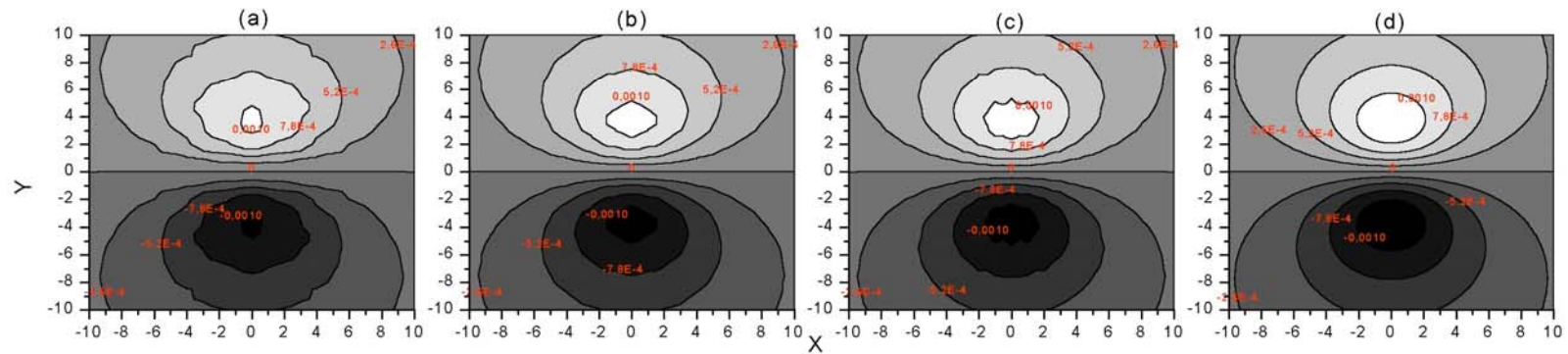




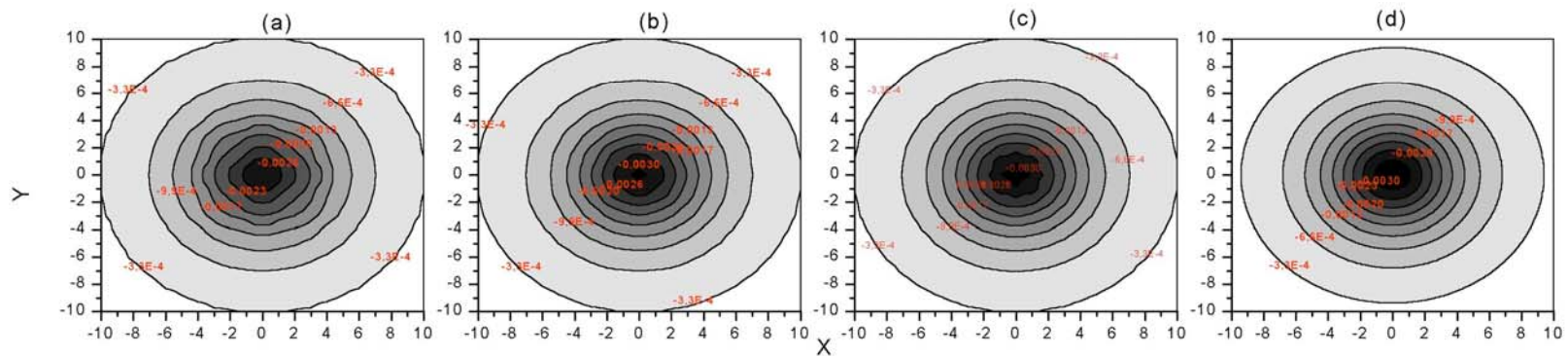
**Figura 5.5.** Desplazamiento en la dirección  $y$  (en cm) producido por una fuente situada a 5 de profundidad. La extensión lateral de la malla en los casos (a), (b) y (c) es de 17.5 km. El radio de los elementos es (a)  $r = 1.32$  km, (b)  $r = 0.79$  km y (c)  $r = 0.54$  km. La figura (d) muestra la solución analítica con la que estamos comparando (X e Y en km).



**Figura 5.6.** Desplazamiento vertical (cm) producido por una fuente situada a 5 de profundidad. La extensión lateral de la malla y el radio de los elementos son iguales a los utilizados en la figura anterior. (d) Desplazamiento vertical correspondiente a la solución analítica. (X e Y en km).



**Figura 5.7.** Componente del campo de desplazamientos en la dirección y (en cm) producido por una fuente situada a 5 de profundidad. La extensión lateral de la malla en los casos (a), (b) y (c) es de 20 km. El radio de los elementos es (a)  $r = 1.33$  km, (b)  $r = 0.84$  km y (c)  $r = 0.53$  km. La figura (d) muestra la solución analítica con la que estamos comparando. (X e Y en km)



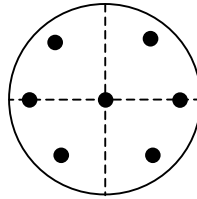
**Figura 5.8** Componente del campo de desplazamientos en la dirección z (n cm) producido por una fuente situada a 5 de profundidad. La extensión lateral de la malla y el radio de los elementos son iguales a los de la figura 5.6. (d) Desplazamiento vertical analítico. (X e Y en km)

### 5.3.2. Integración gaussiana.

Como hemos señalado en el apartado anterior, las integrales que aparecen en (5.46) y (5.50) las hemos realizado numéricamente. Los resultados obtenidos tras realizar varias pruebas tomando un número de puntos diferente en cada elemento de la malla muestran que al utilizar integración gaussiana de siete puntos se pueden mejorar los errores que se cometen al utilizar la discretización mostrada anteriormente. La integración de siete puntos consiste en evaluar las funciones de Green en 7 puntos de cada elemento circular y realizar una media ponderada asignando pesos a cada uno de los puntos. Si denominamos de forma genérica  $f$ , a las funciones que tenemos que integrar en el círculo (p. e., Abramowitz y Stegun, 1972), entonces,

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_C f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i, y_i) + R, \quad (5.54)$$

donde  $(x_i, y_i)$  son los puntos en los que se evalúa la función con sus correspondientes pesos  $\omega_i$  y  $R$ , en este caso, es el resto de la integración numérica. La Figura 5.9 muestra la distribución de estos puntos sobre cada elemento y sus coordenadas en el sistema de referencia local que forman los diámetros perpendiculares de cada elemento, cuyo origen es el centro del mismo.



| $(x_i, y_i)$                                                        | $\omega_i$ |              |
|---------------------------------------------------------------------|------------|--------------|
| $(0,0)$                                                             | $1/4$      |              |
| $\left( \pm \sqrt{\frac{2}{3}} r, 0 \right)$                        | $1/8$      | $R = O(r^6)$ |
| $\left( \pm \sqrt{\frac{1}{6}} r, \pm \frac{r}{2} \sqrt{2} \right)$ | $1/8$      |              |

**Figura 5.9.** Distribución de los puntos  $(x_i, y_i)$  en los que se evalúa la función para realizar la integración numérica de las funciones de Green para las tracciones y el desplazamiento, junto con sus pesos correspondientes  $\omega_i$ .

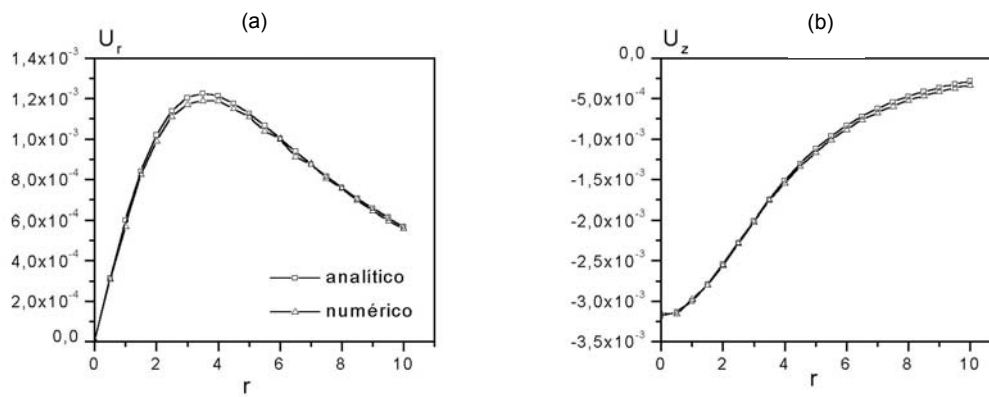
Este tipo de integración mejora los resultados obtenidos frente a los que se obtenían al considerar un único punto en el centro del elemento. Si consideramos la extensión lateral de la malla igual a cuatro veces la profundidad de fuente, los resultados obtenidos se observan en las Figuras 5.10 y 5.11. La precisión numérica de los resultados aumenta considerablemente sobre todo en el cálculo de la componente  $U_j$ .

La Tabla 5.2 muestra el error relativo medio, en tantos por cien, (5.53), que obtenemos al considerar en el IBEM la integración gaussiana de siete puntos. El error que se comete al utilizar la solución numérica es del 6.3% y del 2.2% en las componentes vertical y horizontal, respectivamente, lo que implica que la solución numérica representa una aproximación bastante buena de la solución analítica. De hecho si tenemos en cuenta que, normalmente, las deformaciones detectadas en áreas volcánicas son centimétricas, un error de este calibre se encuentra por debajo del límite de precisión. En la Figura 5.12 mostramos dos perfiles extraídos de la Figura 5.10.c y 5.11.c, respectivamente. Como se observa en este gráfico, la solución numérica se ajusta bastante bien a la solución analítica.



|              | $r = 1.33 \text{ km}$ | $r = 0.84 \text{ km}$ | $r = 0.53 \text{ km}$ |
|--------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\Delta U_z$ | 7.8                   | 6.7                   | 6.3                   |
| $\Delta U_y$ | 5.6                   | 3.3                   | 2.2                   |

**Tabla 5.2.** Error relativo medio (%) entre la solución analítica correspondiente al semiespacio elástico plano y la solución numérica. La extensión lateral de la malla es igual a 20 km. En este caso, la integración numérica se realiza mediante una integración gaussiana de siete puntos.



**Figura 5.12.** Comparación de los resultados del IBEM, cuando se utiliza una integración gaussiana de 7 puntos, y de la solución analítica. La extensión lateral de la malla es de 20 km para una fuente situada a 5 km de profundidad. El radio de cada elemento es de 0.53 km. (a) Perfil correspondiente a la componente radial del campo de desplazamientos en cm ( $U_r = U_x \cos \theta + U_z \sin \theta$ ). (b) Componente vertical del desplazamiento en cm.  $r$  es la distancia radial a la fuente en superficie.

#### 5.4. VARIACIONES DE GRAVEDAD.

Como hemos señalado en el Capítulo 3, en un medio elástico, la variación de gravedad observada en un punto de la superficie se puede expresar como:

$$dg_s = \gamma_{FA} u_{\tilde{\kappa}} + \frac{GM_c}{R^3}. \quad (5.55)$$

Por tanto, la variación en la atracción gravitatoria que produce la intrusión de magma sobre el gravímetro puede variar al considerar la topografía. Una parte de la variación

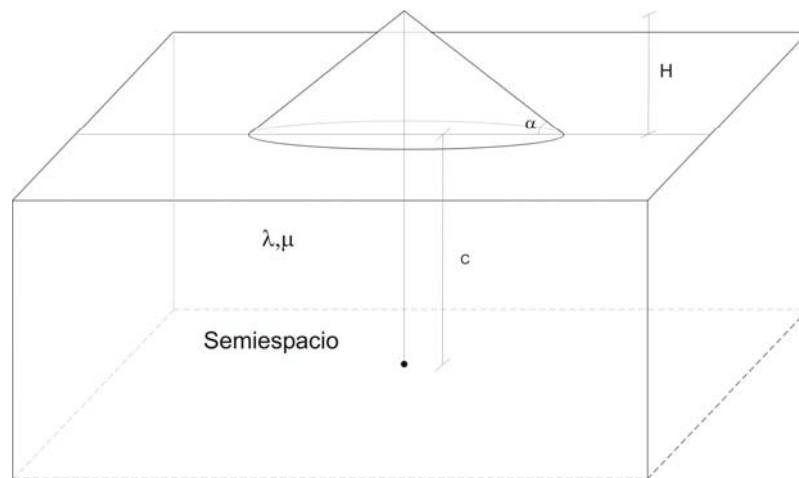
es debida al efecto aire-libre, consecuencia del desplazamiento elástico del medio, causado principalmente por la expansión de la cámara, y la otra es debida a la atracción gravitatoria de la masa anómala de la intrusión. Puesto que la topografía superficial influye significativamente sobre las deformaciones producidas, las variaciones de gravedad también se verán influidas.

### **5.5. EFECTO DE UNA TOPOGRAFÍA 3D EN LAS DEFORMACIONES Y VARIACIONES DE GRAVEDAD.**

Para cuantificar el efecto de la topografía superficial del terreno en las deformaciones y variaciones de gravedad, utilizamos el método indirecto de elementos en la frontera. En este caso y para la comparación con resultados anteriores obtenidos por otros autores, vamos a representar la topografía superficial mediante un cono de altura  $H$  (Figura 5.13), con pendiente en los flancos igual a  $\alpha$ , de forma que cuando  $\alpha = 0^\circ$ , la altura del cono es igual a cero y por tanto, tendremos un semiespacio plano. Cada una de las pendientes que vamos a considerar define una altura diferente, lo que va a permitir representar diferentes tipos de volcanes. Así, los modelos con pendientes entre  $10^\circ$  y  $20^\circ$  pueden representar volcanes escudo, como el Mauna Loa en Hawai y el Pitón de la Fourniase en la Isla Reunión (Francia), que son estructuras muy amplias (decenas de kilómetros cuadrados de base), producto de grandes coladas de lava basáltica que se desparrama formando suaves pendientes. En estas zonas las lavas fluyen tan rápidamente que no se puede solidificar en las proximidades de la chimenea, impidiendo la formación de laderas escarpadas. Los estratovolcanes, como el Merapi en Indonesia o el Mayon en Filipinas, presentan conos volcánicos con acusadas pendientes, resultado de la acumulación de coladas, lavas y piroclastos sucesivos, que podrían ser representativos de modelos con pendientes aproximadas a  $30^\circ$ .

Vamos a representar la corteza mediante un semiespacio homogéneo cuyas propiedades elásticas vienen dadas a partir de los parámetros de Lamé  $\lambda=\mu=30$  GPa, es decir, la razón de Poisson es  $\nu = 0.25$ . La topografía va a estar caracterizada por el

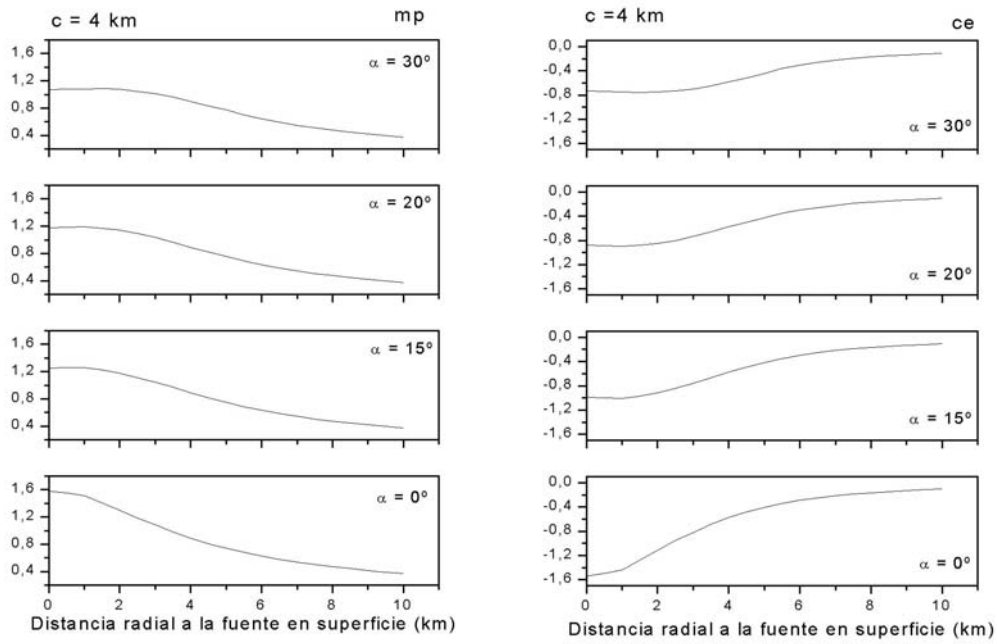
mismo conjunto de parámetros. El efecto del incremento de masa en la cámara se considera mediante una fuente esférica puntual de 1 UM ( $1 \text{ UM} = 10^{12} \text{ kg}$ ) mientras que la expansión/contracción de la cámara se representa mediante una fuente de dilatación de 1 km de radio con un incremento de presión igual a 10 MPa. La fuente está situada a 4 km de profundidad. La discretización y el tamaño de los elementos se han tomado de acuerdo con los resultados del apartado 5.3.



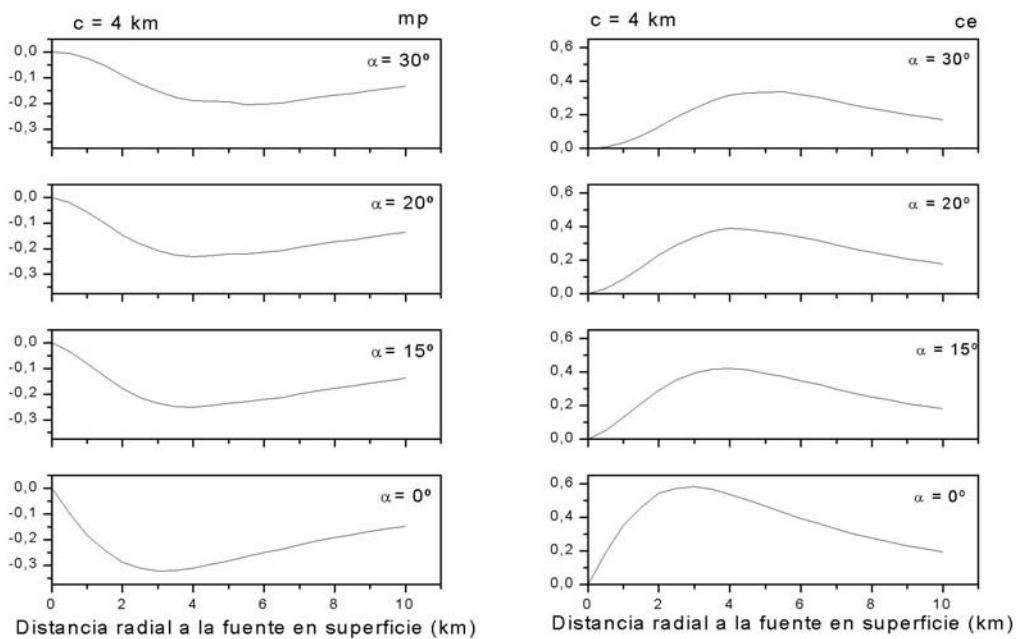
**Figura 5.13.** Ilustración esquemática del relieve topográfico. En el caso general, consideramos un volcán de altura  $H$ , y pendiente de sus laderas igual a  $\alpha$ . Para representar el efecto de la topografía vamos a considerar pendientes de  $15^\circ$ ,  $20^\circ$  y  $30^\circ$  correspondientes a 1340 m, 1820 m y 2886 m de altura, respectivamente. La corteza se representa por un semiespacio homogéneo con parámetros de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ .

Las Figuras 5.14, 5.15 y 5.16 muestran la componente vertical del campo de desplazamientos, la componente horizontal y las variaciones de gravedad en superficie, respectivamente, calculadas mediante el IBEM. La masa y el centro de expansión producen efectos de signo contrario, por tanto, para la interpretación correcta de deformaciones y variaciones de gravedad es necesario tener en cuenta ambos tipos de fuente.

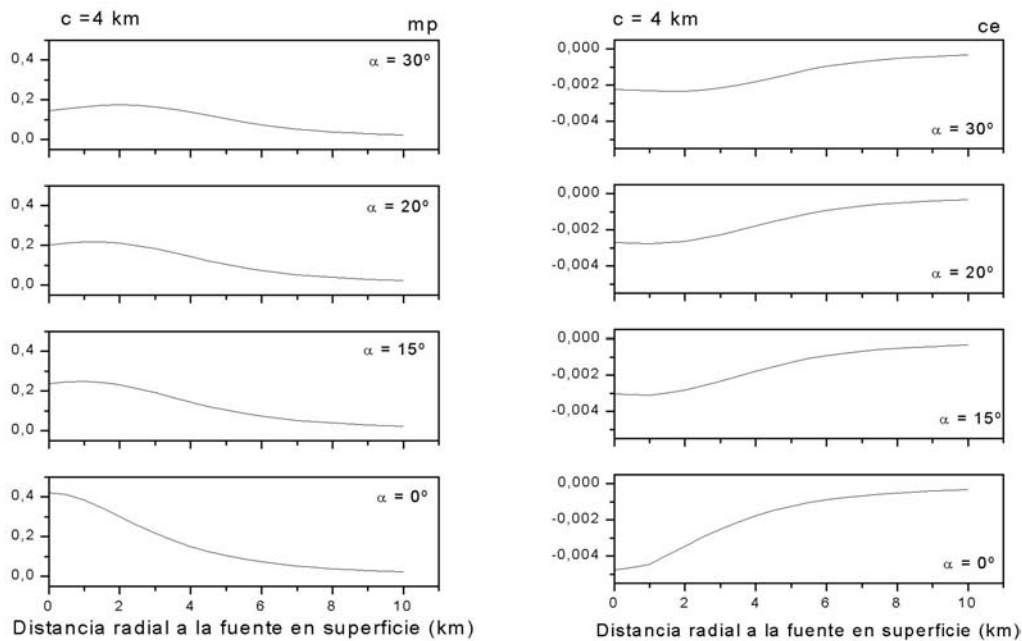




**Figura 5.14.** Desplazamientos verticales en cm producidos por una fuente puntual de masa (mp) y por un centro de expansión (ce) situados a 4 km de profundidad. El medio es elástico y homogéneo con  $\lambda = \mu$ . La solución correspondiente al semiespacio se obtiene para  $\alpha = 0^\circ$ , mientras que  $\alpha = 15, 20$  y  $30^\circ$  corresponden a conos de 1340, 1820 y 2886 m de altura respectivamente.



**Figura 5.15.** Desplazamientos horizontales en cm producidos por una fuente puntual de masa (mp) y por un centro de expansión (ce) situados a 4 km de profundidad. El medio es posee las mismas características que en la Figura 5.14.



**Figura 5.16.** Variaciones de gravedad en superficie (mGal) producidas por una fuente puntual de masa (mp) y por un centro de expansión (ce) situados a 4 km de profundidad. El medio es elástico y homogéneo con  $\lambda = \mu$ . La solución correspondiente al semiespacio se obtiene para  $\alpha = 0^\circ$ , mientras que  $\alpha = 15, 20$  y  $30^\circ$  corresponden a conos de 1340, 1820 y 2886 m de altura, respectivamente.

Cualitativamente, la principal característica que se observa es una reducción de los desplazamientos y variaciones de gravedad en las cercanías de la cima del volcán. El error que se produce al despreciar la topografía es mayor cuanto más pronunciada es la pendiente del volcán. La masa de la intrusión causa un hundimiento del terreno mientras que la dilatación de las paredes de la cámara produce un levantamiento del edificio volcánico. Por tanto, la masa inyectada cancela parte del levantamiento que produce la fuente de presión. El hundimiento causado por la masa disminuye en menor medida que la elevación que produce el centro de expansión. Pero aún así, el efecto de la masa sobre el levantamiento del edificio volcánico es todavía menor que cuando se considera un medio de superficie plana. Por tanto, el hundimiento que produce la masa es menor que el que se produciría si no se tiene en cuenta la topografía (Figura 5.14). La gravedad disminuye debido a la dilatación de la cámara y aumenta como consecuencia de la inyección de nuevo material, con lo que en este caso, se obtendría un efecto similar sobre las variaciones de gravedad. La reducción que produce la topografía en las variaciones de gravedad

causadas por la fuente de masa puntual es mayor que la que se produce en la magnitud de las causadas por el centro de expansión (Figura 5.16).

Además de la reducción de estas magnitudes, se observan también variaciones en el patrón. El máximo absoluto (o mínimo dependiendo de la fuente) de la componente horizontal del vector desplazamiento se sitúa a una distancia radial en superficie mayor que la que proporciona la solución correspondiente a  $\alpha=0^\circ$  (Figura 5.15). Los desplazamientos verticales y variaciones de gravedad presentan un mínimo relativo (o máximo) sobre la proyección de la fuente en superficie, cuya localización coincide con la posición de la cima del volcán, donde la elevación del cono volcánico es máxima (Figura 5.14 y 5.16). El efecto topográfico tiende a disminuir cuando aumenta la distancia radial a la proyección de la fuente en superficie. Esta disminución se detecta a distancias radiales a la proyección de la fuente en superficie de 3 km, todavía dentro del rango de influencia de la topografía puesto que el radio del cono es igual a 5 km en todos los casos considerados.

Cayol y Cornet (1998a) realizaron mediante el método directo de elementos en la frontera un estudio similar del efecto de la topografía del terreno, considerando tan sólo una fuente de las mismas características que la fuente de dilatación que hemos considerado en este ejemplo, sin tener en cuenta el efecto de la masa. En su trabajo calcularon desplazamientos verticales y radiales obteniendo resultados similares a los que hemos mostrado. Al igual que Cayol y Cornet (1998a), Williams y Wadge (1998) estudiaron el efecto de la topografía sobre el campo de desplazamientos. Para ello, utilizaron la metodología de variación de profundidad de fuente. Como veremos en el capítulo siguiente, esta metodología permite aproximar el efecto topográfico, de forma precisa, sobre los desplazamientos verticales. Mediante las pruebas y comparaciones que realizaron también obtuvieron resultados similares.

Estos resultados tienen fuertes implicaciones para la estimación de parámetros fuente a partir de la interpretación de datos observacionales mediante inversión. Como hemos visto, el principal efecto de la topografía es la reducción de

la magnitud de los desplazamientos y variaciones de gravedad. Esto implica que la profundidad de la fuente se puede sobrestimar si se desprecia el relieve del terreno. A su vez, la masa y la variación de presión obtenidos en un proceso de inversión están también influidas por el relieve, obteniéndose valores más pequeños de estos parámetros al despreciar la elevación del volcán. El cambio de patrón que experimentan las deformaciones y variaciones de gravedad con respecto a las soluciones que proporciona un modelo de semiespacio plano puede afectar al estimar la localización horizontal de la fuente.



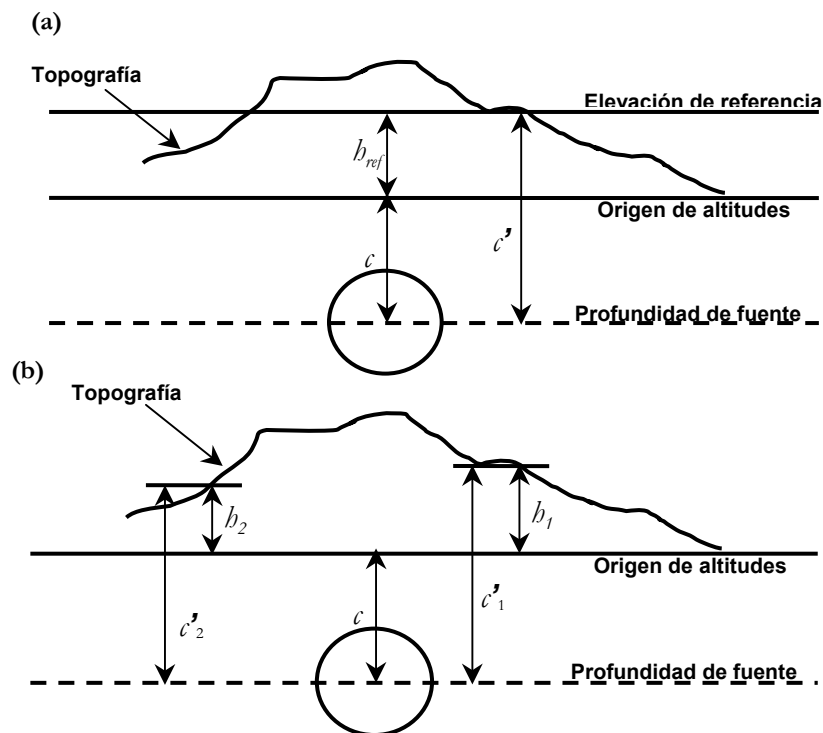
## **CAPÍTULO 6**

# **ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE FUENTE CONSIDERANDO EL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA**

Uno de los objetivos de la inversión de datos es determinar las características de la fuente de perturbación que está causando un determinado fenómeno sobre la superficie terrestre. Los parámetros (características de la fuente) óptimos serán aquellos que minimicen una función determinada dependiente de la diferencia entre los datos de observación y los datos sintéticos calculados a partir de un modelo físico-matemático. Por tanto, si la topografía modifica la respuesta de un determinado modelo, también influirá en la estimación de parámetros realizada a partir de la inversión de los datos observados. El objetivo de este capítulo es describir la influencia de la topografía del terreno sobre los parámetros de fuente determinados a partir de un proceso de inversión. Para ello, compararemos los resultados de la inversión de las deformaciones y variaciones de gravedad, observadas entre 1992 y 1996 en el volcán Mayon, utilizando un modelo directo que tiene en cuenta la influencia topográfica, con otros resultados para los cuales no se ha considerado esta influencia.

### 6.1. METODOLOGÍA CUASI-ANALÍTICA.

El método indirecto de elementos en la frontera permite obtener soluciones muy precisas del modelo de deformación descrito en el Capítulo 5, puesto que considera la superficie topográfica del medio de forma realista. Sin embargo, el tiempo de cálculo que emplea para la resolución de las ecuaciones es muy elevado frente al que utilizan los modelos de semiespacio elástico de superficie libre plana, de los que se conoce su solución analítica. Desde este punto de vista, los modelos de semiespacio plano son muy atractivos para la resolución del problema inverso mientras que las técnicas numéricas, como el IBEM, no son adecuadas para la resolución de este problema. Por tanto, lo ideal para estudiar el efecto de la topografía en la determinación de los parámetros de la fuente sería utilizar un método que permitiese incluir el efecto topográfico, al menos de forma aproximada, pero que mantuviese la cualidad que presentan los modelos de semiespacio plano en cuanto al ahorro de tiempo de cálculo.



**Figura 6.1.** Representación gráfica de las diferencias entre los modelos descritos en el texto. **(a)** Modelo de elevación de referencia constante. El efecto de la topografía se incluye añadiendo el valor constante de  $h_{ref}$  a la profundidad de la fuente,  $c$ . **(b)** Modelo de variación de profundidad de la fuente. Este modelo supone una altitud de referencia diferente para cada punto de cálculo de forma que la profundidad de la fuente viene dada por la función  $c'$  definida en (5.1).

Hasta hace poco, los trabajos que perseguían este objetivo utilizaban modelos en los que se consideraba una elevación de referencia constante que correspondía a la elevación representativa de la región bajo estudio (p.e., Bonaccorso *et al.*, 1994). Este método consiste en añadir un valor constante, que representa la elevación media de la zona, a la profundidad de la fuente,  $c$  (Figura 6.1a). Como demuestran Williams y Wadge (1998) este método no tiene en cuenta los efectos que pueden causar los cambios del relieve de la zona. Además, la elevación de referencia considerada puede variar dependiendo de la profundidad estimada para la fuente y de la componente del campo de deformación que estemos estudiando.

Williams y Wadge (1998) utilizaron un método aproximado para estimar el efecto de la topografía del terreno sobre el campo de deformación producido por una fuente de dilatación. La metodología de variación de profundidad de fuente consiste en considerar que cada punto de la superficie topográfica se encuentra sobre la superficie de un semiespacio plano de forma que la profundidad de la fuente varía con la altura de dicho punto (Figura 6.2b). Para ello, en las soluciones analíticas (p.e., Singh y Singh, 1989) que proporcionan las ecuaciones (5.4) y (5.5), definidas en un semiespacio plano, se sustituye la profundidad real de la fuente,  $c$ , por la función profundidad de la fuente,  $c'$ , dada en (5.1). Así, las componentes cartesianas del vector desplazamiento,  $(u_x, u_y, u_z)$ , y las variaciones de gravedad en superficie,  $dg$ , producidas de forma conjunta por una fuente de dilatación/contracción y por una fuente de masa puntual se obtienen mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{x(1-\nu)Pa^3}{\mu R^3} - \frac{xMg}{4\pi\mu R} \left[ \frac{c'}{R^2} + \frac{1-2\nu}{R+c'} \right], \\
 u_y &= \frac{y(1-\nu)Pa^3}{\mu R^3} - \frac{yMg}{4\pi\mu R} \left[ \frac{c'}{R^2} + \frac{1-2\nu}{R+c'} \right], \\
 u_z &= -\frac{c'(1-\nu)Pa^3}{\mu R^3} + \frac{Mg}{4\pi\mu R} \left[ \frac{c'^2}{R^2} + 2(1-\nu) \right],
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$



$$dg_s = \gamma_{EA} u_z + \frac{GM_c'}{R^3},$$

donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas del punto de cálculo. De esta forma se supone implícitamente que el efecto topográfico está principalmente causado por la distancia entre la fuente y la superficie libre del medio, relajándose la restricción, que consideran los modelos utilizados habitualmente, de que la superficie libre del medio sea plana. Si la perturbación topográfica sobre las deformaciones y variaciones de gravedad se debe principalmente a dicha distancia, en lugar de a la forma local de la superficie libre, este tipo de solución proporciona una aproximación razonable del efecto topográfico.

La metodología de variación de profundidad de la fuente proporciona una solución cuasi-analítica aproximada, en el sentido de que para cada punto se obtiene la solución analítica correspondiente a un modelo de semiespacio plano cuya superficie libre se sitúa a la altura de dicho punto. Este tipo de soluciones minimiza el tiempo de cálculo CPU frente a los métodos numéricos como el IBEM. Por ejemplo, tras las ejecuciones realizadas a lo largo de este trabajo hemos comprobado que el método de variación de profundidad de la fuente es del orden de 7500 veces más rápido que el IBEM. Por tanto, al igual que los modelos elásticos empleados habitualmente para la interpretación de deformaciones observadas en zonas volcánicas, resulta bastante atractiva para la resolución del problema inverso.

Los resultados de Williams y Wadge (1998, 2000) señalan que la metodología de variación de la profundidad de la fuente es suficientemente precisa para calcular los desplazamientos verticales causados por una fuente de dilatación mientras que para calcular los desplazamientos radiales es más adecuado utilizar otro tipo de métodos numéricos. A continuación, vamos a mostrar que esta metodología también se va a poder utilizar para la predicción e interpretación de variaciones de gravedad. Por tanto, en la resolución del problema inverso vamos a utilizar la metodología aproximada introducida por estos autores.

## 6.2. COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO CUASI-ANALÍTICO Y EL IBEM.

En primer lugar vamos a comparar los resultados del método cuasi-analítico (método de variación de profundidad de fuente) con los que proporciona el IBEM para mostrar la efectividad del método cuasi-analítico. Para ello, hemos calculado los desplazamientos y variaciones de gravedad producidos por una fuente de dilatación/contracción de 1 km de radio con un incremento de presión igual a 10 MPa. El efecto del incremento de masa en la cámara se considera mediante una fuente esférica puntual de 1 UM ( $1\text{UM} = 10^{12} \text{ kg}$ ). El efecto de la topografía lo vamos a representar mediante el cono volcánico de la Figura 5.13. El medio elástico y homogéneo viene caracterizado por  $\lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ . Con la misma base del cono se han elegido las alturas señaladas en el capítulo anterior.

Una vez se ha establecido la precisión numérica de las soluciones obtenidas mediante el IBEM, podemos comparar los resultados de la metodología de variación de profundidad de fuente con las soluciones de esta técnica numérica. Los resultados del análisis dimensional realizado en el capítulo anterior para estimar el efecto de la topografía sobre las deformaciones y variaciones de gravedad muestran que éste va a variar dependiendo de la profundidad de la fuente. Así, el efecto de las perturbaciones topográficas es más significativo sobre el campo de desplazamientos y variaciones de gravedad causados por fuentes superficiales. Para realizar la comparación hemos elegido profundidades de fuente iguales a 1, 6 y 16 km. Aunque la suposición de fuente puntual establece que el radio de la fuente tiene que ser menor que su profundidad ( $a \ll c$ ), hemos elegido fuentes situadas a 1 km de profundidad sólo con objeto de mostrar la dependencia entre el efecto topográfico y la profundidad de fuente.

En este caso, para estimar el error que se produce al considerar la metodología cuasi-analítica aproximada, vamos a utilizar el error medio en lugar del error relativo medio, ya que queremos compararlo con la precisión numérica inherente al método indirecto de elementos en la frontera. Para calcular el error

medio cuando consideramos las características topográficas del terreno,  $\Delta(U)_T$ , utilizamos la siguiente expresión:

$$\Delta(U)_T = \frac{\sum_{i=1}^N |U_i^{IBEM} - U_i^{AP}|}{N}. \quad (6.2)$$

En los cálculos que vamos a realizar, las funciones  $U_i^{IBEM}$  y  $U_i^{AP}$  podrán ser desplazamientos verticales,  $U_{\mathfrak{z}}$  o variaciones de gravedad en superficie  $G_s$ , calculadas numéricamente (superíndices IBEM) o mediante el método cuasi-analítico (superíndices igual a AP).  $N$  es el número de puntos en los que se calcula la magnitud física considerada. En este problema  $N = 441$ . No calcularemos el error que se produce al calcular desplazamientos horizontales mediante la metodología cuasi-analítica, ya que Williams y Wadge (1998) mostraron que esta metodología no permite estimar fiablemente el efecto de la topografía en esta componente.

En primer lugar consideramos el error medio que se comete entre la solución numérica y la solución analítica que proporciona el modelo de semiespacio plano para las profundidades de fuente mencionadas (Tabla 6.1).

|                           | c = 1 km            |                     | c = 6 km            |                     | c = 16 km           |                     |
|---------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                           | mp                  | ce                  | mp                  | ce                  | Mp                  | ce                  |
| $\Delta U_{\mathfrak{z}}$ | $2.2 \cdot 10^{-2}$ | $6.6 \cdot 10^{-2}$ | $1.8 \cdot 10^{-2}$ | $9.5 \cdot 10^{-3}$ | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $2 \cdot 10^{-3}$   |
| $\Delta G_s$              | $6.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.0 \cdot 10^{-4}$ | $5.4 \cdot 10^{-5}$ | $2.9 \cdot 10^{-5}$ | $4.1 \cdot 10^{-5}$ | $6.1 \cdot 10^{-6}$ |

**Tabla 6.1.** Error medio entre la solución correspondiente al semiespacio elástico y la solución del IBEM para el caso en que  $\alpha = 0^\circ$ , es decir,  $H = 0$  m. Las profundidades de fuente,  $c$ , son 1, 6 y 16 km. Las fuentes son un centro de expansión (ce) y una masa puntual esférica (mp) de las características descritas en el texto. Las unidades están en cm para los desplazamientos verticales,  $U_{\mathfrak{z}}$  y miligales para las variaciones de gravedad en superficie,  $G_s$ .

Para calcularlo hemos utilizado la expresión (6.2) con  $\alpha = 0^\circ$ , es decir,  $H = 0$ . La extensión lateral de la superficie de discretización y el número de elementos que la componen, los hemos elegido en base a los resultados obtenidos anteriormente,

realizando las integrales de las funciones de Green mediante integración gaussiana de siete puntos. En la Tabla 6.1. mostramos los resultados correspondientes a dos tipos de fuente (centro de expansión, ce, y masa puntual, mp).

En ausencia de relieve topográfico la solución cuasi-analítica es la solución exacta correspondiente al modelo de Mogi (1958), por lo que los errores que aparecen en la Tabla 6.1 los podemos considerar como una medida de la incertidumbre inherente al método numérico. De esta forma, los resultados de calcular el error medio entre las soluciones cuando consideramos la topografía del terreno,  $\Delta(U)_T$ , calculando  $U_i^{AP}$  con  $\alpha \neq 0^\circ$ , lo podemos normalizar por dicho error para estimar la fiabilidad del método cuasi-analítico aproximado. Los resultados de la normalización se muestran en las Tabla 6.2 para fuentes situadas a 1, 6 y 16 km de profundidad.

|                               |                                |                      |                                |                      |                                |                       |
|-------------------------------|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|-----------------------|
| <b>(a)</b>                    |                                |                      |                                |                      |                                |                       |
| <b>c = 1</b>                  | $\alpha=15^\circ$ , H = 1340 m |                      | $\alpha=20^\circ$ , H = 1820 m |                      | $\alpha=30^\circ$ , H = 2886 m |                       |
|                               | mp                             | ce                   | mp                             | ce                   | mp                             | ce                    |
| $(\Delta U_z)_T / \Delta U_z$ | $5.095 \cdot 10^{-1}$          | $7.76 \cdot 10^{-1}$ | $5.16 \cdot 10^{-1}$           | $9.58 \cdot 10^{-1}$ | $6.53 \cdot 10^{-1}$           | $0.123 \cdot 10^{-1}$ |
| $(\Delta G_s)_T / \Delta G_s$ | $7.41 \cdot 10^{-1}$           | $7.76 \cdot 10^{-1}$ | $7.5 \cdot 10^{-1}$            | $9.58 \cdot 10^{-1}$ | $9.53 \cdot 10^{-1}$           | 1.225                 |
| <b>(b)</b>                    |                                |                      |                                |                      |                                |                       |
| <b>c = 6</b>                  | $\alpha=15^\circ$ , H = 1340 m |                      | $\alpha=20^\circ$ , H = 1820 m |                      | $\alpha=30^\circ$ , H = 2886 m |                       |
|                               | mp                             | ce                   | mp                             | ce                   | mp                             | ce                    |
| $(\Delta U_z)_T / \Delta U_z$ | $8.06 \cdot 10^{-1}$           | 1.43                 | $7.83 \cdot 10^{-1}$           | 1.5                  | $8.72 \cdot 10^{-1}$           | 2.11                  |
| $(\Delta G_s)_T / \Delta G_s$ | $8.07 \cdot 10^{-1}$           | 1.43                 | $7.84 \cdot 10^{-1}$           | 1.52                 | $8.6 \cdot 10^{-1}$            | 2.11                  |
| <b>(c)</b>                    |                                |                      |                                |                      |                                |                       |
| <b>c = 16</b>                 | $\alpha=15^\circ$ , H = 1340 m |                      | $\alpha=20^\circ$ , H = 1820 m |                      | $\alpha=30^\circ$ , H = 2886 m |                       |
|                               | mp                             | ce                   | mp                             | ce                   | mp                             | ce                    |
| $(\Delta U_z)_T / \Delta U_z$ | $9.55 \cdot 10^{-1}$           | $7.5 \cdot 10^{-1}$  | $9.36 \cdot 10^{-1}$           | 1.1                  | $9.34 \cdot 10^{-1}$           | 1.04                  |
| $(\Delta G_s)_T / \Delta G_s$ | $9.52 \cdot 10^{-1}$           | $7.52 \cdot 10^{-1}$ | $9.34 \cdot 10^{-1}$           | 1.1                  | $9.34 \cdot 10^{-1}$           | 1.05                  |

**Tabla 6.2.** Ajuste del método de variación de la profundidad de fuente a la solución numérica que proporciona el IBEM. El ajuste de los desplazamientos verticales  $(\Delta U_z)_T$  y variaciones de gravedad en superficie,  $(\Delta G_s)_T$ , está normalizado por el error medio de cada uno de estos parámetros que aparece en la Tabla 6.1. **(a)** Resultados para una fuente esférica puntual situada a 1 km de profundidad. **(b)** Resultados para una fuente situada a 6 km de profundidad. **(c)** Resultados para una fuente situada a una profundidad de 16 km.

Si los errores normalizados son  $< 1$ , el error medio que se produce al utilizar la metodología aproximada se encuentra por debajo de la precisión del método numérico. Cuando son  $> 3$ , indican la escasa fiabilidad de la metodología cuasi-analítica mientras que si son  $< 2$ , el error medio será comparable a la precisión numérica del método indirecto de elementos en la frontera. Valores entre 2 y 3 indican que la metodología aproximada proporciona estimaciones más o menos fiables del efecto topográfico.

De este estudio podemos concluir que el método cuasi-analítico representa una aproximación fiable para estimar el efecto topográfico. Este método simula de forma casi perfecta el efecto de la topografía en regiones de relieve moderado. Los errores son menores para la fuente de masa puntual. Aunque estos empeoran ligeramente cuando  $\epsilon = 16$  km, puesto que una fuente superficial es más sensible a las variaciones topográficas que simula la metodología cuasi-analítica, se siguen obteniendo estimaciones fiables. Los resultados de estimar el efecto topográfico sobre los desplazamientos verticales mediante el método cuasi-analítico son, en general, bastante buenos. Las variaciones de gravedad se obtienen a partir de los desplazamientos verticales sumando la variación que produce la masa anómala. Puesto que con el IBEM el efecto de la masa anómala se calcula también en función de su distancia al punto de cálculo, la metodología de variación de profundidad de fuente, en este caso, proporciona también resultados satisfactorios.

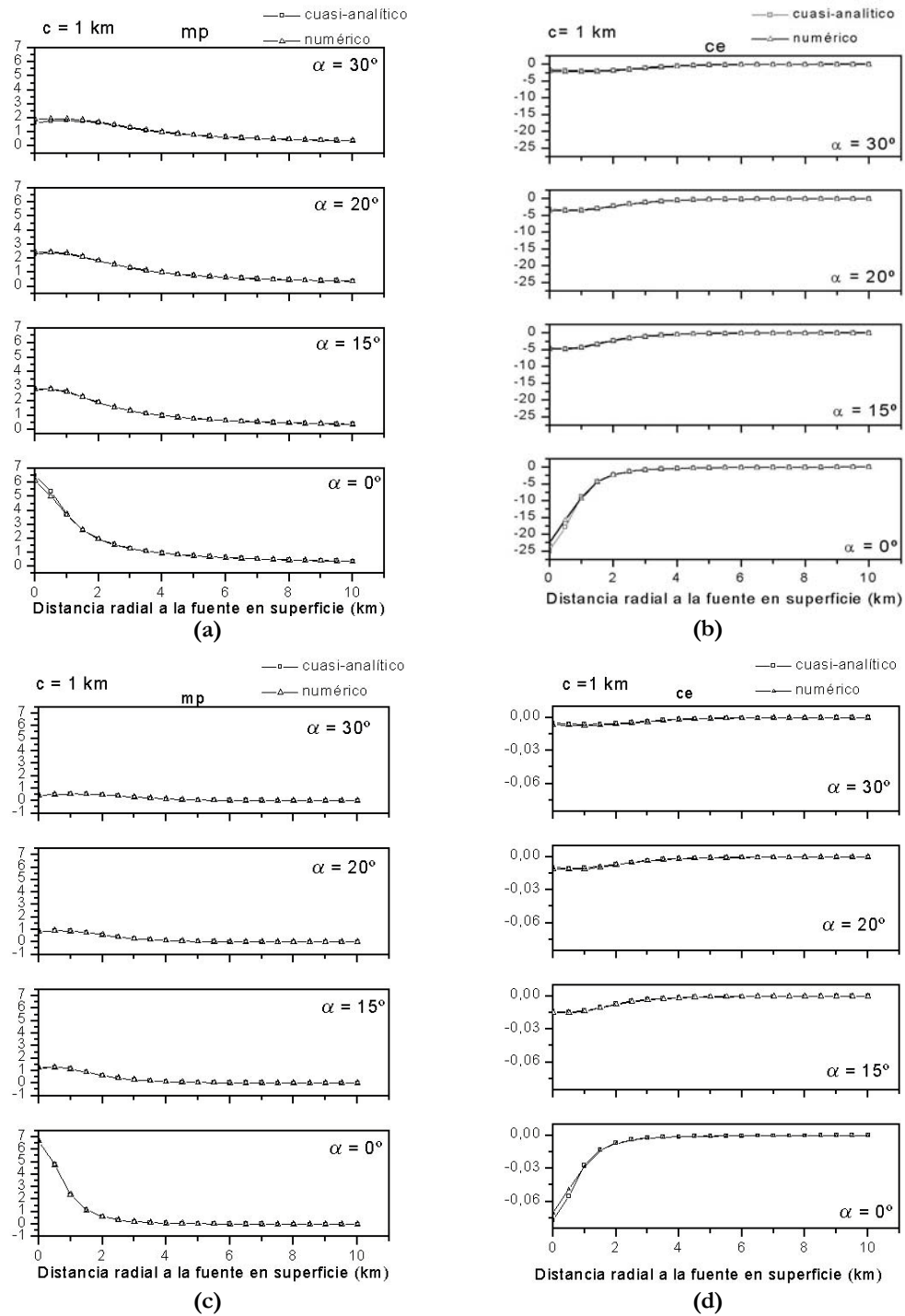
Las Figuras 6.2, 6.3, 6.4, ilustran el efecto de las características topográficas del terreno sobre los desplazamientos verticales y variaciones de gravedad producidos por fuentes situadas a 1, 6 y 16 km de profundidad, respectivamente. A partir de estas gráficas se pueden deducir numerosas conclusiones. Como se vio teóricamente, el efecto de la topografía disminuye cuando aumenta la profundidad de fuente. Por ejemplo, si la fuente está situada a 1 km de la superficie libre del medio (Figura 6.2a), la topografía produce una reducción de aproximadamente el 69% de la magnitud de los desplazamientos verticales cuando la pendiente del cono volcánico es igual a  $30^\circ$ , mientras que esta reducción es del 27% para una fuente situada a una profundidad de 6 km (Figura 6.3a). Cuando la profundidad de la fuente es igual a 16

km esta reducción es menor. Por tanto, el efecto de la topografía depende de la profundidad de la fuente siendo éste mayor cuanto más somera es la fuente. La metodología cuasi-analítica proporciona una estimación fiable del efecto de la topografía en el cálculo de desplazamientos verticales y variaciones de gravedad.

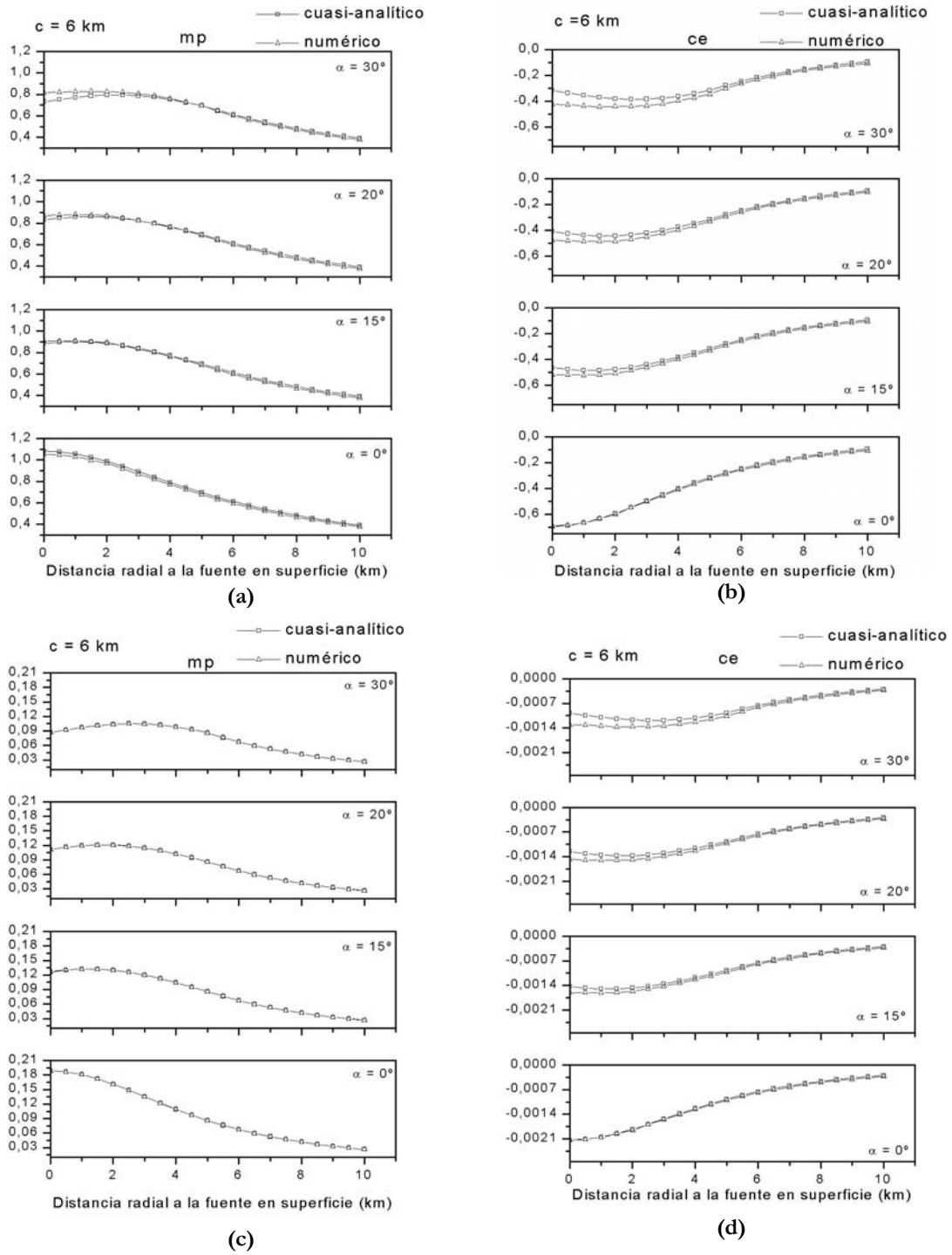
Las Figuras 6.5 y 6.6 muestran un ejemplo de la comparación entre las soluciones de la metodología de variación de profundidad de fuente y del método numérico para la componente horizontal del campo de desplazamientos producido por la fuente de masa puntual y el centro de expansión situados a 1 y 6 km de profundidad, respectivamente.

Observamos que, como ya indicaron Williams y Wadge (1998) para el caso de una fuente de dilatación, la metodología aproximada no proporciona una estimación cuantitativa fiable del efecto topográfico en los desplazamientos horizontales. El efecto de la topografía disminuye al aumentar la profundidad de fuente, lo que es consistente con la observación cualitativa de que el efecto de la perturbación topográfica es debido principalmente a la distancia entre la fuente y la superficie libre del medio. Sin embargo, los desplazamientos radiales se verán también afectados por otros factores, como puede ser la forma local del relieve. Por tanto, en una inversión basada en esta metodología, deben utilizarse desplazamientos verticales y variaciones de gravedad, mejorándose posteriormente mediante un método numérico como el método indirecto de elementos en la frontera y mediante los desplazamientos horizontales, necesarios a la hora de determinar la forma y localización de la fuente.

Los resultados obtenidos en este apartado junto con los que obtuvieron Williams y Wadge (1998) muestran que este método aproximado proporciona resultados fiables para estimar el efecto de la topografía. Considerando estos resultados, la sencillez de implantación y la velocidad de cálculo frente a otras técnicas numéricas, de la metodología cuasi-analítica, la vamos a utilizar para determinar cómo afecta la topografía en la inversión de datos geodésicos. Para ello, vamos a utilizar las deformaciones del terreno y variaciones de gravedad observadas en el volcán Mayon entre 1992 y 1996.

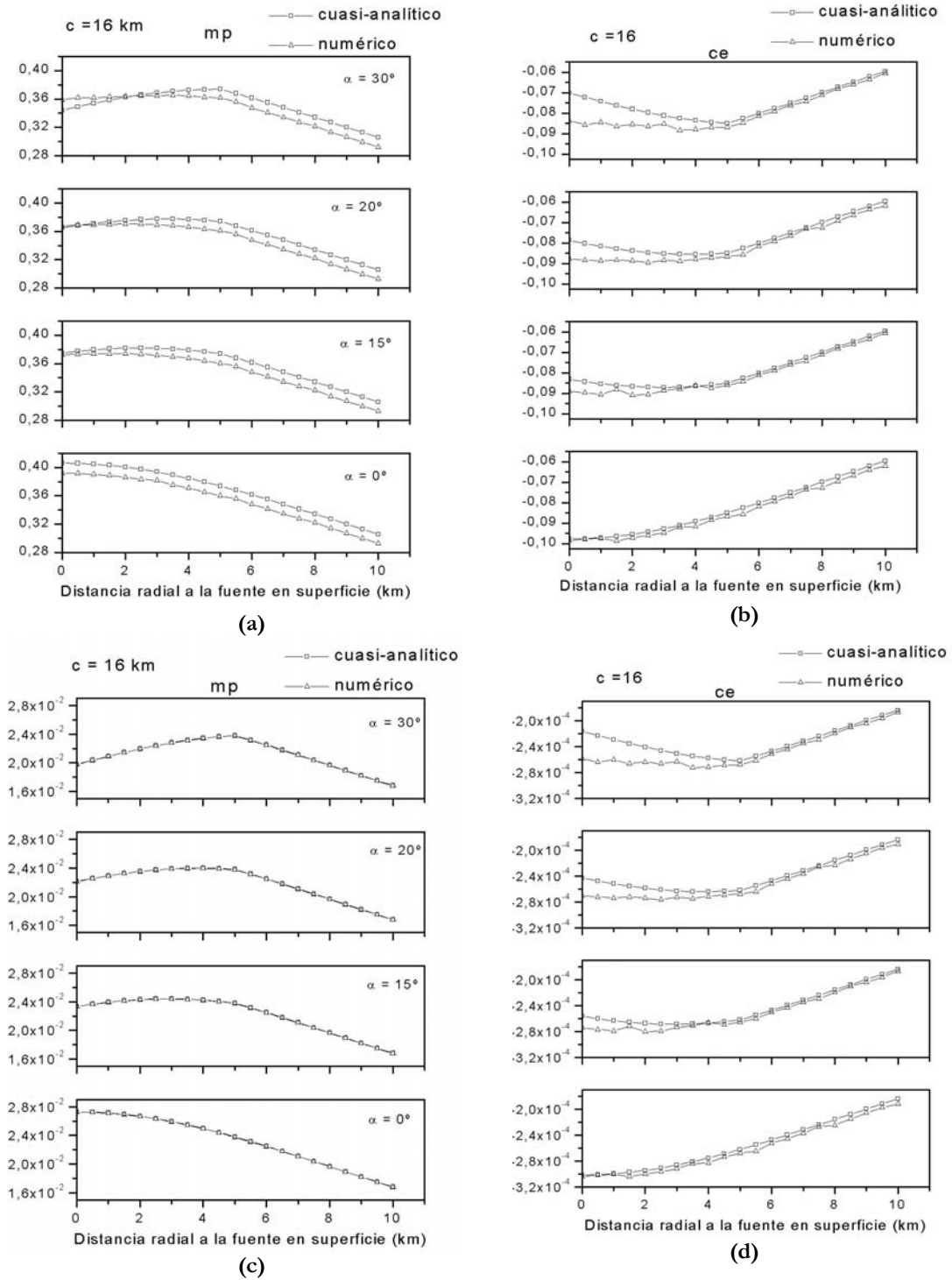


**Figura 6.2.** (a) Desplazamientos verticales en cm producidos por una fuente de masa puntual. (b) Componente vertical del desplazamiento causado por el centro de expansión. (c) Variaciones de gravedad en superficie (mGal) producidas por la fuente de masa. (d) Variaciones de gravedad en superficie (mGal) causadas por la fuente de presión. Profundidad de la fuente igual a 1 km.  $\alpha = 0, 15, 20$  y  $30^\circ$ , es decir,  $H = 0, 1340, 1820, 2886$  m.

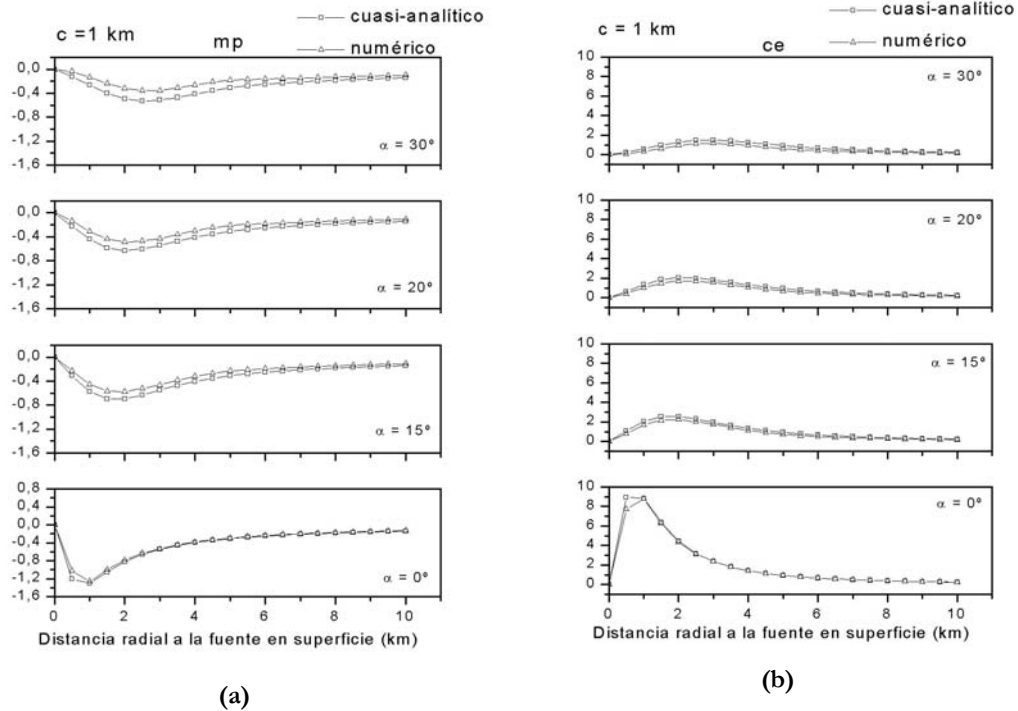


**Figura 6.3.** Efecto de la topografía para diferentes ejemplos considerando una fuente situada a 6 km de profundidad con pendientes de  $\alpha = 0, 15, 20$  y  $30^\circ$ , es decir,  $H = 0, 1340, 1820, 2886$  m. **(a)** Desplazamientos verticales (cm) producidos por una fuente de masa puntual. **(b)** Componente vertical del desplazamiento en cm causado por el centro de expansión. **(c)** Variaciones de gravedad en superficie (mGal) producidas por la fuente de masa. **(d)** Variaciones de gravedad en superficie (mGal) causadas por la fuente de presión.

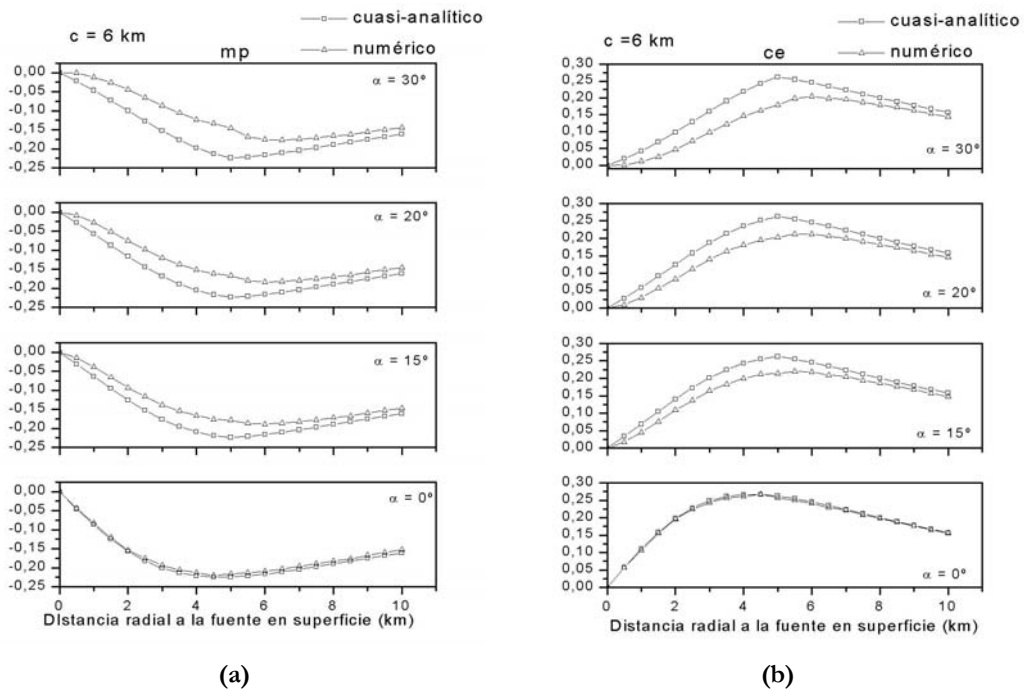




**Figura 6.4.** Efecto de la topografía para diferentes ejemplos considerando una fuente situada a 16 km de profundidad con pendientes de  $\alpha = 0, 15, 20$  y  $30^\circ$ , es decir,  $H = 0, 1340, 1820, 2886$  m. **(a)** Desplazamientos verticales (cm) producidos por una fuente de masa puntual. **(b)** Componente vertical del desplazamiento (cm) causado por el centro de expansión. **(c)** Variaciones de gravedad en superficie (mGal) producidas por la fuente de masa. **(d)** Variaciones de gravedad en superficie (mGal) causadas por la fuente de presión.



**Figura 6.5. (a)** Desplazamientos horizontales (cm) producidos por una fuente de masa puntual. **(b)** Componente horizontal del desplazamiento (cm) causado por el centro de expansión. Profundidad de la fuente igual a 1 km.  $\alpha = 0, 15, 20$  y  $30^\circ$ , es decir,  $H = 0, 1340, 1820, 2886$  m.



**Figura 6.6. (a)** Desplazamientos radiales (cm) producidos por una fuente de masa puntual. **(b)** Componente radial del desplazamiento (cm) causado por el centro de expansión. Profundidad de la fuente igual a 6 km.  $\alpha = 0, 15, 20$  y  $30^\circ$ , es decir,  $H = 0, 1340, 1820, 2886$  m.

### 6.3. APLICACIÓN AL VOLCÁN MAYON (FILIPINAS).

Como ya hemos mencionado, Mayon, con una altitud de 2462 m, es un estratovolcán situado en la Isla de Luzón (Filipinas). La historia eruptiva de este volcán basalto-andesítico data de 1616 y consta tanto de erupciones de tipo estromboliano, como la que tuvo lugar en Febrero de 1993, como de tipo plíneo, extremadamente violentas, como la de 1984. Su estructura cónica casi perfecta con laderas de aproximadamente 35° de pendiente y su elevación sobre el nivel del mar (Figura 4.12) lo hacen idóneo para estudiar cómo influyen las características topográficas del terreno en la interpretación y modelización de observaciones geodésicas.

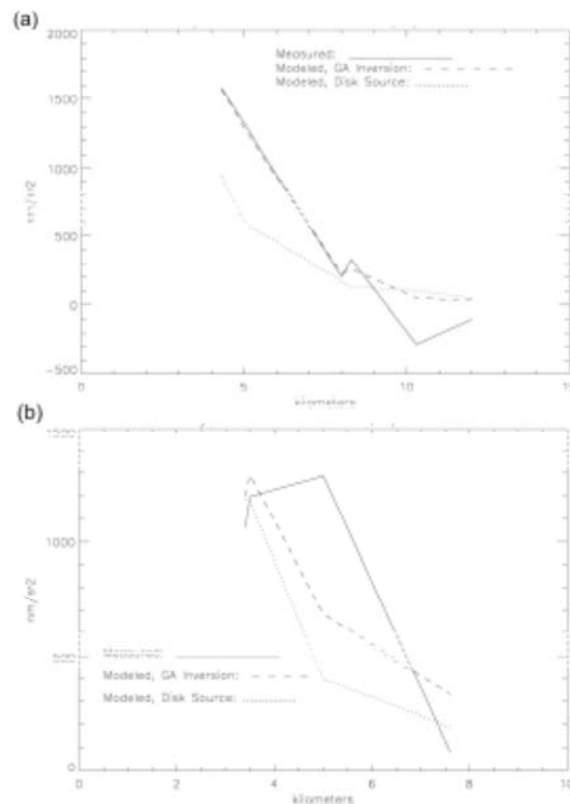
En el Capítulo 4 vimos que el modelo de Mogi (1958) no puede explicar las variaciones de gravedad debido a la escasa elevación/subsidencia del terreno registrados en Mayon durante las campañas de observación realizadas entre 1992 y 1996. A partir de este modelo, las variaciones de gravedad son interpretadas como variaciones sobre el campo gravitatorio terrestre producidas por la deformación del edificio volcánico que causa la dilatación de la cámara. Las erupciones, como las de 1999 y 2000 (Figura 6.7), registradas recientemente y con posterioridad a las campañas de observación, nos llevaron a considerar que en este volcán del archipiélago filipino se estaba produciendo una nueva inyección de material en la cámara magmática. Por ello, se realizó una inversión utilizando, como modelo directo, el modelo elástico-gravitatorio y la técnica del algoritmo genético. Los resultados que obtuvimos se muestran en el Capítulo 4.



**Figura 6.7.** Nube de vapor generada en la erupción de Junio de 1999. (<http://www.phivolcs.dost.gov.ph/volcanoes/Mayon>)

Hemos comprobado de nuevo esta hipótesis modelando, no sólo las observaciones microgravimétricas sino también las medidas GPS realizadas en Mayon utilizando un algoritmo genético como técnica de inversión y el modelo elástico-gravitatorio de semiespacio plano, como modelo directo. Los resultados de la inversión (Figura 6.8), que se basa en la suposición de la existencia de una sólo fuente bajo el crater del volcán, continúan proporcionando una interpretación de las observaciones mejor que la que proporciona el modelo de Mogi (1958) o el modelo de redistribución de masa propuesto por Jentzsch *et al.* (2001). Para las variaciones registradas entre diciembre de 1992 y diciembre de 1996 hemos obtenido los parámetros que se muestran en la Tabla 6.3. Los resultados correspondientes al perfil Tumpa-Lahar Channel reproducen la magnitud y patrón de las observaciones casi en su totalidad (Figura 6.8a), lo que coincide con los resultados mostrados en el Capítulo

4. La necesidad de ajustar las medidas gravitatorias realizadas lejos del cráter, proporciona un radio grande (Tabla 6.3), lo que origina que la densidad del material inyectado sea demasiado baja. Como consecuencia, vamos a estudiar la variación de estos parámetros si incorporamos la topografía del terreno en el modelo elástico-gravitatorio. Para ello, hemos utilizado, de nuevo, una técnica de inversión basada en un AG. Los programas descritos en el Capítulo 2 han sido modificados para incorporar la metodología cuasi-analítica en el modelo directo.

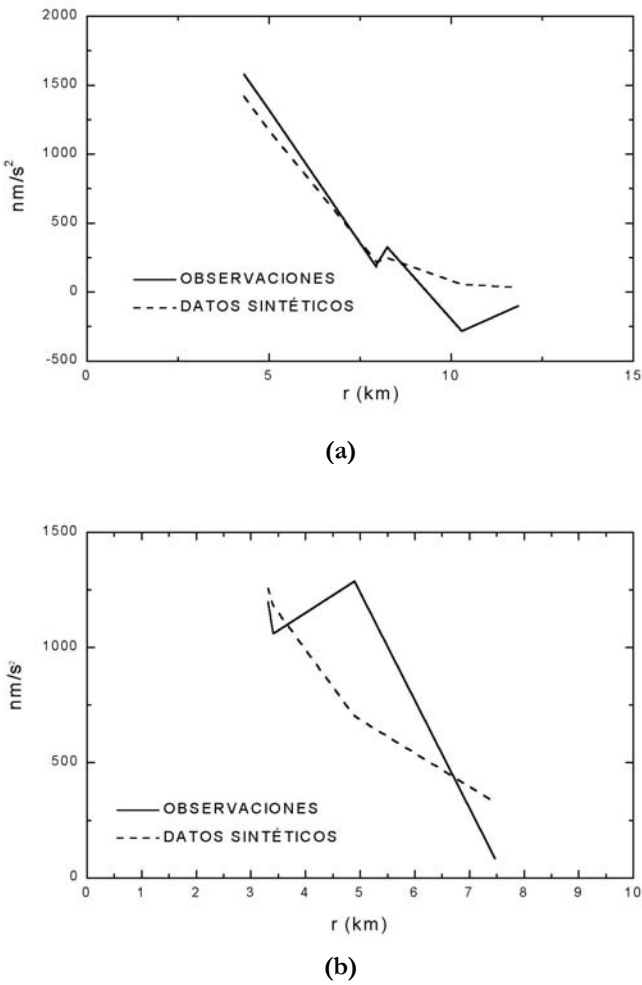


**Figura 6.8.** (a) Resultados de la inversión para el perfil Tumpa Lahar-Chanel, época 5-1 y (b) lo mismo para el perfil Mayon Resthouse. (Tiampo *et al.*, 2003)

Los resultados de esta inversión se muestran nuevamente en la Tabla 6.3, donde se comparan con los resultados de considerar un semiespacio plano. La Figura 6.9 muestra la comparación entre las medidas y los datos sintéticos obtenidos a partir del modelo elástico-gravitatorio en el que hemos aproximado el relieve del volcán variando la profundidad de la fuente en cada punto.

| Parámetros                                      | Semiespacio plano<br>(Figura 6.7) | Topografía<br>(Figura 6.8) |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| Profundidad $c$ (km)                            | 1.97                              | 1.87                       |
| Incremento de presión $P$ , (bar)               | 93.00                             | 65.26                      |
| Radio $a$ (km)                                  | 1.48                              | 0.81                       |
| Incremento de masa, $M$ (1UM=10 <sup>12</sup> ) | 0.68                              | 0.66                       |

**Tabla 6.3.** Parámetros de la fuente del volcán Mayon y valores de la estimación para los casos en los que se considera o no la topografía del terreno.



**Figura 6.9.** Resultados correspondientes a los perfiles mostrados en la Figura 6.8a y 6.9b, respectivamente, teniendo en cuenta la influencia de la topografía del terreno en el que están asentados los perfiles

Las variaciones de gravedad calculadas, que minimizan la función de evaluación del algoritmo, reproducen de nuevo la magnitud y patrón de la señal

microgravimétrica medida en el perfil Tumpa-Lahar Channel. Pero observamos que los valores estimados de las características de fuente son diferentes (Tabla 6.3). Por ejemplo, la profundidad de fuente es menor que la que se obtiene en el caso anterior, en el que la superficie libre del medio es plana. Si al valor obtenido cuando consideramos la topografía (1.87 km) le sumamos la altura máxima de los puntos estación situados en los perfiles, se obtiene, aproximadamente, la profundidad estimada en el caso anterior (1.975 km). El incremento de masa disminuye en menor medida que la variación de presión en el interior de la cámara. La disminución del radio de la fuente, supuesta esférica, proporciona valores para la densidad del material intruido superiores y, por tanto, parecen más realistas que los que se obtienen considerando un semiespacio plano. La asimetría que se observa en el perfil Mayon-Resthouse (Figura 6.8b y Figura 6.9b), con respecto a la posición del cráter del volcán, indican la posible existencia de una segunda fuente. La deformación calculada a partir de los parámetros obtenidos de la inversión conjunta se encuentra dentro del error de las medidas GPS (Jentzsch *et al.*, 2001). La diferencia que se observa entre las Figuras 6.8b y 6.9b en las proximidades al cráter del volcán se deben a un error al calcular las distancias radiales de los puntos estación, siendo la Figura 6.9b la que proporciona la configuración real de los datos de observación.

Los resultados de la inversión conjunta de datos microgravimétricos y de deformación, considerando la metodología cuasi-analítica para estimar el efecto de la topografía en el modelo elástico-gravitatorio muestran que la profundidad de fuente y las variaciones de presión y masa en el interior de la cámara se pueden sobrestimar si no se tiene en cuenta la influencia de las características topográficas del terreno. Por tanto, si se considera la solución cuasi-analítica la inversión de datos geodésicos (deformaciones verticales y variaciones de gravedad) puede aumentar su precisión a la hora de estimar los parámetros de una fuente determinada.

## CONCLUSIONES

Los modelos que se emplean habitualmente para el estudio e interpretación de deformaciones y variaciones de gravedad, fenómenos que pueden ser precursores a una erupción, son elásticos y tratan la Tierra como un medio plano semi-infinito. La complejidad de los procesos volcánicos y el creciente desarrollo tecnológico que hemos experimentando en las últimas décadas, conllevan el desarrollo de modelos cada vez más realistas. Por ello, en este trabajo nos hemos planteado dos objetivos:

1. Estudiar la influencia del campo gravitatorio ambiente en la modelización de deformaciones y variaciones de gravedad.
2. Estudiar el efecto de la topografía y desarrollar un modelo tridimensional para cuantificar su influencia.

Las conclusiones obtenidas en ambos son las siguientes:



## CONCLUSIONES

### Objetivo 1

En los años 80 se desarrolló un modelo que permitía incluir el campo gravitatorio ambiente. Para alcanzar el primer objetivo, apoyándonos en resultados previos que muestran la influencia del campo gravitatorio ambiente mediante algunos ejemplos, hemos realizado un estudio dimensional del modelo elástico-gravitatorio a partir del cual hemos obtenido los siguientes resultados:

- Las deformaciones calculadas están principalmente producidas por la expansión/contracción de la cámara. La fuente de masa, considerada esférica y puntual, normalmente, no produce deformaciones significativas, es decir, detectables mediante las técnicas de observación de campo empleadas hoy en día.
- La magnitud de los términos dependientes del campo gravitatorio en las ecuaciones del modelo es despreciable en el cálculo de desplazamientos. Por tanto, las deformaciones del terreno observadas en áreas volcánicas se pueden interpretar utilizando un modelo elástico en el que se considera, como término fuente, un centro de expansión.
- Las variaciones de gravedad causadas por la masa de la intrusión no se pueden ignorar tan fácilmente. A diferencia que con otros modelos, el modelo elástico-gravitatorio permite considerar de forma conjunta el efecto de la dilatación/contracción de la cámara y el de la masa inyectada en su interior. Así, hemos observado que el potencial perturbador generado por la deformación del terreno es del mismo orden que el que genera la masa inyectada. Por tanto, para la interpretación de variaciones de gravedad es necesario tener en cuenta la masa de la intrusión.

- El potencial perturbador que produce la deformación del terreno es el responsable del acoplamiento elástico-gravitatorio de las ecuaciones del modelo. Este acoplamiento simula la interacción de la fuente con el campo gravitatorio terrestre. Así, si consideramos el término fuente correspondiente a la masa de la intrusión y tenemos en cuenta el resultado anterior, no podemos despreciar la interacción de esta fuente con el campo gravitatorio. Como consecuencia, para la interpretación correcta de variaciones de gravedad debemos utilizar un modelo como el modelo elástico-gravitatorio más complejo que el puramente elástico.
- La masa y la dilatación/contracción de la cámara producen efectos geodésicos (deformaciones y variaciones de potencial y gravedad) de signo diferente. Además, mientras que el centro de expansión es responsable de las deformaciones que se producen en el medio, la masa juega un papel importante en el cálculo de variaciones de gravedad. Por ello, es necesario, siempre que sea posible realizar la interpretación conjunta de ambos tipos de datos.
- Para validar estos resultados hemos aplicado el modelo elástico-gravitatorio a dos ejemplos reales, Long Valley Caldera (California, EE. UU.) y el volcán Mayon (Luzón, Islas Filipinas). La interpretación de las deformaciones y variaciones de gravedad observadas en estas zonas volcánicas pone de manifiesto las limitaciones, ya señaladas teóricamente, de los modelos elásticos. Al mismo tiempo, resaltan la necesidad de invertir conjuntamente, siempre que sea posible, datos de deformación y variaciones de gravedad, con el fin de discriminar el papel determinante de los parámetros de la fuente en la interpretación de observaciones.

## CONCLUSIONES

### Objetivo 2

Algunas zonas volcánicas presentan relieves topográficos acusados. Existen trabajos recientes que tratan de estudiar el efecto de la topografía del terreno en la interpretación de registros. Para alcanzar el segundo objetivo que nos planteamos al inicio de este trabajo, en primer lugar hemos realizado un estudio teórico, similar al realizado para estudiar la influencia del campo gravitatorio.

- Considerando que el efecto de la topografía se debe principalmente a la distancia entre la superficie libre del medio y la posición de la fuente hemos obtenido que este efecto influye significativamente en las deformaciones y variaciones de gravedad, principalmente reduciendo su magnitud.
- La influencia de la topografía es superior a la influencia del acoplamiento elástico-gravitatorio para fuentes situadas a poca profundidad.
- Como consecuencia, para la interpretación correcta de deformaciones y variaciones de gravedad es necesario tener en cuenta el relieve del terreno.

Puesto que el acoplamiento elástico-gravitatorio es de orden inferior frente al efecto topográfico hemos desarrollado un modelo elástico tridimensional en el que se considera tanto el efecto de la masa como el de la expansión/contracción de las paredes de la cámara. La resolución de las ecuaciones que lo caracteriza se realiza mediante una técnica numérica: el método indirecto de elementos en la frontera. En este trabajo, a diferencia que en trabajos anteriores, hemos tenido en cuenta el efecto de la topografía tanto

en el campo de desplazamientos como en las variaciones de gravedad. De los tests teóricos que hemos realizado podemos concluir que:

- La topografía reduce considerablemente la magnitud tanto de las deformaciones como de las variaciones de gravedad en la región topográfica más elevada.
- También se produce un cambio de patrón. En los desplazamientos horizontales, el máximo (mínimo) se ve desplazado con respecto a la posición en que se encuentra en el caso de no considerar la topografía. Además, en las variaciones de gravedad y desplazamientos verticales aparece un máximo (mínimo) relativo en la zona correspondiente a una mayor elevación del terreno.
- El efecto de la masa cancela parte del levantamiento del edificio volcánico que produce el centro de expansión ya que los efectos de ambas fuentes son de diferente signo.
- El efecto topográfico disminuye tanto la magnitud del hundimiento que causa la masa de la intrusión como la magnitud de la elevación vertical que causa la presión. La disminución de la magnitud de la deformación vertical que produce el efecto topográfico es mayor que la que produce la masa. Por tanto, el efecto de la masa sobre el campo de desplazamientos es todavía menor que cuando se considera un medio de superficie libre plana.
- Las variaciones de gravedad también se verán afectadas por la topografía. La gravedad disminuye debido a la dilatación de la cámara y aumenta como consecuencia de la inyección de material. La reducción que produce la topografía en las variaciones de gravedad causadas por

## CONCLUSIONES

la fuente de masa puntual es mayor que la que se produce en la magnitud de las causadas por el centro de expansión. Esta fuente causa una disminución más pequeña de las variaciones de gravedad cuando se considera la topografía del terreno.

- Todos estos resultados son de gran interés al tener fuertes implicaciones en la estimación de parámetros-fuente mediante la inversión de datos de observación. No olvidemos que la interpretación correcta de las señales geodésicas observadas en zonas volcánicas tiene implicaciones en el desarrollo y mejora de los sistemas de alerta para la mitigación de riesgos, al mismo tiempo que implicaciones socio-económicas directas, ya que pueden afectar la planificación de infraestructura urbana, industrial, y turística.

Aunque el método indirecto de elementos en la frontera disminuye el tiempo CPU de cálculo al reducir las dimensiones del problema sigue siendo muy costoso, por lo que es más ventajoso utilizar otro tipo de técnicas como la metodología de variación de profundidad de fuente. Esta metodología permite obtener soluciones cuasi-analíticas muy atractivas desde el punto de vista práctico. Tras realizar una comparación de ambas técnicas se observa que:

- El efecto de la topografía es superior para fuentes someras. Este hecho es consistente con la hipótesis que se realiza para estudiar teóricamente el efecto de la topografía.
- La metodología cuasi-analítica permite obtener estimaciones fiables del efecto de la topografía sobre la componente vertical del campo de desplazamientos.

- Puesto que las variaciones de gravedad se deben principalmente a la atracción de la masa deformada y a la atracción de la masa intruida, esta metodología proporciona también, en este caso, una aproximación razonable.
- Por tanto, dada la disminución de tiempo de cálculo, frente a los métodos numéricos, se propone el utilizar esta técnica para realizar una primera interpretación de datos geodésicos considerando la influencia de la topografía en la inversión de desplazamientos verticales y variaciones de gravedad. Las inversiones de desplazamientos horizontales del medio basadas en esta metodología, que se emplean para determinar la forma y localización de la fuente, deberán ser mejoradas y validadas posteriormente mediante una técnica numérica como la desarrollada en esta memoria.

Así, con el fin de estimar el efecto de la topografía en la inversión de los parámetros de la fuente, hemos llevado a cabo una aplicación real: el volcán Mayon. Este volcán posee una altitud de 2462 sobre el nivel del mar. En base a lo anterior, hemos invertido las variaciones de gravedad y deformaciones verticales del terreno observadas en sus inmediaciones entre 1992 y 1996 teniendo en cuenta la solución aproximada que proporciona la metodología cuasi-analítica. Los resultados muestran que:

- La profundidad de la fuente así como el incremento de masa y de presión que se producen en su interior se sobrestiman si no se tiene en cuenta el efecto de la topografía. De hecho, la profundidad de fuente que se obtiene mediante un modelo plano es aproximadamente igual a la profundidad real de la fuente si se midiese desde la cima del volcán. La estimación correcta de estos parámetros es de gran ayuda para discernir entre los posibles procesos que se están llevando a cabo en el

## CONCLUSIONES

interior del medio, a partir de los valores de densidad que proporcionan, así como estudiar evoluciones temporales en situaciones de crisis.

- Como conclusión general se observa que para la determinación correcta de los parámetros de la fuente es necesario tener en cuenta el efecto de la topografía en el modelo matemático empleado como modelo directo para la inversión de datos de observación.

Aunque en la última parte de la memoria hemos intentado cuantificar exclusivamente el efecto de la topografía en las deformaciones y variaciones de gravedad, la forma de la fuente y las características del medio influyen considerablemente en el cálculo de estos efectos (p.e., Cayol y Cornet, 1998a, b). Por tanto, el trabajo realizado en esta memoria es una base para el desarrollo futuro de modelos con fuentes extensas, que permitirán estudiar el efecto de la topografía en las deformaciones y variaciones de gravedad producidas por diques, cámaras elípticas, etc.; también el estudio de geometrías 3D (Luzón *et al.*, 1997) que proporcionará estimaciones realistas de los parámetros físicos en volcanes activos; la consideración de la estratificación del medio para tener en cuenta las discontinuidades laterales de los parámetros elásticos (Fernández y Rundle, 1994a, b), así como la consideración de medios viscoelásticos (Folch *et al.*, 2000; Fernández *et al.*, 2001a) en los que habrá que tratar el acoplamiento elástico-gravitatorio de forma distinta.

Los resultados y conclusiones obtenidos en esta memoria son de aplicación general para la vigilancia de otros riesgos naturales y actividades humanas (minería, extracción de agua y gas, etc.), que producen tanto desplazamientos como variaciones de gravedad. Mientras que el modelo elástico-gravitatorio puede utilizarse para la interpretación de estas

manifestaciones en zonas donde la topografía no es significativa, el modelo elástico tridimensional puede utilizarse en zonas de relieve pronunciado.





## REFERENCIAS

- Abers, G., 1985. The subsurface structure of Long Valley Caldera, Mono County, California: a preliminary synthesis of gravity, seismic and drilling information. *J. Geophys. Res.*, 90, B5, 3527-3636.
- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1972. Handbook of mathematical functions. Dover, Nueva York.
- Aki, K. and Richards, P.G., 2002. Quantitative seismology. Second edition. University Science Books, Sausalito, CA. Pag. 700.
- Aurelio, M.A., 1992. Tectonique du segment central de la faille Philippine. Academie de Paris, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Bailey, R., 1989. Geologic map of the Long Valley caldera, Mono-Inyo craters volcanic chain, and vicinity, eastern California, Map I-1933, published by U.S. Geological Survey.
- Bailey, R., G.B. Dalrymple, and M.A. Lanphere, 1976. Volcanism, structure and geochronology of Long Valley Caldera, Mono County, California. *J. Geophys. Res.*, 81, 725-744.
- Battaglia, M., 2001. Unrest at Long Valley Caldera: GPS and gravity investigations. Tesis Doctoral. Departamento de Geofísica, Universidad de Stanford.

## REFERENCIAS

- Battaglia, M., C. Roberts and P. Segall, 1999. Magma intrusion beneath Long Valley caldera confirmed by temporal changes in gravity. *Science*, 285, 2119-2122.
- Battaglia, M., C. Roberts and P. Segall, 2003. The mechanics of unrest at Long Valley caldera, California. 2. Constraining the nature of the source using geodetic and micro-gravity data, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 127, 219-245.
- Beauducel, F., P. Briole and J.L. Froger, 2000. Volcano wide fringes in ERS SAR interferograms of Etna: Deformation or tropospheric effect, *J. Geophys. Res.*, 105, B7, 16391-16402.
- Berrino, G., Corrado, G., Luongo, G., Toro, B., 1984. Ground deformation and gravity changes accompanying the 1982 Pozzuoli uplift. *Bull. Volcanol.*, 47(2), 187-200.
- Berrino, G. Rymer, H. Brown, G.C. and Corrado, G., 1992. Gravity height correlations for unrest at calderas. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 53, 11-26.
- Bevington, P.R. and Robinson, D.K., 1992. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill, Inc., N.Y., 102, 196.
- Bhatia, A.B. and Singh, R.N., 1986. Mechanics of deformable media. In Adam Hilger, Bristol and Boston.
- Bianchi, R., Coradini, A., Federico, C., Giberti, G., Lanciano, P., Pozzi, J.P., Sartoris, G. and Scandone, R., 1987. Modeling of surface deformation in volcanic areas: the 1970-1972 and 1982-1984 crises of Campi Flegrei, Italy. *J. Geophys. Res.*, 92 (14), 139-150.
- Billings, S., Kennett, B. and Sambridge, M., 1994. Hypocenter location: genetic algorithms incorporating problem specific information, *Geophys. J. Int.*, 118, 693-706.
- Bischke, R.E. Suppe, J. and Pilar, R.D., 1990. A new branch of the Philippine fault system as observed from aeromagnetic and seismic data. *Tectonophysics*, 183, 243-264.
- Blake, S., 1981. Volcanism and the dynamics of open magma chambers. *Nature*, 289, 783-785.
- Bonaccorso, A., Velardita, R., and Villari, L., 1994. Ground deformation modeling of geodynamic activity associated with the 199-1993 Etna eruption. *Acta Vulcanol.*, 4, 87-96.
- Bonafede, M., 1990. Axi-symmetric deformation of thermo-poro-elastic halfspace: inflation of a magma chamber, *Geophys. J. Int.*, 103, 289-299.
- Bonafede, M., Dragoni, M. and Querini, F., 1986. Displacements and stress fields produced by a centre of dilatation and by a pressure source in a viscoelastic half-space: application to the study of ground deformation and seismic activity at Campi Flegrei, Italy. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 87, 455-485.

- Boschetti, F., Dentith, M.C. and List, R.D., 1996. Inversion of seismic refraction data using genetic algorithms, *Geophysics*, 61, 1715-1727.
- Brebbia, C.A. and Dominguez, J., 1992. Boundary elements. An introductory course. Computational mechanics publications, Southampton, Boston.
- Castle, R.O., J.E. Estrem and J.C. Savage, 1984. Uplift across Long Valley Caldera, California, *J. Geophys. Res.*, 89, 11507-11516.
- Cayol, V. and Cornet, F. H., 1997. 3D mixed boundary elements for elastic deformation field analysis. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 34, 275-287.
- Cayol, V. and Cornet, F. H., 1998a. Effects of topography on the interpretation of the deformation field of prominent volcanoes: application to Etna. *Geophys. Res. Lett.*, 25, 1979-1982.
- Cayol, V. and Cornet, F. H., 1998b. Three-dimensional modeling of the 1983-1984 eruption at Piton de la Fournaise Volcano, Réunion Island. *J. Geophys. Res.*, 103(B8), 18025-18037.
- Cruse, T.A., 1969. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. Solids and Structures*, 5, 1269-1274.
- Charco, M., Fernández, J., Sevilla, M.J. and Rundle, J.B., 2002. Modeling magmatic intrusion's effects on the geoid and vertical deflection. Application to Lanzarote, Canary Islands, and Long Valley Caldera, California. *Física de la Tierra*, 14, 11-31.
- Davis, P.M., 1986. Surface deformation due to inflation of an arbitrarily oriented triaxial ellipsoidal cavity in an elastic half-space, with reference to Kilauea volcano, Hawaii. *J. Geophys. Res.*, 91, 7429-7438.
- Delaney, P.T. and Mctigue, D.F., 1994. Volume of magma accumulation or withdrawal estimated from surface uplift or subsidence, with application to the 1960 collapse of Kilauea Volcano. *Bull. Volcanol.*, 56, 417-424.
- De Natale, G., Petrazouli, S.M. and Pingue, F., 1997. The effect of collapse structure on ground deformations in calderas. *Geophys. Res. Lett.*, 24, 1555-1558.
- De Natale, G. and Pingue, F., 1993. Ground deformations in collapsed caldera structures. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 57, 19-38.
- Denlinger, R.P. and F. Riley, 1984. Deformation of Long Valley Caldera, Mono County, California, from 1975-1982, *J. Geophys. Res.*, 89, 8303-8314.
- Dieterich, J.H. and Decker, R.W., 1975. Finite element modeling of surface deformation asociated with volcanism. *J. Geophys. Res.*, 80, 4095-4102.

## REFERENCIAS

- Dragonì, M. and Magnanensi, C., 1989. Displacement and stress produced by a pressurized, spherical magma chamber, surrounded by a viscoelastic shell. *Phys. Earth. Planet. Int.*, 56, 316-328.
- Dvorak, J.J. and Berrino, G., 1991. Recent ground movement and seismic activity in Campi Flegrei, Southern Italy: episodic growth of a resurgent dome, *J. Geophys. Res.*, 96 (B2), 2309-2323.
- Dvorak, J.J., Okamura, A. and Dieterich, J.H., 1983. Analysis of surface deformation data, Kilauea volcano, Hawaii, October 1966 to September 1970. *J. Geophys. Res.*, 88 (B11), 9295-9304.
- Eggers, A., 1987. Residual gravity changes and eruption magnitudes. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 33, 201-216.
- Elbring, G. J. and J.B. Rundle, 1986. Analysis of borehole seismograms from Long Valley, California: Implications for Caldera structure. *J. Geophys. Res.*, 91, B12, 12651-12660.
- Fernández, J., 1992. Técnicas geodésicas y geodinámicas aplicadas a la investigación del riesgo volcánico en la isla de Lanzarote. Ph.D. Thesis, 149pp., Universidad Complutense de Madrid.
- Fernández, J., Carrasco, J.M., Rundle, J.B. and Araña, V., 1999. Geodetic methods for detecting volcanic unrest: a theoretical approach. *Bull. Volcanol.*, 60, 534-544.
- Fernández, J., Charco, M., Tiampo, K.F., Jentzsch, G. and Rundle, J.B., 2001b. Joint interpretation of displacement and gravity data in volcanic areas. A test example: Long Valley Caldera, California. *Geophys. Res. Lett.*, 28, 1063-1066.
- Fernández, J. and Díez, J.L., 1995. Volcano monitoring design in Canary Islands by deformation model. *Cahiers Centre Eur. Géodyn. Séismol.*, 8, 207-217.
- Fernández, J. and J.B. Rundle, 1994a. Gravity changes and deformation due to a magmatic intrusion in a two-layered crustal model. *J. Geophys. Res.*, 99, 2737-2746.
- Fernández, J. and J.B. Rundle, 1994b. FORTRAN program to compute displacement, potential and gravity changes due to a magma intrusion in a multilayered Earth model. *Comp. Geosci.*, 20, 461-510.
- Fernández, J., J.B. Rundle, R.d.R. Granell and T.T. Yu, 1997. Programs to compute deformation due to a magma intrusion in elastic-gravitational layered Earth models, *Comput. Geosci.*, 23, 231-249.
- Fernández, J., Tiampo, K.F. and Rundle, J.B., 2001a. Viscoelastic displacement and gravity changes due to point magmatic intrusions in gravitational layered solid Earth. *Geophys. J. Int.*, 146, 155-170.

- Fernández, J., Tiampo, K.F., Jentzsch, G., Charco, M. and Rundle, J.B., 2001c. Inflation or deflation?. New results for Mayon volcano applying elastic-gravitational modeling. *Geophys. Res. Lett.*, 28, 12, 2349-2352.
- Fernández, J., Yu, T.T. and Rundle, J.B., 1996a. Horizontal viscoelastic-gravitational displacement due to a rectangular dipping thrust fault in a layered Earth model. *J. Geophys. Res.*, 101, 13581-13594.
- Fernández, J., Yu, T.T. and Rundle, J.B., 1996b. Deformation produced by a rectangular dipping fault in a viscoelastic-gravitational layered Earth model. Part I: Thrust fault. FLTGRV and FLTGRH FORTRAN programs. *Comp. Geosci.*, 22(7), 135-750.
- Fialko, Y., Khazan, Y. and Simons, M., 2001. Deformation due to pressurized horizontal circular crack in an elastic half-space, with applications to volcano geodesy. *Geophys. J. Int.*, 146, 181-190.
- Folch, A., 2000. A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers. Tesis Doctoral, Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Folch, A., Fernández, J. Rundle, J.B. and Martí, J., 2000. Ground deformation in a viscoelastic medium composed of a layer overlying a halfspace. A comparison between point and extended sources. *Geophys. J. Int.*, 140, 37-50.
- Fung, Y.C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Gallagher, K., M. Sambridge and G. Drijkoningen, 1991. Genetic Algorithms: An evolution from Monte-Carlo methods for strongly non-linear geophysical optimization problems, *Geophys. Res. Lett.*, 18, 2177-2180.
- George, P.L., 1991. *Automatic mesh generation: application to finite element methods*. John Wiley and Sons, New York.
- Gilbert, F. and Backus, G., 1966. Propagator matrices in elastic wave vibration problems. *Geophysics*, 31(2), 326-332.
- Gilbert, F. and Backus, G., 1968. Elastic-gravitational vibrations of a radially stratified sphere. En *Dynamics of Structured Solids*. Ed.: G. Herrmann. American Society of Mechanical Engineers, New York.
- Goldberg, D.E., 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison Wesley, Reading, MA.
- Gottsmann, J. and Rymer, H., 2002. Deflation during caldera unrest: constraints on subsurface processes and hazard prediction from gravity-height data. *Bull. Volcanol.*, 64, 338-348.

## REFERENCIAS

- Grant, F.S. and G.F. West, 1965. Interpretation theory in Applied Geophysics, p. 583, McGraw-Hill, New York.
- Haskell, N.A., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media. Bull. Seismol. Soc. Am. , 43, 17-34.
- Hill, D.P., 1984. Monitoring unrest in a large silicic caldera, the Long Valley-Inyo Craters volcanic complex in east-central California. Bull. Volc., 47-2, 371-395.
- Hill, D.P., Bailey, A. and Ryall, A.S., 1985. Active tectonic and magmatic process beneath Long Valley Caldera: An Overview, J. Geophys. Res., 90, B13, 11111-11120
- Hofton, M.A., Rundle, J.B. and Foulguer, G.R., 1995. Horizontal surface deformation due to a dyke emplacement in an elastic-gravitational layer overlying a viscoelastic-gravitational half-space. J. Geophys. Res., 100 (B4), 6329-6338.
- Holland, J.H., 1975. Adaptation in Natural and Artificial Systems, MIT Press, Cambridge, MA.
- IMSL, 1982. Library reference manual (9<sup>th</sup> ed.): IMS, Houston; TX.
- Jachens, R.C. and C.W. Roberts, 1985. Temporal and areal gravity investigations at Long Valley Caldera, California, J. Geophys. Res, 90, 11210-11218.
- Jahr, T., Jentzsch, G., Punongbayan, R.S., Schreiber, U., Seeber, G., Völksen, C. and Weise, A., 1998. Mayon Volcano, Philippines: Improvement of hazard assessment by microgravity and GPS? Proc. Int. Symp. On Current Crustal Movement and Hazard Assessment (IUGG, IAG), Wuhan, nov. 1997, Seismological Press, Beijing, 599-608.
- Jaswon, M.A., 1963. Integral equation methods in potential theory. I, Proc. Roy. Soc. Ser. 273 (A), 23-32.
- Jaswon, M.A. and Symm, G.T., 1977. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. Academic Press.
- Jentzsch, G., Punongbayan, R.S., Schreiber, U., Seeber, G., Völksen, C. and Weise, A., 2001. Mayon Volcano, Philippines: change of monitoring strategy after microgravity and GPS measurements. J. Volcanol. Geotherm. Res, 109, 219-234.
- Jousset, P., Mori, H. and Okada, H., 2000. Possible magma intrusion revealed by temporal gravity, ground deformation and ground temperature observations at Mount Komagatake (Hokkaido) during 1996-1998 crisis. Geophys. J. Int., 143, 557-574.
- Kellogg, O.M., 1953. Foundations of potential theory. Dover publications, inc, New York.
- Kupradze, V.D., 1963. Dynamical problems in elasticity. Progress in solid mechanics Vol. III. Eds: I.N. Sneddon and R. Hill. North Holland Publ. Co., Amsterdam.

- Langbein, J., 1989. Deformation of Long Valley Caldera, Eastern California from mid-1983 to mid-1988: measurements using a two color geodimeter. *J. Geophys. Res.*, 94, 3833-3849.
- Langbein, J., D. Dzurisin, G. Marshall, R. Stein and J.B. Rundle, 1995. Shallow and peripheral volcanic sources of inflation revealed by modeling two-color geodimeter and leveling data from Long Valley Caldera, California, 1988-1992. *J. Geophys. Res.*, 100, 12487-12495.
- Langbein, J., D.P. Hill, T.N. Parker and S.K. Wilkinson, 1993. An episode of reinflation of the Long Valley Caldera, Eastern California: 1989-1991. *J. Geophys. Res.*, 98, 15851-15870.
- Lanzano, P., 1982. Deformations of an elastic earth. In Academic Press, New York.
- LINPACK, 2003.: [http:// www.netlib.org/linpack/index.html](http://www.netlib.org/linpack/index.html).
- Logan, J.D., 1987. Applied Mathematics. A contemporary approach. Ed: John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Love, A.E.H., 1911. Some problems in Geodynamic. Cambridge Univ. Press., New York.
- Love, A.E.H., 1927. A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, New York.
- Luzón, F., Sanchez-Sesma, F.J., Alguacil, G., Morales, J., Posadas, A.M., Romacho, M.D. and Garcia, J.M., 1995. Respuesta sísmica de estructura superficiales topográficas. Homenaje a Fernando de Miguel, Ed. Instituto Andaluz de Geofísica.
- Luzón, F., Sanchez-Sesma, F.J., Rodriguez-Zuñiga, J.L., Posadas, A.M., Garcia, J.M., Martín, J., Romacho, M.D. and Navarro, M., 1997. Diffraction of P, S and Rayleigh waves by three dimensional topographies. *Geophys. J. Int.*, 129, 571-578.
- Mal, A.K. and Singh, S.J., 1991. Deformation of elastic solids. In Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mayon: <http://www.phivolcs.dost.gov.ph/volcanoes/Mayon>
- McTigue, D.F., 1987. Elastic stress and deformation near a finite spherical magma body: resolution of the point source paradox. *J. Geophys. Res.*, 92, 12931-12940.
- McTigue, D.F. and Segall, P., 1988. Displacements and tilts from dip-slip faults and magma chambers beneath irregular surface topography. *Geophys. res. Lett.*, 15, 601-604.
- McTigue, D.F. and Stein, R.S., 1984. Topographic amplification of tectonic displacement: Implications for geodetic measurement of strain changes. *J. Geophys. Res.*, 89, 1123-1131.
- Michalewicz, Z., 1992. Genetic Algorithms+Data structures=Evolution Programs. (Springer, Berlin Heidelberg New York).



## REFERENCIAS

- Mindlin, R.D., 1936. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *J. App. Phys.*, 21, 926-930.
- Mindlin, R.D. and Cheng, D.H., 1950. Nuclei of strain in the semi-infinite solid. *J. App. Phys.*, 21, 926-930.
- Mogi, K., 1958. Relations of eruptions of various volcanoes and the deformation of the ground surface around them. *Bull Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ.*, 36, 99-134.
- Montesinos, F.G., 2002. Inversión gravimétrica 3D por técnicas de evolución. Aplicación a la Isla de Fuerteventura. Ed.: Cabildo de Fuerteventura, Puerto del Rosario. Pag., 209.
- Murase, T. and McBirney, A.R., 1973. Properties of some igneous rocks and their melts at high temperatures. *Bull. Geol. Soc. Am.*, 84, 3563-3592.
- Okada, Y., 1985. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 75(4), 1135-1154.
- Okubo, S., 1991. Potential and gravity changes raised by point dislocations. *Geophys. J. Int.*, 105, 573-586.
- Pollitz, F.F., 1997. Gravitational viscoelastic postseismic relaxation on a layered spherical Earth. *J. Geophys. Res.*, 102, 17921-17941.
- Rizzo, F.J., 1967. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, 25, 83-95.
- Roberts, C., Jachens, R. and Morin, R., 1988. High-precision stations for monitoring gravity changes in Long Valley Caldera, California. Open-File Report – U.S.
- Roth, F., 1993. Deformations in a layered crust due to a system of cracks: modeling the effects of dyke injections or dilatancy. *J. Geophys. Res.*, 98, 4543-4551.
- Rundle, J.B., 1978a. Viscoelastic crustal deformation by finite quasi-static sources. *J. Geophys. Res.*, 83, B12, 5937-5945.
- Rundle, J.B., 1978b. Gravity changes and the Palmdale uplift. *Geophys. Res. Lett.*, 5, 41 – 44.
- Rundle, J.B., 1980. Static elastic-gravitational deformation of layered halfspace by point couple sources. *J. Geophys. Res.*, 85, 5355-5363.
- Rundle, J.B., 1981a. Numerical evaluation of static elastic gravitational deformation in a layered half-space by point couple sources. Rep. 81-2058, Sandia Nat. Lab., Albulquerque, N. M..
- Rundle, J.B., 1981b. Vertical displacements from a rectangular fault in layered elastic-gravitational media, *J. Phys. Earth*, 29, 173-186.
- Rundle, J.B., 1982. Deformation, gravity and potential changes due to volcanic loading of the crust. *J. Geophys. R.*, 87, 10729-10744. (Correction, *J. Geophys. Res.*, 88, 10647-10652).

- Rymer, H., 1994. Microgravity change as a precursor to volcanic activity. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 61, 311-328.
- Rymer, H., 1996. Microgravity monitoring. In *Monitoring and Mitigation of Volcano Hazards*. Eds: Scarpa/Tilling, Springer Verlag, Berlín, Heidelberg.
- Rymer, H. and Brown, G.C., 1986. Gravity fields and the interpretation of volcanic structures: geological discrimination and temporal evolution. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 27, 229-254.
- Rymer, H. and Williams-Jones, G., 2000. Volcanic eruption prediction: Magma chamber Physics from gravity and deformation measurements. *Geophys. Res. Lett.*, 27, 2389-2392.
- Sambridge, M. and Mosegaard, K., 2002. Monte Carlo methods in Geophysical inverse problems. *Rev. Geophys.*, 40, 3.
- Sanchez-Sesma, F.J. and Campillo, M., 1991. Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 81, 2234-2253.
- Sanchez-Sesma, F.J. and Campillo, M., 1993. Topographic effects for incident P, SV and Rayleigh waves. *Tectonophysics*, 218, 113-125.
- Sanchez-Sesma, F.J. and Luzón, F., 1995. Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 85, 269-284.
- Sanders, C.O., 1984. Location and configuration of magma bodies beneath Long Valley, California determined from anomalous earthquake signals. *Geophys. Res. Lett.*, 8, 557-560.
- Singh, K. and Singh, S.J., 1989. Static and quasi-static deformation of a uniform half-space by buried sources. *Geophys. Res. Bull.*, 27, 1, 1-30.
- Singh, S.J., 1970. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources. *J. Geophys. Res.*, 75, 3257-3263.
- Stoffa, P.L. and Sen, M.K., 1991. Nonlinear multiparameter optimization using genetic algorithms. *Inversion of plane-wave seismograms*, *Geophysics*, 56, 1794-1810.
- Tarantola, A., 1987. *Inverse problem theory. Methods of data fitting and model parameter estimation*, Elsevier Publishing Company.
- Taylor, J.R., 1982. *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, USA, 225-230.
- Tiampo, K.F., Fernández, J., Jentzsch, G., Charco, M., Rundle, J.B., 2003. New results at Mayon, Philippines, from a joint inversion of gravity and deformation measurements. *Pure and Applied Geophysics* (En prensa.)

## REFERENCIAS

- Tiampo, K.F., Rundle, J.B., Fernández, J., Langbein, J., 2000. Spherical and ellipsoidal volcanic sources at Long Valley Caldera, California using a Genetic Algorithm inversion technique, *J. Volcanol. Geother. Res.*, 102, 189-206.
- Thompson, W.T., 1950. Transmission of elastic waves through a stratified medium. *J. Appl. Phys.*, 21, 89-93.
- Udías, A., 1999. *Principles of Seismology*. Cambridge University Press. Pag., 475.
- Völksen, C. and Seeber, G., 1995. Establishment of a GPS based control network at Mayon volcano. *Cahier du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie*, 8. Proceedings of Workshop: New Challenges for Geodesy in Volcanoes Monitoring. 14-16 de junio, 1993, Walferdange, Luxemburgo, 99-113.
- Walsh, J.B. and Rice, J.R., 1979. Local changes in gravity resulting from deformation. *J. Geophys. Res.*, 84 (B1), 165-170.
- Weiland, C.M., Steck, L.K., Dawson, P.B. and Korneev, V.A., 1995. 3D seismic tomography and the velocity structure beneath Long Valley Caldera. *J. Geophys. Res.*, 100, 20379-20390.
- Whitley, D., 1989. The GENITOR Algorithm and Selection Pressure: Why Rank-Based Allocation of Reproductive Trials is Best, *Proceedings of the Third International Conference on Genetics Algorithms*, Morgan Kaufman Pub., San Mateo, CA, 116-121.
- Williams, C. and Wadge, G., 1998. The effects of topography on magma chamber deformation models: application to Mt. Etna and Radar Interferometry. *Geophys. Res. Lett.*, 25, 1549-1552.
- Williams, C. and Wadge, G., 2000. An accurate and efficient method for including the effects of topography in three-dimensional elastic models of ground deformation with applications to radar interferometry. *J. Geophys. Res.*, 105(B4), 8103-8120.
- Wright, A.H., 1991. Genetic algorithms for real parameter optimization, in *Foundations of Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA
- Yang, X.M., P. M. Davis and J.H. Dieterich, 1988. Deformation from inflation of a dipping finite prolate spheroid in an elastic half-space as a model for volcanic stressing. *J. Geophys. Res.*, 93, 4249-4257.
- Yokoyama, I., 1971. A model for crustal deformations around Volcanoes, *J. Phys. Earth*, 19 (3), 199-207.
- Yokoyama, I., 1989. Microgravity and height changes caused by volcanic activity: four Japanese examples. *Bull. Volcanol.*, 51, 333-345.

- Yu, T.T., Rundle, J.B. and Fernández, J., 1996. Deformation produced by a rectangular dipping fault in a viscoelastic-gravitational layered Earth model. Part II: Thrust fault, STRGRV and STRGRH FORTRAN programs. *Comp. Geosc.*, 22-7, 751-764.