

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

**Departamento de Matemática Aplicada**



**SOLUCIONES EXTREMALES PARA PROBLEMAS  
PARABÓLICOS DE EVOLUCIÓN NO LINEALES Y  
APLICACIONES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

Alejandro Vidal López

Bajo la dirección del doctor

Aníbal Rodríguez Bernal

**Madrid, 2005**

**ISBN: 84-669-2806-5**

Universidad Complutense de Madrid

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Soluciones extremales para problemas parabólicos  
de evolución no lineales y aplicaciones.

Memoria para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Presentada por:

ALEJANDRO VIDAL LÓPEZ.

Dirigida por:

ANÍBAL RODRÍGUEZ BERNAL.

Julio 2005



## Agradecimientos

Desearía agradecer en primer lugar a Aníbal Rodríguez Bernal todo el apoyo y la ayuda prestados. No sólo en lo profesional, de quién he aprendido mucho y quién ha mostrado una infinita paciencia conmigo, sino también en lo personal ya que en los momentos más difíciles ha sabido darme las palabras de aliento necesarias que han hecho menos duro el camino. Gracias también por el entusiasmo demostrado durante estos cuatro años.

También querría agradecer su ayuda y apoyo a James C. Robinson, con quién trabajé durante mis estancias en la Universidad de Warwick y quién me ha hecho ver la investigación en matemáticas desde otro punto de vista. Gracias también por su hospitalidad y su atención.

Agradecer también su ayuda a Jose María Arrieta, por sus interesantes comentarios y a Jose Antonio Langa con quién trabajé durante mi estancia en Sevilla.

En lo personal, me gustaría agradecer a mi familia y a mis amigos todo el apoyo que me han dado. Gracias a mi hermano, mi madre y mi abuela por su constante cariño, preocupación y apoyo.

Gracias también a James y Tania su hospitalidad y todo el cariño que mostraron hacia a mí durante mis estancias en Inglaterra.

Por último, gracias también a Sokó, Pepi, Laura, Rosana, Pedro, María, Elisa, Pablo, Igor, Alberto, Sebastiano, Zoraida, Nacho, M. Carmen, Jesús, Isa, Marcos, Inma y muchos otros, que espero perdonen mi falta momentánea de memoria, que han estado ahí dándome ánimos durante la realización de este trabajo y han tenido que soportar mi mal humor a veces.



# Índice general

<b>I</b>	<b>Problemas autónomos</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1.	Existencia local. . . . .	5
1.1.1.	Existencia local para datos iniciales acotados. . . . .	6
1.1.2.	El semigrupo en otros espacios. Dominios acotados. . . . .	8
1.1.3.	Condiciones de contorno no lineales. . . . .	9
1.1.4.	El semigrupo en otros espacios. Dominios no acotados. . . . .	10
1.2.	Existencia global. . . . .	11
1.2.1.	Existencia global en dominios acotados. . . . .	11
1.2.2.	Existencia global en dominios no acotados . . . . .	12
1.3.	Un resultado de compacidad de órbitas . . . . .	13
<b>2.</b>	<b>Puntos de equilibrio extremales</b>	<b>15</b>
2.1.	Equilibrios extremales en el caso de reacción fuerte: Comparación con una EDO . . . . .	15
2.1.1.	Condiciones de contorno tipo Neumann . . . . .	15
2.1.2.	Condiciones de contorno tipo Dirichlet . . . . .	17
2.2.	Equilibrios extremales en el caso general. Dominios acotados . . . . .	19
2.2.1.	Un argumento general basado en monotonía y compacidad. . . . .	20
2.2.2.	Condiciones de contorno lineales homogéneas . . . . .	22
2.2.3.	Condiciones de contorno no homogéneas y no lineales. . . . .	24
2.3.	Equilibrios extremales que cambian de signo . . . . .	25
2.4.	Convergencia en espacios más regulares . . . . .	26
2.5.	Equilibrios extremales en el caso general. Dominios no acotados . . . . .	28
2.5.1.	El problema en $BUC(\Omega)$ . . . . .	29
2.5.2.	El problema en $H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$ . . . . .	29
2.5.3.	Otras condiciones de estructura sobre $f$ . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Existencia y estabilidad de equilibrios extremales positivos</b>	<b>37</b>
3.1.	Soluciones no negativas . . . . .	37
3.2.	Existencia de un punto de equilibrio positivo minimal. . . . .	39
3.3.	Sobre la estabilidad y unicidad de puntos de equilibrio positivos . . . . .	46
<b>4.</b>	<b>Revisión de algunos resultados elípticos conocidos</b>	<b>53</b>
4.1.	El autovalor principal . . . . .	53
4.2.	Existencia de puntos de equilibrio positivos . . . . .	55
4.2.1.	Revisión del artículo de Amann. . . . .	56
4.2.2.	Revisión del artículo de H. Berestycki y P. L. Lions . . . . .	58
4.2.3.	Revisión del artículo de P. L. Lions. . . . .	59
4.2.4.	Revisión del artículo de Figueiredo. . . . .	60
4.2.5.	Otros resultados conocidos . . . . .	61
<b>5.</b>	<b>Un ejemplo: ecuaciones logísticas</b>	<b>63</b>

<b>II</b>	<b>Problemas no autónomos</b>	<b>67</b>
<b>6.</b>	<b>Introducción</b>	<b>69</b>
6.1.	Algunas definiciones y resultados sobre ecuaciones de evolución no autónomas. . . . .	72
6.2.	Un breve repaso del argumento dinámico. . . . .	75
<b>7.</b>	<b>Operadores de evolución para problemas lineales no autónomos.</b>	<b>81</b>
7.1.	Trayectorias completas de problemas lineales. . . . .	87
7.2.	Problemas lineales asintóticamente autónomos y periódicos. . . . .	95
<b>8.</b>	<b>El problema no lineal.</b>	<b>99</b>
8.1.	Trayectorias completas extremales para problemas no lineales no autónomos . . . . .	99
8.2.	Comportamiento asintótico hacia adelante en el tiempo . . . . .	104
8.3.	Un ejemplo: la ecuación logística no autónoma. . . . .	108
8.3.1.	Algunos ejemplos . . . . .	109
8.3.2.	Una ecuación logística homogénea en espacio . . . . .	111
8.4.	Algunas generalizaciones . . . . .	113
<b>9.</b>	<b>Existencia, unicidad y atracción de trayectorias completas positivas</b>	<b>115</b>
9.1.	Unicidad de trayectorias completas positivas no degeneradas . . . . .	117
9.2.	Comportamiento de las soluciones positivas hacia adelante en el tiempo . . . . .	121
9.3.	Existencia de trayectorias completas positivas no degeneradas . . . . .	125
9.4.	Un ejemplo: ecuaciones logísticas . . . . .	130
9.5.	Algunas generalizaciones y extensiones . . . . .	132
<b>III</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>135</b>
<b>10.</b>	<b>Difusión alta</b>	<b>137</b>
10.1.	Difusión alta hasta la frontera . . . . .	138
10.1.1.	Planteamiento del problema elíptico . . . . .	139
10.1.2.	Marco funcional . . . . .	139
10.1.3.	Los problemas elípticos aproximados . . . . .	140
10.1.4.	El problema límite elíptico . . . . .	142
10.1.5.	Convergencia de las soluciones de los problemas elípticos . . . . .	142
10.1.6.	El problema de autovalores . . . . .	145
10.1.7.	Convergencia de los problemas parabólicos lineales . . . . .	148
10.1.8.	Los problemas parabólicos no lineales aproximados . . . . .	151
10.1.9.	El problema parabólico límite . . . . .	154
10.1.10.	Semicontinuidad superior de los atractores . . . . .	156
10.2.	Difusión alta en un entorno de la frontera . . . . .	158
10.2.1.	Planteamiento del problema . . . . .	159
10.2.2.	Marco funcional . . . . .	159
10.2.3.	Los problemas aproximados . . . . .	160
10.2.4.	El problema límite . . . . .	161
10.2.5.	Paso al límite . . . . .	162
10.2.6.	El problema de autovalores . . . . .	164
10.2.7.	Convergencia de los problemas parabólicos lineales . . . . .	164
10.2.8.	Los problemas parabólicos aproximados . . . . .	165
10.2.9.	El problema parabólico límite . . . . .	166
10.2.10.	Semicontinuidad superior de los atractores . . . . .	168

<b>IV</b>	<b>Apéndice</b>	<b>169</b>
<b>A.</b>	<b>Algunas definiciones y resultados previos</b>	<b>171</b>
A.1.	Sobre la Teoría de Semigrupos. . . . .	171
A.2.	Algunos resultados de la teoría de atractores . . . . .	172
<b>B.</b>	<b>Existencia y unicidad de solución de problemas lineales.</b>	<b>175</b>
B.1.	El semigrupo en $L^\infty(\Omega)$ . $\Omega$ acotado. . . . .	175
B.2.	El semigrupo en $L^\infty(\Omega)$ . $\Omega$ no acotado . . . . .	177
B.3.	El semigrupo no lineal . . . . .	180
B.4.	Sobre la monotonía de soluciones. . . . .	181





# Introducción

En esta memoria hemos abordado el estudio de soluciones extremales para problemas parabólicos no lineales de evolución. Como modelo de problema hemos considerado la ecuación del calor semilineal con el operador Laplaciano y diversas condiciones de contorno lineales y también con condiciones de contorno no lineales. Sin embargo, al emplear argumentos dinámicos, el resultado sigue siendo válido para operadores diferenciales más generales para los que se tenga un principio del máximo. Es la monotonía de estos problemas lo que nos permite probar la existencia de soluciones extremales y su estabilidad.

Al principio de cada parte de esta memoria hacemos una introducción sobre los problemas abordados. Damos ahora una breve idea sobre el contenido de esta memoria.

En la primera parte, hemos abordado el caso de ecuaciones de reacción difusión autónomas. El modelo de ecuación estudiada es el siguiente

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para una clase muy amplia de problemas probamos la existencia de dos equilibrios extremales ordenados, uno maximal y otro minimal en el sentido de que cualquier otro punto de equilibrio del sistema se encuentra entre ellos. Además, la dinámica asintótica de estos problemas queda confinada, de manera uniforme, en la región delimitada por los equilibrios extremales. También se tiene que el equilibrio maximal es globalmente asintóticamente estable por arriba y el minimal lo es por abajo. Así, obtenemos, en particular, la existencia de lo que podemos denominar “tapas” de los atractores para este tipo de problemas. Como consecuencia obtenemos también cotas uniformes sobre los atractores, hecho este que será de utilidad en las aplicaciones.

La hipótesis principal sobre estos problemas ha sido una condición de estructura sobre no linealidad que garantice la disipación del problema. Como hemos señalado, esta situación se tiene en una clase amplia de problemas. Además, la condición de estructura es fácil de comprobar. Con esta hipótesis, las soluciones están uniformemente acotadas en tiempo y obtenemos la existencia de un conjunto absorbente. Hasta aquí, estos resultados eran conocidos en algunos casos. También eran conocidas unas cotas uniformes para el conjunto absorbente dadas por la única solución de un problema lineal elíptico relacionado con la condición de estructura sobre el término no lineal. Haciendo evolucionar el semigrupo no lineal, definido por las soluciones del problema no lineal, a partir de un dato inicial por encima de la solución del problema lineal y explotando la propiedad de monotonía y compacidad de estos problemas obtenemos la existencia de los equilibrios extremales y su estabilidad.

Una consecuencia interesante de estos resultados es el hecho de que la existencia de un conjunto absorbente acotado en  $L^\infty$  implica la existencia de equilibrios extremales y, por tanto, de las tapas para el atractor.

En el caso de dominios no acotados, la existencia de los equilibrios extremales se tiene de manera análoga a cómo se obtiene en el caso de dominios acotados. Sin embargo, en este caso, las soluciones van a tender a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$  lo que introduce algunas dificultades técnicas por lo que ha sido necesario un estudio más detallado de las soluciones para obtener la estabilidad de los equilibrios extremales. Esto es debido a que, en principio, no podemos usar el mismo tipo de dato inicial que empleábamos en dominios acotados para la obtención de los equilibrios extremales. No obstante, es esta propiedad de decaimiento a cero la que permite obtener la existencia de atractor.

A pesar de ello, obtenemos la convergencia uniforme de las soluciones a la región delimitada por los equilibrios extremales. Como consecuencia, todas las soluciones se hacen uniformemente pequeñas cuando

$|x| \rightarrow \infty$ .

En las aplicaciones, es usual considerar sólo las soluciones positivas. En este caso, bajo ciertas condiciones naturales que esencialmente establecen la inestabilidad de la solución trivial, obtenemos la existencia de un equilibrio minimal positivo, por lo que, al igual que antes, la dinámica asintótica para soluciones positivas de estos problemas estará confinada entre el equilibrio minimal y maximal positivos. Estudiamos también la estabilidad de los equilibrios extremales y, como consecuencia, obtenemos resultados de unicidad de equilibrios positivos. Además, bajo ciertas condiciones, el único equilibrio positivo es globalmente asintóticamente estable para las soluciones positivas.

Como consecuencia de los resultados obtenidos, hemos podido recuperar con técnicas dinámicas y de manera relativamente elemental algunos resultados conocidos, algunos ya clásicos, sobre la existencia de soluciones positivas de ecuaciones elípticas obtenidos mediante técnicas puramente elípticas (Amann, Figueiredo, P. L. Lions, ...). Además, gracias a las herramientas usadas obtenemos de manera inmediata información de la dinámica del sistema.

Por último, mostramos cómo aplicar las técnicas anteriormente estudiadas a ecuaciones logísticas, poniendo de manifiesto, en particular, cómo las condiciones que garantizan la existencia de equilibrios extremales son relativamente sencillas de comprobar y suficientemente potentes como para abordar problemas interesantes en la práctica.

En la segunda parte de la memoria hemos abordado el mismo tipo de cuestiones para ecuaciones no autónomas. Para problemas no autónomos las soluciones tienen una dependencia muy fuerte del tiempo por lo que ya no se van a tener, en general, puntos equilibrios del sistema. Ahora, los objetos de estudio importante, análogos a los puntos de equilibrio para problemas autónomos, son las trayectorias completas, es decir, soluciones definidas para todo tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . Además, el concepto de atracción tiene que ser también diferente. Como hemos mencionado antes, consideramos aquí el concepto de atracción *pullback*, es decir, estudiaremos el estado del sistema en el tiempo actual teniendo en cuenta cómo se encontraba dicho sistema hace mucho tiempo.

Para estas ecuaciones, obtenemos la existencia de trayectorias completas extremales (concepto análogo al de puntos de equilibrios en el caso de problemas no autónomos) que acotan la dinámica del sistema en sentido *pullback*, concepto que creemos el más conveniente a la hora de estudiar la dinámica de sistemas no autónomos generales. En particular, las trayectorias completas extremales proporcionan “tapas” del atractor pullback.

A partir de aquí, probamos además, bajo ciertas condiciones, la existencia de un atractor hacia adelante en el tiempo. Para ello, empleamos una noción de atracción hacia adelante más débil que la de atracción uniforme, habitual en el estudio de este tipo de problemas.

Al igual que en el caso autónomo, los resultados que obtenemos son válidos para una clase amplia de problemas, cuyos términos no lineales verifican una condición sencilla de comprobar. Como casos particulares de los problemas estudiados se tienen los resultados para problemas periódicos.

Para llevar a cabo el estudio de problemas no autónomos hemos seguido un esquema similar al que empleamos en el estudio de problemas autónomos. Recordamos que para obtener los equilibrios en el caso autónomo hacíamos evolucionar el semigrupo a partir de un dato inicial relacionado con el único equilibrio de un problema lineal. En ese caso disponíamos de una teoría suficientemente general y amplia para el estudio de problemas lineales. Sin embargo, ahora, hemos tenido que desarrollar una teoría para problemas lineales. Para ello, hemos considerado los problemas lineales no autónomos como problemas de perturbación de operadores autónomos.

En un primer paso, obtenemos condiciones suficientes para la estabilidad exponencial de los operadores de evolución definidos por las soluciones de problemas lineales homogéneos (propiedad análoga al decaimiento exponencial de un semigrupo en el caso de ecuaciones autónomas que, además, es un concepto fundamental para el estudio realizado de esas ecuaciones). Establecemos además algunos resultados sobre la robustez del decaimiento exponencial de operadores de evolución lineales bajo perturbaciones lineales no autónomas. De esta forma, hemos realizado un estudio exhaustivo sobre la estabilidad exponencial de operadores de evolución lineales.

Es esta estabilidad exponencial la que nos permite probar que la única trayectoria completa para el problema homogéneo es la trivial que, además, atrae en sentido pullback y hacia adelante en el tiempo (propiedad análoga a la que se tiene para problemas lineales autónomos homogéneos donde el operador decae exponencialmente). Como consecuencia, obtenemos un resultado sobre la existencia, unicidad y

atracción de trayectorias completas para problemas lineales no homogéneos. Además, obtenemos una descripción del comportamiento de la trayectoria completa en  $\infty$  y  $-\infty$  según sea el término no homogéneo. En el caso particular en que estas trayectorias sean no acotadas obtenemos una cota sobre el crecimiento de estas trayectorias en  $\infty$  y  $-\infty$  en el caso en que sean no acotadas. En el caso de soluciones periódicas obtenemos que la única solución del problema lineal es periódica. Lo mismo se tiene para problemas asintóticamente autónomos y asintóticamente periódicos en los que la única solución del problema converge cuando  $t$  tiende a  $\infty$  al único equilibrio o a la única solución periódica del problema límite.

El siguiente paso es encontrar, al igual que antes, una cota uniforme sobre el comportamiento asintótico de las soluciones en sentido pullback. De hecho, probamos que se tiene una acotación uniforme, análoga a la encontrada para el caso autónomo, donde las cotas son ahora las únicas trayectorias completas de problemas lineales que provienen de la condición de estructura sobre el término no lineal. Haciendo ahora evolucionar el sistema (en sentido pullback) a partir de estas trayectorias completas, encontramos las trayectorias completas extremales del problema no lineal. Además, la trayectoria completa maximal es globalmente asintóticamente estable por arriba y la minimal lo es por abajo en sentido pullback. Obtenemos, además, la existencia de un atractor del problema en sentido pullback que puede ser no acotado.

Por último, centramos nuestra atención en el estudio de las soluciones positivas de problemas no autónomos. Concretamente, probamos, bajo ciertas condiciones de convexidad, la existencia y unicidad de trayectorias completas positivas no degeneradas y acotadas. Por no degeneradas entendemos soluciones que permanecen alejadas de cero para tiempos grandes ya sea en  $\infty$  o  $-\infty$ . Además, esta única trayectoria completa atrae en sentido pullback y hacia adelante en el tiempo. De esta forma, el atractor pullback para soluciones positivas viene dado por esa única trayectoria completa. En particular, recuperamos los resultados de unicidad y estabilidad obtenidos para el caso autónomo así como resultados conocidos para problemas periódicos (Hess) cuyas pruebas se basaban principalmente en una teoría espectral para ese tipo de problemas.

Como ejemplo mostramos cómo aplicar estos resultados a ecuaciones logísticas no autónomas. De nuevo, queda puesta de manifiesto la potencia de las herramientas desarrolladas y la sencillez de la comprobación de las hipótesis sobre el término no lineal.

En la tercera parte de esta memoria estudiamos dos problemas de difusión alta a los que aplicamos los resultados obtenidos en la primera parte de la memoria. Para cada uno de ellos, llevamos a cabo un estudio de los problemas elípticos aproximados y límite así como de los problemas parabólicos asociados. Como consecuencia de los resultados de la primera parte de la memoria obtenemos la existencia de atractores delimitados por equilibrios extremales para los problemas aproximados y límite. Además, aplicando técnicas conocidas obtenemos la semicontinuidad superior de los atractores. En particular, obtenemos que los equilibrios extremales son semicontinuos superiormente. Enunciamos también una condición que garantiza la continuidad de estos equilibrios.

En primero de los problemas, la zona de difusión alta tiene contacto simultáneo con zonas de la frontera con condiciones de contorno Dirichlet y Robin lo que provoca, debido a la homogeneización espacial que se produce en la zona de difusión alta, que el problema límite sea un problema estándar donde las zonas de frontera con condiciones Dirichlet y Neumann tienen intersección no vacía.

En el segundo problema, consideramos un problema con condiciones Robin donde la zona de difusión alta es un entorno de la frontera. En este caso, la homogeneización espacial en esa zona hará aparecer una aportación directa procedente de la condición de frontera.

Esta memoria se compone de tres partes y un apéndice. En la primera parte se aborda el estudio de problemas autónomos. En el Capítulo 1 enunciamos una serie de resultados preliminares conocidos sobre existencia de solución para estos problemas. En el Capítulo 2 estudiamos la existencia de puntos de equilibrios extremales en todo el espacio. El estudio de soluciones positivas lo realizamos en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 revisamos algunos resultados conocidos sobre soluciones positivas de problemas elípticos. Por último, aplicamos las técnicas estudiadas al caso de ecuaciones logísticas, en el Capítulo 5. En la segunda parte de esta memoria, abordamos el estudio de problemas no autónomos. En el Capítulo 6 hacemos una introducción de los resultados de esta parte. La teoría lineal se encuentra en el Capítulo 7 mientras que los resultados de existencia de soluciones extremales para problemas no lineales se trata en

el Capítulo 8. Por último, en el Capítulo 9 estudiamos la existencia y unicidad de trayectorias completas positivas no degeneradas y acotadas. En la tercera parte de la memoria, Capítulo 10 aplicamos los resultados obtenidos para problemas autónomos a dos problemas de difusión alta. La última parte de la memoria contiene los Apéndices en los que hemos incluido diversos resultados y definiciones que podrían desviar la atención del lector de los problemas considerados en esta memoria. Estos resultados se refieren a la generación de semigrupos, existencia y unicidad de problemas parabólicos y monotonía.

**Parte I**

**Problemas autónomos**



# Capítulo 1

## Preliminares

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto regular (acotado o no) y denotamos por  $\Gamma = \partial\Omega$  su frontera (que puede ser acotada o no y vacía o no). Nos planteamos el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de un problema de reacción-difusión disipativo. En particular, estudiaremos el siguiente problema modelo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u(0) = u_0 \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.0.1)$$

con  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en  $u$  uniformemente en  $x$ . Por  $\mathcal{B}$  denotamos el operador de condiciones de contorno que puede ser, en el caso de un dominio acotado, de la forma

$$\mathcal{B}u = u \quad (\text{condiciones de contorno tipo Dirichlet})$$

o bien,

$$\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + b(x)u \quad (\text{condiciones de contorno tipo Robin})$$

con  $b$  una función regular adecuada. En este último caso, si  $b(x) \equiv 0$  tenemos condiciones de contorno tipo Neumann.

También consideraremos condiciones de contorno no lineales, es decir, donde la condición de frontera sea de la forma

$$\mathcal{B}u \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + b(x)u = g(x, u)$$

donde  $g : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz uniformemente en  $x \in \Gamma$ .

En el caso de un dominio no acotado, consideramos condiciones de contorno tipo Dirichlet en la frontera (siempre y cuando ésta sea no vacía).

El problema lo planteamos en un espacio de Banach  $X$  de funciones en  $\Omega$ . En concreto,

$$u_0 \in X = C(\bar{\Omega}) \quad \text{o} \quad u_0 \in X = H_{\mathcal{B}}^{2\alpha, q}(\Omega)$$

en el caso de un dominio acotado, o

$$u_0 \in X = BUC(\Omega) \quad \text{o} \quad u_0 \in X = H_{\mathcal{B}}^{2\alpha, q}(\Omega) \quad 1 < q < \infty, 0 \leq \alpha \leq 1$$

en el caso de un dominio no acotado, donde hemos denotado por  $H_{\mathcal{B}}^{2\alpha, q}(\Omega)$  el espacio de potenciales de Bessel con condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ , ver por ejemplo Amann [3] y Daners y Koch-Medina [21]. En el último caso, las funciones de  $H_{\mathcal{B}}^{2\alpha, q}(\Omega)$  verifican  $|u_0| \rightarrow 0$  para  $|x| \rightarrow \infty$ .

Bajo ciertas condiciones, que veremos más adelante y que aseguran la existencia y unicidad de solución para todo tiempo, las soluciones del problema (1.0.1), que denotamos por  $u(t, x; u_0)$ , son soluciones clásicas lo que permite definir un semigrupo no lineal

$$S(t) : X \rightarrow X$$



dado por

$$S(t)u_0 = u(t, x; u_0).$$

Nuestro objetivo en esta parte de la memoria es probar, que para una clase amplia de problemas disipativos del tipo (1.0.1), se tiene la existencia de puntos de equilibrio extremales, es decir uno maximal y otro minimal, y probar que toda la dinámica asintótica del sistema acaba entrando *entre* dichos puntos de equilibrio de manera uniforme (en espacio y para acotados de datos iniciales). Como consecuencia, obtendremos una cota para el atractor global del problema (1.0.1). En concreto, para una clase amplia de no linealidades  $f(x, u)$ , probaremos el siguiente resultado

**Teorema 1.0.1** *Existen dos puntos de equilibrio ordenados del problema (1.0.1),  $\varphi_m$  y  $\varphi_M$ , minimal y maximal, respectivamente, en el sentido de que cualquier otro punto de equilibrio,  $\psi$ , verifica  $\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_M$ . Además, el conjunto  $\{v \in X : \varphi_m \leq v \leq \varphi_M\}$  atrae uniformemente la dinámica del sistema, es decir,*

$$\varphi_m(x) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \varphi_M(x) \quad (1.0.2)$$

*uniformemente en  $x \in \Omega$  y para  $u_0$  en acotados de  $X$ . Además, el punto de equilibrio minimal es estable por abajo y el maximal lo es por arriba.*

*Por último, existe un atractor global  $\mathcal{A}$  del problema (1.0.1) que, como consecuencia de lo anterior, verifica*

$$\varphi_m \leq \mathcal{A} \leq \varphi_M$$

*y  $\varphi_m, \varphi_M \in \mathcal{A}$ .*

Un corolario directo de este teorema es que, en caso de que exista un único punto de equilibrio de (1.0.1), es decir,  $\varphi_m \equiv \varphi_M$ , entonces dicho punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable. En la Sección 3.3 daremos condiciones para la unicidad de puntos de equilibrios.

Por otro lado, debido a la importancia en numerosas aplicaciones, consideraremos el caso de las soluciones no negativas de (1.0.1). En este contexto, probaremos que bajo ciertas condiciones existe un equilibrio positivo minimal del problema (1.0.1). Estas condiciones están relacionadas con la inestabilidad del estado  $u = 0$  en (1.0.1). Concretamente probaremos resultados análogos al siguiente, que está enunciado para el caso de condiciones de contorno de Dirichlet.

**Teorema 1.0.2** *Supongamos que  $f(x, 0) \geq 0$ . Para las soluciones no negativas del problema (1.0.1) se tiene*

- I) o bien existe un punto de equilibrio minimal **no negativo**  $\varphi_m^+$ , o bien toda la dinámica del sistema se va a infinito, es decir,  $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow \infty$ , en tiempo finito o infinito. En caso de existir, dicho punto minimal es, o bien  $\varphi_m \equiv 0$  (si  $f(x, 0) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ ), o bien  $\varphi_m(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$  (si  $f(x_0, 0) > 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$ ).*
- II) Además, si  $f(x, 0) \equiv 0$  y 0 es inestable en cierto sentido entonces 0 es un punto de equilibrio aislado y, o bien toda la dinámica del sistema se va a infinito (en tiempo finito o infinito), o bien existe un punto de equilibrio **positivo** minimal.*

*En todos estos casos, si existe el punto de equilibrio minimal positivo entonces es asintóticamente estable por abajo.*

Cabe resaltar que la prueba de este tipo de resultados de basa en argumentos de tipo dinámicos asociados a la ecuación de evolución (1.0.1) y que estos permiten reobtener, como caso particular y de una forma relativamente inmediata, una serie de resultados conocidos sobre la existencia de soluciones positiva para problemas elípticos. Este tipo de resultados se obtienen de manera tradicional por medio de técnicas específicas de ecuaciones elípticas. Es por ello que nuestros argumentos aportan información de tipo dinámico (léase estabilidad) a los enunciados clásicos. Revisaremos algunos de estos resultados en el Capítulo 4.

Una de las herramientas fundamentales de nuestro trabajo son los métodos de monotonía. Concretamente, para problemas del tipo (1.0.1) se verifican la siguientes propiedades de monotonía respecto a datos iniciales y términos no lineales (ver Sección B.4 o Apéndice A en Arrieta et al [10], por ejemplo):

- (1) Si tenemos dos datos iniciales ordenados, entonces las soluciones permanecen ordenadas para todo tiempo mientras dichas soluciones existan.
- (2) Sean dos funciones,  $f$  y  $g$ , de tal manera que  $f(t, x, s) \leq g(t, x, s)$  para todo  $t \geq 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$  e.c.t  $x \in \Omega$ . Si denotamos por  $u_f$  y  $u_g$  a las soluciones del problema (1.0.1) con segundo miembro  $f$  y  $g$ , respectivamente, entonces,  $u_f(t, x; u_0) \leq u_g(t, x; u_0)$  p.c.t  $x \in \Omega$  mientras las soluciones existan.
- (3) Las soluciones de un problema parabólico que parten de una subsolución (resp. supersolución) del problema elíptico asociado son monótonas crecientes (resp. decrecientes) (ver Lema B.4.5).

Debido a esto, gran parte de los resultados que obtendremos son aplicables a modelos más generales que (1.0.1) en los que podemos considerar operadores diferenciales más generales que  $-\Delta$  para los que se verifique un principio de comparación, ver Arrieta et al. [10] o Davies [22], para el caso de operadores en forma de divergencia, o Smith [48] y Daners y Koch-Medina [21] para para operadores más generales.

En concreto podremos considerar operadores en forma de divergencia del tipo

$$Au = -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u$$

donde  $a, c \in C^1(\Omega)$  tales que  $a(x) \geq m > 0$  para  $x \in \Omega$ . junto con operadores de contorno tipo Robin

$$Bu = a(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + b(x)u$$

con  $b \in C^1(\Gamma)$  sin ninguna condición de signo sobre  $b(x)$  en  $\Gamma$ .

También nuestros argumentos son aplicables a operadores de la forma

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^N a_i(x)\partial_i u + a(x)u$$

con coeficiente adecuadamente regulares.

Por su parte, la propiedad fundamental de estructura que pediremos a  $f$  para obtener el Teorema 1.0.1 es que verifique

$$sf(x, s) \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}$$

con  $C$  y  $D$  en un espacio adecuado de funciones en  $\Omega$ . Todo lo que sigue también es cierto si suponemos que  $f$  verifica

$$\begin{aligned} f(x, s) &\leq C^+(x)s + D^+(x) && \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \geq 0, \\ f(x, s) &\geq C^-(x)s - D^-(x) && \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \leq 0. \end{aligned}$$

Sin embargo supondremos  $C^+ = C^-$ ,  $D^+ = D^-$  por simplicidad de notación.

## 1.1. Existencia local.

Comenzamos haciendo un breve resumen sobre existencia y unicidad de soluciones para problemas de reacción-difusión no lineales, que incluyen a (1.0.1).

Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t + Au = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u(0) = u_0 \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.1)$$

con  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adecuada.

Como hemos comentado anteriormente consideraremos los casos en los que el operador diferencial es de la forma

$$Au \equiv -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u \quad (1.1.2)$$

o de la forma

$$Au \equiv - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^N a_i(x) \partial_i u + a(x)u, \quad (1.1.3)$$

en ambos casos asumiendo que los coeficientes poseen cierta regularidad adecuada.

De nuevo, el operador de contorno  $\mathcal{B}$  es del tipo

$$\mathcal{B}u = u \quad (\text{condiciones de contorno tipo Dirichlet})$$

o bien,

$$\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + b(x)u \quad (\text{condiciones de contorno tipo Robin}).$$

sin restricción de signo sobre  $b \in C^1(\partial\Omega)$ .

Adicionalmente, para el primer tipo de operadores podremos considerar condiciones de contorno no lineales

$$\mathcal{B}u \equiv a(x) \frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(x, u)$$

para cierta función no lineal  $g(x, u)$  en la frontera. Nótese que si  $g(x, u) = g(x)$  tenemos un problema con condiciones de frontera no homogéneas; si  $g \equiv 0$  tenemos condiciones Robin homogéneas.

Por su parte el término no lineal  $f(x, u)$  (y  $g(x, u)$  en el caso anterior) satisfarán ciertas condiciones de regularidad necesarias para que el problema (1.1.1) tenga solución.

Cabe observar que las condiciones de regularidad sobre los coeficientes de la ecuación (y, eventualmente, de la condición de contorno) y las condiciones sobre los términos no lineales están estrechamente relacionadas con la clase de datos iniciales que pueden considerarse en (1.1.1).

### 1.1.1. Existencia local para datos iniciales acotados.

Utilizando los resultados en Mora [39], Daners y Koch-Medina [21], Lunardi [36], Amann [4], tenemos que podemos considerar el problema (1.1.1) con dato inicial en  $X = L^\infty(\Omega)$  o  $X = C(\overline{\Omega})$ , en el caso de un dominio acotado, o en  $X = BUC(\overline{\Omega})$ , en un dominio no acotado.

Para esto supondremos que los coeficientes de (1.1.3) son uniformemente continuos y acotados en  $\Omega$ . En caso de condiciones de Robin, supondremos además que el coeficiente  $b(x)$  es uniformemente continuo y acotado, junto con su derivada, Lunardi [36], pag. 75. Para utilizar los resultados en Daners y Koch-Medina [21], supondremos que  $a_{ij}, a_i, a \in C^\mu(\overline{\Omega})$  y  $b \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ , para cierto  $0 < \mu \leq 1$ ; ver Daners y Koch-Medina [21], pag. 24.

En estas condiciones, las referencias anteriores muestran que este tipo de operadores son sectoriales y definen, por tanto, semigrupos analíticos en los espacios  $X = L^q(\Omega)$  con  $1 < q \leq \infty$ ,  $X = BUC(\overline{\Omega})$ , o  $X = BUC_D(\overline{\Omega})$ , donde este último denota el subespacio de las funciones acotadas y uniformemente continuas que se anulan en la frontera, en el caso de condiciones de Dirichlet.

Para unificar las notaciones, y restringiendo momentáneamente la exposición a dominios acotados, denotaremos por

$$C_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) = \begin{cases} C_D(\overline{\Omega}) & \text{si } \mathcal{B}(u) = u \\ C(\overline{\Omega}) & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con la notación análoga  $BUC_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega})$  para el caso de dominios no acotados.

En el Apéndice B hemos incluido una detallada descripción de los resultados expuestos en Lunardi [36], de manera que aquí daremos cuenta de las particularidades del semigrupo generado por la ecuación lineal en estos espacios. Observemos que esta ecuación puede ser escrita de forma abstracta en la forma

$$\begin{cases} u_t + Au & = 0 \\ u(0) & = u_0 \in X \end{cases}$$

en los diferentes espacios de datos iniciales  $X$ .

Si denotamos por  $S(t)$  el semigrupo generado por  $-A$ , tenemos que si  $u_0 \in \overline{D(A)}^X$  entonces  $S(t)u_0$  es continuo para  $t \geq 0$ . En particular, si  $D(A)$  es denso en  $X$  entonces el semigrupo lineal es continuo

para todo  $t \geq 0$ . Si  $D(A)$  no es denso y  $u_0 \in X \setminus \overline{D(A)}^X$  entonces existe una única solución del problema pero, en este caso,  $S(t)u_0$  no es continua en  $t = 0$ , aunque si lo es para  $t > 0$ .

Esto se traduce que el semigrupo en  $C_B(\overline{\Omega})$  o en  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , es continuo hasta  $t = 0$  mientras que no lo es en  $L^\infty(\Omega)$ , ni en  $C(\overline{\Omega})$ , en el caso de condiciones de Dirichlet. Una situación análoga se tiene en el caso de dominios no acotados, usando espacios  $BUC(\overline{\Omega})$ , ver Apéndice B y las referencias anteriores.

Obsérvese que el tratamiento de operadores en forma de divergencia, (1.1.2), con coeficientes uniformemente continuos y acotados se puede encontrar en las referencias citadas en Lunardi [36], pag. 119. El caso de coeficientes  $C^1$  en el marco de los espacios  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , está ampliamente desarrollado en Amann [3]. Un trabajo pionero en esta dirección que abarca una gran cantidad de ejemplos concretos es sin duda Henry [28].

Adicionalmente, en todas las referencias anteriores, se muestra la existencia de ciertos espacios intermedios entre  $X$  y el dominio del operador  $D(A)$ , que denotaremos de manera genérica como  $X^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , cuyas propiedades más relevantes son que las inclusiones

$$X^\alpha \subset X^\beta$$

son compactas (en el caso de  $\Omega$  acotado) si  $\alpha > \beta$ , y el semigrupo “regulariza” en el sentido de que, si  $\alpha > \beta$ ,

$$\|e^{-tA}u_0\|_{X^\alpha} \leq M \frac{e^{\delta t}}{t^{\alpha-\beta}} \|e^{-tA}u_0\|_{X^\beta}, \quad \text{para } t > 0, \quad (1.1.4)$$

para ciertos  $M > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ . En particular el semigrupo  $S(t) = e^{-tA}$  es compacto en  $X^\beta$  para todo  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Este tipo de desigualdades, combinadas con las inclusiones de Sobolev, se traducen en estimaciones del tipo

$$\|e^{-tA}u_0\|_{L^r(\Omega)} \leq M \frac{e^{\delta t}}{t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})}} \|u_0\|_{L^q(\Omega)}, \quad t > 0 \quad (1.1.5)$$

para ciertos  $M > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ , y  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

Por último, estos semigrupos satisfacen el principio del máximo, Daners y Koch–Medina [21], pag. 120.

Con estos preparativos podemos abordar la existencia de soluciones para el problema no lineal (1.1.1).

En primer lugar, si  $u_0 \in BUC_B(\overline{\Omega})$  entonces, si  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en  $u$  uniformemente en  $x$ , entonces un argumento de punto fijo permite probar la existencia y unicidad de una solución local de (1.1.1), ver Teoremas 7.3.1 y 7.3.2 de Lunardi [36], pag. 276-277, o Mora [39].

**Teorema 1.1.1** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado o no de  $\mathbb{R}^N$ . Supongamos que  $f$  es continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, dado  $u_0 \in X = BUC_B(\overline{\Omega})$  existe una solución local del problema  $u \in C([0, T]; X) \cap C((0, T); D(A))$ , para cierto  $T > 0$ , que viene dada por la fórmula de variación de las constantes*

$$u(t, x; u_0) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(x, u(s, x)) ds, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.1.6)$$

Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , lo anterior es válido en  $X = BUC(\mathbb{R}^N)$  y  $X = L^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

Por otro lado, por conveniencia en las aplicaciones, es deseable encontrar un teorema similar al anterior, pero con ciertas variantes. En primer lugar, y restringiéndonos al caso de dominios acotados, resulta muy conveniente poder resolver (1.1.1) para datos iniciales en  $C(\overline{\Omega}) \setminus C_B(\overline{\Omega})$  e incluso  $L^\infty(\Omega) \setminus C_B(\overline{\Omega})$ . Por otro lado, sería deseable poder incluir algunos términos singulares en la ecuación.

En este sentido, supondremos que  $f$  puede descomponerse de la forma

$$f(x, s) = g(x) + m(x)s + f_0(x, s) \quad (1.1.7)$$

con  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$  y

$$f_0(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0 \quad (1.1.8)$$

y donde  $g$  es una función adecuadamente regular (digamos, para simplificar los argumentos, que es acotada) y  $m \in L^p(\Omega)$  para cierto  $p > N/2$ . Observemos que considerar este tipo de términos no lineales, permite considerar los casos en los que el término de orden cero del operador lineal esta en  $L^p(\Omega)$  para cierto  $p > N/2$ .

En estas condiciones se puede obtener el siguiente resultado

**Teorema 1.1.2** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ . Supongamos que  $f$  satisface (1.1.7) y (1.1.8). Entonces, dado  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  existe una solución local del problema  $u \in C((0, T); C_B(\bar{\Omega}))$ , para cierto  $T > 0$ , que viene dada por la fórmula de variación de las constantes (1.1.6).*

Para ello, el procedimiento consiste en, dado  $u_0$  acotado, truncar  $f_0$  adecuadamente de manera que sea globalmente Lipschitz y acotada. Utilizando los resultados de existencia y unicidad en  $L^q(\Omega)$ , ver la siguiente Sección, se obtiene una única solución en un sentido más débil. Finalmente, se prueba que la solución construida está acotada en un cierto intervalo de tiempo. Para esta ultima propiedad, utilizando (1.1.5) para  $q = r = \infty$  y con  $q = p$  y  $r = \infty$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|u(t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq M e^{\delta t} \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t M e^{\delta(t-s)} (\|g\|_{L^\infty(\Omega)} + K) ds + \\ &+ \int_0^t M \frac{e^{\delta(t-s)}}{(t-s)^{\frac{N}{2p}}} \|m\|_{L^p(\Omega)} \|u(s; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \end{aligned}$$

donde  $K$  representa la cota para el truncamiento de  $f_0$ .

Ahora el Lema de Gronwall singular, ver Henry [28] y el Lema 7.0.9, más adelante, obtenemos que  $\|u(t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$  es acotado en intervalos acotados de tiempo, lo cual de nuevo en la estimación anterior implica que si  $T$  es pequeño y  $0 \leq t \leq T$ , el segundo miembro anterior es tan próximo a  $M \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$  como se quiera. Por tanto, el truncamiento de  $f_0$  puede ser elegido de manera que  $u(t; u_0)$  es realmente solución del problema original, no truncado, en ese intervalo.

Finalmente observemos que en cualquiera de los casos de los teoremas anteriores, las técnicas de iteración de la regularidad parabólica (“bootstrap”) permiten concluir que la solución es de hecho más regular. De hecho si  $m \in L^p(\Omega)$  con  $p > N$  se puede obtener que  $u(t) \in W^{2,p}(\Omega)$  y, por tanto,  $u(t) \in C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$  para cierto  $0 < \theta < 1$ . Si por contra  $N/2 < p < N$ , podemos concluir que  $u(t) \in C^\theta(\bar{\Omega})$  para cierto  $0 < \theta < 1$ .

### 1.1.2. El semigrupo en otros espacios. Dominios acotados.

Además del caso de datos iniciales acotados, es habitual considerar datos iniciales para problemas del tipo (1.1.1) en otros espacios. Como ya hemos comentado anteriormente los operadores diferenciales y condiciones de contorno que consideramos, definen semigrupos analíticos los espacios  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ . Esto permite utilizar los espacios intermedios asociados y las propiedades del semigrupo, ver (1.1.4), (1.1.5) para resolver el problema en este contexto. Este tipo de aproximaciones es aún más clásica que la presentada en la sección anterior; ver Henry [28], Pazy [40].

En particular es conocido que trabajando en  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , una familia adecuada de es la de los espacios potenciales de Bessel que denotamos por  $X = H_B^{2\alpha,q}(\Omega)$ , ver Henry [28], Amann [3].

Usando las propiedades de estos espacios y las propiedades del operador de Nemitsky asociado al término no lineal, entre espacios de esta familia, se tiene, usando Arrieta y Carvalho [8] el siguiente resultado (ver también Arrieta et al. [13]).

Supongamos que  $f$  satisface (1.1.7) y (1.1.8). Entonces tenemos

**Proposición 1.1.3** *Supongamos que  $f_0$  verifica*

$$|f_0(x, s) - f_0(x, r)| \leq c(1 + |s|^{\rho-1} + |r|^{\rho-1})|s - r| \quad (1.1.9)$$

para todo  $x \in \Omega$ ,  $s, r \in \mathbb{R}$ , con  $\rho \geq 1$  tal que

1. si  $2\alpha - \frac{N}{q} < 0$  entonces

$$1 \leq \rho \leq \rho_C = 1 + \frac{2q}{N - 2\alpha q};$$

2. si  $2\alpha - \frac{N}{q} = 0$  entonces

$$1 \leq \rho < \rho_C = \infty;$$

3. si  $2\alpha - \frac{N}{q} > 0$  no hace falta imponer restricciones sobre el crecimiento de  $f_0$ .

Entonces, para todo  $u_0 \in X = H_B^{2\alpha, q}(\Omega)$  existe una única solución local  $u(t, x; u_0) \in C([0, \tau), X)$ ,  $\tau > 0$ , del problema con dato inicial  $u_0$ , en el sentido que verifica la fórmula de variación de las constantes (1.1.6). Esta solución es clásica para  $t > 0$ .

### 1.1.3. Condiciones de contorno no lineales.

Consideramos ahora el problema con condiciones de contorno no lineales tal y como se considera en Arrieta et al. [10]. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado regular y denotamos por  $\Gamma = \partial\Omega$  su frontera. Supongamos que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  es una partición regular de la frontera, es decir,  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ .

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(x, u) & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.1.10)$$

donde  $a, b, c \in C^1(\Omega)$  tales que  $a(x) \geq m > 0$  para  $x \in \Omega$ ,  $f(x, \cdot), g(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $x \in \Gamma$  respectivamente.

Consideramos este problema planteado en algún espacio de la clase

$$\mathcal{E} = \{L^q(\Omega), W_{\Gamma_0}^{1, q}(\Omega), 1 < q < \infty\}$$

donde denotamos por  $W_{\Gamma_0}^{1, q}(\Omega)$  el espacio de funciones de  $W^{1, q}(\Omega)$  que se anulan en  $\Gamma_0$ .

Supongamos que  $f$  y  $g$  verifican la siguiente condición de crecimiento

(G)<sub>X</sub> :  $f(x, \cdot), g(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son localmente Lipschitz uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $x \in \Gamma$  respectivamente. Además,

1. Si  $X = L^q(\Omega)$ , suponemos que  $f$  y  $g$  verifican una relación de la forma

$$|j(x, u) - j(x, v)| \leq c|u - v|(|u|^{\rho_f - 1} + |v|^{\rho_f - 1} + 1) \quad (1.1.11)$$

con exponentes  $\rho_f$  y  $\rho_g$  respectivamente, tales que, para  $N \geq 2$  (resp.  $N = 1$ )

$$\rho_f \leq \rho_\Omega := 1 + \frac{2q}{N}, \quad \rho_g \leq \rho_\Gamma := 1 + \frac{q}{N} \quad (\text{resp. } \rho_g < \rho_\Gamma := 1 + q)$$

2. Si  $X = W_{\Gamma_0}^{1, q}(\Omega)$ , suponemos que se tiene alguna de las siguientes condiciones

a)  $q > N$

b)  $q = N$  y  $f, g$  verifican que para todo  $\eta > 0$  existe  $c_\eta > 0$  tal que

$$|j(x, u) - j(x, v)| \leq c_\eta (e^{\eta|u|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{\eta|v|^{\frac{N}{N-1}}})|u - v| \quad (1.1.12)$$

c)  $1 < q < N$  y  $f, g$  verifican (1.1.11) con exponentes

$$\rho_f \leq \rho_\Omega := 1 + \frac{2q}{N - q} \quad \rho_g \leq \rho_\Gamma := 1 + \frac{q}{N - q}$$

En este caso, la existencia local y unicidad de soluciones del problema viene dado por el siguiente resultado (ver Teorema 2.1 de Arrieta et al. [10]).

**Teorema 1.1.4** *Sea  $X$  un espacio de la clase  $\mathcal{E}$ . Supongamos que  $f$  y  $g$  verifican la condición de crecimiento ( $G_X$ ). Entonces, para todo  $u_0 \in X$  existe una única solución local  $u(t, x; u_0) \in C([0, \tau), X)$ ,  $\tau > 0$ , del problema con dato inicial  $u_0$ , en el sentido que verifica la fórmula de variación de las constantes. Esta solución es clásica para  $t > 0$ .*

*Además, si  $u_0 \in X$  entonces  $u(t, x; u_0) \in Y$  para todo  $Y \in \mathcal{E}$  y  $0 < t < \tau$ .*

Observemos que las particularidades del problema con condiciones de contorno no lineales residen en la presencia de dos términos no lineales distintos y en la necesidad de usar escalas de espacios duales a las de los espacios intermedios introducidos en la sección anterior. Es por ello que para este tipo de problemas la mayor parte de la bibliografía existente se refiere al caso de operadores en forma de divergencia.

#### 1.1.4. El semigrupo en otros espacios. Dominios no acotados.

Para el caso de dominios no acotados, supongamos de nuevo que  $f$  puede descomponerse de la forma

$$f(x, s) = g(x) + m(x)s + f_0(x, s) \quad (1.1.13)$$

con  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$  y

$$f_0(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0. \quad (1.1.14)$$

La siguiente aproximación ha sido desarrollada en Arrieta et al. [13] para el caso de condiciones de contorno de Dirichlet.

Tomando como espacio base  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , se puede construir entonces la escala de espacios de potenciales de Bessel asociada a  $-\Delta$ , que denotamos por  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ ,  $-1 \leq \alpha \leq 1$ . Sobre esta escala de espacios podemos considerar perturbaciones del Laplaciano con potenciales más generales que  $L^p(\Omega)$ , con  $p > N/2$ .

En concreto, sea  $L_V^p(\Omega)$  el espacio de las funciones en  $\Omega$  tales que

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{B(x, 1) \cap \Omega} |V(y)|^p dy < \infty$$

dotado de la norma

$$\|V\|_{L_V^p(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \|V\|_{L^p(B(x, 1) \cap \Omega)}.$$

Si  $V \in L_V^p(\Omega)$  con  $p > N/2$  entonces,  $S(t)$ , el semigrupo generado por  $\Delta - V(x)I$  en  $L^q(\Omega)$  con  $1 < q < \infty$ , es analítico y conserva el orden (ver Simon [47]). Además, el operador  $-\Delta + V$  tiene el mismo dominio que el Laplaciano. Diremos pues que  $V$  es un potencial subordinado del Laplaciano. En este caso,  $S(t)$  verifica (1.1.5) y

$$\|S(t)u_0\|_{H_D^{2\alpha, q}(\Omega)} \leq \frac{M(t)}{t^{\alpha-\beta}} \|u_0\|_{H_D^{2\beta, q}(\Omega)} \quad (1.1.15)$$

para ciertos  $-1 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$  dependiendo de  $p$ , con  $M(t) = M_{\alpha, \beta} e^{\mu t}$  para ciertos  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $M_{\alpha, \beta} \geq 1$ .

Si  $p > N/2$  y  $p \geq q$  entonces  $\Delta - V(x)I$  genera un semigrupo analítico (que conserva el orden) en cada espacio  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ , con  $\alpha \in [0, 1]$ , y verifica (1.1.15) para todo  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$  (ver Lema 2.3 en Arrieta et al. [13]). Si por contra  $p \geq q'$  entonces (1.1.15) se verifica para  $-1 \leq \beta \leq \alpha \leq 0$ .

Por tanto, si  $p > N/2$  y  $p \geq q, q'$ , entonces (1.1.15) se verifica para todo  $-1 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ .

Al igual que en el caso de dominios acotados, dependiendo del espacio en el que planteemos el problema necesitaremos, a veces, imponer ciertas condiciones de crecimiento sobre  $f$ . En concreto, supongamos que  $f$  verifica, (1.1.13) y (1.1.14), donde  $f_0$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente en  $x \in \Omega$  y la siguiente condición de crecimiento

$$|f_0(x, s) - f_0(x, r)| \leq c(1 + |s|^{\rho-1} + |r|^{\rho-1})|s - r| \quad (1.1.16)$$

para todo  $x \in \Omega$ ,  $s, r \in \mathbb{R}$  y  $\rho \geq 1$ .

En este caso, para tener existencia local del problema necesitamos imponer ciertas restricciones sobre  $\rho$  como muestra el siguiente teorema cuya demostración puede verse en Arrieta et al. [13]

**Teorema 1.1.5** *Supongamos que  $m \in L^p_U(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ ,  $p \geq q$ , y  $g \in L^q(\Omega)$ . Entonces, en las siguientes condiciones el problema está localmente bien planteado en  $H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$  para cierto  $0 \leq \alpha \leq 1$*

1. para  $2\alpha - \frac{N}{q} < 0$ , supuesto que se verifica (1.1.16) con

$$1 \leq \rho \leq \rho_C = 1 + \frac{2q}{N - 2\alpha q};$$

2. para  $2\alpha - \frac{N}{q} = 0$ , supuesto que se verifica (1.1.16) con

$$1 \leq \rho < \rho_C = \infty; y$$

3. para  $2\alpha - \frac{N}{q} > 0$  no hace falta imponer restricciones sobre el crecimiento de  $f_0$ .

## 1.2. Existencia global.

En esta sección mostraremos que para los problemas no lineales tratados en la Sección 1.1, supuestas las condiciones de estructura de la no linealidad mencionadas al comienzo de este capítulo, las soluciones de (1.1.1) son globales para  $u_0$  en los distintos espacios de datos iniciales.

Esto nos permitirá definir un semigrupo no lineal

$$S(t) : X \rightarrow X$$

mediante

$$S(t)u_0 = u(t, x; u_0).$$

### 1.2.1. Existencia global en dominios acotados.

Enunciamos a continuación un resultado que proporciona una condición suficiente para la existencia global de solución del problema (1.1.1) en dominios acotados.

**Teorema 1.2.1** *Supongamos que el problema (1.1.1) tiene solución local para un dato inicial  $u_0 \in X$  en alguno de los espacios de la Sección 1.1. Supongamos además, que existen funciones  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $0 \leq D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$  tales que*

$$f(x, s) \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.2.17)$$

*Entonces, la solución del problema (1.1.1) está definida para todo tiempo  $t > 0$  y para todo acotado  $B \subset X$  se tiene que para todo  $0 < \varepsilon \leq T$ ,  $\cup_{t \in [\varepsilon, T]} S(t)B \subset C_B(\overline{\Omega})$  es compacto.*

**Demostración.** Como tenemos la existencia local de solución para  $u$  basta probar que la solución  $u$  está acotada en compactos de  $t$  alejados de  $t = 0$ .

Sea  $v$  la solución del problema

$$\begin{cases} v_t + Av &= C(x)v + D(x) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ v(0) &= u_0 \end{cases}$$

La hipótesis (1.2.17) junto con el hecho de que  $D(x) \geq 0$  implican, por el principio de comparación, que la solución del problema no lineal, que denotamos  $u$ , verifica

$$|u(t, x; u_0)| \leq v(t, x; |u_0|)$$

mientras ambas soluciones existan.



Denotamos por  $S(t)$  el semigrupo generado por el operador  $-A + C(x)$  con condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ . Entonces,  $v$  viene dada por la fórmula de variación de las constantes

$$v(t, x; u_0) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)D(x)ds$$

Tomando norma en  $L^\infty(\Omega)$  tenemos que, usando (1.1.5), para todo  $0 < \varepsilon \leq t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} \|v(t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq M e^{\delta t} t^{-\alpha} \|u_0\|_X \\ &\quad + \int_0^t M e^{\delta(t-s)} (t-s)^{-\frac{N}{2} \frac{1}{r}} \|D\|_{L^r(\Omega)} ds \end{aligned}$$

para cierto  $\alpha$ .

Ahora bien, el término de la derecha en la desigualdad anterior está acotado en intervalos de tiempo compactos alejados de 0 (la integral es convergente por ser  $r > N/2$ ) de donde tenemos la acotación  $L^\infty(\Omega)$  en  $[\varepsilon, T]$ .

Utilizando ahora la fórmula de variación de las constantes, (1.1.6) y el hecho de que  $f(\cdot, u(\cdot))$  esta acotado en  $L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$ , los resultados clásicos de regularidad parabólica implican la compacidad de  $\cup_{t \in [\varepsilon, T]} S(t)B$  en  $C_B(\bar{\Omega})$  ya que de hecho este conjunto está acotado en  $C^\theta(\bar{\Omega})$  para  $0 < \theta \leq 1$ . ■

Observemos que en la demostración anterior si tenemos que  $m \in L^p(\Omega)$ , con  $p > N$ , en (1.1.7) entonces  $\cup_{t \in [\varepsilon, T]} S(t)B$  está acotado en  $C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$ .

**Nota 1.2.2** La propiedad (1.2.17) implica, en particular,

$$|f(x, 0)| \leq D(x).$$

Nótese entonces que pedir  $D(x) \geq 0$  no supone ninguna restricción ya que, en otro caso,  $f$  verifica (1.2.17) con  $D^+$  (la parte positiva de  $D$ ) en lugar de  $D$ .

En el caso de un operador en forma de divergencia y condiciones de contorno no lineales, como en la Sección 1.1.3, se tiene el siguiente resultado sobre existencia global de soluciones análogo al Teorema 1.2.1, que ha sido demostrado en Arrieta et al. [10].

**Teorema 1.2.3** Supongamos que existe solución local del problema (1.1.10) con dato inicial  $u_0 \in X \in \mathcal{E}$ . Supongamos además, que existen funciones  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ ,  $0 \leq D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ ,  $C_\Gamma \in L^\sigma(\Gamma)$ ,  $\sigma > N - 1$  y  $0 \leq D_\Gamma \in L^\rho(\Gamma)$ ,  $\rho > N - 1$  tales que

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}; \quad (1.2.18)$$

$$g(x, s)s \leq C_\Gamma(x)s^2 + D_\Gamma(x)|s| \quad \text{para todo } x \in \Gamma, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.2.19)$$

Entonces, la solución del problema (1.1.10) está definida para todo tiempo  $t > 0$  y para todo acotado  $B \subset X$  se tiene que para todo  $0 < \varepsilon \leq T$ ,  $\cup_{t \in [\varepsilon, T]} S(t)B \subset C_B(\bar{\Omega})$  es compacto.

Observemos que en este teorema la condición  $D \in L^r(\Omega)$  implica las cotas  $L^q(\Omega)$  de la solución mientras que  $D \in L^r(\Omega)$  permite obtener las cotas en  $L^\infty(\Omega)$ .

### 1.2.2. Existencia global en dominios no acotados

Con las notaciones de la Sección 1.1.4, supongamos que existen  $C(x)$  y  $D(x) \geq 0$  definidas en  $\Omega$  tales que

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \quad (1.2.20)$$

Tenemos entonces el siguiente resultado sobre existencia global de soluciones (ver Teorema 4.1 en Arrieta et al. [13])

**Teorema 1.2.4** *Supongamos que existe solución local del problema (1.1.1). Supongamos además, que  $f$  verifica (1.2.20) con*

$$D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega) \quad \text{con} \quad r > N/2, \quad q \geq s \geq \frac{qN}{N+2q}$$

y

$$C \in L^p_U(\Omega) \quad \text{para algún} \quad p > N/2, \quad p \geq r$$

*Entonces, la única solución del problema (1.1.1) con dato inicial  $u_0 \in H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$  es global y permanece acotada en  $L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  en intervalos compactos alejados de 0.*

*Además, dado un conjunto de datos iniciales en  $H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$  la solución permanece a tiempo  $t > 0$  en un acotado de  $H_D^{2\beta,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  para cualquier  $\beta < 1$ .*

### 1.3. Un resultado de compacidad de órbitas

El siguiente lema enuncia una consecuencia del Teorema de Ascoli-Arzelá que será de utilidad en lo que sigue.

**Lema 1.3.1** *i) Sea  $u_0$  un dato inicial tal que la solución de (1.1.1) esté acotada en  $L^\infty(\Omega)$ , es decir, el conjunto  $\gamma(u_0) = \{u(t, x; u_0)\}_{t \geq 1}$  está acotado en  $L^\infty(\Omega)$ . Entonces, para toda sucesión creciente de tiempos  $\{t_n\}$  tendiendo a  $\infty$  existen  $u^* \in C_B(\overline{\Omega})$  y una subsucesión  $\{t_{n_k}\}$  de  $\{t_n\}$  tal que*

$$u(t_{n_k}, x; u_0) \rightarrow u^* \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty$$

*uniformemente en compactos de  $\Omega$ . En particular, si  $\Omega$  es acotado la convergencia es uniforme en todo  $\overline{\Omega}$ .*

*ii) Si, además, la solución que parte de  $u_0$  es monótona en tiempo entonces toda la solución converge a  $u^*$  uniformemente en compactos.*

**Demostración.** i) Como la órbita de  $u_0$  está acotada, la solución que parte de  $u_0$  es global. Debido a la regularización del semigrupo, fijado un compacto  $K \subset \overline{\Omega}$ , la restricción de la órbita definida por la solución que parte de  $u_0$  a dicho compacto es una familia equicontinua de funciones continuas. Estamos entonces en condiciones de poder aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelá y deducir así que se trata de un conjunto relativamente compacto. Por tanto, podemos extraer una subsucesión de tiempos  $\{t_n\}$  tales que  $u(t_n, x; u_0)$  converja en el compacto  $K$  a cierta función  $u^* \in C_B(\overline{\Omega})$ . Nótese que, en particular, si  $\Omega$  es acotado, podemos tomar como compacto  $K = \overline{\Omega}$  y tener así convergencia uniforme en todo el dominio. Para dominios no acotados, basta tomar una sucesión creciente de compactos  $K_n \subset K_{n+1}$  tales que  $\cup K_n = \Omega$ . Por lo anterior obtenemos la convergencia en cada compacto  $K_n$  y mediante un proceso diagonal de Cantor obtenemos la convergencia en compactos de  $\Omega$ .

ii) Si la solución que parte de  $u_0$  es monótona en tiempo, además de acotada, como  $u^*$  es continua tenemos, por el Teorema de Dini, la convergencia en compactos no sólo de  $u(t_n, x; u_0)$  para cierta subsucesión de tiempos  $\{t_n\}$ , sino de toda la solución a  $u^*$ , es decir, existe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x; u_0) = u^*$$

y es uniforme en compactos. ■

Una consecuencia del Lema 1.3.1 es la siguiente propiedad del semigrupo no lineal para problemas en dominios acotados.

**Proposición 1.3.2** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado. Supongamos que todas las soluciones del problema (1.1.1) son acotadas. Entonces, el semigrupo no lineal definido por las soluciones de (1.1.1) es asintóticamente compacto en  $C_B(\overline{\Omega})$ .*

Para problemas con condiciones de contorno no lineales el resultado también es cierto, véase Arrieta et al. [10].

Para el caso de dominios no acotados los resultados de Arrieta et al. [13] muestran que con ciertas condiciones adicionales, el semigrupo no lineal correspondiente es asintóticamente compacto. Para esto es necesario utilizar de manera fundamental que, para tiempos grandes, las soluciones tienden a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$  de manera muy controlada.

## Capítulo 2

# Puntos de equilibrio extremales

### 2.1. Equilibrios extremales en el caso de reacción fuerte: Comparación con una EDO

Antes de presentar el caso más general, vamos a tratar una serie de problemas más sencillos en los que probamos el Teorema 1.0.1 de forma directa. Concretamente, haremos una primera aproximación a los problemas de Neumann y Dirichlet.

Empezamos estudiando el problema (1.0.1) en un dominio acotado donde el término no lineal  $f$  no depende explícitamente de la variable  $x$ . Concretamente supondremos que  $f$  verifica la siguiente condición de signo:

$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que } sf(s) < 0 \text{ para para todo } |s| > M. \quad (2.1.1)$$

La propiedad (2.1.1) se tiene, en particular, si

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} < 0.$$

Esta propiedad de reacción fuerte nos va a permitir comparar las soluciones del problema (1.0.1) con una EDO que va a empujar a éstas por debajo de un punto de equilibrio que será el maximal. De la misma forma obtendremos una solución de una EDO que empuje a las soluciones de (1.0.1) por encima del punto de equilibrio minimal.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado regular y denotamos por  $\Gamma = \partial\Omega$  su frontera. Consideramos el problema siguiente

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \Gamma \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donde o bien,  $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$  (condiciones de contorno tipo Neumann) o bien,  $\mathcal{B}u = u$  (condiciones de contorno tipo Dirichlet),  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y localmente Lipschitz y  $u_0 \in X = C(\bar{\Omega})$ .

Por los Teoremas 1.1.1 y 1.1.2 existe una única solución local del problema (2.1.2).

#### 2.1.1. Condiciones de contorno tipo Neumann

Veamos primero la existencia de los puntos de equilibrio extremales y la estimación del comportamiento asintótico de las soluciones de (2.1.2) con condiciones de contorno tipo Neumann.

En particular tenemos el siguiente resultado que no es más que el Teorema 1.0.1 en este caso:

**Teorema 2.1.1** *Consideramos el problema (2.1.2) con  $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ . Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, localmente Lipschitz y verifica la hipótesis de disipación (2.1.1). Entonces, las soluciones están definidas*

globalmente, son acotadas y existe un punto de equilibrio minimal  $\varphi_m$  y otro maximal  $\varphi_M$  tales que toda la dinámica asintótica del sistema se mueve uniformemente entre dichos equilibrios, es decir,

$$\varphi_m(x) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \varphi_M(x)$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  y para  $u_0$  en acotados de  $X$ . Es más, dichos puntos de equilibrio extremales no dependen de  $x$ , es decir, son constantes en espacio. De hecho, los equilibrios extremales vienen caracterizados por los ceros extremales de  $f$ , es decir,

$$\varphi_m = \min\{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\} \quad y \quad \varphi_M = \max\{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\}.$$

Además, existe un atractor global  $\mathcal{A}$  para  $S(t)$  que, por lo anterior, verifica

$$\varphi_m \leq \mathcal{A} \leq \varphi_M$$

y  $\varphi_m, \varphi_M \in \mathcal{A}$ .

**Nota 2.1.2** En el caso de condiciones de contorno tipo Neumann, la propiedad (2.1.1) es óptima para que el sistema sea disipativo. Nótese que  $E_0 = \{s : f(s) = 0\}$  es un conjunto de puntos de equilibrio. Si  $E_0$  es no acotado entonces el conjunto de puntos de equilibrio del problema (2.1.2) no está acotado. Si, por el contrario,  $f$  verifica la propiedad (2.1.1), es claro que el sistema es disipativo.

**Nota 2.1.3** El teorema no proporciona ninguna información sobre el signo de los equilibrios extremales. Obsérvese que no tiene por qué ser  $\varphi_m \leq 0$  y  $\varphi_M \geq 0$  excepto si  $f(0) = 0$  en cuyo caso las desigualdades son ciertas.

**Demostración.** Sea  $M^+ = \max\{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\}$ . El hecho de que  $f$  sea continua y verifique la propiedad de signo (2.1.1) implica la existencia de al menos un punto donde  $f$  se anula, y, por tanto,  $M^+$  está bien definida. En particular,  $f(M^+) = 0$ . De manera análoga, definimos  $M^- = \min\{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\}$  que de nuevo vuelve a estar bien definida y  $f(M^-) = 0$ .

Sea  $B \subset C(\bar{\Omega})$  acotado. Dado  $u_0 \in B$ , denotamos por  $u(t, x; u_0)$  la solución del problema (2.1.2) a tiempo  $t$  con dato inicial  $u_0$ . Como  $f$  es continua y localmente Lipschitz dicha solución existe al menos localmente.

Sean

$$C^- < \min\{M^-, -\|B\|_{L^\infty(\Omega)}\} < 0 \quad y \quad C^+ > \max\{M^+, \|B\|_{L^\infty(\Omega)}\} > 0$$

donde  $\|B\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{v \in B} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Tomamos como datos iniciales  $C^+, C^- \in L^\infty(\Omega)$  en (2.1.2). El comportamiento de la solución de (2.1.2) que parte de  $C^+$ ,  $u(t, x; C^+)$ , nos va a proporcionar una acotación superior de las soluciones de dicho problema, mientras que el comportamiento de  $u(t, x; C^-)$  nos va a proporcionar una estimación inferior.

Para estudiar el comportamiento de  $u(t, x; C^+)$  consideramos la solución de la siguiente EDO

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(z(t)) & \text{en } (0, +\infty) \\ z(0) = C^+ \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Al estar trabajando con condiciones de contorno tipo Neumann, esta solución coincide con la solución de (2.1.2) con dato inicial  $C^+$ , es decir,  $u(t, x; C^+) = z(t)$ . De manera análoga, se obtiene que  $u(t, x; C^-)$  es la solución de (2.1.3) que parte de  $C^-$ , que denotamos por  $w(t)$ .

Como  $C^+ > M^+$ , tenemos que  $f(z(t)) < 0$  para todo  $t$  y por tanto  $z(t)$  es estrictamente decreciente y converge a  $M^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En particular,  $z(t) < C^+$  para todo  $t > 0$ . Además, como  $C^- < M^-$  tenemos que  $f(w(t)) > 0$  para todo  $t$  y entonces  $w(t)$  es estrictamente creciente y converge a  $M^-$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En particular,  $w(t) > C^-$ .

Ahora bien, como  $C^- \leq u(0, x; u_0) = u_0 \leq C^+$  para todo  $u_0 \in B$ , por el principio de comparación, se tiene

$$w(t) = u(t, x; C^-) \leq u(t, x; u_0) \leq u(t, x; C^+) = z(t) \quad (2.1.4)$$

para todo  $t \geq 0$  y  $x \in \Omega$ . Luego  $u(t, x; u_0)$  existe para todo  $t \geq 0$  y

$$\begin{aligned} M^- &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; C^+) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; C^+) = M^+. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Veamos ahora que esta estimación del comportamiento asintótico de las soluciones nos lleva a que  $M^+$  es un punto de equilibrio maximal. En efecto, es claro que  $M^+$  es un punto de equilibrio:  $f(M^+) = 0$  y  $M^+$  es independiente del tiempo. Para ver que es maximal sea  $\psi$  otro punto de equilibrio. Entonces sabemos que, por la regularización del semigrupo,  $\psi \in C(\bar{\Omega})$  (y por tanto es acotada). Por (2.1.5), debe ser

$$\psi \leq M^+.$$

Luego,  $M^+$  es maximal. De manera análoga se obtiene que  $M^-$  es un punto de equilibrio minimal.

Por último, la existencia del atractor se tiene por la regularidad del semigrupo, el hecho de que existe un conjunto absorbente (por ejemplo, el intervalo de orden  $[M^- - \delta, M^+ + \delta]$  para  $\delta > 0$ ) y las soluciones están globalmente acotadas (ver Sección A.2). La propiedad (2.1.5) implica  $\mathcal{A} \subset [M^-, M^+]$ . Por último, al ser puntos de equilibrio,  $M^-, M^+ \in \mathcal{A}$ . ■

**Nota 2.1.4** *En este caso sencillo, el equilibrio maximal viene dado por  $\varphi_M = M^+$  y se obtiene directamente de la ecuación diferencial ordinaria (2.1.3). Esto es debido a que el segundo miembro de (2.1.2) no depende de la variable espacial  $x \in \Omega$  y las soluciones constantes pertenecen al espacio de datos iniciales y verifican la condición de contorno. De hecho, como hemos visto antes  $\varphi_M = M^+$  viene dada directamente por el término no lineal  $f$  (ver la definición de  $M^+$  en la prueba anterior). La misma observación se aplica a  $\varphi_m = M^-$ .*

### 2.1.2. Condiciones de contorno tipo Dirichlet

Como una primera aproximación al problema de Dirichlet nos planteamos el estudio del problema (2.1.2) con  $\mathcal{B}(u) \equiv u$  y la condición de disipación (2.1.1). Esto nos permite usar un argumento similar al del caso de condiciones de contorno tipo Neumann para probar la existencia de un punto de equilibrio maximal: en primer lugar la solución de la ecuación diferencial ordinaria (2.1.3) nos va a proporcionar una supersolución de la EDP para tiempos pequeños; después, usando esta supersolución y la propiedad de monotonía, vamos a poder probar que las soluciones de la EDP entran por debajo de un punto de equilibrio maximal. De manera análoga, obtenemos la existencia de un punto de equilibrio minimal.

La principal diferencia con el caso de Neumann es que ahora las soluciones de la EDO (2.1.3) no son soluciones del problema (2.1.2) ya que no verifican las condiciones de contorno. Dicho de otra forma, para el problema de Dirichlet, las soluciones de la EDO no son soluciones de la EDP. Esto va a hacer que el Teorema 1.0.1 para el caso Dirichlet no se obtenga de manera tan directa como en el caso Neumann. Además, en este caso, los puntos de equilibrio extremales van a depender de la variable espacial  $x$  (salvo que  $f(0) = 0$  y 0 sea el único punto de equilibrio).

**Teorema 2.1.5** *Consideramos el problema (2.1.2) con  $\mathcal{B}u = u$ . Supongamos que  $f$  es continua y localmente Lipschitz y verifica la hipótesis de disipación (2.1.1). Entonces, las conclusiones del Teorema 1.0.1 son ciertas en este caso.*

**Demostración.** Definimos, como antes,  $M^+ = \max\{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\}$  y  $M^- = \min\{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\}$ . Sea  $B$  un acotado de  $C(\bar{\Omega})$ . Sean

$$C^+ > \max\{M^+, \|B\|_{L^\infty(\Omega)}\} > 0 \quad \text{y} \quad C^- < \min\{M^-, -\|B\|_{L^\infty(\Omega)}\} < 0.$$

Como en el caso de condiciones de contorno tipo Neumann, planteamos el problema para la EDO (2.1.3) y tenemos que  $z(t)$  es estrictamente decreciente y converge a  $M^+$  cuando  $t$  tiende a infinito y  $z(t) < C^+$  para todo  $t > 0$ . De la misma forma, si  $w(t)$  es la solución para la EDO (2.1.3) con dato inicial  $C^-$  tenemos que  $w(t)$  es estrictamente creciente y converge a  $M^-$  estrictamente cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $w(t) > C^-$  para todo  $t > 0$ .

Podemos tomar ahora como dato inicial en (2.1.2) la constante anterior  $C^+ \in L^\infty(\Omega)$ . Al ser  $f$  continua y localmente Lipschitz, existe una solución local del problema,  $u(t, x; C^+)$  (ver Sección 1.1.1).

Además,  $z(t)$  es una supersolución de (2.1.2) con dato inicial  $C^+$  ya que  $z(t)$  verifica la EDP en (2.1.2),  $u_0 \leq C^+ = z(0)$  y para todo  $t > 0$ ,

$$0 = u(t, x; C^+) \leq z(t) \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

puesto que el semigrupo definido por las soluciones de (2.1.2),  $S(t)$ , incorpora instantáneamente la condición de contorno a la solución (ver Sección 1.1.1). Por tanto, para todo  $t > 0$ ,

$$u(t, x; C^+) \leq z(t).$$

Ahora bien, por (2.1.1),

$$z(t) \leq C^+$$

para todo  $t > 0$ . Luego, uniendo las desigualdades anteriores, tenemos

$$u(t, x; C^+) \leq C^+$$

para todo  $t > 0$ . Tomando ahora en esta desigualdad  $t = \varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y haciendo actuar el semigrupo tenemos que, por el principio de comparación,

$$u(s + \varepsilon, x; C^+) \leq u(s, x; C^+) \quad (2.1.6)$$

para todo  $s > 0$  y  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, de donde tenemos que  $u(t, x; C^+)$  es monótona decreciente en tiempo.

Además, también por el principio de comparación, como  $u_0 \leq C^+$ ,

$$u(t, x; u_0) \leq u(t, x; C^+) \quad (2.1.7)$$

para todo  $t > 0$ . Luego, como  $u(t, x; C^+)$  está acotada superiormente, también lo está  $u(t, x; u_0)$ .

Argumentando de manera análoga pero en este caso con  $C^-$  en vez de  $C^+$  (ver la prueba del Teorema 2.1.1) se tiene que

$$C^- \leq u(t, x; C^-) \leq u(t, x; u_0) \leq u(t, x; C^+) \leq C^+ \quad (2.1.8)$$

para todo  $t \geq 0$  y  $x \in \Omega$ . En particular,  $u(t, x; u_0)$  está acotada para todo  $t \geq 0$  y, por tanto, las soluciones son globales. Además,  $u(t, x; C^-)$  es monótona creciente en tiempo y, como hemos visto,  $u(t, x; C^+)$  es monótona decreciente.

Ahora bien, por ser  $u(t, x; C^+)$  es monótona y acotada, converge puntualmente a cierta función  $\varphi_M(x) \in L^\infty(\Omega)$ . De la misma forma,  $u(t, x; C^-) \in L^\infty(\Omega)$  converge puntualmente a cierta función  $\varphi_m(x)$ . Además, estas funciones límite son continuas por el efecto regularizante del semigrupo que garantiza que dado  $u_0 \in X$  se tiene  $S(t)u_0 \in C_0^1(\bar{\Omega})$  para todo  $t > 0$  (ver Sección 1.1.1). Por el Teorema de Dini (ver Lema 1.3.1),

$$u(t, x; C^-) \rightarrow \varphi_m(x), \quad u(t, x; C^+) \rightarrow \varphi_M(x) \quad (2.1.9)$$

uniformemente en  $x$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, (2.1.8) implica que

$$\varphi_m(x) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \leq \varphi_M(x) \quad (2.1.10)$$

donde los límites son uniformes en  $x$  y para  $u_0$  en acotados de  $X$  por la convergencia uniforme (2.1.9). Además, por la continuidad del semigrupo,  $\varphi_M$  es un punto de equilibrio puesto que

$$\varphi_M = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t; C^+)$$

y haciendo evolucionar el sistema,

$$u(s; \varphi_M) = u(s; \lim_{t \rightarrow \infty} u(t; C^+)) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(s + t; C^+) = \varphi_M.$$

De la misma forma,  $\varphi_m$  es también un punto de equilibrio.

Para ver que  $\varphi_m$  es minimal y  $\varphi_M$  maximal, sea  $\psi$  otro punto de equilibrio. Entonces sabemos que, por la regularización del semigrupo,  $\psi \in C(\bar{\Omega})$ . Por (2.1.10), debe ser

$$\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_M$$

luego,  $\varphi_m$  minimal y  $\varphi_M$  es maximal.

Por último, la existencia del atractor se tiene por la regularidad del semigrupo, el hecho de que existe un conjunto absorbente (por ejemplo, el intervalo de orden  $[\varphi_m - \delta, \varphi_M + \delta]$  para  $\delta > 0$ ), las soluciones están globalmente acotadas y el semigrupo es asintóticamente compacto (ver Proposición 1.3.2). La propiedad (2.1.10) implica  $\mathcal{A} \subset [\varphi_m, \varphi_M]$ . Por ser puntos de equilibrio,  $\varphi_m, \varphi_M \in \mathcal{A}$ . ■

**Nota 2.1.6** *De la prueba anterior se tiene*

$$M^- \leq \varphi_m \leq \varphi_M \leq M^+.$$

Observemos que la condición (2.1.1) no es óptima para que el problema (2.1.2) con  $\mathcal{B}(u) \equiv u$  sea disipativo. En Henry [28] puede verse que la condición óptima es

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1,$$

donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  con condiciones de contorno tipo Dirichlet. Esta propiedad es equivalente a que  $f$  verifique la siguiente condición

$$sf(s) \leq Cs^2 + D|s| \tag{2.1.11}$$

con  $C < \lambda_1$  y  $D \geq 0$ , que garantiza la existencia global de solución del problema (2.1.2) con  $\mathcal{B}(u) \equiv u$  (ver Sección 1.2).

En estas condiciones no podemos usar los argumentos de comparación con la ecuación ordinaria ya que no podemos deducir el decaimiento de la solución de la ecuación (2.1.3). No obstante, gracias a la propiedad anterior vamos a tener el decaimiento exponencial del semigrupo asociado a  $\Delta + C$  y esto nos va a permitir probar el resultado.

Nótese que si  $f$  verifica (2.1.1) la reacción es lo suficientemente fuerte como para provocar por sí sola la existencia de los equilibrios extremales. Nótese también que esta condición equivale a tomar  $D \geq 0$  y  $C < 0$  en (2.1.11).

En el caso en que  $C \geq 0$ , no se tiene (2.1.1) y por tanto la ecuación diferencial ordinaria (2.1.3) no permite concluir la existencia de los equilibrios extremales. Sin embargo, es posible obtener la existencia de equilibrios maximales en este caso con ayuda de la difusión.

Usando los argumentos generales de la siguiente sección obtenemos de manera inmediata el Teorema 1.0.1 para el problema (2.1.2) supuesta la condición de disipación óptima (2.1.11) (ver Teorema 2.2.6 y Corolario 2.2.9).

## 2.2. Equilibrios extremales en el caso general. Dominios acotados

En esta sección estudiaremos el problema (1.0.1) en un caso más general que (2.1.2). En particular, el término de reacción podrá depender de la variable espacial, es decir, supondremos  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

En primer lugar estudiaremos el caso de un dominio acotado con condiciones de contorno lineales homogéneas. Para ello obtendremos en primer lugar una estimación uniforme de las soluciones en función de la única solución de un problema elíptico lineal. Esto nos va a permitir asegurar la existencia de un conjunto acotado absorbente (y, por tanto, el sistema va a ser disipativo). A continuación aplicando un teorema general (Teorema 2.2.2 más adelante) obtendremos la existencia de puntos de equilibrio maximales.

Pasaremos después a aplicar estas técnicas al caso de condiciones de contorno no lineales.



### 2.2.1. Un argumento general basado en monotonía y compacidad.

A continuación probaremos un teorema general en el que se dan condiciones suficientes para la existencia de puntos de equilibrio extremales proporcionando, además, cierta información sobre la dinámica del sistema. Para ello, probaremos en primer lugar un lema que será de utilidad a la hora de probar dicho teorema.

**Lema 2.2.1** *Sea  $S(t) : X \rightarrow X$  un semigrupo continuo para todo  $t > 0$  y  $u_0, v \in X$  tales que  $S(t)u_0 \rightarrow v$  en  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces  $v$  es un punto de equilibrio de  $S(t)$ .*

**Demostración.** Tenemos

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)u_0$$

Haciendo evolucionar el sistema, por la continuidad de  $S(t)$  para  $t > 0$ ,

$$S(s)v = S(s) \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)u_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} S(s+t)u_0 = v.$$

Es decir,  $S(s)v = v$  para todo  $s > 0$ . Luego  $v$  es un punto de equilibrio del sistema. ■

Estamos ya en condiciones de probar el resultado principal.

**Teorema 2.2.2** *Sea  $S(t)$  un semigrupo continuo para  $t > 0$  que conserva el orden en un espacio métrico completo ordenado,  $X$ , para el que los intervalos de orden de  $X$  son acotados en la norma de  $X$ . Supongamos además que*

1. *o bien, las sucesiones decrecientes (resp. crecientes) en  $X$  y acotadas inferiormente (resp. superiormente) en el sentido del orden, son convergentes;*
2. *o bien, el semigrupo  $S(t)$  es asintóticamente compacto.*

*Supongamos además, que existe un intervalo de orden absorbente, es decir, existen  $\eta_m, \eta_M \in X$  ordenados tales que para todo  $B \subset X$  acotado existe  $0 < T = T(B)$  tal que para todo  $u_0 \in B$*

$$\eta_m \leq S(t)u_0 \leq \eta_M$$

*para todo  $t \geq T(B)$ .*

*Entonces, existen dos puntos de equilibrio extremales ordenados  $\varphi_m \leq \varphi_M$  tales que cualquier otro punto de equilibrio  $\psi$  verifica  $\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_M$ . Además, el conjunto  $\{v \in X : \varphi_m \leq v \leq \varphi_M\}$  atrae uniformemente la dinámica del sistema, es decir,*

$$\varphi_m \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} S(t)u_0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} S(t)u_0 \leq \varphi_M \quad (2.2.1)$$

*uniformemente en acotados de  $X$ .*

*Si, además,  $S(t)$  es asintóticamente compacto entonces existe un atractor global  $\mathcal{A}$  de  $S(t)$  que, por lo anterior, verifica*

$$\varphi_m \leq \mathcal{A} \leq \varphi_M.$$

*Además,  $\varphi_m, \varphi_M \in \mathcal{A}$ .*

**Nota 2.2.3** *Pedir que los intervalos de orden sean acotados es equivalente a pedir que el cono positivo sea normal (ver Teorema 1.5 de Amann [1], pag. 627). Recordamos que se dice que el cono positivo es normal si existe una constante  $\delta > 0$  tal que si  $0 \leq x \leq y$  entonces  $\|x\| \leq \delta\|y\|$  para todo  $x, y \geq 0$  (es decir, la norma es semimonótona).*

*Los espacios  $X = L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  tiene cono positivo normal (con  $\delta = 1$ ) y verifica la condición i) del Teorema ya que cualquier sucesión decreciente (resp. creciente) acotada inferiormente (superiormente) es convergente en la norma de  $X$ .*

*El espacio de funciones continuas  $C(\overline{\Omega})$  también tiene cono positivo normal. Sin embargo, no toda sucesión decreciente acotada inferiormente es convergente (considérese, por ejemplo,  $f_n(x) = x^n$  en  $[0, 1]$ ). En este caso, hace falta la compacidad asintótica del semigrupo para poder aplicar el resultado.*

**Demostración.** Sea  $I = [\eta_m, \eta_M]$ . Como  $I$  es absorbente, existe un tiempo  $T \geq 0$  tal que

$$\eta_m \leq S(t+T)\eta_M \leq \eta_M \quad (2.2.2)$$

para todo  $t \geq 0$ . En particular  $S(t)\eta_M$  está acotada inferiormente para todo tiempo a partir de  $T$ . Como el semigrupo conserva el orden, de (2.2.2) obtenemos

$$\eta_m \leq S(2T)\eta_M \leq S(T)\eta_M \leq \eta_M$$

y, repitiendo el proceso tenemos

$$\eta_m \leq S(nT)\eta_M \leq S((n-1)T)\eta_M \leq \dots \leq S(T)\eta_M \leq \eta_M \quad (2.2.3)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $\{S(nT)\eta_M\}_n$  es una sucesión monótona decreciente y está acotada inferiormente (por  $\eta_m$ ). Luego, como tanto si el espacio  $X$  verifica la propiedad 1 del teorema como si el semigrupo es asintóticamente compacto (es decir,  $S$  verifica la propiedad 2, para una subsucesión creciente  $\{n_k\}$  tendiendo a  $\infty$  se tiene,  $S(n_k T)\eta_M \rightarrow \varphi_M$ ).

Veamos ahora que, como la sucesión  $\{S(nT)\eta_M\}_n$  es monótona el límite es único y por tanto, toda la sucesión converge a  $\varphi_M$ . En efecto, supongamos que existe otra subsucesión,  $\{\tilde{n}_k\} \uparrow \infty$  tal que  $S(\tilde{n}_k T)\eta_M \rightarrow \psi$ . Podemos suponer, sin falta de generalidad  $\tilde{n}_k \leq n_k \leq \tilde{n}_{k+1}$ . Por (2.2.3) tenemos

$$S(\tilde{n}_k T)\eta_M \leq S(n_k T)\eta_M \leq S(\tilde{n}_{k+1} T)\eta_M.$$

Tomando ahora límite en  $k$  tenemos  $\psi \leq \varphi_M \leq \psi$ . Luego  $\psi = \varphi_M$ . Hemos probado, pues, que  $S(nT)\eta_M$  converge a un único elemento  $\varphi_M \in X$ .

Probamos ahora que, en realidad, es toda la solución  $S(t)\eta_M$  la que converge a  $\varphi_M$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y no sólo la sucesión  $\{S(nT)\eta_M\}_n$ . En efecto, de (2.2.2) tenemos, en particular,

$$S(T+t)\eta_M \leq \eta_M \quad (2.2.4)$$

para todo  $0 \leq t < T$ . Sea  $\{t_n\}$  una sucesión de tiempos tendiendo a infinito,  $t_n = k_n T + \tau_n$  con  $k_n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq \tau_n < T$ . Podemos suponer que  $\{k_n\}$  es una sucesión estrictamente creciente. Entonces, por una parte, tomando  $t = \tau_n$  en (2.2.4) tenemos

$$S(T + \tau_n)\eta_M \leq \eta_M$$

y haciendo actuar el semigrupo a tiempo  $(k_n - 1)T$ , por la propiedad de monotonía,

$$S(t_n)\eta_M \leq S((k_n - 1)T)\eta_M. \quad (2.2.5)$$

Por otra parte tenemos que dado  $0 \leq s < T$ , tomando  $t = T - s$  en (2.2.4) y haciendo actuar el semigrupo a tiempo  $s$ ,

$$S(2T)\eta_M \leq S(s)\eta_M \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq T.$$

Luego, haciendo actuar el semigrupo a tiempo  $k_n T$  y tomando  $s = \tau_n$ , se tiene, por la propiedad de monotonía,

$$S((k_n + 2)T)\eta_M \leq S(t_n)\eta_M \quad (2.2.6)$$

Uniando ahora las desigualdades (2.2.5) y (2.2.6) tenemos

$$S((k_n + 2)T)\eta_M \leq S(t_n)\eta_M \leq S((k_n - 1)T)\eta_M$$

y tomando límite cuando  $n$  tiende a infinito, tenemos

$$\varphi_M \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)\eta_M \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)\eta_M \leq \varphi_M.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)\eta_M = \varphi_M.$$

Como lo anterior es válido para cualquier sucesión de tiempos  $\{t_n\}$  tenemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)\eta_M = \varphi_M.$$

Además, como dado un conjunto de datos iniciales acotado en  $X$ , todas las soluciones que parten de dicho acotado entran en *tiempo finito* por debajo de  $\eta_M$  y la solución que parte de  $\eta_M$  converge a  $\varphi_M$  se tiene la propiedad (2.2.1) uniformemente en acotados de  $X$ .

Por el Lema 2.2.1 se tiene que  $\varphi_M$  es un punto de equilibrio.

Por último, sea  $\psi$  otro punto de equilibrio. Por (2.2.1), con  $u_0 = \psi$  tenemos  $\psi \leq \varphi_M$  y, por tanto,  $\varphi_M$  es maximal en el conjunto de puntos de equilibrio, es decir, para todo punto de equilibrio del sistema,  $\psi$ , se tiene  $\psi \leq \varphi_M$ . Los resultados para  $\varphi_m$  se obtienen de manera análoga.

En el caso en que el semigrupo  $S(t)$  sea asintóticamente compacto, la existencia del atractor se tiene por el Teorema A.2.9: el semigrupo es asintóticamente compacto, existe un conjunto absorbente acotado (por ejemplo, el intervalo de orden  $[\eta_m, \eta_M]$ ) y las soluciones están globalmente acotadas. La propiedad (2.2.1) implica  $\mathcal{A} \subset [\varphi_m, \varphi_M]$ . Por ser puntos de equilibrio,  $\varphi_m, \varphi_M \in \mathcal{A}$ . De esta forma, queda probado el teorema. ■

**Nota 2.2.4** Si en el teorema anterior, en vez de suponer que existe un conjunto ordenado absorbente para acotados  $([\eta_m, \eta_M])$ , suponemos que dicho conjunto es únicamente puntualmente absorbente se tiene que el resultado es cierto salvo la uniformidad en acotados de  $X$ .

**Nota 2.2.5** Una vez establecido este teorema general es posible aplicar los resultados de Smith [48] y obtener, bajo ciertas condiciones, la convergencia genérica de toda solución que parte de un dato inicial en el intervalo absorbente  $[\eta_m, \eta_M]$  a un único punto de equilibrio.

## 2.2.2. Condiciones de contorno lineales homogéneas

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ . Consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2.7)$$

con  $f$  verificando (1.1.7) y (1.1.8) con  $f_0$  continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en  $u$ . Por  $\mathcal{B}$  denotamos el operador de condiciones de contorno, puede ser de tipo Neumann, Dirichlet o Robin. Tomamos como espacio base  $X = C(\overline{\Omega})$  en el que sabemos entonces que existe solución local del problema (ver Sección 1.1). Nótese que este caso incluye, como caso particular, al tratado en la Sección 2.1.2.

Comenzamos con el siguiente resultado que nos proporciona una estimación uniforme sobre el comportamiento asintótico de las soluciones del problema (2.2.7) en función de la solución de un problema elíptico lineal asociado con el término no lineal. Observemos que las hipótesis son algo más fuerte que las enunciadas en el Teorema 1.2.1 para la existencia global.

Observemos también que el siguiente teorema está enunciado para el caso del operador Laplaciano, pero es claro por la demostración que el resultado sigue siendo válido para los operadores generales de la Sección 1.1.

**Teorema 2.2.6** Supongamos que  $f$  verifica (1.1.7) y (1.1.8) con  $f_0$  continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en  $u$ . Supongamos además que  $f$  está mayorada por una función lineal, es decir, existen  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , y  $0 < D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ , tales que

$$sf(x, s) \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad (2.2.8)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$  y  $x \in \Omega$ .

Supongamos, además, que el semigrupo  $S(t)$  generado por  $\Delta + C(x)$  (con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ ) en  $C(\overline{\Omega})$  decae exponencialmente.

Entonces, existe una única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi = C(x)\phi + D(x) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}\phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Además, dicha solución es positiva, está en  $C_B(\overline{\Omega})$  y las soluciones del problema no lineal (2.2.7) verifican

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x) \quad (2.2.10)$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  y para  $u_0$  en acotados de  $X = C_B(\overline{\Omega})$ .

**Demostración.** En primer lugar, la hipótesis  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , junto con el decaimiento exponencial del semigrupo asociado al operador  $\Delta + C(x)$  implican la existencia de solución del problema (2.2.9) mientras que la hipótesis  $D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ , implica, por regularidad elíptica (ver por ejemplo Gilbarg y Trudinger [25] o Ladyzhenskaya y Ural'tseva [31]), que la solución del problema (2.2.9) está en  $C_B(\overline{\Omega})$ . Además,  $\phi$  es positiva por ser  $D(x) \geq 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$ .

Consideramos un conjunto acotado de datos iniciales,  $B \subset X$ . Sea  $u_0 \in B$  y  $v(t, x; |u_0|)$  la solución del problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = C(x)v + D(x) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ v(0) = |u_0| \end{cases} \quad (2.2.11)$$

entonces,  $w = v - \phi$  verifica la problema homogéneo

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = Cw & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ w(0) = |u_0| - \phi \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Como  $S(t)$ , el semigrupo asociado al operador  $\Delta + C(x)$ , decae en  $L^\infty(\Omega)$ , se tiene que  $w(t, x; |u_0| - \phi) \rightarrow 0$  uniformemente en  $x$  y en acotados de  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , o lo que es lo mismo,  $v(t, x; |u_0|) \rightarrow \phi(x)$  uniformemente en  $x$  y en acotados de  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además,  $v(t, x; |u_0|)$  es una supersolución del problema para  $u$  con dato inicial  $u_0$ . Considerando el problema

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = C(x)z - D(x) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ z(0) = -|u_0| + \phi \end{cases}$$

y argumentando como antes, tenemos que  $z(t, x; -|u_0|) \rightarrow -\phi(x)$  uniformemente en  $x$  y para  $u_0$  en acotados de  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además,  $z(t, x; -|u_0|)$  es una subsolución del problema para  $u$  con dato inicial  $u_0$ .

Ahora bien, sabemos que  $z(t, x; -|u_0|) \leq u(t, x; u_0) \leq v(t, x; |u_0|)$  para todo  $t \geq 0$ . De donde, haciendo tender  $t$  a infinito, se tiene la propiedad (2.2.10). ■

**Nota 2.2.7** El decaimiento exponencial del semigrupo es equivalente a que el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -\Delta u - C(x)u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2.13)$$

sea positivo.

**Nota 2.2.8** La propiedad (2.2.10) proporciona, en particular, una acotación  $L^\infty(\Omega)$  de la solución para tiempos grandes. Concretamente, dados  $B$  un acotado de  $C(\overline{\Omega})$  y cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un tiempo  $T = T(B) > 0$  tal que para todo  $t \geq T$ ,

$$-\phi(x) - \varepsilon \leq u(t, x; u_0) \leq \phi(x) + \varepsilon$$

para todo  $x \in \Omega$  y  $u_0 \in B$ . Tenemos pues, la existencia de un conjunto absorbente del sistema para la norma del supremo.

Como consecuencia de los Teoremas 2.2.6 y 2.2.2 se tiene

**Corolario 2.2.9** *En las hipótesis del Teorema 2.2.6, el problema (2.2.7) tiene dos equilibrios extremales y se verifica el Teorema 1.0.1.*

**Demostración.** Basta observar que gracias al Teorema 2.2.6, si tomamos  $[\eta_m, \eta_M] = [-\phi - \delta, \phi + \delta]$  se verifican las hipótesis del Teorema 2.2.2. ■

Otra consecuencia inmediata del Teorema 2.2.2 es la siguiente.

**Corolario 2.2.10** *Supongamos que existe un conjunto acotado absorbente en  $L^\infty(\Omega)$  para el problema (2.2.7). Entonces, existen dos equilibrios extremales del sistema y se verifica el Teorema 1.0.1.*

**Demostración.** Sea  $R > 0$  tal que el conjunto absorbente está contenido en la bola de centro el origen y radio  $R$ . Basta tomar  $\eta_m = -R$ ,  $\eta_M = R$  y aplicar el teorema anterior con  $X = C(\bar{\Omega})$  o  $X = L^\infty(\Omega)$  para obtener el resultado. ■

### 2.2.3. Condiciones de contorno no homogéneas y no lineales.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado regular y denotamos por  $\Gamma = \partial\Omega$  su frontera. Supongamos, con las notaciones de la Sección 1.1.3, que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  es una partición regular de la frontera, es decir,  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ . Nos planteamos de nuevo, dar condiciones sobre el término  $f$  para tener la existencia de dos puntos de equilibrio extremales que acoten el atractor del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(x, u) & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

donde  $a, c \in C^1(\Omega)$ ,  $b \in C^1(\bar{\Gamma}_1)$  tales que  $a(x) \geq m > 0$  para  $x \in \Omega$  y  $f(x, u), g(x, u)$  son continuas en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en  $u$ , uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $x \in \Gamma$  respectivamente. Supongamos además que  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones de crecimiento de la Sección 1.1.3. Consideramos el espacio de datos iniciales  $X = L^q(\Omega)$  o  $X = W^{1,q}(\Omega)$ .

Supongamos, como en la Sección 1.1.3, que se verifica la siguiente condición de estructura sobre los términos no lineales, análoga a la propiedad (2.2.8) para el caso de condiciones de contorno lineales.

(S) : Existen funciones  $C_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ ,  $C_1 \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ ,  $B_0 \in L^\sigma(\Omega)$ ,  $\sigma > N - 1$ ,  $B_1 \in L^\rho(\Gamma_1)$ ,  $\rho > N - 1$  tales que

$$\begin{aligned} uf(x, u) &\leq -C_0(x)u^2 + C_1(x)|u| \\ ug(x, u) &\leq -B_0(x)u^2 + B_1(x)|u| \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

para  $u \in \mathbb{R}$  y  $x \in \bar{\Omega}$  o  $x \in \Gamma_1$  respectivamente.

Supongamos además que se verifica la siguiente condición de disipación.

(D) : El primer autovalor,  $\lambda_1$ , del siguiente problema es positivo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + (c(x) + C_0(x))u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + (b(x) + B_0(x))u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.2.16)$$

**Nota 2.2.11** *La propiedad (D) no es más que el decaimiento exponencial del semigrupo lineal. Nótese que en este caso, al pedir que el semigrupo lineal decaiga exponencialmente, estamos imponiendo condiciones no sólo sobre  $C_0$  sino también sobre  $B_0$ .*

Se tiene entonces el siguiente resultado, análogo al Teorema 2.2.6 para condiciones de contorno lineales (ver Proposición 2.5 de Arrieta et al. [10]).

**Teorema 2.2.12** *Supongamos que se verifican las condiciones (S) y (D). Denotamos por  $\phi$  la solución del problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla\phi) + (c(x) + C_0(x))\phi = C_1(x) & \text{en } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial\phi}{\partial n} + (b(x) + B_0(x))\phi = B_1(x) & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Entonces,  $0 \leq \phi \in L^\infty(\Omega)$  y

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x) \quad \text{uniformemente en } x \in \overline{\Omega} \quad (2.2.18)$$

donde el límite anterior es uniforme para datos iniciales en acotados de  $X$ .

Un caso particular es cuando  $g(x, u) \equiv g(x)$ , es decir, tenemos condiciones de Robin no homogéneas. Entonces, basta tomar por ejemplo  $B_0(x) \equiv 0$  y  $B_1(x) = |g(x)|$ . Nótese que, en cualquier caso, por (2.2.15) debe ser  $|g(x)| \leq B_1(x)$ .

Como consecuencia, tenemos el siguiente corolario que no es más que el Teorema 2.2.12 para problemas donde el operador está en forma de divergencia y se consideran condiciones de contorno tipo Robin o Neumann no homogéneas.

**Corolario 2.2.13** *Consideramos el problema*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(x) & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2.19)$$

con  $a, b, c, f$  como antes y  $g(x) \in C(\Gamma)$ .

Entonces los resultados del Teorema 2.2.12 siguen siendo válidos.

Una vez tenemos la estimación (2.2.18), como  $\phi \in C(\overline{\Omega})$  podemos truncar  $f$  y  $g$  y suponer en (2.2.14) que  $f$  y  $g$  son globalmente Lipschitz y que tomamos datos iniciales en  $X = L^q(\Omega)$  y (2.2.18) sigue siendo cierto. De esta manera, podemos suponer, incluso si  $\Gamma_0 \neq \emptyset$ , que  $\phi + \delta \in X$  y el intervalo  $[-\phi - \delta, \phi + \delta] \cap X$  es absorbente. Gracias a las propiedades de regularización del semigrupo las órbitas de acotados son relativamente compactas en  $X$  (ver Teorema 1.1.4). Podemos entonces aplicar el Teorema 2.2.2 y obtener así que las conclusiones del Teorema 1.0.1 son ciertas.

Tenemos por tanto

**Teorema 2.2.14** *Supongamos que se verifican (S) y (D). Entonces, los resultados del Teorema 1.0.1 son ciertos para el problema (2.2.14).*

De nuevo, como caso particular tenemos el resultado para condiciones de contorno Robin o Neumann no homogéneas y sin restricción de signo sobre  $b$ .

**Corolario 2.2.15** *Los resultados del Teorema 1.0.1 son válidos para el problema (2.2.19).*

## 2.3. Equilibrios extremales que cambian de signo

En esta sección mostraremos que es posible encontrar situaciones en las que los equilibrios extremales de (2.2.7) cambian de signo. En concreto, consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u(0) = u_0 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con  $f$  verificando (1.1.13) y (1.1.14). De nuevo observemos que aunque los argumentos abajo están hechos para el Laplaciano con condiciones de Dirichlet, los mismos siguen siendo válidos para los operadores y condiciones de contorno más generales de la Sección 1.1.

Supongamos que  $f$  verifica

$$sf(x, s) \leq C(x)s^2 + D(x)|s|$$

con  $C(x), D(x) \in L^r(\Omega)$  con  $r > N/2$  y que el semigrupo generado por  $\Delta + C$  decae exponencialmente. Entonces, sabemos por el Teorema 2.2.6 y el Corolario 2.2.9 que existen un punto de equilibrio maximal  $\varphi_M$  y otro minimal  $\varphi_m$  del problema.

Si  $f(x, 0) \geq 0$  entonces el punto de equilibrio maximal es positivo ya que 0 es una subsolución del problema. Por tanto, la solución que parte de 0 es creciente (ver Lema B.4.5). Luego,  $\varphi_M \geq 0$  por ser maximal. De manera análoga se tiene que si  $f(x, 0) \leq 0$  entonces  $\varphi_m \leq 0$ .

Por tanto, para que los puntos de equilibrio maximal y minimal cambien de signo,  $f(x, 0)$  debe cambiar de signo en  $\Omega$ .

Supongamos que  $f(x, 0) = 0$  y que  $\varphi_M$  es un punto de equilibrio positivo. Con una simple traslación de las soluciones del problema anterior podemos construir un problema cuyo punto de equilibrio maximal cambie de signo. En efecto, sea  $h(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\varphi_M + h$  cambia de signo. Descomponemos ahora  $u$  de la forma  $u = v + h(x)$ . Por la ecuación que verifica  $u$  tenemos

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= \bar{f}(x, v) + \Delta h(x) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

donde hemos denotado  $\bar{f}(x, v) = f(x, v + h(x))$ .

Además, los puntos de equilibrio de este nuevo problema son de la forma  $\varphi - h(x)$  con  $\varphi$  un punto de equilibrio del problema original, de donde,  $\varphi_M - h(x)$  es el punto de equilibrio maximal del problema anterior y por construcción cambia de signo.

De la misma forma, si elegimos  $h(x)$  tal que  $\varphi_m + h(x)$  cambie de signo tendremos que el punto de equilibrio minimal del problema anterior cambia de signo.

Nótese que  $\bar{f}$  sigue verificando (2.2.8) ya que tenemos por una parte, para  $s \geq 0$

$$\bar{f}(x, s) = f(x, s + h(x)) \leq C(x)(s + h(x)) + D(x) \leq C(x)s + \bar{D}^+(x)$$

donde hemos denotado  $\bar{D}^+(x) = [C(x)h(x) + D(x)]^+$ . Por otra parte, para  $s \leq 0$  tenemos

$$\bar{f}(x, s) = f(x, s + h(x)) \geq C(x)(s + h(x)) - D(x) \geq C(x)s - \bar{D}^-(x)$$

donde hemos denotado  $\bar{D}^-(x) = [C(x)h(x) - D(x)]^-$ .

Por último obtenemos que si ambos puntos de equilibrio extremales cambian de signo entonces todo punto de equilibrio cambia de signo.

## 2.4. Convergencia en espacios más regulares

Hemos visto hasta ahora la convergencia uniforme por arriba a los puntos de equilibrio extremales, i.e, en  $C(\bar{\Omega})$ . Mediante la fórmula de variación de constantes y la regularización del semigrupo lineal podemos obtener convergencia en espacios más regulares y con ello la convergencia de las derivadas de las soluciones.

Para ello vamos a ver el problema en  $L^q(\Omega)$  para un dominio acotado. Así, consideramos la escala de espacios de potencias fraccionarias  $X^\alpha$  asociada al operador  $-\Delta$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ . Esta escala de espacios verifica  $X^\alpha \subset W^{2\alpha, q}(\Omega)$ ,  $\alpha < 1$ , con inyección continua por lo que la convergencia en  $X^\alpha$  implica la convergencia  $W^{2\alpha, q}(\Omega)$ . Ahora bien, por las inyecciones de Sobolev sabemos que  $W^{2\alpha, q}(\Omega) \subset C^{k, \theta}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , para  $k + \theta < 2\alpha - N/q$ .

Si  $q$  es suficientemente grande tenemos  $1 + \theta < 2 - \varepsilon - N/q$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y  $\theta$  próximo a 1. Luego,  $X^\alpha$  se inyecta de manera continua en  $C^{1, \theta}(\bar{\Omega})$  con  $\theta$  tan próximo a 1 como queramos (tomando  $\varepsilon$  más pequeño si hace falta). Y, por tanto, la convergencia en  $X^\alpha$  implica convergencia en

$C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ . De la convergencia uniforme, y gracias a la fórmula de variación de las constantes, concluiremos la convergencia en  $X^\alpha$  y, por tanto, en  $C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ .

Para poder llevar a cabo este argumento utilizaremos la hipótesis de que la no linealidad  $f(x, u)$  es continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en su segunda variable. El mismo argumento se puede realizar para no linealidades que verifiquen (1.1.7) y (1.1.8) con  $m \in L^p(\Omega)$  para cierto  $p > N$ . Si por contra  $N/2 < p < N$ , tan sólo podemos concluir la convergencia en  $C^\theta(\overline{\Omega})$  para cierto  $0 < \theta < 1$ .

De nuevo observemos que aunque los argumentos arriba están hechos para el Laplaciano, los mismos siguen siendo válidos para los operadores y condiciones de contorno más generales de la Sección 1.1. De hecho para cualquiera de estos operadores y condiciones de contorno homogéneas se tiene la siguiente proposición.

**Teorema 2.4.1** *El punto de equilibrio maximal  $\varphi_M$  obtenido en el Corolario 2.2.9 es globalmente asintóticamente estable por arriba en la norma de  $C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ , para todo  $0 < \theta < 1$ . En particular, para todo dato inicial  $u_0, u_0 \geq \varphi_M$ , tenemos*

$$u(t, x; u_0) \rightarrow \varphi_M(x) \text{ uniformemente en } \Omega$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ , y para todo  $1 \leq i \leq N$

$$\frac{\partial u(t, x; u_0)}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \varphi_M(x)}{\partial x_i} \text{ uniformemente en } \Omega$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un resultado análogo se tiene para el punto de equilibrio minimal.

### Demostración.

Es claro que tan solo queda por demostrar la convergencia de las derivadas. Para ello podemos suponer que  $u_0 \geq \varphi_M$  es regular y que hemos truncado adecuadamente la no linealidad de manera que sea globalmente Lipschitz. Podemos suponer también que hemos sustituido  $A$  y  $f$  por  $A + \lambda I$  y  $f + \lambda I$  con  $\lambda$  suficientemente grande para que  $\delta < 0$  en (1.1.4).

Como  $\varphi_M$  es un punto de equilibrio tenemos, por la fórmula de variación de las constantes,

$$\varphi_M = S(t - \tau)\varphi_M + \int_\tau^t S(t - s)f(\varphi_M)ds$$

para todo  $t \geq \tau$ . Luego,

$$u(t) - \varphi_M = S(t - \tau)(u(\tau) - \varphi_M) + \int_\tau^t S(t - s)(f(u(s)) - f(\varphi_M))ds.$$

Tomando norma en  $X^\alpha \subset L^q(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \varphi_M\|_\alpha &\leq \|S(t - \tau)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), X^\alpha)} \|u(\tau) - \varphi_M\|_\alpha \\ &\quad + \int_\tau^t \|S(t - s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), X^\alpha)} \|f(u(s)) - f(\varphi_M)\|_0 ds. \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $f$  es Lipschitz y  $u(t), \varphi_M \in L^\infty(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \varphi_M\|_\alpha &\leq \|S(t - \tau)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), X^\alpha)} \|u(\tau) - \varphi_M\|_\alpha \\ &\quad + \int_\tau^t \|S(t - s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), X^\alpha)} L \|u(s) - \varphi_M\|_{L^q(\Omega)} ds \\ &\leq M \frac{e^{\delta(t-\tau)}}{(t-\tau)^\alpha} \|u(\tau) - \varphi_M\|_{L^q(\Omega)} \\ &\quad + ML \int_\tau^t \frac{e^{\delta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} \|u(s) - \varphi_M\|_{L^q(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Luego

$$\|u(t) - \varphi_M\|_\alpha \leq \frac{M}{(t-\tau)^\alpha} \|u(\tau) - \varphi_M\|_0 + ML \int_\tau^t \frac{e^{\delta(t-r)}}{(t-s)^\alpha} \|u(s) - \varphi_M\|_{L^q(\Omega)} ds.$$



Ahora bien, dado  $\varepsilon > 0$  existe un tiempo  $\tau > 0$  tal que para todo  $s \geq \tau$

$$\|u(s) - \varphi_M\|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon.$$

Luego, si  $t \geq \tau + 1$  tenemos

$$\|u(t; u_0) - \varphi_M\|_\alpha \leq C \sup_{s \geq \tau} \|u(\tau; u_0) - \varphi_M\|_{L^q(\Omega)} < C\varepsilon.$$

Por tanto, se tiene la convergencia en  $X^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ , y, para  $q$ , suficientemente grande  $X^\alpha \subset C^{1+\theta}(\overline{\Omega})$  de donde se sigue la convergencia de las derivadas. ■

## 2.5. Equilibrios extremales en el caso general. Dominios no acotados

Nos planteamos el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

planteado en  $X = BUC(\overline{\Omega})$  o  $X = H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  y  $1 < q < \infty$  con  $2\alpha - N/q > 0$ , donde  $\Omega$  es un abierto no acotado de  $\mathbb{R}^N$  (con el subíndice  $D$  denotamos a los espacios de funciones que se anulan en la frontera de  $\Omega$  si ésta es no vacía).

Nótese que cuando planteemos el problema en  $X = H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$  con  $2\alpha - N/q > 0$  vamos a trabajar con funciones que decaen a 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$  (ya que  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \cap BUC(\Omega)$ ). Como en el caso de un dominio acotado, en un primer paso, la solución de un problema lineal, que denotaremos por  $\phi$ , nos va a proporcionar una estimación uniforme sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.5.1), es decir,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x) \quad \text{uniformemente en } x \in \overline{\Omega}$$

Además,  $\phi \in H_D^{2\alpha, q}(\Omega) = X$ . En la prueba del Corolario 2.2.9, usando el Teorema 2.2.2, la idea de la demostración es considerar  $\phi(x) + \delta$  que pertenecía al espacio de datos iniciales y eso nos permitía probar el resultado usando el Teorema 2.2.2. Sin embargo, ahora,  $\phi(x) + \delta$  no pertenece al espacio de datos iniciales. Tendremos entonces que modificar ligeramente el argumento de la prueba del Teorema 2.2.2 para obtener un resultado análogo.

Otro espacio donde plantearemos el problema es  $X = BUC(\Omega)$ . En este caso vamos a poder solventar los problemas anteriores de manera análoga a cómo lo hacíamos en el caso de dominios acotados ya que  $BUC(\Omega)$  sí contiene a las constantes, y como tenemos una buena teoría de existencia y unicidad de soluciones en este espacio (ver Sección 1.1) además de buenas propiedades de regularidad del semigrupo, vamos a poder aplicar el Teorema 2.2.2 y obtener directamente el resultado. Nótese que en este caso necesitamos condiciones de regularidad más fuerte sobre la ecuación que si planteamos el problema en  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$  (ver Sección 1.1.4).

Por último, si queremos trabajar cualquier otro espacio de la forma  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ , es decir, con  $2\alpha - N/q \leq 0$ , tendremos que imponer condiciones de crecimiento adicionales sobre el término de reacción (ver Teorema 1.1.5). Una vez tengamos la existencia de solución local, por la regularidad del semigrupo, las soluciones entran en cualquier otro espacio  $H_D^{2\beta, q}(\Omega)$  (ver Teorema 1.2.4) y, por tanto, podremos aplicar los resultados que obtengamos para el caso en que  $2\alpha - N/q > 0$  (ver Sección 2.5.2).

En lo que sigue, supondremos que  $f$  puede descomponerse de la forma

$$f(x, s) = g(x) + m(x)s + f_0(x, s) \quad (2.5.2)$$

con  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$  y

$$f_0(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0. \quad (2.5.3)$$

Supongamos que existen  $C(x)$  y  $D(x) \geq 0$  definidas en  $\Omega$  tales que

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \quad (2.5.4)$$

### 2.5.1. El problema en $BUC(\Omega)$ .

Supongamos que  $f$  es de la forma (2.5.2) con  $m \in BUC^\mu(\Omega)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , y  $g \in BUC(\Omega)$ . Tenemos entonces que el problema (2.5.1) está bien planteado en  $BUC(\Omega)$  (ver Arrieta et al [13]) y las soluciones entran en  $BUC_D(\Omega)$  instantáneamente, es decir, para todo  $t > 0$ .

Nótese además que para plantear el problema en  $BUC(\Omega)$  necesitamos más regularidad  $g$  y  $m$  que para hacerlo en  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ .

Supongamos además que  $f$  verifica (2.5.4) con

$$C \in L_U^p(\Omega) \quad \text{para algún } p > N/2$$

y o bien,

$$D \in L^r(\Omega) \quad \text{para algún } r > N/2,$$

o bien,  $f$  verifica (1.1.16) y

$$D \in L^r(\Omega), \quad r > \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad \text{y } g \in L^{N(\rho-1)/2}(\Omega).$$

Entonces, la solución de (2.5.1) con dato inicial en  $BUC(\Omega)$  es global (ver Teorema 7.3 de Arrieta et al. [13]).

Si además,  $C \in L_U^p(\Omega)$ ,  $p \geq r$ , y el semigrupo asociado a

$$\Delta + C(x) \quad \text{decae exponencialmente,}$$

y  $m \in L_U^p(\Omega)$  entonces tenemos la siguiente estimación asintótica sobre las soluciones de (2.5.1) análoga a la del Teorema 2.5.4 (ver Teorema 7.4 de Arrieta et al. [13])

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x) \quad \text{uniformemente en } x \in \Omega$$

donde  $0 \leq \phi \in BUC_{0,D}(\Omega)$ , el espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas que decaen a 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$  y son cero en la frontera de  $\Omega$ , es la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi = C(x)\phi + D(x) & \text{en } \Omega \\ \phi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

De aquí, se tiene que el intervalo de orden  $[-\phi - \delta, \phi + \delta]$ , con  $\delta > 0$ , es un intervalo absorbente. Además, usando de manera esencial que  $\phi(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  se prueba en Arrieta et al. [13] que el semigrupo no lineal es asintóticamente compacto .

Se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.5.1** *En las hipótesis anteriores, los resultados del Teorema 1.0.1 son ciertos en este caso.*

**Demostración.** Para obtener que los resultados del Teorema 1.0.1 son ciertos en este caso basta aplicar el Teorema 2.2.2 usando el hecho de que  $\phi + \delta \in BUC(\bar{\Omega})$  y el intervalo de orden  $[-\phi - \delta, \phi + \delta]$  es un intervalo absorbente. ■

### 2.5.2. El problema en $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ .

Supongamos que  $f$  puede descomponerse de la forma (2.5.2) con  $g \in L^q(\Omega)$ ,  $m \in L_U^p(\Omega)$ , para  $p > N/2$ ,  $p \geq q$ ,  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$  y verifica (2.5.3)

Planteamos el problema (2.5.1) en  $X = H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$  con  $1 < q < \infty$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$  tales que  $2\alpha - N/q > 0$ . De esta forma, tenemos por el Teorema 1.1.5 que el problema está bien planteado y tenemos, por tanto,

la existencia y unicidad de solución local del problema (ver Sección 1.1.4). Nótese que, en este caso,  $H_D^{2\alpha,q}(\Omega) \subset BUC_D(\Omega)$  (es más,  $H_D^{2\alpha,q}(\Omega) \subset BUC_{0,D}(\Omega)$ ).

Supongamos que  $f$  verifica (2.5.4) con

$$D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega) \quad \text{con} \quad r > N/2, \quad q \geq s \geq \frac{qN}{N+2q}$$

y

$$C \in L_V^p(\Omega) \quad \text{para algún} \quad p > N/2, \quad p \geq r.$$

En estas condiciones, tenemos existencia global de solución para el problema (2.5.1) (ver Teorema 1.2.4).

Por último, supongamos también que se verifica la siguiente propiedad

(D) : El semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  decae exponencialmente.

**Nota 2.5.2** *En la propiedad anterior no indicamos el espacio donde consideramos el decaimiento exponencial ya que éste es independiente del espacio que se tome como base, es decir, si el semigrupo decae en  $L^p(\Omega)$  para cierto  $p$  entonces decae en  $L^q(\Omega)$  para todo  $1 \leq q \leq \infty$  (ver Simon [47] y Arendt y Batty [6]).*

**Nota 2.5.3** *En Arendt y Batty [5] y [6] se prueba que si  $0 \geq C(x) \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$  entonces el decaimiento exponencial del semigrupo asociado a  $\Delta + C(x)$  es equivalente a*

$$\int_G C(x) = -\infty$$

para todo dominio  $G$  que contenga bolas arbitrariamente grandes (propiedad de Arendt y Batty para el decaimiento exponencial).

Enunciamos a continuación un el siguiente resultado de Arrieta et al. [13] análogo al Teorema 2.2.6 en el caso de dominios acotados.

**Teorema 2.5.4** *Los resultados del Teorema 2.2.6 son ciertos en este caso. Es decir, si  $\phi$  es la única solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = C(x)\phi + D(x) & \text{en } \Omega \\ \phi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5.5)$$

entonces  $0 \leq \phi(x) \in H_D^{2,r}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \cap BUC_D(\Omega)$  y la soluciones de (2.5.1) verifican

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x) \quad (2.5.6)$$

donde el límite es uniforme en  $x$  y para  $u_0$  en acotados del espacio de datos iniciales  $X = H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$ .

**Nota 2.5.5** *El hecho de que el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  decaiga junto con las hipótesis sobre  $D$  implican la existencia y unicidad de solución del problema (2.5.5)*

*Las hipótesis sobre  $D$  implican la regularidad y la positividad de la solución del problema anterior. En particular, por ser  $D \in L^s(\Omega)$  se tiene que  $\phi \in L^q(\Omega)$ , y por ser  $D \in L^r(\Omega)$  se tiene que  $\phi \in H_D^{2,r}(\Omega) \subset BUC_D(\Omega)$  ( $r > N/2$ ). Luego  $\phi \in L^q(\Omega) \cap BUC_D(\Omega)$ , de donde se tiene que  $\phi(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .*

**Nota 2.5.6** *Como en el caso de un dominio acotado, esta propiedad nos da, en particular, una acotación  $L^\infty(\Omega)$  de la solución para tiempos grandes, concretamente, dados  $B$  un acotado de  $H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$  y cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un tiempo  $T > 0$  tal que para todo  $t \geq T$ ,*

$$-\phi(x) - \varepsilon \leq u(t, x; u_0) \leq \phi(x) + \varepsilon$$

para todo  $x \in \Omega$  y  $u_0 \in B$ .

La prueba del Teorema 1.0.1 en este caso la haremos en varias etapas. En primer lugar, probaremos la convergencia uniforme de la solución del problema (2.5.1) que parte de  $\phi(x)$  a una cierta función  $\varphi_M(x)$ . La uniformidad de la convergencia va a ser consecuencia del decaimiento a 0 en espacio de las funciones de  $X$ . Después probaremos que  $\varphi_M$  es un punto de equilibrio maximal del sistema y por último la atracción uniforme por debajo de  $\varphi_M$ . El resultado para el punto de equilibrio minimal se obtiene de manera análoga. Por último, probaremos que dado cualquier dato inicial, éste acaba de manera uniforme entre los puntos de equilibrio minimal y maximal. La idea para probar esta última parte, es utilizar por un lado, el decaimiento a cero para  $|x|$  grande y por otro, la convergencia uniforme en compactos de la solución a funciones entre  $\varphi_m$  y  $\varphi_M$ . El decaimiento a cero de  $\phi(x)$  implica que el semigrupo no lineal es asintóticamente compacto (ver Teorema 5.5 en Arrieta et al. [13]) con lo que tendremos la existencia de un atractor para el problema (2.5.1) con dato inicial en  $H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$ .

Concretamente, vamos a probar el siguiente resultado que no es más que el Teorema 1.0.1 para el problema (2.5.1).

**Teorema 2.5.7** *Consideramos el problema (2.5.1) planteado en  $X = H_D^{2\alpha,q}(\Omega)$ ,  $2\alpha - q/N > 0$ . Supongamos que  $f$  se puede descomponer de la forma (2.5.2) con  $f_0$  continua y localmente Lipschitz en  $u$ . Supongamos además que verifica (2.5.3), la condición de signo (2.5.4) y la condición de disipación (D).*

*Entonces, las conclusiones del Teorema (1.0.1) son ciertas en este caso.*

Veamos cómo se construye el candidato a punto de equilibrio maximal. El argumento para el minimal es análogo. Por (2.5.4),  $\phi$ , la solución de (2.5.5), es una supersolución de (2.5.1) ya que

$$\phi_t - \Delta\phi = C(x)\phi + D(x) \geq f(x, \phi).$$

donde hemos usado que  $\phi$  no depende del tiempo, esto es,  $\phi_t = 0$ .

Como  $C \in L^p_U(\Omega)$ ,  $p \geq q$ , y  $D \in L^q(\Omega)$  tenemos que  $\phi \in H_D^{2,q}(\Omega)$ . Luego, podemos tomar  $\phi$  como dato inicial en (2.5.1). Por tanto, si consideramos la solución del problema de evolución no lineal que parte de  $\phi$ ,  $S(t)\phi$ , tenemos que  $S(t)\phi$  es monótona decreciente (ver Lema B.4.5). Además, por la propiedad (2.5.6),  $S(t)\phi$  está acotada inferiormente (ver Nota 2.5.6). Por tanto, dicha solución converge a cierta función  $\varphi_M(x)$  uniformemente en compactos de  $\Omega$  (ver Lema 1.3.1).

La clave para probar el teorema va a ser el siguiente lema que establece que, en realidad, la convergencia de  $S(t)\phi$  a  $\varphi_M$  es uniforme en todo  $\Omega$  y no sólo en compactos.

**Lema 2.5.8**  *$S(t)\phi \rightarrow \varphi_M$  uniformemente en  $x \in \Omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Demostración.** Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Tenemos que probar que existe un tiempo  $T > 0$  tal que para todo  $t > T$ ,  $S(t)\phi \leq \varphi_M + \varepsilon$ , ya que  $\varphi_M(x) \leq S(t)\phi$  para todo  $t$  por construcción.

Por una parte, como  $\phi(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , sabemos que existe  $R_1 > 0$  tal que para todo  $x \in \Omega$  con  $|x| > R_1$  se tiene  $\phi(x) < \varepsilon/2$ . Como  $S(t)\phi$  decrece, también se tiene  $S(t)\phi(x) < \varepsilon/2$  para todo  $t \geq 0$ . Ahora bien, también sabemos que  $S(t)(-\phi)$  es creciente y

$$-\phi \leq S(t)(-\phi) \leq \varphi_M \leq S(t)\phi \leq \phi$$

por lo que  $\varphi_M(x) \geq -\varepsilon/2$  para todo  $x \in \Omega$  con  $|x| > R_1$ . Luego, para  $x \in \Omega$  con  $|x| > R_1$

$$S(t)\phi(x) - \varphi_M(x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Es decir,  $S(t)\phi < \varphi_M + \varepsilon$  en  $x \in \Omega$  con  $|x| > R_1$ .

Por otra parte, hemos visto que  $S(t)\phi$  converge a  $\varphi_M$  uniformemente en compactos (ver Lema 1.3.1), luego existe un tiempo  $T_1 > 0$  tal que para todo  $t > T_1$ ,  $S(t)\phi < \varphi_M + \varepsilon$  en  $|x| \leq R_1$ .

Hemos probado pues que existe un tiempo  $T_1 > 0$  tal que para todo  $t > T_1$ ,  $S(t)\phi \leq \varphi_M + \varepsilon$  en  $\Omega$ . De donde tenemos la convergencia uniforme de  $S(t)\phi$  a  $\varphi_M$  ya que  $\varphi_M \leq S(t)\phi$  para todo  $t$  por construcción. ■

Ya estamos en condiciones de poder probar el Teorema 2.5.7.

**Demostración del Teorema 2.5.7.** Hasta ahora, hemos construido  $\varphi_M$ , el candidato a punto de equilibrio maximal. Veamos que efectivamente los es. Para ello vamos a probar que toda la dinámica

asintótica del problema entra de manera uniforme por debajo  $\varphi_M$ . Concretamente vamos a probar la atracción uniforme dada por (1.0.2). Queremos probar, entonces, que dado  $\varepsilon > 0$  y  $B \subset X$  acotado, existe  $T_\varepsilon > 0$  tal que para todo  $t > T_\varepsilon$  y  $u_0 \in B$ ,  $u(t, x; u_0) \leq \varphi_M(x) + \varepsilon$  en  $\Omega$  (el argumento para  $\varphi_m$  es análogo).

Volviendo a la prueba del Teorema 2.5.4, tenemos que

$$u(t, x; u_0) \leq v(t, x; |u_0|) \quad (2.5.7)$$

para todo  $t$  y para casi todo  $x \in \Omega$ , donde  $v$  es solución de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = C(x)v + D(x) & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ v(0) = |u_0| \end{cases}$$

Sabemos además que  $v(t, x; |u_0|) \rightarrow \phi(x)$  en  $L^q(\Omega)$  y uniformemente en  $x$  para  $u_0$  en acotados de  $X$ .

Sea  $s > 0$ . Haciendo actuar el semigrupo no lineal a tiempo  $s$  tenemos, por monotonía

$$u(t + s, x; u_0) = S(s)u(t, x; u_0) \leq S(s)v(t, x; |u_0|). \quad (2.5.8)$$

Nótese que para que el último miembro de la desigualdad tenga sentido se necesita  $v(t, x; |u_0|) \in H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$  pero esto es cierto para  $t$  suficientemente grande debido a la convergencia de  $v(t, x; |u_0|)$  a  $\phi$  en  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$  (ya que  $C \in L^p_U(\Omega)$ ,  $p \geq q$ , y  $D \in L^q(\Omega)$ , ver Lema 2.6 en Arrieta et al. [13]).

Ahora bien, como  $v(t, x; |u_0|) \rightarrow \phi(x)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  tenemos, por la continuidad del semigrupo no lineal

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(s)v(t, x; |u_0|) = S(s) \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x; |u_0|) = S(s)\phi(x). \quad (2.5.9)$$

Luego, tomando límite cuando  $t$  tiende a infinito en (2.5.8) tenemos, por (2.5.9) y la propiedad de semigrupo,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t + s, x; |u_0|) \leq S(s) \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x; |u_0|) = S(s)\phi(x) \quad (2.5.10)$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $u_0$  en acotados de  $X$ , es decir,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x; |u_0|) \leq S(s)\phi(x)$$

para todo  $s$ . Por tanto, tomando límite cuando  $s$  tiende a  $\infty$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x; |u_0|) \leq \varphi_M(x)$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $u_0$  en acotados de  $X$ .

De manera análoga, se prueba el resultado para  $\varphi_m$ , es decir,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x; u_0) \geq \varphi_m(x)$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $u_0$  en acotados de  $X$ .

Por último, en Arrieta et al. [13] se prueba la existencia del atractor (Teorema 5.5). La clave de esta prueba es el decaimiento  $\phi(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , que permite probar que el semigrupo definido por las soluciones del problema no lineal es asintóticamente compacto. Primero se prueba la convergencia en  $L^q(\Omega)$  y después, por medio de la fórmula de variación de constantes, se tiene en  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ .

La propiedad (1.0.2) implica  $\mathcal{A} \subset [\varphi_m, \varphi_M]$  y por ser puntos de equilibrio,  $\varphi_m, \varphi_M \in \mathcal{A}$ . ■

### El caso con condiciones de crecimiento sobre $f$ .

Supongamos que  $f$  verifica

$$|f_0(x, s) - f_0(x, r)| \leq c(1 + |s|^{\rho-1} + |r|^{\rho-1})|s - r| \quad (2.5.11)$$

para todo  $x \in \Omega$ ,  $s, r \in \mathbb{R}$  y  $\rho \geq 1$  como en el Teorema 1.1.5.

Esta condición de crecimiento nos va a permitir obtener un mejor resultado ya que podemos debilitar las condiciones de regularidad sobre  $C(x)$  y  $D(x)$ .

**Teorema 2.5.9** Sea  $X = H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ . Supongamos que  $f$  verifica (2.5.11) y es de la forma

$$f(x, s) = m(x)s + f_0(x, s) + g(x)$$

con

$$m \in L_U^p(\Omega), \quad p > N/2, \quad p \geq q,$$

$f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$ ,

$$f_0(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0, \quad (2.5.12)$$

y

$$g \in L^a(\Omega) \cap L^b(\Omega)$$

con  $a = \max\{N(\rho - 1)/2, 1\}$ ,  $b = \max\{N\rho/2, 1\}$ .

Supongamos, además, que  $f$  verifica

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s| \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, x \in \Omega$$

con

$$C \in L_U^p(\Omega) \quad \text{para algún } p > N/2$$

tal que el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  decae exponencialmente, y

$$D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega) \quad \text{con } r > \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad q \geq s > \frac{qN}{N + 2q}.$$

Entonces, en este caso, las conclusiones del Teorema 1.0.1 son ciertas.

**Nota 2.5.10** Ahora no tenemos que  $\phi$ , la solución de (2.5.5), esté en  $L^\infty(\Omega)$  ya que  $D$  no tiene por qué ser de  $L^r(\Omega)$  con  $r > N/2$ . Sólo podemos afirmar que  $\phi \in L^q(\Omega)$ . Ahora bien, lo que sí tenemos es una estimación uniforme de las soluciones de tipo (2.5.6) donde ahora la función que acota el comportamiento asintótico de las soluciones depende del espacio donde se considere dicha cota. Concretamente, por el Teorema 5.2 de Arrieta et al. [13] sabemos que dado  $q \leq \sigma \leq \infty$ , existe  $\phi^{(\sigma)} \in L^\sigma(\Omega)$  tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi^{(\sigma)}(x) \quad \text{en } L^\sigma(\Omega) \quad (2.5.13)$$

uniformemente para  $u_0$  en acotados de datos iniciales  $H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ .

Además, existen una cantidad finita de  $\sigma$  para los cuales  $\phi^{(\sigma)}$  es distinta, es decir,  $\{\phi^{(\sigma)} : \sigma \in \mathbb{R}\}$  es un conjunto finito. Gracias a esta propiedad vamos a poder probar el resultado.

**Demostración del Teorema 2.5.9.** Sea  $\phi$  la única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi = C(x)\phi + D(x) & \text{en } \Omega \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.5.14)$$

Por las hipótesis sobre  $C(x)$  y  $D(x)$ , tenemos que  $0 \leq \phi \in L^q(\Omega)$ .

Sabemos también que  $u(t, x; \phi)$  es decreciente por ser  $\phi$  supersolución del problema estacionario (ver Lema B.4.5). Ahora bien, por (2.5.13), tenemos que para todo  $q \leq \sigma \leq \infty$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; \phi(x))| \leq \phi^{(\sigma)}(x) \quad \text{en } L^\sigma(\Omega)$$

uniformemente para  $u_0$  en acotados de  $X$ . Además, existe  $T_\sigma > 0$  tal que para todo  $t \geq T_\sigma$

$$u(t, x; \phi) \in L^\sigma(\Omega).$$

Ahora bien, como  $\{\phi^{(\sigma)} : \sigma \in \mathbb{R}\}$  es un conjunto finito sabemos que, existe  $T_0 > 0$  tal que para todo  $t \geq T_0$

$$u(t, x; \phi) \in L^\sigma(\Omega) \quad \text{para todo } q \leq \sigma \leq \infty,$$

es decir,

$$u(t, x; \phi) \in L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{para todo } t \geq T_0.$$

Sea pues,  $\eta = u(T_0, x; \phi) \in L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Como la solución que parte de  $\phi$  decrece con el tiempo, también lo hace la que parte de  $\eta$ . Además, por (2.5.13) con  $u_0 = \eta$  se tiene

$$-\phi^{(\infty)}(x) - \varepsilon \leq u(t, x; \eta) \leq \phi^{(\infty)}(x) + \varepsilon$$

para todo  $t$  suficientemente grande. Luego,  $u(t, x; \eta)$  es decreciente y converge a  $\varphi_M(x)$  uniformemente en compactos (ver Lema 1.3.1), para cierta función  $\varphi_M(x)$ .

Además,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; \eta)| \leq \phi^{(\infty)}(x)$$

uniformemente en  $x \in \Omega$ .

Argumentando ahora como en la prueba del Lema 2.5.8 y el Teorema 2.5.7 con  $\phi^{(\infty)}$  en vez de  $\phi$  tenemos que son ciertos los resultados del Teorema 1.0.1. ■

### 2.5.3. Otras condiciones de estructura sobre $f$ .

Mostramos a continuación cómo sería el argumento para obtener el Teorema 1.0.1 en el caso en que  $f$  verifique diferentes condiciones de estructura.

#### Otra condición sobre $f$ .

Supongamos que  $f$  puede descomponerse de la forma

$$f(x, s) = m(x)s + f_0(x, s) + g(x) \tag{2.5.15}$$

con  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$  y

$$f_0(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0.$$

Supongamos que  $f$  es tal que existe solución local del problema (2.5.1) con dato inicial  $u_0 \in H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ , es decir, verifica (2.5.2) con  $m \in L_U^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $p \geq q$ ,  $g \in L^q(\Omega)$ ,  $f_0$  verifica (2.5.3) y, en el caso en que  $2\alpha - N/q \leq 0$ ,  $f$  verifica ciertas propiedades de crecimiento (ver Teorema 1.1.5 y Sección 2.5.2).

Supongamos además que  $f$  verifica la condición de signo (2.5.4) que nos proporciona la existencia global de solución (ver Teorema 1.2.4), es decir,

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s|$$

con  $C \in L_U^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$  y  $D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$  con  $r > N/2$  y  $q \geq s > \frac{qN}{N+2q}$  (si imponemos condiciones adicionales sobre el crecimiento de  $f$ , necesarias para la existencia de solución local en algún caso, podemos relajar las hipótesis sobre  $C$  y  $D$  como puede verse en la Sección 2.5.2).

Por último, supongamos que  $m, g \in L^\infty(\Omega)$  y

$$f(x, s)s \leq h(s)|s| \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad |s| \geq M \tag{2.5.16}$$

con  $h$  una función continua tal que  $h(s) < 0$  para todo  $|s| \geq M$ .

**Nota 2.5.11** *En este caso, el decaimiento exponencial del semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  que suponíamos en las secciones anteriores lo hemos sustituido por la propiedad (2.5.16).*

El Teorema 5.3 de Arrieta et al. [13] proporciona la existencia de un conjunto acotado absorbente en  $L^\infty(\Omega)$ . En concreto se prueba el siguiente resultado

**Teorema 2.5.12** Sea  $X = H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$ . Supongamos que las soluciones del problema (2.5.1) son globales. Supongamos además  $m, g \in L^\infty(\Omega)$  y que  $f$  verifica la propiedad (2.5.16).

Entonces, para todo acotado  $B \subset H_D^{2\alpha, q}(\Omega)$  existe  $T(B) > 0$  tal que

$$\|u(t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad t \geq T(B)$$

para todo  $u_0 \in B$ .

Supongamos que  $C(x)$  se puede descomponer de la forma  $C(x) = C_0(x) - C_1(x)$  de tal manera que  $C_0 \geq 0$ ,  $C_1 \in L_U^p(\Omega)$  y el semigrupo generado por  $\Delta - C_1$  decae exponencialmente. Supongamos, además, que  $C_0 \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$  con  $r$  y  $s$  como antes. Entonces, el Teorema 5.4 de Arrieta et al. [13] proporciona una estimación sobre el comportamiento asintótico del tipo (2.5.6) de las soluciones en función de  $\phi(x) \geq 0$ , la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi + C_1(x)\phi = C_0(x)M + D(x) & \text{en } \Omega \\ \phi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con  $M$  como en (2.5.16). En concreto, tenemos

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x).$$

Si además,  $p \geq r$  entonces,  $\phi \in L^q(\Omega) \cap BUC_D(\Omega)$ , por lo que  $\phi(x) \rightarrow 0$  para  $|x| \rightarrow \infty$ . Este hecho, junto con la estimación del comportamiento asintótico de las soluciones implica que todo equilibrio debe tender a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Procediendo como en la sección anterior podemos probar que los resultados del Teorema 1.0.1 son ciertos en este caso. Concretamente, tenemos el siguiente resultado

**Teorema 2.5.13** Supongamos que  $f$  es de la forma (2.5.15) y verifica

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s|$$

con  $C \in L_U^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$  y  $D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$  con  $r > N/2$  y  $q \geq s > \frac{qN}{N+2q}$ . Supongamos además que  $m, g \in L^\infty(\Omega)$  y

$$f(x, s)s \leq h(s)|s| \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad |s| \geq M$$

con  $h$  una función continua tal que  $h(s) < 0$  para todo  $|s| \geq M$ .

Por último, supongamos que existe una descomposición de  $C$  de la forma  $C(x) = C_0(x) - C_1(x)$  con  $0 \leq C_0 \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$  y  $C_1 \in L_U^p(\Omega)$  tal que el semigrupo generado por  $\Delta - C_1$  decae exponencialmente.

Entonces, los resultados del Teorema 1.0.1 son ciertos.

Si, además  $p \geq r$  entonces todo equilibrio  $\psi$  verifica  $\psi(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

### Términos de reacción cuasi-monótonos

Supongamos que  $f$  puede descomponerse de la forma

$$f(x, s) = m(x)s + f_0(x, s) + g(x)$$

con  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$  y

$$f_0(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0.$$

Supongamos además, que  $f_0$  verifica

$$\frac{\partial}{\partial s} f_0(x, s) \leq L(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.5.17)$$

con  $L \in L_U^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ .



Esta última propiedad implica, en particular, que  $-f_0(x, s) + L(x)s$  es monótona y

$$f_0(x, s)s \leq L(x)s^2.$$

Por tanto,

$$f(x, s)s \leq (m(x) + L(x))s^2 + |g(x)||s|,$$

o lo que es lo mismo, verifica (2.5.4) con  $C(x) = m(x) + L(x)$  y  $D(x) = |g(x)|$ .

Supongamos que  $g \in L^r(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  para  $1 < q < \infty$  y algún  $r > N/2$ . Supongamos además que  $m, L \in L^p_U(\Omega)$ ,  $p \geq r$ . En estas condiciones, podemos plantear el problema (2.5.1) con dato inicial en  $X = L^q(\Omega)$  y obtener, por el Teorema 7.1 de Arrieta et al. [13], la existencia de solución global de dicho problema.

Observemos que el resultado de Arrieta et al. [13] se obtiene suponiendo que  $L$  es constante. Sin embargo, los mismos argumentos permiten trabajar con  $L \in L^p_U(\Omega)$ , con  $p > N/2$ .

Supongamos ahora que existen funciones  $C(x)$  y  $D(x)$  (distintas a las anteriores) con  $D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ ,  $r > N/2$ ,  $q \geq s > \frac{Nq}{N+2q}$ , y  $C \in L^p_U(\Omega)$ ,  $p \geq r$ , tales que

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|s|$$

y el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  decae exponencialmente entonces, por el Teorema 7.2 de ese mismo trabajo tenemos

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi(x).$$

con  $\phi \in L^q(\Omega)$  la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi = C(x)\phi + D(x) & \text{en } \Omega \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Argumentando ahora como en la Sección 2.5.2 se tiene

**Teorema 2.5.14** *Supongamos que  $f$  puede descomponerse de la forma*

$$f(x, s) = m(x)s + f_0(x, s) + g(x)$$

con  $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz en  $s \in \mathbb{R}$  uniformemente respecto a  $x \in \Omega$ ,

$$f_0(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, 0) = 0, \quad y \quad \frac{\partial}{\partial s} f_0(x, s) \leq L(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}$$

con  $L \in L^p_U(\Omega)$ , para algún  $p > N/2$ .

Supongamos además que existen  $D \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$  con  $r > N/2$ ,  $q \geq s > \frac{Nq}{N+2q}$ , y  $C \in L^p_U(\Omega)$ ,  $p \geq r$  tales que

$$f(x, s)s \leq C(x)s^2 + D(x)|x|$$

y el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  decae exponencialmente.

Entonces, los resultados del Teorema 1.0.1 son ciertos en este caso para  $X = L^q(\Omega)$ .

## Capítulo 3

# Existencia y estabilidad de equilibrios extremales positivos

### 3.1. Soluciones no negativas

Como primera aproximación a los resultados que obtendremos en este capítulo, presentamos a continuación una serie de resultados referentes a la existencia de equilibrios y comportamiento asintótico de soluciones no negativas y positivas, consecuencia directa de los resultados de la Sección 2.2.2.

En esta primera aproximación estaremos interesados en el estudio del problema con condiciones de contorno tipo Dirichlet, Neumann o Robin homogéneas

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Más adelante, veremos resultados más finos sobre existencia de equilibrio extremales positivos.

En lo que sigue, supondremos siempre que  $f$  verifica (1.1.7) y (1.1.8) y que  $f(x, 0) \geq 0$  ya que, de esta forma, el semigrupo no lineal generado por las soluciones del problema anterior conserva la positividad, es decir, dado  $u_0 \geq 0$  se tiene que  $u(t, x; u_0) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ .

Aunque los resultados están enunciados para el operador Laplaciano es claro por las demostraciones que son válidos para los operadores generales de la Sección 1.1.

El primer resultado proporciona una condición, fácil de verificar, para la existencia de un equilibrio minimal no negativo.

**Proposición 3.1.1** *Supongamos que  $f$  verifica (1.1.7) y (1.1.8), y  $f(\cdot, 0) \geq 0$ ,  $f(\cdot, 0) \not\equiv 0$ , y existen  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $0 \leq D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ , tales que*

$$f(x, s) \leq C(x)s + D(x) \quad (3.1.2)$$

para casi todo  $x \in \Omega$  y todo  $s \geq 0$ . Supongamos además que el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$ ,  $S_{\Delta+C}$ , decae exponencialmente.

Entonces, (3.1.1) tiene dos equilibrios extremales positivos ordenados (que podrían coincidir). Además, el equilibrio minimal es asintóticamente estable por abajo y el maximal lo es por arriba.

**Demostración.** La existencia y estabilidad del equilibrio maximal  $\varphi_M$  se sigue del Corolario 2.2.9 (nótese que  $f$  verifica (3.1.2) y  $S_{\Delta+C}$  decae exponencialmente). Además, es no negativo por ser  $f(\cdot, 0) \geq 0$ .

Ahora bien  $f(\cdot, 0) \geq 0$ ,  $f(\cdot, 0) \not\equiv 0$ , implica que 0 es una subsolución estricta. Luego,  $u(t, x; 0)$  es creciente por el Lema B.4.5. Además,  $u(t, x; 0)$  está acotada por la solución maximal  $\varphi_M$ . Por tanto, existe el límite puntual

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; 0) = \varphi_m^+(x).$$

Ahora bien, por el Teorema de Ascoli-Arzelá, dicha convergencia es uniforme en  $x$  (ver Lema 1.3.1) por lo que  $0 \leq \varphi_m^+$  es un equilibrio de (3.1.1). Además, es minimal ya que cualquier otro equilibrio de (3.1.1),  $\psi$ , satisface  $0 < \psi$ , y por el principio de comparación debe ser  $u(t, x; 0) \leq \psi$ . Luego, tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene  $\varphi_m^+ \leq \psi$ . Además, en este caso, tenemos que la solución minimal no es sólo no negativa sino positiva por el principio del máximo.

La estabilidad por abajo de  $\varphi_m^+$  sigue del hecho de que dado cualquier dato inicial  $u_0 \in X$  tal que  $0 \leq u_0 \leq \varphi_m^+$  se tiene, por comparación  $u(t, x; 0) \leq u(t, x; u_0) \leq \varphi_m^+$  y  $u(t, x; 0) \rightarrow \varphi_m^+$  uniformemente en  $x \in \Omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . ■

Para condiciones de contorno no lineales el resultado es válido para operadores en forma de divergencia supuesto además que la no linealidad en la frontera verifique  $g(\cdot, 0) \geq 0$  con, o bien  $f(x, 0)$ , o bien  $g(x, 0)$  no idénticamente nula, y se verifiquen (S) y (D) de la Sección 2.2.3.

Concretamente, se tiene

**Proposición 3.1.2** *Para el problema (2.2.14), supongamos que  $f(\cdot, 0), g(\cdot, 0) \geq 0$ , una de las dos no idénticamente nula, y se verifican (S) y (D) de la Sección 2.2.3.*

*Entonces, (3.1.1) tiene dos equilibrios extremales positivos ordenados (que podrían coincidir). Además, el equilibrio minimal es asintóticamente estable por abajo y el maximal lo es por arriba.*

Observemos que si 0 es un equilibrio, esto es,  $f(\cdot, 0) \equiv 0$ , entonces 0 es el equilibrio minimal no negativo. En el caso de condiciones de contorno no lineales, el equilibrio minimal es 0 si  $f(\cdot, 0) \equiv g(\cdot, 0) \equiv 0$ .

Por tanto, una cuestión interesante es cuándo el problema (3.1.1) tiene un equilibrio positivo, incluso en el caso en que  $f(x, 0) = 0$ . El siguiente resultado proporciona una condición para la existencia de un equilibrio positivo en dicho caso. Básicamente, se necesita la acotación global de las soluciones que parten de un entorno de 0 y la inestabilidad de 0 para excluir la posibilidad de que el equilibrio maximal de la Proposición 3.1.1 sea cero.

**Proposición 3.1.3** *Sea  $f(\cdot, 0) \equiv 0$ . Supongamos que existen  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $0 \leq D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ , tales que*

$$f(x, s) \leq C(x)s + D(x) \quad (3.1.3)$$

*para casi todo  $x \in \Omega$  y todo  $s \geq 0$ . Supongamos, además, que 0 es inestable para el problema (3.1.1) y que el semigrupo generado por  $\Delta + C$  decae exponencialmente.*

*Entonces existe un punto de equilibrio maximal del problema (3.1.1) que, además, es positivo. En este caso el equilibrio minimal no negativo es 0.*

**Demostración.** Por el Corolario 2.2.9 sabemos que existe un equilibrio maximal  $\varphi_M$  que es estable por arriba. Recordemos que la existencia de dicho equilibrio se obtiene como límite de la solución del problema (3.1.1) que parte de  $\phi \geq 0$  (ver (2.2.9)). Como  $f(\cdot, 0) \equiv 0$  sabemos que  $\varphi_M$  es no negativa, por el principio de comparación. Como 0 es inestable se tiene que  $\varphi_M$  es positiva ya que, en otro caso,  $\varphi_M \equiv 0$  (por el principio del máximo  $\varphi_M$  es o bien 0, o bien positiva) y, entonces, 0 sería estable, que es una contradicción. ■

En el caso de condiciones de contorno no lineales y supuesto que  $f(\cdot, 0) \equiv g(\cdot, 0) \equiv 0$  el resultado del teorema sigue siendo cierto.

**Nota 3.1.4** *En cualquiera de las situaciones anteriores tenemos la existencia de un punto de equilibrio minimal no negativo, y la existencia de un punto de equilibrio maximal. Además equilibrio maximal puede coincidir con el minimal no negativo y en ese caso existe un único punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para las soluciones no negativas, no idénticamente nulas.*

*Si el equilibrio maximal es idénticamente cero entonces sólo existe la solución trivial que de nuevo es globalmente asintóticamente estable para las soluciones no negativas.*

### 3.2. Existencia de un punto de equilibrio positivo minimal.

En los apartados anteriores hemos tratado la existencia de puntos de equilibrio extremales en todo el espacio  $X$  y  $X^+ = \{v \in X : v(x) \geq 0\}$ . En esta sección estudiaremos la existencia de puntos de equilibrio positivos minimales, es decir, trabajaremos en  $X^+ \setminus \{0\}$ . Probaremos que en el caso en que 0 sea un punto de equilibrio de (3.1.1), es decir,  $f(x, 0) \equiv 0$ , la existencia de una solución acotada junto con cierta propiedad de inestabilidad de la solución trivial 0 (ver propiedades (3.2.4), en el Teorema 3.2.1, y (3.2.7), en el Teorema 3.2.6) proporciona la existencia de un punto de equilibrio minimal.

Enunciamos ahora un resultado para problemas con condiciones de contorno tipo Dirichlet. Sin embargo, dicho resultado sigue siendo válido para condiciones de contorno de tipo Neumann o Robin (ver Teorema 3.2.6) e, incluso, no lineales (ver Teorema 3.2.7).

La primera parte del resultado es análoga a la Proposición 3.1.1 con condiciones más débiles sobre el término de reacción. En particular no exigimos que  $f$  verifique (3.1.2). La segunda parte, establece la existencia de un equilibrio minimal positivo bajo cierta condición de inestabilidad de la solución trivial y mejora la conclusión de la Proposición 3.1.3.

**Teorema 3.2.1** *Consideramos el problema (3.1.1) con condiciones de contorno tipo Dirichlet en un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ . Supongamos que  $f$  verifica (1.1.7) y (1.1.8), con  $f_0$  continua en  $(x, u)$ , localmente Lipschitz en  $u$  y  $f(x, 0) \geq 0$ . Entonces,*

- I) *o bien existe un punto de equilibrio minimal **no negativo**  $\varphi_m^+$ , o bien toda la dinámica del sistema se va a infinito, es decir,  $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow \infty$ , en tiempo finito o infinito. En caso de existir, el equilibrio minimal es, o bien  $\varphi_m^+ \equiv 0$  (si  $f(x, 0) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ ), o bien  $\varphi_m^+(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$  (si  $f(x_0, 0) > 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$ ).*
- II) *Además, si  $f(x, 0) \equiv 0$  y existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que*

$$f(x, s) \geq (\lambda_1 + \varepsilon)s \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad 0 \leq s \leq s_0 \quad (3.2.4)$$

*donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  con condiciones de contorno tipo Dirichlet en  $\Omega$ , entonces 0 es un punto de equilibrio aislado y, o bien toda la dinámica del sistema se va a infinito (en tiempo finito o infinito), o bien existe un punto de equilibrio **positivo** minimal  $\varphi_m^+$ .*

*En todos estos casos, si existe el punto de equilibrio minimal positivo entonces es asintóticamente estable por abajo.*

**Nota 3.2.2** *La condición (3.2.4) no es más que una manera de expresar la inestabilidad de 0. De hecho, esta propiedad se tiene si  $f$  verifica*

$$\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} > \lambda_1 \quad \text{uniformemente en } x.$$

*En particular, si existe  $\partial_u f(x, 0)$  entonces la propiedad anterior es equivalente a  $\partial_u f(x, 0) > \lambda_1$  para todo  $x \in \Omega$ .*

*Más adelante veremos que se puede debilitar esta condición sobre  $f$  y el resultado sigue siendo válido.*

Como consecuencia de este teorema tenemos

**Corolario 3.2.3** *Supongamos que  $f$  verifica*

$$f(x, s) \leq C(x)s + D(x)$$

*con  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , y  $D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ , tal que el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  decae exponencialmente.*

*Supongamos además que*

$$f(x, s) \geq (\lambda_1 + \varepsilon)s \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad 0 \leq s \leq s_0,$$

donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  con condiciones de contorno tipo Dirichlet en  $\Omega$ .

Entonces, existen dos equilibrios extremos positivos, es decir, existen dos equilibrios ordenados  $0 < \varphi_m^+ \leq \varphi_M$  (que podrían coincidir). Además,  $\varphi_m^+$  es estable por abajo y  $\varphi_M$  lo es por arriba.

Es más, para las soluciones positivas, existe un atractor  $\mathcal{A}_+$  tal que

$$\mathcal{A}_+ \subset [\varphi_m^+, \varphi_M].$$

Además,  $\varphi_m^+, \varphi_M \in \mathcal{A}_+$ .

**Demostración.** Como  $f$  verifica la primera propiedad sabemos que, por el capítulo anterior, existe un punto de equilibrio maximal que es estable por arriba. En particular, existe una solución acotada. Ahora bien, como  $f$  verifica la segunda propiedad, el Teorema 3.2.1 implica la existencia de un punto de equilibrio positivo minimal que es estable por abajo. Tenemos pues, la existencia de dos puntos de equilibrio extremos positivos ordenados en  $X^+$  (que podrían coincidir).

La existencia de atractor sigue por ser  $X^+ \setminus \{0\}$  positivamente invariante y ser el semigrupo no lineal asintóticamente compacto. ■

**Demostración del Teorema 3.2.1.** i) Si  $f(x, 0) \equiv 0$  entonces 0 es solución y ésta es la solución minimal no negativa. Supongamos, pues, que  $f(x, 0) \not\equiv 0$ . Entonces, la solución del problema parabólico que parte de 0,  $u(t, x; 0)$ , es creciente por ser 0 una subsolución del problema elíptico asociado (ver Lema B.4.5).

Entonces, o bien  $\|u(t, x; 0)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow \infty$ , ya sea para  $t \rightarrow \infty$  o para  $t \rightarrow T_0$  para cierto  $T_0 > 0$  (explosión en tiempo finito), o bien  $u(t, x; 0)$  está acotada para todo tiempo  $t \geq 0$ . Si se da la primera opción no hay nada que probar puesto que, por la propiedad de monotonía, para todo  $u_0 \geq 0$  se tiene  $u(t, x; u_0) \geq u(t, x; 0)$  y, por tanto,  $u(t, x; u_0)$  también explota. Si se da la segunda, hemos visto que  $u(t, x; 0)$  es creciente y estamos suponiendo que está acotada para todo tiempo  $t$ . Por tanto, existe el límite puntual

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; 0) = \varphi_m^+(x).$$

Ahora bien, por el Teorema de Ascoli-Arzelá, dicha convergencia es uniforme en  $x$  (ver Lema 1.3.1) por lo que  $0 \leq \varphi_m^+$  es un equilibrio de (3.1.1). Este equilibrio es minimal ya que cualquier otro equilibrio de (3.1.1),  $\psi$ , satisface  $0 < \psi$ , y por el principio de comparación debe ser  $u(t, x; 0) \leq \psi$ . Luego, tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene  $\varphi_m^+ \leq \psi$ . Además, en este caso, tenemos que la solución minimal no es sólo no negativa sino positiva por el principio del máximo.

La estabilidad por abajo de  $\varphi_m^+$  sigue del hecho de que dado cualquier dato inicial  $u_0 \in X$  tal que  $0 \leq u_0 \leq \varphi_m^+$  se tiene, por comparación  $u(t, x; 0) \leq u(t, x; u_0) \leq \varphi_m^+$  y  $u(t, x; 0) \rightarrow \varphi_m^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

ii) Supongamos ahora  $f(x, 0) \equiv 0$ , y que se tiene (3.2.4), esto es,

$$f(x, s) \geq (\lambda_1 + \varepsilon)s \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

Supongamos además que no toda la dinámica se va a infinito, es decir, que existe alguna solución global acotada, distinta de la trivial, del problema (2.2.7) con dato inicial no negativo  $v_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ .

En lo que sigue, basta considerar datos iniciales positivos con derivada normal negativa en la frontera, ya que en otro caso, dejando evolucionar el sistema tenemos que la solución a tiempo  $t$  verifica estas condiciones (por el principio del máximo) y basta entonces tomar esta solución a tiempo  $t$  como dato inicial. Sea entonces  $u_0 \geq 0$  un dato inicial con esta propiedad.

Sea  $\phi$  la primera autofunción (que podemos suponer positiva) con norma  $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$  del problema

$$\begin{cases} -\Delta z = \lambda_1 z & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Hacemos la prueba en tres pasos.

**Paso A:** Convergencia de las soluciones  $u(t, x; \gamma\phi)$ , con  $0 < \gamma < \gamma_0$  a puntos de equilibrio.

Dado  $s_0 > \gamma > 0$ ,  $\gamma\phi$  es una subsolución del problema elíptico asociado al problema no lineal (3.1.1) ya que entonces

$$-\Delta(\gamma\phi) = \lambda_1\gamma\phi \leq (\lambda_1 + \varepsilon)\gamma\phi \leq f(x, \gamma\phi).$$

Por tanto, tenemos que  $u(t, x; \gamma\phi)$  es no decreciente en tiempo (ver Lema B.4.5 y Nota B.4.7) y por tanto, o bien, converge puntualmente a cierta función  $\varphi_\gamma$ , o bien, diverge. Ahora bien, como existe una solución acotada (cuyo dato inicial lo hemos supuesto regular y denotado por  $v_0 \in C_0^1(\Omega)$ ), existe  $\gamma_0$  suficientemente pequeño tal que  $\gamma\phi \leq v_0$  para todo  $0 < \gamma \leq \gamma_0 \leq s_0$  y entonces  $u(t, x; \gamma\phi)$  no diverge. Por tanto,  $u(t, x; \gamma\phi) \rightarrow \varphi_\gamma$  uniformemente en  $x \in \Omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (ver Lema 1.3.1), a cierta función  $\varphi_\gamma$ . Además, por el Lema 2.2.1,  $\varphi_\gamma$  es un equilibrio.

Dados  $\gamma < \tilde{\gamma}$ , tenemos por lo anterior,  $u(t, x; \gamma\phi) \rightarrow \varphi_\gamma$  y  $u(t, x; \tilde{\gamma}\phi) \rightarrow \varphi_{\tilde{\gamma}}$ . Pero  $\gamma\phi \leq \tilde{\gamma}\phi$ , luego, por comparación,  $u(t, x; \gamma\phi) \leq u(t, x; \tilde{\gamma}\phi)$  y entonces  $\varphi_\gamma \leq \varphi_{\tilde{\gamma}}$ . Por tanto,  $\{\varphi_\gamma\}_\gamma$  es un conjunto ordenado.

**Paso B:** Los equilibrios están uniformemente alejados de cero. En concreto, vamos a probar que dado  $u_0 \in C_0^1(\bar{\Omega})$ ,  $u_0 > 0$ , existe un tiempo  $t_0 = t_0(u_0)$  tal que para todo  $t \geq t_0$  se tiene

$$u_f(t; u_0) \geq s_0\phi.$$

Denotamos por  $u_f$  la solución del problema (3.1.1). Sea  $g$  definida por

$$g(x, s) = \begin{cases} (\lambda_1 + \varepsilon)s, & 0 \leq s \leq s_0 \\ \tilde{g}(x, s), & s_0 < s \end{cases}$$

tal que  $g(x, s) \leq f(x, s)$  para todo  $x \in \Omega$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Denotamos por  $u_g$  la solución del problema (3.1.1) con segundo miembro  $g$ . Entonces, por el principio de comparación, para todo  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ ,

$$u_g(t, x; u_0) \leq u_f(t, x; u_0), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

De nuevo por comparación, para  $u_0 = \gamma\phi$  y  $0 < \gamma < \gamma_0$ ,

$$e^{\varepsilon t}\gamma\phi = u_g(t, x; \gamma\phi) \leq u_f(t, x; \gamma\phi),$$

donde la desigualdad es cierta mientras la solución  $u_g$  esté por debajo de  $s_0$ . Esto ocurre para todo  $t \geq 0$  tal que  $e^{\varepsilon t}\gamma \leq s_0$ , es decir, para todo  $0 \leq t \leq t_0$  con  $t_0 = \varepsilon^{-1}\ln(s_0/\gamma)$ .

Nótese además que para todo  $t \geq 0$ , la solución  $u_g(t; \gamma\phi)$  es creciente puesto que lo es en  $0 \leq t \leq t_0$ . Ahora bien, fijado  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$  con derivada normal negativa en la frontera existe  $0 < \gamma < \gamma_0$  tal que  $0 < \gamma\phi < u_0$ . Por tanto, si  $t > t_0$  entonces,

$$u_f(t; u_0) \geq u_g(t; u_0) \geq u_g(t; \gamma\phi) \geq u_g(t_0; \gamma\phi) = s_0\phi.$$

**Paso C:** Los equilibrios  $\varphi_\gamma$  convergen a un punto de equilibrio cuando  $\gamma \rightarrow 0$ .

Sea  $\varphi^*(x) = \inf_{0 < \gamma < \gamma_0} \varphi_\gamma(x)$ . Veamos que  $\varphi^*$  es un equilibrio positivo y que, de hecho, es el minimal. En efecto, consideremos el conjunto  $\{\varphi_\gamma\}_{0 < \gamma < \gamma_0}$ . Como  $\varphi_\gamma$  es un equilibrio, verifica

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_\gamma = f(x, \varphi_\gamma) & \text{en } \Omega \\ \varphi_\gamma = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Como  $\|\varphi_\gamma\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$  para cierta constante  $C$  independiente de  $\gamma$ , tenemos que, para otra constante que seguimos denotamos igual,

$$\|f(\cdot, \varphi_\gamma)\|_{L^p(\Omega)} \leq C$$

con  $p > N/2$  y por tanto, por regularidad elíptica,

$$\|\varphi_\gamma\|_{C^\theta(\Omega)} \leq C, \quad 0 < \theta < 1.$$

En particular, el conjunto  $\{\varphi_\gamma\}_{0 < \gamma < \gamma_0}$  es equicontinuo. Como además, es un conjunto ordenado,  $\varphi_\gamma \rightarrow \varphi^* \in C(\bar{\Omega})$  cuando  $\gamma \rightarrow 0$ . Además, podemos pasar al límite en (3.2.6) y obtener así que  $\varphi^*$  es un punto de equilibrio. Además, como para todo  $0 < \gamma < \gamma_0$ ,  $\varphi_\gamma > s_0\phi$  tenemos que también

$$\varphi^* > s_0\phi.$$

De donde  $\varphi^*$  es positivo.

Por último, es claro que, si  $\psi$  es cualquier equilibrio positivo, existe una constante  $\gamma > 0$  tal que  $\gamma\phi \leq \psi$ . Luego, por comparación,  $\varphi_\gamma \leq \psi$ . Ahora bien,  $\varphi^* \leq \varphi_\gamma$ . Luego,  $\varphi^* \leq \psi$  y, por tanto,  $\varphi^*$  es minimal.

De esta forma, tenemos que  $\varphi^*$  es el punto de equilibrio minimal del problema. Para obtener la estabilidad por abajo de  $\varphi^*$  basta tener en cuenta que si  $0 < \gamma < \gamma_0$  entonces  $u(t; \gamma\phi) \rightarrow \varphi^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Tomando ahora un dato inicial regular  $0 \leq u_0 \leq \varphi^*$  tenemos que existe  $0 < \gamma < \gamma_0$  tal que  $0 < \gamma\phi \leq u_0 \leq \varphi^*$  y por comparación

$$0 \leq u(t; \gamma\phi) \leq u(t; u_0) \leq \varphi^*$$

de donde, tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene la estabilidad asintótica por abajo de  $\varphi^*$ . ■

**Nota 3.2.4** *El argumento anterior prueba que de hecho  $\varphi_m^+ = \min_{0 < \gamma < \gamma_0} \varphi_\gamma = \varphi_{\gamma_1}$  para cierto  $0 < \gamma_1 < \gamma_0$ .*

**Nota 3.2.5** *En el caso ii) del teorema se obtiene que el intervalo de orden  $(0, \varphi_m^+)$  está incluido en  $W^s(\varphi_m^+)$ , la variedad estable de  $\varphi_m^+$ .*

Como consecuencia del Teorema 3.2.6, más abajo, los resultados del Teorema 3.2.1 siguen siendo válidos considerando condiciones de contorno tipo Neumann homogéneas o Robin. El resultado para condiciones de contorno no lineales es consecuencia del Teorema 3.2.7 más adelante

Siguiendo el mismo argumento que hemos usado para probar el Teorema 3.2.1 se puede extender el resultado del apartado ii) a no linealidades que estén por arriba de una recta de la forma  $m(x)s$  cerca de 0 con  $m(x)$  un potencial para el cual la solución trivial sea inestable. En concreto se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.6** *Sea  $X = C(\overline{\Omega})$ . Supongamos que  $f(x, 0) \equiv 0$  y existe  $m \in L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$  tal que*

$$f(x, s) \geq m(x)s \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad 0 \leq s \leq s_0. \quad (3.2.7)$$

*Supongamos, además, que la solución trivial idénticamente 0 es inestable para el problema*

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = m(x)v & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.8)$$

*o equivalentemente,  $\lambda_1(-\Delta - m(x)) < 0$  donde  $\lambda_1(-\Delta - m(x))$  denota el primer autovalor del operador  $-\Delta + m$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ .*

*Entonces, si existe una solución positiva acotada para (3.1.1) entonces existe la solución minimal positiva para dicho problema.*

**Demostración.** La prueba se sigue de manera análoga a la prueba del Teorema 3.2.1. Para el Paso A, tomamos ahora  $\phi$  la primera autofunción positiva con norma  $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$  del problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta v - m(x)v = \lambda v & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Ahora, para todo  $0 < \gamma < \gamma_0$ ,  $\gamma\phi$  es subsolución de (3.1.1) con condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$  ya que

$$-\Delta(\gamma\phi) = m(x)\gamma\phi + \lambda_1\gamma\phi \leq m(x)\gamma\phi \leq f(x, \gamma\phi)$$

donde  $\lambda_1 < 0$  es el primer autovalor del operador  $-\Delta - m$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ .

De nuevo, para  $0 < \gamma < \gamma_0$ ,  $u(t, x; \gamma\phi)$  es creciente y converge a un punto de equilibrio.

La función  $g$  del Paso B viene dada por

$$g(x, s) = \begin{cases} m(x)s, & 0 \leq s \leq s_0 \\ \tilde{g}(x, s), & s_0 < s \end{cases}$$

y siguiendo el mismo argumento que antes, 0 es un punto aislado.

El Paso C se prueba como antes. ■

Nótese que la sola inestabilidad lineal de 0 no basta para poder probar el resultado anterior. Es necesario que 0 sea un punto aislado del sistema para evitar que  $\varphi^* \equiv 0$  (ver Paso B de la demostración). En nuestro caso, esa propiedad viene implicada por la condición (3.2.7). Sin embargo, si existe  $m \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} = m_0(x)$$

uniformemente en  $x$ , entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe  $s_0 > 0$  tal que para todo  $0 \leq s \leq s_0$

$$f(x, s) \geq (m_0(x) - \varepsilon)s \quad \text{para casi todo } x \in \Omega.$$

Si 0 es un equilibrio linealmente inestable de (3.1.1) entonces  $\lambda_1(-\Delta - m_0) < 0$  ya que  $m_0(x) = \partial_s f(x, 0)$ . Tomando ahora  $\varepsilon$  suficientemente pequeño tenemos que  $\lambda_1(-\Delta - (m_0 - \varepsilon)) < 0$  por la continuidad del primer autovalor respecto del potencial. Luego, existe un potencial  $m(x) = m_0(x) - \varepsilon$  en las condiciones del teorema.

Nótese que el límite anterior sea uniforme en  $x$  no es más que una condición sobre la aproximación de la derivada de  $f$  en  $u = 0$ . Por ejemplo, en el caso de las no linealidades logísticas que se considerarán en el Capítulo 5, consideramos el caso  $f(x, s) = m_0(x)s - n(x)s^\rho$ , con  $\rho > 1$ ,  $n \geq 0$  acotada y  $m_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , con lo que el límite anterior se verifica.

Resumiendo, la inestabilidad de cero junto con cierta regularidad de  $f$  cerca de 0 implica la existencia de un equilibrio minimal positivo. Por otra parte, la inestabilidad de cero junto con la unicidad de equilibrios positivos implica la existencia de un único equilibrio (minimal) (ver Sección 3.3).

En el caso de problemas con condiciones de contorno no lineales se tiene el siguiente resultado análogo al Teorema 3.2.6.

**Teorema 3.2.7** *Consideramos el problema con condiciones de contorno no lineales como en las Secciones 1.1.3 y 2.2.3*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = g(x, u) & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Supongamos que  $f$  y  $g$  son continuas en  $(x, u)$ , localmente Lipschitz en  $u$  y  $f(x, 0), g(x, 0) \geq 0$ . Entonces,

- I) o bien existe un punto de equilibrio minimal **no negativo**  $\varphi_m^+$ , o bien toda la dinámica del sistema se va a infinito, es decir,  $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow \infty$ , en tiempo finito o infinito. En caso de existir, dicho punto minimal es, o bien  $\varphi_m^+ \equiv 0$  (si  $f(x, 0) = g(x, 0) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ ), o bien  $\varphi_m^+(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$  (si  $f(x_0, 0) > 0$  o  $g(x_0, 0) > 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$  o  $x_0 \in \Gamma$  respectivamente).
- II) Además, si  $f(x, 0) \equiv g(x, 0) \equiv 0$  y existen  $s_0 > 0$ ,  $m \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , y  $n \in L^q(\Gamma_1)$ ,  $q > N - 1$ , tales que, para todo  $0 \leq s \leq s_0$ ,

$$f(x, s) \geq m(x)s \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad g(x, s) \geq n(x)s \quad \text{para todo } x \in \Gamma_1$$

y 0 es inestable para el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u = m(x)u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = n(x)u & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

entonces 0 es un punto de equilibrio aislado y, o bien toda la dinámica del sistema se va a infinito (en tiempo finito o infinito), o bien existe un punto de equilibrio **positivo** minimal  $\varphi_m^+$ .

En todos estos casos, si existe el punto de equilibrio minimal positivo entonces es asintóticamente estable por abajo.



**Demostración.** La prueba de i) es análoga a la prueba de i) en el Teorema 3.2.1 salvo que ahora 0 es subsolución si  $f(x, 0)$  o  $g(x, 0)$  no son idénticamente nulas. En caso contrario, entonces cero es un equilibrio.

La prueba de ii) se sigue de manera análoga a la prueba del Teorema 3.2.1. Para el Paso A, tomamos ahora  $\phi$  la primera autofunción positiva con norma  $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$  del problema de autovalores

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla v) + (c(x) - m(x))v = \lambda v & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + (b(x) - n(x))v = 0 & \text{en } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Ahora, para todo  $0 < \gamma < s_0$ ,  $\gamma\phi$  es subsolución de (3.2.9) ya que

$$-\operatorname{div}(a(x)\gamma\phi) + c(x)\gamma\phi = m(x)\gamma\phi + \lambda_1\gamma\phi \leq m(x)\gamma\phi \leq f(x, \gamma\phi)$$

donde  $\lambda_1 < 0$  es el primer autovalor del problema (3.2.10) y

$$\frac{\partial \gamma\phi}{\partial \vec{n}} + b(x)\gamma\phi = n(x)\gamma\phi \leq g(x, \gamma\phi).$$

De nuevo, para  $0 < \gamma < \gamma_0$ ,  $u(t, x; \gamma\phi)$  es creciente y converge a un punto de equilibrio.

Para el Paso B, consideramos las funciones auxiliares

$$F(x, s) = \begin{cases} m(x)s, & 0 \leq s \leq s_0 \\ \tilde{g}(x, s), & s_0 < s \end{cases}$$

y

$$G(x, s) = \begin{cases} n(x)s, & 0 \leq s \leq s_0 \\ \tilde{g}(x, s), & s_0 < s \end{cases}$$

tales que  $f(x, s) \geq F(x, s)$  y  $g(x, s) \geq G(x, s)$  para todo  $s \geq 0$  y  $x \in \Omega$  o  $x \in \Gamma_1$  respectivamente. Siguiendo el mismo argumento que el del Paso B del Teorema 3.2.1 se tiene que 0 es un punto aislado.

El Paso C se prueba como antes. ■

Siguiendo la idea del Teorema II.1 en [14] (ver Sección 4.2.2) enunciamos a continuación una consecuencia interesante de estos dos últimos resultados: todo sigue siendo válido cuando la propiedad (3.2.4) (o (3.2.7) en el caso de que la estimación dependa de  $x$ ) se tiene en  $\Omega_1$ , un subdominio de  $\Omega$ , considerando el primer autovalor de  $-\Delta$  en dicho subdominio en vez del primer autovalor de  $-\Delta$  en  $\Omega$ . Dicho de otra forma, todo es válido si  $f$  verifica,

$$f(x, s) \geq (\mu_1 + \varepsilon)s \quad \text{para todo } x \in \Omega_1, 0 \leq s \leq s_0$$

en vez de (3.2.4), siendo ahora  $\mu_1$  el primer autovalor de  $-\Delta$  en  $\Omega_1$  con condiciones Dirichlet en la frontera. En el caso más general en que  $f$  depende de  $x$ , la propiedad (3.2.7) se puede sustituir por

$$f(x, s) \geq m(x)s \quad \text{en } \Omega_1$$

con  $m(x) \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ . En concreto, tenemos el siguiente resultado

**Corolario 3.2.8** *Sea  $\Omega_1$  un subdominio conexo de  $\Omega$ . Supongamos  $f(x, 0) \equiv 0$ ,*

$$f(x, s) \geq m(x)s \quad \text{en } \Omega_1 \quad 0 \leq s \leq s_0 \quad (3.2.11)$$

*donde  $m(x) \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$  es tal que 0 es inestable para el problema*

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = m(x)v & \text{en } \Omega_1 \\ v|_{\partial\Omega_1} = 0 \end{cases}$$

*Supongamos, además, que existe una solución acotada del problema (3.1.1) en  $\Omega$ .*

*Entonces, existe el equilibrio minimal del problema (3.1.1) con condiciones de contorno tipo Dirichlet. Además, este equilibrio es asintóticamente estable por abajo.*

**Demostración.** Denotamos por  $u_{\Omega_1}$  la solución del problema (3.1.1) en  $\Omega_1$  con condiciones de contorno tipo Dirichlet y  $u_{\Omega}$  a la solución del mismo problema en  $\Omega$ .

Nótese que, por hipótesis, existe una solución acotada  $u_{\Omega}(t, x; v_0)$  (para cierto dato inicial  $v_0$  que podemos suponer en  $C_0^1(\overline{\Omega})$ ) del problema en  $\Omega$ . Entonces, dado  $w_0 \in C_0^1(\overline{\Omega_1})$  con  $0 \leq w_0 \leq v_0$  se tiene, por comparación,

$$0 \leq u_{\Omega_1}(t, x; w_0) \leq u_{\Omega}(t, x; v_0) \quad \text{para } x \in \Omega_1.$$

Luego, existe una solución acotada del problema en  $\Omega_1$  y, por tanto, el Teorema 3.2.1 aplicado al problema en  $\Omega_1$  proporciona la existencia de un equilibrio minimal positivo, asintóticamente estable por abajo,  $\varphi_m^{\Omega_1}$  para el problema de Dirichlet en  $\Omega_1$ . Luego, dado un dato inicial  $u_0$  en  $\Omega_1$  con  $0 \leq u_0 \leq \varphi_m^{\Omega_1}$  en  $\Omega_1$  entonces  $u_{\Omega_1}(t, x; u_0) \rightarrow \varphi_m^{\Omega_1}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Además, este equilibrio es una subsolución (en sentido débil) del problema elíptico en  $\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta w = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

ya que,

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_m^{\Omega_1} = f(x, \varphi_m^{\Omega_1}) & \text{en } \Omega_1 \\ \varphi_m^{\Omega_1} = 0 & \text{en } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Extendiendo ahora  $\varphi_m^{\Omega_1}$  por cero a  $\Omega$  y tomando  $0 \leq \xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_m^{\Omega_1} \nabla \xi = \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_m^{\Omega_1} \nabla \xi = \int_{\Omega_1} -\Delta \varphi_m^{\Omega_1} \xi + \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \varphi_m^{\Omega_1}}{\partial n} \xi \leq \int_{\Omega_1} f(x, \varphi_m^{\Omega_1}) \xi = \int_{\Omega} f(x, \varphi_m^{\Omega_1}) \xi$$

donde hemos usado que  $\frac{\partial \varphi_m^{\Omega_1}}{\partial n} \leq 0$  en  $\partial\Omega_1$ ,  $\xi \geq 0$  en  $\partial\Omega_1$ ,  $f(x, 0) = 0$  y  $\varphi_m^{\Omega_1} = 0$  fuera de  $\Omega_1$ . Se tiene pues que efectivamente  $\varphi_m^{\Omega_1}$  es una subsolución del problema en  $\Omega$ .

Entonces,  $u_{\Omega}(t, x; \varphi_m^{\Omega_1})$  es monótona creciente (ver Lema B.4.5). Como además, está acotada, debe converger a un punto de equilibrio que denotamos  $\varphi_m^{\Omega}$ . Veamos que dicho equilibrio no es más que el punto de equilibrio minimal positivo para el problema en  $\Omega$ . En efecto, sea  $0 \leq u_0 \in C(\overline{\Omega})$  (que podemos suponer positivo y con derivada normal negativa en la frontera). Sea  $v_0 \in C_0(\overline{\Omega_1})$  tal que  $u_0 \geq v_0$  en  $\Omega_1$ . Entonces, por comparación, en  $\Omega_1$  se tiene

$$u_{\Omega}(t, x; u_0) \geq u_{\Omega}(t, x; v_0) \geq u_{\Omega_1}(t, x; v_0), \quad x \in \Omega_1.$$

En particular, tomando  $v_0$  suficientemente pequeño para que  $v_0 \leq \varphi_m^{\Omega_1}$  y tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} u_{\Omega}(t, x; u_0) \geq \varphi_m^{\Omega_1}(x), \quad \text{para } x \in \Omega_1.$$

Como  $u_{\Omega}(t, x; u_0) \geq 0$  para todo  $t > 0$ ,  $x \in \Omega$ , extendiendo por cero a todo  $\Omega$  las soluciones del problema en  $\Omega_1$ , se tiene la desigualdad en todo  $\Omega$ , es decir,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} u_{\Omega}(t, x; u_0) \geq \varphi_m^{\Omega_1}(x), \quad x \in \Omega.$$

En particular, tomando  $u_0 = \psi$  un equilibrio positivo del problema en  $\Omega$  tenemos

$$\psi(x) = \liminf_{t \rightarrow \infty} u_{\Omega}(t, x; \psi) \geq \varphi_m^{\Omega_1}(x), \quad x \in \Omega.$$

Haciendo actuar ahora el semigrupo de las soluciones en todo  $\Omega$  en ambos lados de la desigualdad tenemos

$$\psi(x) = u(t, x; \psi) \geq u(t, x; \varphi_m^{\Omega_1}) \quad x \in \Omega.$$

Tomando ahora límite cuando  $t \rightarrow \infty$  tenemos

$$\psi \geq \varphi_m^{\Omega}, \quad x \in \Omega,$$

por lo que  $\varphi_m^{\Omega}$  es el equilibrio minimal del problema en todo  $\Omega$ .

Para obtener la estabilidad asintótica por abajo del equilibrio minimal, sea  $\phi$  la primera autofunción positiva con  $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$  del problema de autovalores con potencial  $m$  en  $\Omega_1$ . Nótese que  $\gamma\phi$ , para  $0 < \gamma$  suficientemente pequeño, es una subsolución del problema en  $\Omega_1$  y, su extensión por cero a todo  $\Omega$ , que seguimos denotando igual, es una subsolución del problema en  $\Omega$ . Por tanto, gracias al Lema B.4.5, tenemos que  $u_\Omega(t, x; \gamma\phi)$  es creciente en tiempo. Además, siguiendo el razonamiento del Paso A en la prueba del Teorema 3.2.6 tenemos que debe converger a un punto de equilibrio  $\psi$ .

Ahora, dado un dato inicial  $u_0 \leq \varphi_m^\Omega$ , existe  $1 > \gamma > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\gamma\phi \leq u_0$  en  $\Omega$ . Por monotonía,

$$\varphi_m^\Omega \geq u_\Omega(t, x; u_0) \geq u_\Omega(t, x; \gamma\phi)$$

Tomando ahora límite cuando  $t$  tiende a  $\infty$  tenemos que

$$\varphi_m^\Omega(x) \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} u_\Omega(t, x; u_0) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} u_\Omega(t, x; u_0) \geq \psi(x)$$

para cierto equilibrio  $\psi$  del problema en  $\Omega$ . Ahora bien, como  $\varphi_m^\Omega$  es minimal, debe ser  $\psi = \varphi_m^\Omega$  y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_\Omega(t, x; u_0) = \varphi_m^\Omega(x)$$

y, por tanto,  $\varphi_m^\Omega$  es asintóticamente estable por abajo. ■

**Nota 3.2.9** *Nótese que al plantear el problema de Dirichlet en un dominio más pequeño, el primer autovalor de  $-\Delta$  crece. Por tanto, en principio, la hipótesis (3.2.11) es más fuerte que pedir la misma propiedad en  $\Omega$ . Sin embargo, sólo se pide que se satisfagan estas propiedades en  $\Omega_1$ , que es más débil que pedirlo en todo el dominio  $\Omega$ .*

**Nota 3.2.10** *Comparando la hipótesis (3.2.7) del Teorema 3.2.6 con la hipótesis (3.2.11) del Corolario 3.2.8, este último puede ser leído de la siguiente manera: si el potencial  $m$  es tal que cero es inestable en un subdominio  $\Omega_1$  entonces, 0 no es estable para el problema con el potencial  $m$  en todo  $\Omega$ .*

*Dicho de otra forma, si  $m$  es tal que 0 es inestable para el problema en  $\Omega_1$ , ninguna extensión de  $m$  a todo  $\Omega$  puede impedir que 0 sea inestable para el problema en  $\Omega$ .*

*En el caso de operadores en forma de divergencia  $A = \operatorname{div}(a\nabla \cdot)$ , la prueba de este hecho se puede obtener de manera directa. En efecto, en tal caso,*

$$\begin{aligned} \lambda_1^\Omega(-A - m) &= \inf_{H_0^1(\Omega)} \int_\Omega a|\nabla v|^2 - \int_\Omega m|v|^2 \\ &\leq \inf_{H_0^1(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} a|\nabla v|^2 - \int_{\Omega_1} m|v|^2 = \lambda_1^{\Omega_1}(-A - m) < 0. \end{aligned}$$

*De donde 0 es inestable para el problema en todo  $\Omega$ .*

*La ventaja de la prueba del Corolario 3.2.8 es que es una argumentación dinámica que no requiere una estructura variacional en el operador elíptico y que por tanto puede ser trasladada a los operadores generales de la Sección 1.1.*

### 3.3. Sobre la estabilidad y unicidad de puntos de equilibrio positivos

En el Teorema 3.2.6, hemos probado que en caso de que exista una solución acotada, se tiene la existencia de un punto de equilibrio minimal positivo que es estable por abajo. Sin embargo, podemos obtener más información sobre la estabilidad del equilibrio minimal.

Consideremos ahora la linealización en  $\varphi_m^+$  del problema elíptico asociado a (3.1.1)

$$\begin{cases} -\Delta u - \partial_s f(x, \varphi_m^+)u &= 0 & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Este problema tiene un primer autovalor simple  $\lambda_1$  y una primera autofunción positiva  $\phi_1(x)$ . Además, debe ser  $\lambda_1 \geq 0$ . Si fuese  $\lambda_1 < 0$  tendríamos que, por una parte, el punto de equilibrio  $\varphi_m^+$  es inestable en la dirección de  $\phi_1$  y, por tanto, la solución del problema de evolución (3.1.1) que parte de  $\varphi_m^+ - \varepsilon\phi_1$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño debería alejarse de  $\varphi_m^+$ . Por otra parte, sabemos que dado cualquier dato inicial  $0 < u_0 \leq \varphi_m^+$ , se tiene  $u(t, x; u_0) \rightarrow \varphi_m^+(x)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Tomando ahora  $0 < u_0 = \varphi_m^+ - \varepsilon\phi_1 \leq \varphi_m$  (sabemos que  $u_0$  es positivo para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño por ser negativa la derivada normal de  $\varphi_m^+$  en la frontera) y por comparación tenemos

$$u(t, x; \varphi_m^+ - \varepsilon\phi_1) \leq \varphi_m^+(x)$$

de donde, tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\varphi_m^+(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; \varphi_m^+ - \varepsilon\phi_1) = \varphi_m^+(x),$$

es decir,

$$u(t, x; \varphi_m^+ - \varepsilon\phi_1) \rightarrow \varphi_m^+(x) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

que está en contradicción con la inestabilidad de  $\varphi_m^+$ . Por tanto, debe ser  $\lambda_1 \geq 0$ .

Ahora bien, si  $\lambda_1 > 0$  entonces tenemos que  $\varphi_m^+$  es estable. Si, por contra,  $\lambda_1 = 0$  no podemos afirmar, en general, la estabilidad de  $\varphi_m^+$  (tendríamos una variedad centro unidimensional). Sin embargo, bajo ciertas hipótesis de convexidad sobre  $f$  es posible probar la estabilidad. En concreto, tenemos el siguiente resultado

**Proposición 3.3.1** *Sea  $\varphi$  un punto de equilibrio estable por abajo (resp. por arriba) del problema (3.1.1). Entonces, el primer autovalor  $\lambda_1$  de la linealización en  $\varphi$*

$$\begin{cases} -\Delta v = \partial_s f(x, \varphi)v + \lambda_1 v & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

es no negativo. Si  $\lambda_1$  es positivo, entonces  $\varphi$  es además estable por arriba (resp. por abajo) y, por tanto, estable.

Es más, si  $f$  verifica

$$f(x, s) \leq \partial_s f(x, s)s \quad \text{o} \quad f(x, s) \geq \partial_s f(x, s)s \quad (3.3.12)$$

en  $\Omega$  para  $|s| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$  donde, para cada  $s$  fijo, la desigualdad es estricta para  $x$  en un conjunto de medida no nula, entonces  $\lambda_1$  no puede ser 0 y, por tanto,  $\varphi$  es estable.

**Demostración.** Razonando como antes, sabemos que  $\lambda_1 \geq 0$ . Supongamos que  $\lambda_1 = 0$ . Entonces, existe una única solución (salvo múltiplos) no nula del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \partial_s f(x, \varphi)v & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

que denotamos  $\phi(x)$ . Además, podemos elegir  $\phi(x) > 0$  en  $\Omega$ .

Por la ecuación que verifica  $\varphi$  tenemos

$$-\Delta\varphi = f(x, \varphi),$$

y por la propiedad (3.3.12) tenemos

$$-\Delta\varphi \leq \partial_s f(x, \varphi)\varphi.$$

Multiplicando esta desigualdad por  $\phi(x) > 0$  tenemos

$$-\Delta\varphi\phi \leq \partial_s f(x, \varphi)\varphi\phi = -\Delta\phi\varphi$$

donde para la última igualdad hemos usado la ecuación que verifica  $\phi$ . Integrando ahora en  $\Omega$  y usando que (3.3.12) es estricta en un conjunto de medida positiva, tenemos, integrando por partes,

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi\nabla\phi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\phi = \int_{\Omega} -\Delta\varphi\phi < \int_{\Omega} -\Delta\phi\varphi = \int_{\Omega} \nabla\phi\nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}\varphi$$

lo que es una contradicción ya que las integrales en  $\partial\Omega$  son nulas por las condiciones de contorno que verifican  $\varphi$  y  $\phi$ . Por tanto, debe ser  $\lambda_1 > 0$ . ■

En lo que sigue será de gran utilidad el concepto de función  $\mu$ -creciente que definimos a continuación.

**Definición 3.3.2** Diremos que  $h(x, s)$  es  $\mu$ -creciente (resp.  $\mu$ -decreciente) si dados  $s_1 < s_2$  se tiene  $h(x, s_1) \leq h(x, s_2)$  (resp.  $h(x, s_1) \geq h(x, s_2)$ ) con desigualdad estricta en un conjunto de medida no nula.

**Nota 3.3.3** La propiedad (3.3.12) es equivalente a

$$\frac{f(x, s)}{s} \quad \mu\text{-creciente} \quad \text{o} \quad \frac{f(x, s)}{s} \quad \mu\text{-decreciente}$$

respectivamente. Esta propiedad para todo  $s \in \mathbb{R}$  implica la existencia de una única solución positiva del problema (3.1.1) (ver Teorema 3.3.11 más adelante). Nótese que en la Proposición 3.3.1 sólo pedimos que se verifique esta propiedad para  $0 \leq s \leq \|\varphi_m^+\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

Este resultado puede obtenerse también como consecuencia de otro resultado más general que enunciaremos a continuación

**Proposición 3.3.4** Supongamos que existe un equilibrio positivo de (3.1.1). Entonces,

- i) Si  $f(x, s) \leq \partial_s f(x, s)s$  para  $0 \leq s \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$  entonces  $\varphi$  es estable.
- ii) Si  $f(x, s) \geq \partial_s f(x, s)s$  para  $0 \leq s \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$  entonces  $\varphi$  es inestable.

**Demostración.** Sean

$$m_0(x) = f(x, \varphi(x))/\varphi(x) \quad \text{y} \quad m_1(x) = \partial_s f(x, \varphi(x)).$$

Nótese que  $\varphi$  es una autofunción positiva del problema

$$\begin{cases} -\Delta w &= \frac{f(x, \varphi)}{\varphi} w = m_0(x)w & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}w &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Luego, cero es el primer autovalor de  $-\Delta - m_0(x)$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ . Además,

$$-\Delta - m_1(x) = -\Delta - m_0(x) + (m_0(x) - m_1(x)).$$

Ahora bien, por (3.3.12) tenemos que o bien  $m_0(x) \leq m_1(x)$ , o bien  $m_0(x) \geq m_1(x)$ , donde la desigualdad es estricta en un conjunto de medida positiva. Luego, cero no puede ser el primer autovalor del problema para  $m_1$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$ , es decir, la linealización en  $\varphi$  y, por tanto,  $\varphi$  es o bien estable (si  $m_0(x) \leq m_1(x)$ ) o bien inestable (si  $m_0(x) \geq m_1(x)$ ).

Nótese que el signo de  $m_0(x) - m_1(x)$  determina hacia donde se desplaza el primer autovalor. ■

**Nota 3.3.5** Nótese que la Proposición 3.3.4 es válida para operadores generales, no necesariamente en forma de divergencia. En ese caso es necesario usar los resultados sobre la monotonía del primer autovalor con respecto al potencial de estos operadores de Berestycki et al. [15].

Bajo ciertas hipótesis sobre el término no lineal muy relacionadas con (3.3.12) (ver Nota 3.3.7 más adelante) es posible probar la unicidad de solución positiva del problema elíptico no lineal asociado a (3.1.1). Esto junto con la inestabilidad de 0 va implicar, en particular, la existencia de un único punto de equilibrio positivo del sistema que, además, es globalmente asintóticamente estable en  $X^+ \setminus \{0\}$ .

Como ejemplo, vamos a probar el resultado para un problema con condiciones de contorno Dirichlet en un dominio acotado. La unicidad es consecuencia directa del siguiente resultado que es una adaptación al caso en que  $f$  dependa de  $x$  del Lema 10.3.3, pag. 160, de Cazenave y Haraux [18].

**Proposición 3.3.6** *Supongamos que  $f(x, 0) \equiv 0$  y  $f(x, \cdot)$  es cóncava en  $[0, \infty)$ . Sean  $\varphi > 0$  una solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = f(x, \varphi) & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.13)$$

y  $\psi \geq 0$  verificando

$$\begin{cases} -\Delta\psi \geq f(x, \psi) & \text{en } \Omega \\ \psi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.14)$$

es decir,  $\psi$  es supersolución del problema (3.3.13). Entonces, o bien  $\psi \equiv 0$ , o bien  $\psi \geq \varphi$ . En particular, existe a lo sumo una solución positiva del problema (3.3.13).

**Demostración.** Claramente,  $\psi = 0$  es solución del problema (3.3.13). Supongamos, entonces que  $\psi \neq 0$  y veamos que  $\psi \geq \varphi$ .

Restando las dos ecuaciones, tenemos

$$-\Delta(\varphi - \psi) \leq f(x, \varphi) - f(x, \psi)$$

y multiplicando por  $w = (\varphi - \psi)^+$  e integrando en  $\Omega$  y aplicando partes,

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \frac{f(x, \varphi) - f(x, \psi)}{\varphi - \psi} w^2 \leq 0. \quad (3.3.15)$$

Si probamos que, para toda  $w \in H_0^1(\Omega)$  se verifica

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 - k(x, \varphi) |w|^2 \geq 0 \quad (3.3.16)$$

con  $k(x, \varphi) = f(x, \varphi)/\varphi$ , entonces, restando (3.3.16) de (3.3.15) tenemos

$$\int_{\{\varphi \geq \psi\}} \left( \frac{f(x, \varphi)}{\varphi} - \frac{f(x, \varphi) - f(x, \psi)}{\varphi - \psi} \right) w^2 \leq 0$$

ya que  $w = 0$  en  $\{\varphi < \psi\}$ . Ahora bien, como  $f$  es estrictamente cóncava, sobre el conjunto  $\{\varphi \geq \psi\}$ , tenemos

$$\frac{f(x, \varphi)}{\varphi} - \frac{f(x, \varphi) - f(x, \psi)}{\varphi - \psi} \geq 0$$

Luego,  $w = 0$  y por tanto,  $\psi \geq \varphi$ .

Veamos que para toda  $w \in H_0^1(\Omega)$ , se verifica (3.3.16). Para ello, vamos a probar que se verifica en  $\mathcal{D}(\Omega)$  y por densidad lo extenderemos a  $H_0^1(\Omega)$ . Sea  $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ , por la ecuación que verifica  $\varphi$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - k(x, \varphi) w^2 &= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \frac{\Delta\varphi}{\varphi} w^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \nabla\varphi \nabla \left( \frac{w^2}{\varphi} \right) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \nabla\varphi \left( 2w \frac{\nabla w}{\varphi} - \frac{w^2}{\varphi^2} \nabla\varphi \right) \\ &= \int_{\Omega} \left| \nabla w - \frac{w}{\varphi} \nabla\varphi \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dada ahora,  $w \in H_0^1(\Omega)$  existe una sucesión  $\{w_n\}_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$  tal que  $w_n \rightarrow w$  en  $H_0^1(\Omega)$ , tomando límite en la desigualdad anterior, tenemos lo que queríamos probar. ■

**Nota 3.3.7** *Supongamos que  $f$  es cóncava, regular y  $f(x, 0) \equiv 0$ . Por el teorema del valor medio, para cierto  $0 < \xi_x < s$*

$$\frac{f(x, s)}{s} = \frac{f(x, s) - f(x, 0)}{s} = \partial_s f(x, \xi_x) \geq \partial_s f(x, s)$$

donde en la última desigualdad hemos usado la concavidad de  $f$ . Luego  $f$  verifica la segunda propiedad de (3.3.12). Además, es claro que esta última propiedad es equivalente al decrecimiento en  $s$  de  $f(x, s)/s$ .

Un resultado relacionado se encuentra en Brézis y Oswald [17] donde se prueba el siguiente resultado sobre unicidad de solución positiva de (3.3.13)

**Teorema 3.3.8 (Brézis y Oswald)** *Supongamos que  $f$  es continua en su segunda variable y verifica la siguiente propiedad*

$$\frac{f(x, s)}{s} \text{ es } \mu\text{-decreciente en } s. \quad (3.3.17)$$

Entonces, existe a lo más una solución positiva del problema (3.3.13).

También es ese trabajo se prueba el siguiente resultado que proporciona la existencia de solución positiva para el problema (3.3.13).

**Teorema 3.3.9 (Brézis y Oswald)** *Supongamos que  $f(x, s)$  es continua en su segunda variable y que para todo  $\delta > 0$  existe una constante  $C_\delta \geq 0$  tal que  $f(x, s) \geq -C_\delta s$  para todo  $0 \leq s \leq \delta$ , en casi todo  $x \in \Omega$ . Supongamos además que para cada  $u \geq 0$ ,  $f(\cdot, s) \in L^\infty(\Omega)$  y existe una constante  $C > 0$  tal que  $f(x, s) \leq C(s + 1)$ . Sean*

$$a_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x, s)}{s} \quad y \quad a_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s}.$$

Supongamos

$$\lambda_1(-\Delta - a_0) < 0 < \lambda_1(-\Delta - a_\infty).$$

Entonces, existe al menos una solución positiva del problema (3.3.13).

**Nota 3.3.10** *En el teorema anterior se permite que  $a_0$  y  $a_\infty$  tomen valores  $\pm\infty$ . Para ello, se toma como definición de primer autovalor*

$$\lambda_1(-\Delta - a) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_{[v \neq 0]} a(x)|v|^2}{\int_\Omega |v|^2}$$

aceptando que dicho autovalor puede ser  $\pm\infty$ .

Probamos ahora un resultado relacionado con éste que proporciona la unicidad para el problema (3.3.13) en el caso en que  $f(x, s)/s$  sea  $\mu$ -creciente o  $\mu$ -decreciente sin necesidad de suponer  $f(\cdot, u) \in L^\infty(\Omega)$ . En concreto, podemos probar el siguiente resultado

**Teorema 3.3.11** *Supongamos que existe una solución maximal positiva del problema (3.3.13) y que, o bien*

$$\frac{f(x, s)}{s} \text{ es } \mu\text{-decreciente en } s;$$

o bien,

$$\frac{f(x, s)}{s} \text{ es } \mu\text{-creciente en } s.$$

Entonces, existe una única solución positiva del problema (3.3.13).

**Demostración.** Sea  $\varphi$  la solución maximal positiva del problema (3.3.13) y  $\psi \leq \varphi$  otra solución. Tenemos entonces

$$-\Delta\varphi = f(x, \varphi) \quad -\Delta\psi = f(x, \psi).$$

Multiplicando la primera ecuación por  $\psi$ , la segunda por  $\varphi$ , restando e integrando en  $\Omega$ , tenemos

$$0 = \int_\Omega \frac{f(x, \varphi)}{\varphi} \varphi\psi - \int_\Omega \frac{f(x, \psi)}{\psi} \varphi\psi = \int_\Omega \left( \frac{f(x, \varphi)}{\varphi} - \frac{f(x, \psi)}{\psi} \right) \varphi\psi.$$

Ahora bien, como  $\psi \leq \varphi$  tenemos por la propiedad de crecimiento de  $f(s)/s$  que

$$\frac{f(x, \varphi)}{\varphi} - \frac{f(x, \psi)}{\psi} \neq 0$$

en un conjunto de medida no nula y no cambia de signo. Por tanto, debe ser  $\psi \equiv 0$ . ■

**Nota 3.3.12** A continuación presentamos otra demostración del Teorema 3.3.11 que es válida para el caso de operadores y condiciones de contorno más generales. En particular es válida para (3.1.1). Sean

$$m_0(x) = \frac{f(x, \varphi(x))}{\varphi(x)} \quad \text{y} \quad m_1(x) = \frac{f(x, \psi(x))}{\psi(x)}$$

Entonces,  $\varphi$  es una solución positiva de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = m_0(x)\varphi & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

por lo que el primer autovalor de  $-\Delta - m_0(x)$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$  es cero. De manera análoga tenemos que el primer autovalor de  $-\Delta - m_1(x)$  con las condiciones de contorno dadas por  $\mathcal{B}$  es cero. Ahora bien,

$$-\Delta - m_1(x) = -\Delta - m_0(x) + (m_1(x) - m_0(x)).$$

Luego, el primer autovalor de  $-\Delta - m_1(x)$  es distinto de cero ya que o bien  $m_0(x) \leq m_1(x)$ , o bien  $m_0(x) \geq m_1(x)$ , con desigualdad estricta en un conjunto de medida no nula. Lo que nos lleva a una contradicción y por tanto,  $\varphi = \psi$ .

Del teorema anterior se tiene directamente el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.13** Si  $f(x, s)/s$  es  $\mu$ -creciente o  $\mu$ -decreciente y existen dos equilibrios positivos del problema (3.1.1) entonces no están ordenados.

En cuanto a la estabilidad tenemos

**Corolario 3.3.14** Si  $f(x, s)/s$  es  $\mu$ -decreciente y existe un equilibrio maximal  $\varphi_M$  no negativo de (3.1.1) entonces  $\varphi_M$  es el único equilibrio del problema (3.1.1). Además, es globalmente asintóticamente estable para las soluciones positivas.

**Corolario 3.3.15** Supongamos que existen  $C \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $0 \leq D \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/2$ , tal que

$$f(x, s) \leq C(x)s + D(x) \tag{3.3.18}$$

para casi todo  $x \in \Omega$  y todo  $s \geq 0$ . Supongamos además que el semigrupo generado por  $\Delta + C$ ,  $S_{\Delta+C}$ , decae exponencialmente. Supongamos además que  $f$  verifica o bien

i) existe a lo sumo un único equilibrio positivo del problema y 0 es un punto de equilibrio inestable del sistema; o bien

ii)  $f(x, s)/s$  es decreciente y que 0 es un punto de equilibrio inestable del sistema.

Entonces, existe un único punto de equilibrio positivo del problema que, además, es globalmente asintóticamente estable.

**Demostración.** Como  $f$  verifica (3.3.18) sabemos que existe un equilibrio maximal no negativo que es estable por arriba (ver Corolario 2.2.9). Ahora bien, dicho equilibrio maximal es, o bien 0 o bien positivo (por el principio del máximo). Pero no puede ser 0 porque estamos suponiendo que 0 es inestable (en particular, es inestable por arriba). Luego, el equilibrio maximal debe ser positivo. La unicidad de este tipo de equilibrios proporciona el resultado. La estabilidad por abajo (y, por tanto, la estabilidad asintótica global del único equilibrio positivo) se siguen de la inestabilidad de 0 que, junto con la estabilidad por arriba proporcionan la estabilidad global. ■





## Capítulo 4

# Revisión de algunos resultados elípticos conocidos

En este capítulo, vamos a revisar algunos resultados referentes a la existencia de puntos de equilibrio positivos ya conocidos en los que se usan técnicas de ecuaciones elípticas como son el grado topológico y sub-supersoluciones. Así mismo, recuperaremos estos resultados (a veces parcialmente, a veces mejorados) mediante el uso de las técnicas dinámicas expuestas anteriormente.

### 4.1. El autovalor principal

Antes de comenzar a enunciar diferentes resultados que podemos encontrar en la bibliografía relacionados con la existencia de puntos de equilibrio positivos, vamos a hacer un breve resumen acerca del concepto de *autovalor principal* y su relación con el primer autovalor de un problema con potencial. Este concepto aparece de manera constante en la bibliografía en el estudio de la existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad.

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado y  $m \in L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$ .

**Definición 4.1.1** Diremos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor principal de  $m(x)$ , y lo denotaremos por  $\lambda_0(m)$ , si existe una solución positiva en  $\Omega$  del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x)u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Consideramos el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u - m(x)u = \mu u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.2)$$

y denotamos por  $\mu_1(m)$  su primer autovalor. Este autovalor siempre tiene asociada una autofunción positiva.

En primer lugar, nótese que  $-\lambda_0(m)$  es un autovalor principal para  $-m$ . Además, si tomamos  $m(x) \equiv 1$ , tenemos que  $\lambda_0(1)$  es el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.3)$$

es decir,  $\lambda_0(1) = \mu_1(0)$ .

**Lema 4.1.2** Sea  $m \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ . Sea  $\lambda_0(m)$  un autovalor principal de (4.1.1) para  $m$ . Entonces se verifica:

i)  $\lambda_0(m) = 1$  si y sólo si  $\mu_1(m) = 0$ .

ii) Si  $m(x) \geq 0$  para casi todo  $x \in \Omega$  entonces

$$\text{signo}(\lambda_0(m) - 1) = \text{signo}(\mu_1(m))$$

iii) Si  $m(x) \leq 0$  para casi todo  $x \in \Omega$  entonces

$$\text{signo}(\lambda_0(m) - 1) \neq \text{signo}(\mu_1(m))$$

**Demostración.** Probamos primero i). Supongamos que  $\lambda_0(m) = 1$ , entonces existe una función positiva en  $\Omega$ ,  $\varphi$ , solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = m(x)u & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Como el único autovalor de (4.1.2) que tiene asociada una autofunción positiva es el primero (por ser  $m \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , y  $-\Delta - m(x)$  autoadjunto y compacto), se tiene  $\mu_1(m) = 0$ . Recíprocamente, si  $\mu_1(m) = 0$  sabemos que este autovalor tiene asociada una autofunción positiva, luego  $\lambda_0(m) = 1$  es un autovalor principal para  $m$ . Por tanto, hemos probado la parte i) del lema.

Supongamos ahora  $m(x) \geq 0$ . Sea  $\varphi$  una autofunción positiva asociada a  $\mu_1(m)$  y  $\psi$  una autofunción positiva asociada a  $\lambda_0(m)$ . Multiplicando la ecuación que satisface  $\psi$  por  $\varphi$ , y la que satisface  $\varphi$  por  $\psi$ , e integrando por partes tenemos

$$\int_{\Omega} m\varphi\psi + \mu_1(m) \int_{\Omega} \varphi\psi = \int_{\Omega} \nabla\varphi\nabla\psi = \lambda_0(m) \int_{\Omega} m\varphi\psi.$$

Luego

$$\mu_1(m) \int_{\Omega} \varphi\psi = (\lambda_0(m) - 1) \int_{\Omega} m\varphi\psi.$$

Como  $\varphi, \psi > 0$  y  $m \geq 0$ , tenemos que  $\text{signo}(\lambda_0(m) - 1) = \text{signo}(\mu_1(m))$  y, por tanto, ii) es cierto.

Si  $m(x) \leq 0$  entonces  $\text{signo}(\lambda_0(m) - 1) \neq \text{signo}(\mu_1(m))$  y por tanto iii) es cierto. ■

Es conocido que si  $m(x)$  no cambia de signo entonces el autovalor principal es único (ver Figueiredo [23] o López-Gómez [35]).

**Corolario 4.1.3** Sea  $m \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ .

1. Si  $m(x) \geq 0$ , entonces el semigrupo generado por  $\Delta + \lambda m(x)$  decae exponencialmente si y sólo si  $\lambda < \lambda_0(m)$ .
2. Si  $m(x) \leq 0$ , entonces el semigrupo generado por  $\Delta + \lambda m(x)$  decae exponencialmente si y sólo si  $\lambda > \lambda_0(m)$ .

**Demostración.** Probamos el caso en que  $m(x) \geq 0$ . Si  $m(x) \leq 0$ , la demostración es análoga. Supongamos  $\lambda \geq 0$ . Sea  $\tilde{m}(x) = \lambda m(x)$ . Consideramos el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u - \tilde{m}(x)u = \mu u & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

El decaimiento exponencial del semigrupo generado por  $\Delta + \lambda m(x)$  es equivalente a que  $\mu_1(\tilde{m})$  sea positivo. Como  $\tilde{m} \geq 0$ , por el Lema 4.1.2 esto es cierto si  $\lambda_0(\tilde{m}) > 1$ .

Si  $\lambda = 0$  entonces  $\tilde{m} = 0$  y sabemos que  $\mu_1(0)$ , el primer autovalor de  $-\Delta$  es positivo. Si  $\lambda > 0$  entonces  $\lambda_0(\tilde{m}) = \lambda_0(m)/\lambda$ . Necesitamos, pues  $\lambda_0(m)/\lambda > 1$  que no es más que pedir  $\lambda < \lambda_0(m)$ .

Falta ver qué ocurre si  $\lambda < 0$ . En ese caso,  $\tilde{m} \leq 0$ . De nuevo, el decaimiento exponencial del semigrupo generado por  $\Delta + \lambda m(x)$  es equivalente a que  $\mu_1(\tilde{m})$  sea positivo. Por el Lema 4.1.2, esto es cierto si  $\lambda_0(\tilde{m}) = \lambda_0(m)/\lambda < 1$ . Como  $\lambda < 0$  esto equivale a pedir  $\lambda_0(m) > \lambda$ . Lo que prueba el resultado. ■

En lo que sigue consideraremos potenciales  $m(x)$  que pueden cambiar de signo en  $\Omega$ . Para operadores de la forma

$$Lu = - \sum_{i,j}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u$$

fuertemente elíptico, con  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  y  $a_0 \in L^{N/2}(\Omega)$ ,  $a_0(x) \geq 0$  en  $\Omega$ , se tiene

**Proposición 4.1.4 (Proposición 1.12A de Figueiredo [23])** Sean  $m, \hat{m} \in L^r(\Omega)$  con  $r > N/2$ , tales que  $m(x) \leq \hat{m}(x)$  para todo  $x \in \Omega$ . Supongamos que existen  $\lambda_0(m)$  y  $\lambda_0(\hat{m})$ . Entonces,

$$\lambda_0(m) \geq \lambda_0(\hat{m}) \quad (4.1.6)$$

Además, si  $m(x) < \hat{m}(x)$  en un conjunto de medida positiva, entonces la desigualdad anterior es estricta.

**Proposición 4.1.5 (Proposición 1.12B de Figueiredo [23])** El autovalor principal es una función continua del potencial en la norma de  $L^{N/2}(\Omega)$ .

Consideramos ahora la función  $\mu(\lambda)$  que a cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  le hace corresponder el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda m u &= \mu(\lambda) u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces  $\lambda$  es un autovalor principal de (4.1.1) si y sólo si  $\mu(\lambda) = 0$ . Estudiando los ceros de la función  $\mu(\lambda)$  se puede determinar por tanto el número de autovalores principales del problema (4.1.1). Para ello, el siguiente lema enuncia una propiedad importante de  $\mu(\lambda)$ .

**Lema 4.1.6 (Lema 6.1 de López-Gómez [35], pag. 283)** La función  $\mu(\lambda)$  es una función analítica en  $\lambda$  y cóncava. Además, si  $m(x) \in C(\bar{\Omega})$  es positiva en algún punto de  $\Omega$  entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\lambda) = -\infty$$

y si  $m(x)$  es negativa en algún punto de  $\Omega$  entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mu(\lambda) = -\infty.$$

Además, se tiene

**Lema 4.1.7** Supongamos que  $m \in C(\bar{\Omega})$  cambia de signo en  $\Omega$ . Supongamos además que existe algún  $\lambda^*$  para el que  $\mu(\lambda^*) > 0$ . Entonces existen dos autovalores principales,  $\lambda_m < \lambda^* < \lambda_M$ . Además, la solución trivial del problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda m u &= 0 & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.7)$$

es estable para todo  $\lambda_m < \lambda < \lambda_M$  e inestable para todo  $\lambda > \lambda_m$  y para todo  $\lambda > \lambda_M$ .

**Demostración.** Por el Lema 4.1.6, si existe algún  $\lambda^*$  para el que  $\mu(\lambda^*) > 0$  entonces existen dos autovalores principales,  $\lambda_m$  y  $\lambda_M$ , uno menor que  $\lambda^*$  y otro mayor. Además,

$$\mu(\lambda) > 0 \quad \text{para todo } \lambda_m < \lambda < \lambda_M$$

y, por tanto, la solución trivial del problema (4.1.7) es estable para todo  $\lambda_m < \lambda < \lambda_M$  e inestable para todo  $\lambda > \lambda_m$  y para todo  $\lambda > \lambda_M$ . ■

## 4.2. Existencia de puntos de equilibrio positivos

A continuación revisaremos algunos resultados de la literatura referentes a la existencia de puntos de equilibrio positivos.

### 4.2.1. Revisión del artículo de Amann.

En Amann [1] se prueban una serie de resultados referentes a la existencia de soluciones positivas de problemas elípticos mediante técnicas topológicas, como son técnicas de punto fijo, el grado de Leray-Schauder, el índice, etc. Mucho de estos resultados elípticos pueden obtenerse mediante el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de los problemas parabólicos asociados.

**Nota 4.2.1** *Este artículo de Amann fue el que sistematizó e hizo clásico el argumento de considerar sub-supersoluciones ordenadas a partir de las cuales se define un esquema iterativo que consiste en resolver sucesivos problemas elípticos partiendo de las sub-supersoluciones y que da lugar a sucesiones monótonas que convergen a puntos de equilibrio.*

A continuación, pasamos a comentar algunos de los resultados de existencia de soluciones para problemas elípticos contenidos en Amann [1].

El problema que se considera es

$$\begin{cases} Lu = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ Bu = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2.8)$$

con  $\Omega$  un abierto acotado regular de  $\mathbb{R}^N$ , donde operador  $L$  es un operador fuertemente elíptico, de la forma

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^N a_i(x) D_i u + a(x)u$$

con  $a_{ij}, a_i, a \in C^\mu(\bar{\Omega})$ ,  $(a_{ij})$  simétrica y  $a \geq 0$ .

Las condiciones de contorno son de la forma

$$Bu = b(x)u + \delta \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

donde  $b \in C^{1+\mu}(\partial\Omega)$  y,

1. o bien,  $\delta = 0$  y  $b = 1$ ;
2. o bien,  $\delta = 1$  y  $b \geq 0$  (en el caso en que  $b \equiv 0$  se pide  $a > 0$ ).

Sea  $\hat{\mu} = \mu$  si  $N \geq 2$  y  $\hat{\mu} = 0$  si  $N = 1$ .

Además, se supone que  $g \in C^{2-\delta+\hat{\mu}}(\partial\Omega)$ ,  $f \in C^{\hat{\mu}}(\bar{\Omega} \times I)$  con  $0 < \hat{\mu} < 1$  y existe  $\omega \geq 0$  tal que

$$f(x, \xi) - f(x, \eta) > -\omega(\xi - \eta)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\xi, \eta \in I$ ,  $\xi > \eta$ , donde  $I$  es un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ . Esta propiedad se tiene, por ejemplo, si  $f \in C^1$  y  $\partial_s f(x, s) > -\omega$ .

En Amann [1] se buscan soluciones en el espacio

$$D_I = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v(x) \in I \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}\}.$$

En el caso particular de trabajar con  $I = \mathbb{R}^+$  esto equivale a trabajar con soluciones no negativas.

En concreto se tiene

**Teorema 4.2.2 (Teorema 9.6 de Amann [1], pag. 649)** *Supongamos que  $g \geq 0$  y  $f(\cdot, 0) \geq 0$ . Sea  $\hat{f} \in C(\bar{\Omega})$  y supongamos que  $m \in C^{\hat{\mu}}(\bar{\Omega})$  con  $m(x) > 0$  para casi todo  $x \in \Omega$ . Supongamos que para todo  $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$*

$$f(x, \xi) \leq \hat{f}(x) + \lambda m(x)\xi \quad (4.2.9)$$

*Entonces el problema (4.2.8) tiene una solución minimal no negativa supuesto  $\lambda < \lambda_0(m)$ , siendo  $\lambda_0(m)$  el autovalor principal asociado a  $m$ .*

En nuestro contexto, este resultado para condiciones de contorno Dirichlet, Neumann o Robin homogéneas es consecuencia directa de la Proposición 3.1.1 y las notas siguientes. En efecto, nótese que (4.2.9) implica que se tiene la propiedad (3.1.2) con  $C(x) = \lambda m(x)$  y  $D(x) = \hat{f}(x)$ , y  $\lambda < \lambda_0(m)$  implica el decaimiento exponencial del semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$ . El resultado es consecuencia ahora de la Proposición 3.1.1 y las notas siguientes.

En el caso de un operador en forma de divergencia con condiciones de contorno tipo Neumann, Robin no homogéneas o no lineales el resultado es consecuencia de la Proposición 3.1.2.

De hecho, nuestro resultado se aplica a problemas más generales puesto que no necesitamos  $0 \leq m \in C^{\hat{\mu}}(\bar{\Omega})$ , basta  $m \in L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$  sin imponer restricciones sobre el signo de  $m(x)$ .

El resultado del teorema anterior para condiciones de contorno no homogéneas en el caso de un operador en forma de divergencia (ver Secciones 1.1.3 y 2.2.3) es consecuencia directa del Teorema 3.2.7. No obtenemos, sin embargo, el resultado para condiciones de contorno no homogéneas en el caso de operadores generales.

Nótese que el caso de condiciones de contorno tipo Robin o no lineales tampoco imponemos restricción de signo sobre  $b(x)$ .

El siguiente resultado se prueba en Amann [1] mediante el uso de técnicas de punto fijo estudiando el radio espectral de la derivada por la derecha del operador integral cuyo punto fijo son las soluciones de (4.2.8).

**Teorema 4.2.3 (Teorema 9.8 de [1], pag. 650)** *Sea  $I = \mathbb{R}_+$ ,  $g = 0$  y  $f(\cdot, 0) = 0$ . Supongamos que existe  $\partial_u f(\cdot, 0) \in C^{\hat{\mu}}(\bar{\Omega})$  y es continua en un entorno de 0, y  $\partial_u f(x, 0) > 0$  para casi todo  $x \in \Omega$ .*

*Si existe una supersolución  $\psi > 0$  del problema (4.2.8), entonces existe una solución maximal positiva del problema (4.2.8) en el intervalo de orden  $[0, \psi]$  supuesto  $\lambda_0(\partial_u f(\cdot, 0)) < 1$ .*

Al igual que antes, en nuestro contexto, este resultado es consecuencia directa de los Teoremas 3.2.1 (para condiciones Dirichlet) y 3.2.6 (para condiciones Neumann o Robin). En efecto, por ser  $\lambda_0(\partial_u f(x, 0)) < 1$ ,  $u \equiv 0$  es un punto de equilibrio (linealmente) inestable. Además,  $f$  es suficientemente regular y por tanto estamos en las condiciones del Teorema 3.2.1 (o (3.2.7) del Teorema 3.2.6) (ver comentarios después de la prueba del Teorema 3.2.6).

Nótese que para obtener el resultado no necesitamos tanta regularidad en los coeficientes ni la positividad de  $\partial_u f(\cdot, 0)$  (ver comentarios después de la prueba del Teorema 3.2.6).

El siguiente resultado enuncia condiciones para tener la existencia de una supersolución positiva y poder aplicar así el teorema anterior. La prueba en Amann [1] se obtiene combinando los Teoremas 4.2.2 y 4.2.3 y un resultado de existencia de punto fijo para aplicaciones crecientes y compactas verificando ciertas hipótesis sobre su derivada por la derecha en 0 y el radio espectral de una mayorante en infinito.

**Teorema 4.2.4 (Teorema 9.9 de [1], pag. 650)** *En las hipótesis del teorema anterior, supongamos que existen  $\hat{f} \in C(\bar{\Omega})$  y  $m \in C^{\hat{\mu}}(\bar{\Omega})$ , con  $m(x) > 0$  para casi todo  $x \in \Omega$ , tales que, para algún  $\lambda \geq 0$ ,*

$$f(x, \xi) \leq \hat{f}(x) + \lambda m(x)\xi$$

*para todo  $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$ .*

*Entonces, existe al menos una solución positiva del problema (4.2.8) supuesto  $\lambda_0(\partial_u f(\cdot, 0)) < 1$  y  $\lambda < \lambda_0(m)$ .*

Con nuestros argumentos, de nuevo este teorema es consecuencia directa de la Proposición 3.1.3.

Nótese que, además, estamos en las condiciones de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.6, según las condiciones de contorno. En particular, la regularidad de  $f$  junto con la condición sobre el problema linealizado en 0, es decir,  $\lambda_0(\partial_u f(\cdot, 0)) < 1$ , nos da la existencia y estabilidad por abajo de un punto de equilibrio positivo minimal (ver Teorema 3.2.1 o 3.2.6 o 3.2.7); mientras que la propiedad sobre el potencial  $m(x)$  ( $\lambda < \lambda_0(m)$ ) nos da la existencia y estabilidad por arriba de un punto de equilibrio positivo maximal (ver Teorema 1.0.1). Nótese que  $f$  verifica la propiedad (3.1.2) con  $C(x) = \lambda m(x)$  y  $D(x) = \hat{f}(x)$  y el semigrupo generado por  $\Delta + C$  decae exponencialmente (ver Corolario 4.1.3).

Es más, para aplicar nuestros argumentos, de nuevo, no es necesaria la condición  $m(x) \geq 0$  ni la regularidad de  $\hat{f}(x)$  ni de  $m(x)$ .

En Amann [1] se enuncia la siguiente consecuencia del teorema anterior donde se dan condiciones sobre  $m$  y  $\partial_u f(x, 0)$  para que estén en las condiciones del teorema.

**Corolario 4.2.5 (Corolario 9.10 de [1], pag. 651)** *En las hipótesis del teorema anterior, si*

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} \partial_u f(x, 0) > \lambda_0(1) \quad y \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} m(x) < \lambda_0(1)$$

*entonces existe al menos una solución positiva del problema (4.2.8).*

De nuevo, nuestros argumentos, prueban este resultado. En efecto, la hipótesis sobre  $\partial_u f(x, 0)$  implican que 0 es un punto de equilibrio inestable del problema parabólico asociado al problema elíptico (4.2.8).

La hipótesis sobre  $m(x)$  nos permiten aplicar la Proposición 3.1.3 con  $C = \beta = \max_{x \in \bar{\Omega}} m(x)$ . Nótese que el semigrupo asociado a  $-L - \beta$  decae exponencialmente por ser  $\beta < \lambda_0(1)$  (ver Corolario 4.1.3).

Además, con nuestros resultados obtenemos la existencia de un punto de equilibrio maximal y sin más que aplicar el Teorema 3.2.1 en el caso de condiciones de contorno tipo Dirichlet, el Teorema 3.2.6 en el caso de otras condiciones de contorno lineales o el Teorema 3.2.7 para condiciones de contorno no lineales, tenemos la existencia de un punto de equilibrio minimal positivo y, en particular, existe una solución positiva del problema (4.2.8). De hecho, tenemos que existen una solución minimal y otra maximal positiva. Además, tenemos la estabilidad por arriba del equilibrio maximal y la estabilidad por abajo del equilibrio minimal. Tenemos también que para el problema parabólico asociado el intervalo ordenado  $[\varphi_m^+, \varphi_M]$  atrae uniformemente a los conjuntos acotados de datos iniciales no negativos.

#### 4.2.2. Revisión del artículo de H. Berestycki y P. L. Lions

En Berestycki y Lions [14] se prueba el siguiente resultado para un problema de la forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2.10)$$

**Teorema 4.2.6 (Teorema II.1, pag. 18 de Berestycki y Lions [14])** *Sea  $\Omega_1$  un subdominio conexo de  $\Omega$ . Supongamos  $f(x, 0) \equiv 0$  y*

$$\liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x, s)}{s} > \mu_1 \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega}_1 \quad (4.2.11)$$

*donde  $\mu_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  en  $\Omega_1$ ; y*

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s} < \lambda_1 \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega} \quad (4.2.12)$$

*donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  en  $\Omega$ .*

*Entonces, existe una solución positiva del problema (4.2.10) en  $W^{2,p}(\Omega)$  (para todo  $p < \infty$ ).*

En la Nota II.1 de Berestycki y Lions [14] se observa que el corolario sigue siendo válido para operadores más generales, en concreto para operadores uniformemente elípticos de la forma

$$L = - \sum_{i,j} D_j (a_{ij} D_i) + \sum_i b_i D_i + c$$

con  $a_{ij} = a_{ji} \in C(\bar{\Omega})$ ,  $b_i \in L^\infty(\Omega)$  y  $0 \leq c \in L^\infty(\Omega)$ .

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente resultado sin más que tomar  $\Omega_1 = \Omega$ .

**Corolario 4.2.7 (Corolario II.1, pag. 19 de Berestycki y Lions [14])** *Supongamos que  $f(x, 0) \equiv 0$  y*

$$\liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x, s)}{s} > \lambda_1 \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega} \quad (4.2.13)$$

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s} < \lambda_1 \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega} \quad (4.2.14)$$

donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  en  $\Omega$ .

Entonces, existe una solución positiva del problema (4.2.10) en  $W^{2,p}(\Omega)$  (para todo  $p < \infty$ ).

La prueba de este resultado en Berestycki y Lions [14] sigue el método de las sub-supersoluciones para problemas elípticos (ver Nota 4.2.1): primero se construye una subsolución a partir de la primera función propia para el problema en  $\Omega_1$ ; ahora, se construye una sucesión de problemas que aproximan a (4.2.10) de manera que el segundo miembro de estos problemas esté acotado; de aquí se tiene que toda solución del problema original está acotada; se construye, por último, un algoritmo iterativo que proporciona una sucesión que converge a una solución del problema.

En nuestro contexto, el Teorema 4.2.6 se puede obtener como consecuencia de la Proposición 3.1.3 y el Corolario 3.2.8: por una parte la propiedad (4.2.12) implica que existen dos constantes  $C < \lambda_1$  y  $D > 0$  tales que, para todo  $s \geq 0$

$$f(x, s) \leq Cs + D, \quad x \in \Omega,$$

que no es más que la propiedad (3.1.2); mientras que la propiedad (4.2.11) implica la inestabilidad lineal de cero.

Nótese que, además, por la Proposición 3.1.3 tenemos la existencia de un equilibrio maximal positivo que es globalmente asintóticamente estable por arriba. Además estamos en las condiciones del Corolario 3.2.8 por lo que existe un equilibrio minimal que es globalmente asintóticamente estable por abajo.

En el caso del Corolario 4.2.7, la Proposición 3.1.3 y el Teorema 3.2.1 proporcionan directamente el resultado.

### 4.2.3. Revisión del artículo de P. L. Lions.

En Lions [34] se estudia el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.2.15)$$

con  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  y  $f$  localmente Lipschitz y sublineal en infinito, es decir, verificando

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 \quad (4.2.16)$$

donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$ .

En primer lugar, se enuncia el siguiente resultado que da una condición suficiente para la existencia de una solución positiva maximal.

**Teorema 4.2.8 (Teorema 1.3 de [34], pag. 447)** *Si  $f$  verifica (4.2.16),  $f(0) = 0$  y*

$$\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} > \lambda_1 \quad (4.2.17)$$

*entonces, existe una solución positiva maximal de (4.2.15). En el caso en que  $f$  se anule en algún  $\beta > 0$ , la solución positiva maximal lo es entre todas las menores que  $\beta$ .*

Para la prueba de este resultado se hace referencia a Amann [1], Amann [2] y Berestycki y Lions [14] (ver Secciones 4.2.1 y 4.2.2).

En nuestro caso, este resultado es consecuencia de la Proposición 3.1.3 y el Teorema 3.2.1. En el caso en que  $f$  se anule en  $\beta > 0$  el resultado se sigue de la prueba de la Proposición 3.1.3 y el Teorema 3.2.1 considerando ahora en vez de  $\phi$  la supersolución  $\beta$ .

Como antes, por la Proposición 3.1.3 tenemos la existencia de un equilibrio maximal positivo que es globalmente asintóticamente estable por arriba. Además estamos en las condiciones del Teorema 3.2.1 por lo que existe un equilibrio minimal que es globalmente asintóticamente estable por abajo.

También en Lions [34] se prueba, mediante el uso de sub-supersoluciones, el siguiente teorema



**Teorema 4.2.9 (Teorema 2.3 de [34], pag. 453)** *Supongamos que  $f$  es localmente Lipschitz,  $f(0) > 0$ . Si además  $f$  verifica que o bien, existe  $\beta > 0$  tal que  $f(\beta) = 0$ , o bien,  $f(s) > 0$  para todo  $s > 0$  y*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = K$$

con  $K < \lambda_1$ , entonces para todo  $0 < \lambda < \lambda_1/K$ , existe la menor solución positiva de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma} &= 0 \end{cases} \quad (4.2.18)$$

**Nota 4.2.10** *Si  $K = 0$  en el teorema anterior, entonces el resultado es válido para todo  $\lambda > 0$ .*

Con nuestras técnicas, este resultado es consecuencia de la Proposición 3.1.1. Pero, además, obtenemos no sólo los dos resultados anteriores, sino también resultados de estabilidad por abajo del menor punto de equilibrio positivo.

En efecto, supongamos primero  $\lambda = 1$ , como 0 es una subsolución del problema elíptico (4.2.18) la solución del problema de evolución que parte de 0 es monótona creciente. Si encontráramos una supersolución del problema elíptico, tendríamos que  $u(t, x; 0)$  converge a un punto de equilibrio minimal que además es positivo por el principio del máximo (ver Teorema 3.2.1 i)). La convergencia es uniforme por el Teorema de Ascoli-Arzelá (ver Lema 1.3.1).

Ahora bien, las hipótesis anteriores sobre  $f$  bastan para probar la existencia de una supersolución. En efecto, en el caso en que exista  $\beta > 0$  tal que  $f(\beta) = 0$ ,  $\beta$  es supersolución del problema elíptico. En otro caso, si  $f(s) > 0$  para todo  $s \geq 0$  y

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = K \quad (4.2.19)$$

con  $K < \lambda_1$ , tenemos que  $f$  verifica

$$f(s)s \leq Cs^2 + D|s|$$

para ciertos  $C < \lambda_1$  y  $D > 0$  (ver (2.1.11)). Luego, aplicando la Proposición 3.1.1 tenemos que existe un punto de equilibrio maximal y por tanto una supersolución del problema elíptico. De hecho, basta tener en cuenta que  $\phi$  (la solución de (2.2.9)) es una supersolución del problema (4.2.15).

La estabilidad por abajo del punto de equilibrio minimal se sigue de la Proposición 3.1.1 o el Teorema 3.2.1.

El resultado para todo  $0 < \lambda < \lambda_1/K$  es una consecuencia inmediata de la siguiente observación: si denotamos  $g(u) = \lambda f(u)$  el problema para  $g$  está en las condiciones del teorema con  $\lambda = 1$  ya que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\lambda f(s)}{s} < \lambda K < \lambda_1.$$

En este último caso, nosotros tenemos, no sólo la existencia de un punto de equilibrio minimal positivo sino también la de un punto de equilibrio maximal. Con esto, tenemos *acotada* la dinámica de las soluciones no negativas del problema. Además, la región delimitada por estos dos equilibrio atrae a la dinámica de las soluciones no negativas del sistema de manera uniforme.

#### 4.2.4. Revisión del artículo de Figueiredo.

En Figueiredo [23] se estudia un problema similar al estudiado en [1] (ver Sección 4.2.1) con condiciones de contorno son de tipo Dirichlet donde el operador  $L$  es un operador en forma de divergencia

$$Lu = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u$$

fuertemente elíptico, con  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  y  $a_0 \in L^{N/2}(\Omega)$ ,  $a_0(x) \geq 0$  en  $\Omega$ . Se pide que, además,  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$  y verifique las siguientes hipótesis:

(c<sub>0</sub>) Existe una función continua,  $f_0(x) \geq 0$ , y  $s_0 > 0$  tales que

$$f(x, s) \geq f_0(x)s \quad \text{para todo } 0 < s < s_0, x \in \bar{\Omega}.$$

(c<sub>∞</sub>) Existen dos funciones continuas  $f_\infty(x), c(x)$  con  $c(x) \geq 0$  tales que

$$f(x, s) \leq f_\infty(x)s + c(x) \quad \text{para todo } s \geq 0, x \in \bar{\Omega}.$$

(nd) Para todo  $M > 0$  existe  $k \geq 0$  tal que  $s \rightarrow f(x, s) + ks$  es no decreciente para  $|s| \leq M$ .

**Teorema 4.2.11 (Teorema 2.2 de [23], pag. 53)** *Supongamos que  $f$  satisface (c<sub>0</sub>), (c<sub>∞</sub>) y (nd). Supongamos además que*

$$\lambda_0(f_0) < 1 \tag{4.2.20}$$

$$\lambda_0(f_\infty) > 1 \tag{4.2.21}$$

(esta última condición sobre  $f_\infty$  es necesaria si  $f_\infty(x_0) > 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$ ). Entonces existe una solución positiva del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.22}$$

También se prueba en Figueiredo [23].

**Lema 4.2.12 (Lema 2.3 de [23], pag. 56)** *En las hipótesis del teorema anterior, el problema (4.2.22) posee una solución positiva maximal.*

Estos resultados se obtienen en Figueiredo [23] mediante el método de las sub-supersoluciones: las hipótesis (c<sub>∞</sub>) y (4.2.21) implican la existencia de una supersolución positiva del problema elíptico (solución de un problema elíptico lineal) y las hipótesis (c<sub>0</sub>) y (4.2.20) implican la existencia de una subsolución positiva menor que la supersolución anterior. Por tanto, existe una solución positiva. La idea de la prueba sigue una argumentación clásica (ver Nota 4.2.1): se consideran dos problemas elípticos lineales que proporcionen una subsolución,  $\underline{u}$ , y una supersolución,  $\bar{u}$ , positivas ordenadas y se aplica un algoritmo iterativo mediante el cual se construyen dos sucesiones que parten de la sub y la supersolución; cada una de las sucesiones va a converger monótonamente a una solución entre  $\underline{u}$  y  $\bar{u}$ ; como  $\underline{u}$  es positiva, las soluciones obtenidas anteriormente van a ser positivas. De esta forma se prueba la existencia de solución positiva.

Siguiendo las técnicas expuestas en las secciones anteriores, se pueden probar estos resultados y llegar a conclusiones más fuertes. En concreto, tenemos la existencia de dos soluciones extremales positivas (que podrían ser las misma) y la estabilidad por arriba y por abajo de las soluciones maximal y minimal, respectivamente. En efecto, por una parte, la propiedad (4.2.20) es la inestabilidad de  $u \equiv 0$  mientras que, por otra, la propiedad (4.2.21) implica el decaimiento del semigrupo asociado a  $-L + f_\infty$ . Ahora bien, esto junto con la propiedad (c<sub>∞</sub>) no es más que la propiedad de disipación (3.1.2). Basta ahora aplicar la Proposición 3.1.1 y el Teorema 3.2.6.

Nótese que además, nuestras hipótesis son más débiles pudiéndose aplicar el resultado a operadores más generales (ver Sección 1.1).

#### 4.2.5. Otros resultados conocidos

En Hernández [29] se estudia la existencia de soluciones positivas para ecuaciones logísticas elípticas con potenciales no acotados, concretamente, se estudia el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x)u - u^\rho & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.23}$$

donde  $\rho > 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $m \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ , con  $m(x) \geq m_0 > 0$  en  $\Omega$ , para cierta constante positiva  $m_0$ . Se prueba el siguiente resultado de existencia para la ecuación (4.2.23)

**Teorema 4.2.13** *Sea  $m$  como antes. Supongamos  $\rho > 1$  y*

$$\frac{\rho N}{2(\rho - 1)} < p. \quad (4.2.24)$$

*Entonces, para todo  $\lambda > \lambda_1$ , el autovalor principal de  $m$ , existe una única solución positiva  $u > 0$  de (4.2.23) con  $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$  para algún  $q > N/2$ . Por tanto,  $u \in C(\overline{\Omega})$ . Si además*

$$\frac{\rho N}{\rho - 1} < p \quad (4.2.25)$$

*entonces  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  para algún  $0 < \beta < 1$ .*

La prueba en Hernández [29] se basa de nuevo en el uso de sub-supersoluciones para probar la existencia de solución positiva. Concretamente, la supersolución se obtiene calculando el máximo en  $u$  de la no linealidad  $f$ . La subsolución se construye como un múltiplo pequeño de la primera función propia del problema de autovalores principales para  $m$ . La unicidad se obtiene por un argumento similar a la prueba de nuestro Teorema 3.3.11. Por último la regularidad se obtiene por un argumento de regularidad elíptica.

Este tipo de ecuaciones serán consideradas con más detalle en el Capítulo 5. Adelantando los resultados que allí obtendremos (ver Proposición 5.0.1), la parte de existencia de este resultado es consecuencia directa de nuestra Proposición 3.1.3 que establece la existencia de un equilibrio positivo maximal que además, es globalmente asintóticamente estable por arriba. La unicidad se sigue del Teorema 3.3.11. Además, de los resultados de la Sección 3.3 se sigue la estabilidad asintótica global para soluciones positivas del único equilibrio positivo del problema (4.2.23). La regularidad es consecuencia de la regularidad elíptica.

Además, nuestros resultados son válidos para operadores más generales que el Laplaciano, incluso para operadores no variacionales. Además no requerimos que el potencial  $m(x)$  sea positivo en  $\Omega$ . Además no requeriremos ninguna relación entre el crecimiento de la no linealidad,  $\rho$ , y la regularidad de  $m$ , e.d.  $p$ , como en (4.2.24) y (4.2.25). De hecho obtendremos que  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  y por tanto  $u \in C(\overline{\Omega})$  bajo la única condición de que  $p > N/2$ . Si por contra,  $p > N$  entonces tendremos que  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  para algún  $0 < \beta < 1$  (véanse los comentarios tras la prueba del Teorema 1.1.2 y el final de la prueba del Teorema 1.2.1).

## Capítulo 5

# Un ejemplo: ecuaciones logísticas

Nuestro objetivo en esta sección será aplicar los resultados anteriores al problema modelo de la ecuación logística autónoma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, u), & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.0.1)$$

donde

$$f(x, s) = m(x)s - n(x)|s|^{\rho-1}s, \quad \rho > 1,$$

con

$$m \in L^p(\Omega) \quad \text{para algún } p > N/2$$

y

$$n(x) \geq 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{es una función continua.}$$

Por tanto,  $f$  está en las condiciones del Teorema 1.1.2 y tenemos la existencia local de solución para datos iniciales en  $X = L^\infty(\Omega)$ .

En primer lugar, notemos que,

$$f(x, s)s = m(x)s^2 - n(x)|s|^{\rho+1}. \quad (5.0.2)$$

Supongamos que  $m$  se puede descomponer de la forma  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$ ,  $x \in \Omega$ , con  $m_2 \geq 0$ . Entonces, formalmente, por la desigualdad de Young tenemos

$$f(x, s)s \leq m_1(x)s^2 + \beta \left[ \frac{m_2(x)}{n^{1/\rho}(x)} \right]^{\rho'} |s| \quad (5.0.3)$$

para cierta constante  $\beta > 0$ . Por tanto,  $f$  verifica una condición de estructura similar a la condición (2.2.8) con

$$C(x) = m_1(x) \quad \text{y} \quad D(x) = \beta \left[ \frac{m_2(x)}{n^{1/\rho}(x)} \right]^{\rho'}.$$

Para poder aplicar el Teorema 2.2.6 y el Corolario 2.2.9 necesitamos probar que podemos elegir  $m_1 \in L^p(\Omega)$ , para algún  $p > N/2$ , tal que el semigrupo generado por  $\Delta + m_1$  decaiga exponencialmente y  $m_2$  tal que  $D(x)$  pertenezca a algún espacio  $L^r(\Omega)$  con  $r > N/2$ .

En ese caso, obtenemos la existencia de dos equilibrios extremales que son globalmente asintóticamente estables por arriba y por abajo respectivamente. Es más, el Teorema 1.0.1 se aplica en este caso.

Observemos que como  $f(\cdot, 0) \equiv 0$  entonces el equilibrio maximal  $\varphi_M$  es no negativo y el minimal  $\varphi_m$  es no positivo.

En caso de poder demostrar que el equilibrio maximal es positivo la unicidad de equilibrios positivos es inmediata por el Teorema 3.3.11 ya que

$$\frac{f(x, s)}{s} = m(x) - n(x)|s|^{\rho-1}$$

es decreciente por ser  $n(x) \geq 0$ , no idénticamente nula. Observamos que como  $m \in L^p(\Omega)$  entonces  $f$  no satisface las condiciones del Teorema de Brézis y Oswald, Teorema 3.3.9. Lo mismo se aplica para el equilibrio minimal y equilibrios negativos.

En ese sentido, nótese que, si  $\lambda_1(\Delta + m) > 0$  entonces

$$f(x, s)s = m(x)s^2 - n(x)|s|^{\rho+1} \leq m(x)s^2.$$

Luego, podemos tomar  $C = m$  y  $D = 0$  y obtener así que existe un único punto de equilibrio  $\varphi_m = \varphi_M = 0$  que es globalmente asintóticamente estable.

Por contra, si  $\lambda_1(\Delta + m) < 0$  entonces estamos en las hipótesis del Teorema 3.2.6 y obtenemos que el equilibrio maximal es positivo.

Como veremos a continuación en el análisis de (5.0.1) vamos a distinguir el caso en que  $n > 0$  en  $\Omega$  del caso en que se anula en algún subconjunto.

En el primer caso, veremos que siempre es posible elegir  $m_1$  y  $m_2$  tales que  $C$  y  $D$  verifiquen las condiciones anteriores.

En el segundo caso veremos que, de forma natural, para poder aplicar los resultados de los capítulos anteriores es necesario que  $m$  ayude a la disipación cerca del conjunto donde  $n$  se anula ya que allí la reacción es lineal.

**Proposición 5.0.1** *Supongamos que  $n(x) \geq \gamma > 0$  en  $\bar{\Omega}$ . Entonces, para toda  $m \in L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$  existen  $C$  y  $D$  satisfaciendo (2.2.8) y tales que el semigrupo generado por  $\Delta + C$  decae exponencialmente y que  $D \in L^r(\Omega)$  para algún  $r > N/2$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe  $\gamma > 0$  tal que  $n(x) \geq \gamma$  en  $\bar{\Omega}$ . Elegimos

$$m_1(x) = m(x) - \lambda \quad \text{y} \quad m_2(x) = \lambda$$

con  $\lambda$  suficientemente grande para que el semigrupo generado por  $\Delta + m_1$  decaiga exponencialmente. En ese caso en (5.0.3) resulta

$$\beta \left[ \frac{m_2(x)}{n^{1/\rho}(x)} \right]^{\rho'} \leq \beta \gamma^{-\rho'/\rho} \lambda^{\rho'} = R.$$

Entonces, podemos tomar

$$C(x) = m(x) - \lambda \quad \text{y} \quad D(x) = R.$$

■

Consideramos ahora el caso en que  $n(x)$  se anula en un subconjunto de  $\Omega$ . En este caso, tenemos

**Proposición 5.0.2** *Sea  $\Omega_0 = \{x \in \Omega : n(x) = 0\}$  y sea  $\Omega_\delta$  un entorno de  $\Omega_0$  tal que  $n(x) \geq \gamma > 0$  para todo  $x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta$ . Supongamos que  $\lambda_1^{\Omega_\delta}(-\Delta - m) > 0$ , el primer autovalor del operador  $-\Delta - m$  en  $\Omega_\delta$  con condiciones Dirichlet.*

*Supongamos que  $m \in L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$  es tal que su parte positiva verifica*

$$m^+(x) = m_0^+(x) + m_1^+(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$$

*donde  $0 \leq m_0^+ \in L^p(\Omega \setminus \Omega_\delta)$  es suficientemente pequeña y  $0 \leq m_1^+ \in L^s(\Omega \setminus \Omega_\delta)$  con  $s > \rho'N/2$ .*

*Entonces, existen  $C$  y  $D$  satisfaciendo (2.2.8) y tales que el semigrupo generado por  $\Delta + C$  decae exponencialmente y que  $D \in L^r(\Omega)$  para algún  $r > N/2$ .*

**Demostración.** Por (5.0.2), si  $x \in \Omega_\delta$  entonces,

$$f(x, s) \leq m(x)s^2$$

y tomamos  $C(x) = m(x)$  y  $D(x) = 0$  si  $x \in \Omega_\delta$ .

Por otro lado si  $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$  entonces para  $A$  suficientemente grande, escribimos

$$m(x) = (m_0^+(x) - m^-(x) - A) + (m_1^+(x) + A) = m_1(x) + m_2(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_\delta.$$

Elegimos entonces  $C(x) = m_1(x)$  para  $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ .

Por el Lema 5.0.3, que demostraremos más adelante, y la hipótesis de pequeñez sobre  $m_0^+$  tenemos que el semigrupo generado por  $\Delta + C(x)$  con condiciones de Dirichlet en  $\Omega$  decae exponencialmente.

Razonando como en (5.0.3) obtenemos, para  $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ ,

$$D(x) = \beta \left[ \frac{m_2(x)}{n^{1/\rho}(x)} \right]^{\rho'} \leq \beta \gamma^{-\rho'/\rho} m_2^{\rho'}(x) \in L^r(\Omega \setminus \Omega_\delta), \quad r > N/2$$

por la hipótesis sobre  $m_1^+$ . Por tanto,  $D \in L^r(\Omega)$ , con  $r > N/2$  y se verifica (2.2.8). ■

Observemos que en la Proposición 5.0.2 no se supone ninguna regularidad sobre el conjunto  $\Omega_0$  (comparar con Fraile et al. [24]).

Nótese que si  $\Omega_0$  es un conjunto regular y  $\lambda_1^{\Omega_0}(-\Delta - m) > 0$  entonces para todo entorno  $\Omega_\delta$  suficientemente cercano de  $\Omega_0$  se tiene

$$\lambda_1^{\Omega_\delta}(-\Delta - m) > 0$$

y  $n(x) \geq \gamma > 0$  para todo  $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ .

Demostramos ahora el lema que hemos utilizado en la prueba anterior.

**Lema 5.0.3** *Con las notaciones anteriores, supongamos que  $\lambda_1^{\Omega_\delta}(-\Delta - m) > 0$ .*

*Entonces, para  $A$  suficientemente grande, tomando*

$$C_0(x) = \begin{cases} m(x) & \text{si } x \in \Omega_\delta \\ -A & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta} \end{cases}$$

*se tiene que el primer autovalor de  $-\Delta - C_0$  con condiciones de Dirichlet en  $\Omega$  es positivo.*

**Demostración.** Observemos que

$$\lambda_1(-\Delta - C_0) = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{J(\varphi)}{\int_\Omega \varphi^2}$$

donde

$$J(\varphi) = \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 - \int_\Omega C_0 \varphi^2.$$

Ahora, dado  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  definimos  $P(\varphi) = \xi \in H_0^1(\Omega_\delta)$  donde  $\xi$  verifica

$$\begin{cases} -\Delta \xi - m\xi = 0 & \text{en } \Omega_\delta \\ \xi = \varphi & \text{en } \partial\Omega_\delta. \end{cases} \quad (5.0.4)$$

Nótese que  $\varphi|_{\partial\Omega_\delta} \in H^{1/2}(\partial\Omega_\delta)$  y  $\lambda_1^{\Omega_\delta}(-\Delta - m) > 0$  y por tanto el problema está bien planteado.

Sea ahora  $\eta = \varphi - \xi \in H_0^1(\Omega_\delta)$  que verifica el problema

$$\begin{cases} -\Delta \eta - m\eta = -\Delta \varphi - m\varphi & \text{en } \Omega_\delta \\ \eta = 0 & \text{en } \partial\Omega_\delta. \end{cases}$$

Nótese que  $-\Delta \varphi - m\varphi \in H^{-1}(\Omega_\delta)$  y de nuevo el problema está bien planteado. Extendemos ahora  $\eta$  por cero a todo  $\Omega$  y la seguimos denotando igual.

Entonces, por una parte, como  $\varphi = \eta + (\varphi - \eta)$ , tenemos

$$\int_\Omega C_0 \varphi^2 = \int_\Omega C_0 [\eta^2 + (\varphi - \eta)^2 + 2\eta(\varphi - \eta)].$$

Ahora bien, como  $\eta = 0$  fuera de  $\Omega_\delta$  tenemos

$$\int_\Omega C_0 \varphi^2 = \int_{\Omega_\delta} m\eta^2 + 2 \int_{\Omega_\delta} m\eta\xi + \int_{\Omega_\delta} \xi^2 - \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} A\varphi^2.$$

Por otra parte, como  $\varphi = \eta + (\varphi - \eta)$ , tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 + 2 \int_{\Omega} \nabla \eta \nabla (\varphi - \eta) + \int_{\Omega} |\nabla (\varphi - \eta)|^2.$$

Ahora bien, como  $\eta$  es cero fuera de  $\Omega_{\delta}$  tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \int_{\Omega_{\delta}} |\nabla \eta|^2 + 2 \int_{\Omega_{\delta}} \nabla \eta \nabla \xi + \int_{\Omega_{\delta}} |\nabla \xi|^2 + \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} |\nabla \varphi|^2$$

donde hemos usado que  $\varphi - \eta = \xi$  en  $\Omega_{\delta}$ .

Luego,

$$\begin{aligned} J(\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 - \int_{\Omega} C_0 \varphi^2 &= \int_{\Omega_{\delta}} [|\nabla \eta|^2 - m\eta^2] + \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} [|\nabla \varphi|^2 + A\varphi^2] \\ &\quad + 2 \int_{\Omega_{\delta}} [\nabla \eta \nabla \xi - m\eta \xi] + \int_{\Omega_{\delta}} [|\nabla \xi|^2 - m\xi^2]. \end{aligned} \quad (5.0.5)$$

Pero, por ser  $\eta \in H_0^1(\Omega_{\delta})$ ,

$$\int_{\Omega_{\delta}} [|\nabla \eta|^2 - m\eta^2] \geq \lambda_1^{\Omega_{\delta}} (-\Delta - m) \int_{\Omega} \eta^2.$$

Por otro lado, de (5.0.4) multiplicando por  $\xi$  e integrando por partes

$$\int_{\Omega_{\delta}} [|\nabla \xi|^2 - m\xi^2] = \int_{\partial \Omega_{\delta}} \frac{\partial \xi}{\partial n} \varphi.$$

Ahora bien, por la relación entre  $\varphi$  y  $\xi$  tenemos

$$\left| \int_{\partial \Omega_{\delta}} \frac{\partial \xi}{\partial n} \varphi \right| \leq C \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial \Omega_{\delta})}^2.$$

De donde, dado  $\varepsilon > 0$

$$\int_{\partial \Omega_{\delta}} \frac{\partial \xi}{\partial n} \varphi \geq -\varepsilon \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} |\nabla \varphi|^2 - C_{\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} |\varphi|^2.$$

Ahora bien, de aquí,

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} [|\nabla \varphi|^2 + A\varphi^2] + \int_{\partial \Omega_{\delta}} \frac{\partial \xi}{\partial n} \varphi \geq (1 - \varepsilon) \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} |\nabla \varphi|^2 + (A - C_{\varepsilon}) \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} \varphi^2$$

y tomando  $\varepsilon = 1/2$  se tiene que, para  $A$  suficientemente grande,

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} [|\nabla \varphi|^2 + A\varphi^2] + \int_{\partial \Omega_{\delta}} \frac{\partial \xi}{\partial n} \varphi \geq \gamma \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} \varphi^2$$

para cierta constante positiva  $\gamma > 0$ .

Por otro lado, como  $\eta \in H_0^1(\Omega_{\delta})$  y  $\xi$  es solución del problema (5.0.4) tenemos

$$\int_{\Omega_{\delta}} [\nabla \eta \nabla \xi - m\eta \xi] = 0.$$

Luego, en (5.0.5) resulta

$$J(\varphi) \geq \lambda_1^{\Omega_{\delta}} \int_{\Omega_{\delta}} \eta^2 + \gamma \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta}} \varphi^2 \geq 0$$

Ahora bien, tomando  $\varphi = \varphi_1$ , la primera autofunción del operador  $-\Delta - C_0$  con condiciones Dirichlet, concluimos que

$$\lambda_1(-\Delta - C_0) = J(\varphi_1) > 0.$$

■

Observemos que los resultados de este capítulo permiten recuperar algunos de los resultados de Fraile et al. [24] con menos requisitos de regularidad.

## Parte II

# Problemas no autónomos





# Capítulo 6

## Introducción

En esta parte de la memoria analizaremos la dinámica del problema parabólico no lineal no autónomo análogo al problema (1.0.1)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{en } \Omega \quad t > s \\ u(s) = u_s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.0.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  y  $f(t, x, u) : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es suficientemente regular. Denotamos las soluciones por  $u(t, s; u_s)$ .

Nuestro objetivo es probar que bajo un condición de estructura sobre el término no lineal análogo a (1.2.17) para problemas autónomos (véase Parte I),

$$f(t, x, u)u \leq C(t, x)|u|^2 + D(t, x)|u| \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R} \quad (6.0.2)$$

para algún  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $p > N/2$ , y  $D$  una función con valores en  $L^r(\Omega)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , adecuada, existen dos trayectorias completas extremales, una maximal y otra minimal que acotan el comportamiento asintótico de las soluciones, esta vez en sentido pullback. Para esto, es clave suponer que el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable (propiedad análoga al decaimiento exponencial de un semigrupo para problemas autónomos). Por trayectoria completa entendemos cualquier solución definida para todo tiempo  $t \in \mathbb{R}$ .

Como para problemas no autónomos es necesario tener en cuenta la variable temporal como una variable más del problema, para analizar el comportamiento de las soluciones de (6.0.1) haremos uso de la noción de atracción pullback.

La idea básica que se halla detrás de este concepto es que, en el tiempo presente,  $t$ , la dinámica relevante, esto es, aquella que observamos hoy y ha perdido cualquier comportamiento transitorio, es aquella que es visible hoy pero comenzó hace mucho tiempo, es decir, cuando  $s \rightarrow -\infty$ . Es por esto por lo que aparece el concepto del conjunto de estados,  $\mathcal{A}(t)$ , que describe el resultado de la evolución que empezó desde estados arbitrariamente lejanos en el pasado. La colección de conjuntos de estados  $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  recibe el nombre de *atractor pullback*.

Por otro lado, si consideramos procesos que empiezan hoy, a tiempo  $s$ , y queremos saber cuál será la dinámica relevante en el futuro, es decir, cuando  $t \rightarrow \infty$ , aparece el concepto de comportamiento asintótico hacia adelante en el tiempo y atractor hacia adelante en el tiempo.

En esta parte vamos a probar el análogo al Teorema 1.0.1 para problemas no autónomos. Concretamente, bajo condiciones adecuadas para  $f$ ,  $C$  y  $D$ , detalladas más adelante, se tiene el siguiente resultado (véase el Teorema 8.1.1 para un enunciado detallado).

**Teorema 6.0.4** *Existen dos trayectorias completas extremales de (6.0.1), una maximal,  $\varphi_M(t, x)$ , y otra minimal,  $\varphi_m(t, x)$ , en el sentido de que cualquier otra trayectoria completa de (6.0.1),  $\psi(t, x)$ , verifica  $\varphi_m(t, x) \leq \psi(t, x) \leq \varphi_M(t, x)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $f(t, x, u)$  es  $T$ -periódica en tiempo también lo son  $\varphi_m, \varphi_M$ .*

Si  $\varphi_m(s, x) \leq u_s(x) \leq \varphi_M(s, x)$  entonces, para todo  $t > s$ ,  $\varphi_m(t, x) \leq u(t, s; u_s)(x) \leq \varphi_M(t, x)$  y los intervalos de orden  $I(t) = [\varphi_m(t), \varphi_M(t)]$  son invariantes hacia adelante en el tiempo y atraen la dinámica del sistema uniformemente, en sentido pullback, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\varphi_m(t, x) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; u_s) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; u_s) \leq \varphi_M(t, x) \quad (6.0.3)$$

uniformemente en  $x \in \bar{\Omega}$  para todo  $\{u_s\}$  en un conjunto acotado  $B$  de datos iniciales. Además,  $\varphi_M(t)$  (resp.  $\varphi_m(t)$ ) es globalmente asintóticamente estable por arriba (resp. por abajo) en sentido pullback, es decir, para todo  $v \in C_b(\mathbb{R}, X)$  tal que  $v \geq \varphi_M$  (resp.  $v \leq \varphi_m$ ) se tiene

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v_s)(x) = \varphi_M(t, x) \quad (\text{resp. } \varphi_m(t, x))$$

uniformemente en  $x \in \Omega$ .

Como consecuencia, existe un atractor pullback para (8.0.1), que denotamos  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t$ , y

$$\mathcal{A}(t) \subset I(t) = [\varphi_m(t), \varphi_M(t)] \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Además,  $\varphi_m(t), \varphi_M(t) \in \mathcal{A}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Nótese que es posible (y de hecho ocurre en ciertos problemas) que las soluciones extremales no estén acotadas para todo  $t$ . En tal caso, el concepto natural de atractor hacia adelante en el tiempo no tiene sentido aunque sí que lo tiene el atractor en sentido pullback.

Por simplificar, consideraremos el problema en  $X = C(\bar{\Omega})$ . Sin embargo, bajo ciertas condiciones de crecimiento adecuadas, podemos considerar también espacios de datos iniciales más débiles como son los espacios de Sobolev en  $L^q(\Omega)$ . La principal diferencia reside en que el análisis se vuelve más técnico aunque el argumento dinámico es prácticamente idéntico.

Al ser las técnicas de comparación la principal herramienta que usaremos, los resultados son válidos para operadores más generales que el Laplaciano y otras condiciones de contorno supuesto que el problema admita un principio de comparación. Haremos también uso, de manera esencial, del efecto regularizante de las ecuaciones, que implicará la compacidad de las trayectorias.

En esta parte hacemos dos contribuciones, esencialmente independientes, que aparecen entrelazadas en el tratamiento que hacemos de las ecuaciones de reacción difusión.

La primera de ellas es una detallada teoría general sobre las propiedades (en particular la estabilidad exponencial) de los operadores de evolución lineales asociados con problemas lineales no autónomos de la forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = C(t, x)u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

planteados en  $L^q(\Omega)$  ( $1 < q < \infty$ ) o  $C(\bar{\Omega})$ , con  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  y  $p > N/2$ . En particular, presentamos un estudio completo de las normas del operador  $U(t, s)$  entre diferentes espacios  $L^p$ .

La segunda aportación es un argumento dinámico que, bajo ciertas condiciones naturales, garantiza la existencia de trayectorias completa extremales para el problema no lineal. El argumento se basa principalmente en la conservación del orden en estas ecuaciones.

A continuación damos una versión simplificada en el contexto de una EDOs escalar que ilustra la esencia de la prueba sin las dificultades técnicas necesarias en el caso de EDPs.

Queremos probar pues la existencia de una trayectoria completa maximal y otra minimal (dentro de una determinada clase) para la EDO escalar

$$\dot{x} = f(t, x); \quad (6.0.4)$$

será conveniente escribir la solución de esta ecuación a tiempo  $t$  con  $x(s) = x_0$  en términos de un operador de evolución  $U(t, s)$ , es decir,  $x(t, s; x_0) = U(t, s)x_0$ . Como tenemos una EDO escalar, sus soluciones conservan el orden inicial, es decir

$$x_0 \leq y_0 \quad \Rightarrow \quad U(t, s)x_0 \leq U(t, s)y_0 \quad \text{para todo } t \geq s.$$

Supuesto que  $f$  esté acotada por arriba y por abajo por una función lineal de  $x$ ,

$$xf(t, x) \leq -C(t)x^2 + D(t)|x|, \quad (6.0.5)$$

tenemos

$$\frac{d}{dt}|x| \leq -C(t)|x| + D(t),$$

y, por tanto, es natural pensar que se pueden obtener resultados sobre el comportamiento de la ecuación no lineal a través del comportamiento de la ecuación lineal no homogénea

$$\dot{y} = -C(t)y + D(t). \quad (6.0.6)$$

De echo, tenemos el siguiente “principio de comparación”

$$|U(t, s)x_0| \leq y(t, s; |x_0|). \quad (6.0.7)$$

Para controlar el comportamiento de (6.0.6) supondremos que el operador de evolución  $\Phi(t, s)$  asociado al problema homogéneo correspondiente  $\dot{z} = -C(t)z$  es exponencialmente estable, es decir, para ciertos  $M, \beta > 0$ ,

$$0 \leq \Phi(t, s) \leq Me^{-\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t \geq s.$$

Es fácil probar entonces que

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, s)D(s) ds$$

es la única trayectoria completa de (6.0.6) en la clase

$$\mathcal{D}_\beta = \{x(\cdot) : e^{\beta t}|x(t)| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\},$$

y que atrae a todo  $y \in \mathcal{D}_\beta$  en sentido pullback, es decir,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} y(t, s; y(s)) = \phi(t) \quad \text{para todo } y(\cdot) \in \mathcal{D}_\beta. \quad (6.0.8)$$

De (6.0.7) y (6.0.8) se tiene que

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} |U(t, s)x_0| \leq \phi(t), \quad (6.0.9)$$

y que  $\phi(t)$  es una super-trayectoria de (6.0.4), es decir, que

$$U(t, s)\phi(s) \leq y(t, s; \phi(s)) = \phi(t) \quad \text{para todo } t \geq s.$$

Consideramos ahora la candidata a trayectoria completa maximal de (6.0.4), a saber

$$\varphi_M(t) = \lim_{s \rightarrow -\infty} U(t, s)\phi(s). \quad (6.0.10)$$

Como  $\phi(\cdot)$  es una super-trayectoria, para todo  $t$  fijo tenemos

$$U(t, s)\phi(s) = U(t, s + \varepsilon)U(s + \varepsilon, s)\phi(s) \leq U(t, s + \varepsilon)\phi(s + \varepsilon),$$

y por tanto  $U(t, s)\phi(s)$  es no creciente cuando  $s \rightarrow -\infty$ . Como también sabemos, por (6.0.9), que  $\liminf_{s \rightarrow -\infty} U(t, s)\phi(s) \geq -\phi(t)$ , tenemos que existe el límite de (6.0.10). El hecho de que  $\varphi_M(t)$  es una trayectoria completa de (6.0.4) se tiene por la continuidad de  $U(t, s)$ ,

$$\begin{aligned} U(t, s)\varphi_M(s) &= U(t, s) \lim_{r \rightarrow -\infty} U(s, r)\phi(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} U(t, s)U(s, r)\phi(r) \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} U(t, r)\phi(r) = \varphi_M(t), \end{aligned}$$

lo que prueba también que el límite en (6.0.10) es, de hecho, una función continua de  $t$ .

Para probar que  $\varphi_M$  es la trayectoria completa *maximal*, supongamos que  $x(t)$  es otra trayectoria completa en  $\mathcal{D}_\beta$ . Entonces

$$U(r, s)x(s) \leq y(r, s; |x(s)|),$$

y, haciendo actuar  $U(t, r)$  en ambos miembros de la desigualdad tenemos

$$x(t) \leq U(t, r)y(r, s; |x(s)|).$$

Como esto se tiene para todo  $s$ , gracias a que  $|x(\cdot)| \in \mathcal{D}_\beta$  podemos pasar al límite en  $s \rightarrow -\infty$  y obtener así que

$$x(t) \leq U(t, r) \limsup_{s \rightarrow -\infty} y(t, s; |x(s)|) \leq U(t, r)\phi(r);$$

como esto es cierto para todo  $r$ , tomando límite cuando  $t \rightarrow -\infty$  tenemos  $x(t) \leq \varphi_M(t)$  como queríamos probar.

Por supuesto, en el análisis realizado en lo que sigue emplearemos un argumento más fino, con algunas variaciones pero es la idea este uso del principio de comparación y la noción de “pullback” la que se encuentra detrás de todo.

## 6.1. Algunas definiciones y resultados sobre ecuaciones de evolución no autónomas.

Comenzamos con algunas definiciones de la teoría de atractores para sistemas no autónomos que nos servirán para el estudio del problema (6.0.1) (ver Schmalfuß [46]).

**Definición 6.1.1** *Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , diremos que una familia de aplicaciones  $\{U(t, s)\}_{t \geq s}$  es un proceso, una familia de operadores de evolución o simplemente un operador de evolución si verifica*

1.  $U(t, t) = I$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $U(t, s)U(s, r)u = U(t, r)u$  para todo  $r \leq s \leq t$ ,  $u \in X$ .
3.  $u \mapsto U(t, r)u$  es continua en  $X$ ,  $t > r$ .

Tenemos entonces las siguientes definiciones

### Definición 6.1.2

i) *Diremos que un conjunto acotado  $K \subset X$  absorbe en sentido pullback a tiempo  $t_0 \in \mathbb{R}$  a una familia de acotados  $\mathcal{B} = \{B(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  si existe  $T = T(t_0, \mathcal{B}) \leq t_0$  tal que*

$$U(t_0, s)B(s) \subset K \quad \text{para todo } s \leq T \leq t_0.$$

ii) *Diremos que un conjunto acotado  $K \subset X$  absorbe hacia adelante a una familia de conjuntos acotados  $\mathcal{B} = \{B(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  si para cada  $s \in \mathbb{R}$  existe  $T = T(s, \mathcal{B}) \geq s$  tal que*

$$U(t, s)B(s) \subset K \quad \text{para todo } t \geq T.$$

**Definición 6.1.3** *Diremos que una familia de acotados  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  en  $X$  es invariante hacia adelante con respecto a  $U$  si*

$$U(t, s)K(s) \subset K(t) \quad \text{para todo } s \leq t.$$

*Diremos que  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es invariante con respecto a  $U$  si*

$$U(t, s)K(s) = K(t) \quad \text{para todo } s \leq t.$$

**Definición 6.1.4**

i) Un conjunto acotado  $K \subset X$  atrae en sentido pullback a tiempo  $t_0 \in \mathbb{R}$  a una familia de acotados  $B = \{B(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  si

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t_0, s)B(s), K) = 0.$$

Una familia de conjuntos acotados dependientes del tiempo  $\mathcal{K} = \{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  atrae en sentido pullback a una familia de conjuntos acotados  $B = \{B(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  si para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $K(t)$  atrae en sentido pullback a  $B$  a tiempo  $t$ .

ii) Diremos que una familia de conjuntos acotados  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  atrae hacia adelante en el tiempo a una familia de conjuntos acotados  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ , si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(U(t, s)B(s), K(t)) = 0$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

En particular, diremos que una curva  $u(t)$  atrae (hacia adelante o en sentido pullback) en  $X$  si  $K(t) = \{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  para todo  $t$  verifica las definiciones anteriores.

Diremos que  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  atrae (hacia adelante o en sentido pullback) a acotados si verifica las definiciones anteriores para familias de acotados independientes de  $t$ , es decir,  $B(t) = B$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  donde  $B \subset X$  es un conjunto acotado cualquiera.

En las aplicaciones es interesante considerar también el concepto de permanencia en sentido pullback (ver Langa y Suárez [33])

**Definición 6.1.5** Diremos que un operador de evolución  $U(t, s)$  es permanente en sentido pullback si existe una familia de conjuntos dependiente del tiempo  $\{V(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  tal que

1.  $V(t)$  es absorbente a tiempo  $t$  en sentido pullback  $t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\text{dist}(V(t), \{0\}) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

En lo que sigue, fijaremos una clase no vacía  $\mathcal{D}$  de familias de conjuntos acotados de  $X$ ,  $\{B(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  denominada *cuenca de atracción*. Véase Schmalfuß [46] para más detalles sobre las propiedades que debe verificar dicha clase. Nótese, sin embargo, que estaremos interesados en considerar cuencas de atracción que incluyan familias de acotados que no dependan del tiempo, es decir, familias de la forma  $B(t) = B$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  donde  $B \subset X$  es un conjunto acotado cualquiera.

En adelante, si un elemento en la clase  $\mathcal{D}$  es de la forma  $\{v(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  con  $v(s)$  un elemento de  $X$ , lo denotaremos por  $v_s$ .

Podemos considerar las definiciones anteriores para familias de acotados  $B$  dentro de la clase  $\mathcal{D}$ . En particular, tenemos

**Definición 6.1.6** Diremos que una familia de compactos  $\mathcal{A} = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  en  $X$  es el atractor pullback asociado a  $U$ , con respecto a la clase  $\mathcal{D}$ , si es invariante, atrae en sentido pullback a todo  $\{D(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$ , y es minimal en el sentido de que si  $\{C(t)\}_t$  es cualquier otra familia de conjuntos cerrados que atrae en sentido pullback entonces  $\mathcal{A}(t) \subset C(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

En cuanto al comportamiento asintótico de las soluciones hacia adelante en el tiempo definimos la noción de atractor hacia adelante.

**Definición 6.1.7** Diremos que un compacto  $\mathcal{F}$  es el atractor hacia adelante de  $U(t, s)$  si  $\mathcal{F}$  es el mínimo conjunto compacto tal que para todo  $s \in \mathbb{R}$  y  $B \subset X$  acotado,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(U(t, s)B, \mathcal{F}) = 0.$$

Nótese que la noción de pullback, introducida anteriormente, es relativa a la cuenca de atracción  $\mathcal{D}$  que fijemos de antemano. Por otra parte, la noción de atracción hacia adelante está restringida, como es habitual, a la clase de conjuntos acotados independientes del tiempo. Nótese además que el concepto de atractor pullback se refiere a la noción “vemos hoy lo que ha empezado hace mucho tiempo y ha perdido en el camino todo comportamiento transitorio”. La noción de atractor hacia adelante hace referencia, si embargo, al concepto “lo que veremos en el futuro dentro de mucho tiempo”.

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes para la existencia de atractor pullback (véase Crauel et al. [20], Langa y Suárez [33], Schmalfuß[45]).

**Teorema 6.1.8** *Supongamos que para todo  $t \in \mathbb{R}$  existe un compacto absorbente en sentido pullback (que puede depender de  $t$ ) para  $\{U(t, s)\}_{t>s}$ . Entonces, existe un atractor pullback para  $\{U(t, s)\}_{t>s}$ .*

Para un resultado relacionado con éste en el caso de atractores hacia adelante véase la Sección 8.2.

Una de las principales herramientas que usaremos para estudiar el problema (6.0.1) son los métodos de monotonía. Para ello, necesitamos introducir una estructura de orden en el espacio  $X$  que denotaremos por  $\leq$ . Trabajaremos con operadores de evolución que conservan el orden en el siguiente sentido

**Definición 6.1.9** *Diremos que un operador de evolución conserva el orden si existe una relación de orden en  $X$  ( $\leq$ ) tal que*

$$u_0 \leq v_0 \Rightarrow U(t, s)u_0 \leq U(t, s)v_0 \quad \text{para todo } t \geq s$$

*mientras ambas soluciones existan.*

**Definición 6.1.10** *Dados  $u \leq v$  definimos el intervalo de orden definido por  $u$  y  $v$  como*

$$[u, v] = \{w \in X : u \leq w \leq v\}.$$

La siguiente definición proporciona el concepto análogo a punto de equilibrio y sub-supersolución de la teoría de problemas autónomos para la teoría de problemas no autónomos (véase Amann [1], Arnold y Chueshov [7]).

**Definición 6.1.11** *Diremos que una aplicación continua  $v : \mathbb{R} \rightarrow X$  es una trayectoria completa de  $U$  si para todo  $t \geq s$*

$$U(t, s)v(s) = v(t).$$

*Diremos que  $v$  es una supertrayectoria de  $U$  si para todo  $t \geq s$*

$$U(t, s)v(s) \leq v(t).$$

*Diremos que  $v$  es una subtrayectoria del  $U$  si para todo  $t \geq s$*

$$U(t, s)v(s) \geq v(t).$$

Por último, definimos un concepto que será clave en todo lo que sigue. Nos referimos al concepto de operador de evolución exponencialmente estable.

**Definición 6.1.12** *Si  $X$  es un espacio de Banach y  $U(t, s) \in \mathcal{L}(X)$ , diremos que el operador de evolución  $U(t, s)$  es exponencialmente estable si existen  $\beta > 0$  y  $M > 0$  tal que*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s.$$

Consideremos ahora el problema no lineal

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \quad t > s \\ u(s) = u_0, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

planteado en  $X = C(\overline{\Omega})$ . El siguiente resultado proporciona la existencia local de solución para el problema (6.1.1) (véase por ejemplo Amann [3], Danners y Koch–Medina [21], Henry [28] o Lunardi [36] o Mora [39]).

**Teorema 6.1.13** *Supongamos que  $f(t, x, u)$  es una función continua, localmente Hölder en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ . Entonces, para todo  $u_0 \in X = C(\overline{\Omega})$ , existe una única solución local  $u(t, s; u_0)$  de (6.1.1) dada por la fórmula de variación de constantes*

$$u(t, s; u_0) = e^{\Delta(t-s)}u_0 + \int_s^t e^{\Delta(t-\tau)}f(\tau, u(\tau, s; u_0)) d\tau.$$

Además, si  $u_0 \in C_0(\overline{\Omega})$  entonces  $u$  es continua en  $t = s$ .

Por último, supuesto que las soluciones son globales entonces  $u(t, s; u_0) = U(t, s)u_0$  define un operador de evolución en  $X = C(\overline{\Omega})$  según la Definición 6.1.1. Por las propiedades de regularización de (6.1.1) se tiene que para todo  $s > t$ ,  $U(t, s)$  es continuo de  $C(\overline{\Omega})$  en  $C_0^1(\overline{\Omega})$ , el conjunto de funciones de clase  $C^1$  que se anula en  $\partial\Omega$ .

**Nota 6.1.14** *Si consideramos el problema planteado en, por ejemplo,  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , por la propiedad de regularización del operador de evolución, tenemos que todas las soluciones entran en  $C(\overline{\Omega})$  en tiempo positivo. Luego es suficiente estudiar el problema en  $X = C(\overline{\Omega})$ .*

*Sin embargo, nótese que en tal caso, para poder asegurar la existencia de solución del problema (8.0.1) necesitamos imponer restricciones en el crecimiento de  $f$ .*

**Nota 6.1.15** *Nótese que si  $u_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ , la solución débil definida en el Teorema 6.1.13 es continua en  $t = s$  y el Teorema 6.1.13 se obtiene directamente de las referencias anteriores.*

*Sin embargo, si trabajamos con datos iniciales  $u_0 \in C(\overline{\Omega})$  o  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , la solución débil definida anteriormente no es continua en  $t = s$  lo que hace que la prueba sea más delicada. Sin embargo, siguiendo un argumento análogo al de la prueba del Teorema 1.1.2 se puede probar la existencia de solución partiendo de  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ .*

## 6.2. Un breve repaso del argumento dinámico.

Los resultados y las demostraciones de las Secciones 7.1 y 7.2 contienen argumentos dinámicos que pueden quedar ocultos en una primera lectura debido a que dichas demostraciones contienen ciertos detalles técnicos provenientes de las técnicas para EDPs. Estos detalles técnicos son, sin embargo, necesarios para poder explotar el efecto regularizante de la ecuación parabólica

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= C(t, x)v + D(t, x) & \text{en } \Omega, & t > s, \\ v &= 0 & \text{en } \partial\Omega \\ v(s) &= v_s. \end{cases} \quad (6.2.1)$$

Esto nos permitirá obtener resultados finos en las aplicaciones (véase Sección 8.3).

Nuestro objetivo en esta sección es proporcionar una visión abstracta sobre los argumentos dinámicos que usaremos para obtener los resultados. Para ello mostraremos la parte dinámica de las pruebas haciendo referencia a dónde encontrar la prueba completa en las secciones siguientes.

El tipo de ecuaciones lineales que consideraremos en las Secciones 7.1 y 7.2 pueden ser escritas en forma abstracta como

$$\begin{cases} v_t + A(t)v &= f(t), & t > s \\ v(s) &= v_s \end{cases}$$

en cierto espacio de Banach  $X$ , con  $A(t)$  un operador en  $X$  dependiente del tiempo con dominio constante  $D(A)$  y  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ .

Comenzamos estudiando el caso homogéneo, es decir,  $f \equiv 0$ ,

$$\begin{cases} w_t + A(t)w &= 0, & t > s \\ w(s) &= w_0. \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Supongamos que  $A(t)$  define un operador de evolución lineal  $U(t, s)$  y que, por tanto, (6.2.2) tiene una única solución  $w(t, s; w_0) = U(t, s)w_0$ .



Sea  $\beta > 0$ , definimos  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ , la “cuenca de atracción”, formada por familias de conjuntos acotados con, a lo sumo, un crecimiento exponencial menor que  $\beta$  en  $-\infty$ , es decir, familias de conjuntos acotados de la forma  $\{B(t)\}_t$  tales que para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe  $M_1(t_0) \geq 1$  con

$$e^{\gamma t} \|B(t)\|_X = \sup_{b \in B(t)} e^{\gamma t} \|b\|_X \leq M_1(t_0) \quad \text{para todo } t \leq t_0,$$

para cierta constante  $\beta > \gamma > 0$ .

Entonces, el Teorema 7.1.2 se puede enunciar como:

**Teorema 6.2.1** *Supongamos que el operador de evolución  $U(t, s)$  para (7.1.1) en  $X$  es exponencialmente estable, es decir, para algún  $\beta > 0$*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s. \quad (6.2.3)$$

*Entonces, la única trayectoria completa de (6.2.2) en  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$  es la solución trivial. De hecho,  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t$  con  $\mathcal{A}(t) = \{0\}$  es el atractor en sentido pullback para las familias de acotados en  $\mathcal{D}_\beta$ .*

*Además, la solución trivial también atrae hacia adelante en tiempo a los acotados de  $X$ .*

Consideramos ahora el siguiente problema lineal no homogéneo

$$\begin{cases} v_t + A(t)v &= f(t), & t > s, \\ v(s) &= v_s \end{cases} \quad (6.2.4)$$

que, bajo hipótesis adecuadas para  $f$ , tiene una única solución dada por la fórmula de variación de constantes, es decir,

$$v(t, s; v_s) = U(t, s)v_s + \int_s^t U(t, \tau)f(\tau) d\tau. \quad (6.2.5)$$

Supongamos, además, que el operador de evolución  $U$  asociado a  $A(t)$  es exponencialmente estable (véase (6.2.3)). Se tiene entonces el siguiente resultado (véase el Teorema 7.1.4)

**Teorema 6.2.2** *Supongamos que el operador de evolución  $U(t, s)$  es exponencialmente estable en  $X$ , esto es,*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\beta(t-s)} \quad \text{con } \beta > 0 \text{ y } M \geq 1.$$

*i) Supongamos que*

$$f \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X).$$

*Entonces, existe una única trayectoria completa  $\phi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$  de (6.2.4).*

*ii) Supongamos ahora que para algún  $1 \leq \sigma \leq \infty$ ,*

$$f \in L^\sigma(\mathbb{R}, X).$$

*Entonces, existe una trayectoria completa  $\phi \in C_b(\mathbb{R}, X) \cap L^\sigma(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{D}$  de (6.2.4). Además,  $\phi$  es la única trayectoria completa en la clase  $\mathcal{D}$ .*

*Es más,  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  es el atractor pullback de (6.2.4) que atrae a familias de conjuntos acotados en  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$ .*

*Además,  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  atrae hacia adelante en el tiempo a conjuntos acotados de  $X$ . Más concretamente, para todo acotado  $B \subset X$ , se tiene*

$$\|v(t, s; v_0) - \phi(t)\|_X \leq K e^{-\beta(t-s)}, \quad t > s, \quad (6.2.6)$$

*para todo  $v_0 \in B$ , donde  $K = K(B)$ .*

**Demostración.** Se puede probar que

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t U(t, \tau)f(\tau) d\tau \quad (6.2.7)$$

es una trayectoria completa de (6.2.4).

Sea  $B = \{B(s)\}_s \subset \mathcal{D}$ . Fijamos  $\{v_s\}_s \in B$ . Sea  $w(t, s; v_s) = v(t, s; v_s) - \phi(t)$ . Entonces  $w$  es solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} w_t + A(t)w = 0, & t > s \\ w(s) = v_s - \phi(s) \end{cases} \quad (6.2.8)$$

Luego, como  $\{B(s) - \phi(s)\}_s \in \mathcal{D}$ , se tiene, por el Teorema 6.2.1,

$$w(t, s; v_s) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty$$

uniformemente en familias de acotados dependientes del tiempo  $\{B(s)\}_s \subset \mathcal{D}$ .

Por tanto, la trayectoria completa  $\phi$  es el atractor pullback de (6.2.4) respecto de la clase  $\mathcal{D}$ .

Nótese que si fijamos  $s \in \mathbb{R}$  y un acotado  $B \subset X$ , se tiene

$$\|v(t, s; v_0) - \phi(t)\|_X \leq K e^{-\beta(t-s)} \|v_0 - \phi(s)\|_X \leq K_1 e^{-\beta(t-s)} \rightarrow 0 \quad (6.2.9)$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ , para todo  $v_0 \in B$ , donde  $K_1$  depende del acotado  $B$ . Luego  $\phi(t)$  también atrae conjuntos acotados de  $X$  hacia adelante en el tiempo.

Damos ahora una ligera idea de cómo se prueba que  $\phi(t)$  está bien definida y pertenece al espacio adecuado. Para más detalles véase la prueba del Teorema 7.1.4. En el primer caso, si  $f \in \mathcal{D}_\beta$  tenemos, para algún  $\gamma < \beta$ ,

$$e^{\gamma t} \phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{\gamma(t-\tau)} U(t, \tau) e^{\gamma \tau} f(\tau) d\tau$$

y tomando normas

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \|\phi(t)\|_X &\leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} \frac{M}{(\beta - \gamma)} \left(1 - e^{-(\beta - \gamma)(t-s)}\right) \sup_{\tau \leq t} e^{\gamma \tau} \|f(\tau)\|_X \\ &= \frac{M}{\beta - \gamma} \sup_{\tau \leq t} e^{\gamma \tau} \|f(\tau)\|_X, \end{aligned}$$

por lo que  $\phi \in \mathcal{D}_\beta$  y, por el Teorema 6.2.1,  $\phi$  es la única trayectoria completa en  $\mathcal{D}_\beta$ .

Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$  entonces, un simple cálculo proporciona

$$\|\phi(t)\|_X \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} \frac{M}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, X)} \leq \frac{M}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, X)}.$$

La prueba de que  $\phi \in L^1(\mathbb{R}, X)$  cuando  $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$  se tiene usando el Teorema de Fubini. El resultado en el caso  $f \in L^r(\mathbb{R}, X)$  se sigue por interpolación en los espacios  $L^r(\mathbb{R}, X)$ . Por último, usando la desigualdad de Hölder se prueba que si  $f \in L^r(\mathbb{R}, X)$  entonces  $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$ . ■

En el caso en que  $f$  es integrable o, más generalmente, cuando  $f$  es pequeño en  $\pm\infty$ , probamos que  $\phi$  tiende a cero cuando  $t = \pm\infty$  (véase parte iii) del Teorema 7.1.4). Concretamente (véase Corolario 7.1.7),

**Corolario 6.2.3** *Supongamos que, o bien,*

$$f \in L^\sigma(\mathbb{R}, X)$$

para  $1 \leq \sigma < \infty$ ; o bien,  $\sigma = \infty$  y

$$\|f(t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Entonces,  $\phi$ , la trayectoria completa cuya existencia establece el Teorema anterior, verifica  $\phi \in C_0(\mathbb{R}, X)$ .

Consideremos ahora el problema  $T$ -periódico asociado a (6.2.4), esto es, supongamos que  $A$  y  $f$  son  $T$ -periódicos. El siguiente resultado establece que, en el caso  $T$ -periódico, la única trayectoria completa dada por el Teorema 6.2.2 es  $T$ -periódica (véase Corolario 7.1.9).

**Corolario 6.2.4** *Supongamos que el operador de evolución asociado a  $A(t)$  es exponencialmente estable (véase (6.2.3)) y  $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$ . Supongamos que  $A$  y  $f$  son  $T$ -periódicas. Entonces, la única trayectoria completa  $\phi \in \mathcal{D}$  de (6.2.4) es  $T$ -periódica.*

**Demostración.** Nótese que estamos en las condiciones del Teorema 6.2.2. Luego, sea  $\phi \in \mathcal{D}$  la única trayectoria completa dada por dicho Teorema. Entonces,

$$\phi_t(t) + A(t)\phi(t) = f(t)$$

y, por la periodicidad de  $A$  y  $f$  tenemos

$$\phi_t(t) + A(t+T)\phi(t) = f(t+T)$$

que, tras un cambio de variable, da

$$\phi_t(t-T) + A(t)\phi(t-T) = f(t).$$

Luego,  $w(t) = \phi(t-T)$  es una trayectoria completa del problema (6.2.4). Pero, por la unicidad en el Teorema 6.2.2 tenemos  $\phi(t) = w(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , esto es,  $\phi(t) = \phi(t-T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Dicho de otro modo,  $\phi$  es  $T$ -periódica. ■

Consideremos ahora problemas asintóticamente autónomos, esto es, supongamos que en el problema (6.2.4),  $A(t) \rightarrow A^\pm$  y  $f(t) \rightarrow f^\pm$  en cierto sentido cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Como hemos mencionado anteriormente nuestro objetivo en esta sección no es dar una prueba detallada de los resultados aquí expuestos sino dar una idea de cómo proceder en el estudio del problema (6.0.1) (véase el Teorema 7.2.1 para un enunciado más preciso).

Supongamos que el semigrupo generado por  $A^+$  en  $X$  decae exponencialmente. Existe por tanto una única solución de la ecuación

$$A^+\phi^+ = f^+. \quad (6.2.10)$$

Tomando  $w(t) = v(t) - \phi^+$  tenemos

$$\begin{cases} w_t + A(t)w &= f(t) - A(t)\phi^+ \\ w(s) &= v_0 - \phi^+. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$f(t) - A(t)\phi^+ = (f(t) - f^+) + (f^+ - A(t)\phi^+)$$

y, de la definición de  $\phi^+$

$$f^+ - A(t)\phi^+ = (A(t) - A^+)\phi^+.$$

Luego,

$$f(t) - A(t)\phi^+ = (f(t) - f^+) + (A(t) - A^+)\phi^+ \rightarrow 0$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Un argumento similar al de la prueba del Corolario 6.2.3 y la parte iii) del Teorema 7.1.4 garantizan que  $w(t, s; v_0 - \phi^+) \rightarrow 0$ . Por tanto,

$$v(t, s; u_0) \rightarrow \phi^+.$$

En particular,  $\phi(t) \rightarrow \phi^+$  cuando  $t$  tiende a infinito.

El estudio del comportamiento cuando  $t$  tiende a  $-\infty$  sigue un argumento similar.

El resultado en el caso en que  $A(t)$  y  $f(t)$  convergen en cierto sentido a un operador o una función  $T$ -periódicos, respectivamente, se obtiene siguiendo un argumento análogo (véase el Teorema 7.2.2).

Como dijimos anteriormente, en las secciones siguientes usaremos los argumentos anteriores sobre el problema modelo (6.2.1). Para ello, tomaremos  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$  o  $X = C(\bar{\Omega})$ . Obtendremos entonces condiciones apropiadas finas sobre el potencial dependiente del tiempo  $C(t, x)$  que garanticen que el correspondiente operador de evolución  $U = U_C(t, s)$  está bien definido y es exponencialmente estable, véase el Capítulo 7.

A continuación, usando el efecto regularizante de  $U_C(t, s)$  daremos condiciones finas sobre  $D(t, x)$  para la existencia de la trayectoria completa  $\phi$  del problema lineal. Nótese que el efecto regularizante permite reproducir los argumentos anteriores sin asumir que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) \in X$ . Basta suponer que  $f(t)$  toma valores un espacio de Lebesgue más débil  $L^r(\Omega)$  para cierto  $r < q$  adecuado. Para el caso de problemas asintóticamente autónomos o periódicos, daremos condiciones adecuadas sobre las convergencias de  $C(t, x)$  y  $D(t, x)$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  para obtener los resultados anteriores de manera rigurosa. Todo esto requiere el uso de condiciones técnicas que provienen de la Teoría de EDPs.



## Capítulo 7

# Operadores de evolución para problemas lineales no autónomos.

En esta sección haremos un estudio exhaustivo de los operadores de evolución asociados a problemas lineales de la forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= C(t, x)u & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) &= u_s \end{cases} \quad (7.0.1)$$

planteado en  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $X = C(\bar{\Omega})$ .

Para ello, comenzaremos aplicando los resultados abstractos sobre operadores lineales de evolución en Amann [4] al problema (7.0.1).

Si  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , entonces el operador dependiente del tiempo  $A(t) = \Delta + C(t, x)$  verifica (4.2.1), pag. 55, de Amann [4]. Por tanto, por el Teorema 4.4.1, pag. 63, de Amann [4],  $A(t)$  genera un operador de evolución con dominio constante  $D(A(t)) = W_D^{2,q}(\Omega) = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Denotaremos dicho operador de evolución por  $U_C(t, s)$  y así  $u(t, s; u_0) = U_C(t, s)u_0$  es la solución del problema (7.0.1).

Usando el Teorema 4.4.1, pag. 63, y el Lema 5.1.3, pag. 69, de Amann [4] junto con las inclusiones de Sobolev para espacios de interpolación compleja (ver Amann [3]), puede verse que  $U_C(t, s)$  satisface

$$\|U_C(t, s)u_0\|_{L^r(\Omega)} \leq M \frac{e^{\delta(t-s)}}{(t-s)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}} \|u_0\|_{L^q(\Omega)}, \quad t > s \quad (7.0.2)$$

para ciertos  $M > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ , y  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

Por último, del Teorema 6.4.2, pag. 85 de Amann [4] se sigue que el operador de evolución conserva el orden.

Los siguientes resultados muestran que, en realidad, el exponente  $\delta$  en (7.0.2) es independiente de  $q$  y  $r$  y está fuertemente relacionado con el crecimiento exponencial del operador de evolución. En particular, muestran que el operador de evolución es exponencialmente estable en  $L^q(\Omega)$  si y sólo si lo es en  $L^r(\Omega)$  para todos  $1 < r, q \leq \infty$ . Estos resultados serán muy útiles en lo que sigue ya que la estabilidad exponencial será una propiedad crucial que usaremos repetidamente en todo lo que sigue.

**Lema 7.0.5** *Supongamos  $U = U_C$ , como antes, es un operador de evolución en  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q \leq \infty$ , que verifica que existen constantes  $M > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  tales que*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M e^{\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s. \quad (7.0.3)$$

*Entonces,  $U$  en  $L^r(\Omega)$ , para  $1 < r \leq \infty$ , verifica*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^r(\Omega))} \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t - s > 1$$

*para algún  $K \geq 1$ . En particular, el tipo exponencial del operador de evolución, esto es, el mejor exponente  $\beta$  en (7.0.3), es independiente del espacio  $L^q(\Omega)$ .*

**Demostración.** En primer lugar, nótese que de la estimación (7.0.2) tenemos

$$\|U(t+1, t)\|_{\mathcal{L}(L^r(\Omega), L^q(\Omega))} \leq C \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad \text{si } q \geq r \quad (7.0.4)$$

$$\|U(t+1, t)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))} \leq C \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad \text{si } q \leq r. \quad (7.0.5)$$

Supongamos ahora  $L^r(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ , esto es,  $r \geq q$ , y  $U(t+1, s) = U(t+1, t)U(t, s)$ . Entonces

$$\|U(t+1, s)u_0\|_{L^r(\Omega)} \leq \|U(t+1, t)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))} \|U(t, s)u_0\|_{L^q(\Omega)}.$$

Usando ahora (7.0.3) y (7.0.5) se tiene

$$\|U(t+1, s)u_0\|_{L^r(\Omega)} \leq CMe^{-\beta}e^{\beta(t+1-s)}\|u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq CMe^{-\beta}e^{\beta(t+1-s)}\|u_0\|_{L^r(\Omega)}.$$

Luego,

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^r(\Omega))} \leq Ke^{\beta(t-s)}$$

para todo  $t - s > 1$ .

Supongamos ahora  $1 < r < q$ . En este caso,  $L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ . Nótese que  $U(t+1, s) = U(t+1, s+1)U(s+1, s)$ . Luego, usando (7.0.3) y (7.0.4)

$$\begin{aligned} \|U(t+1, s)u_0\|_{L^r(\Omega)} &\leq C\|U(t+1, s)u_0\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C\|U(t+1, s+1)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \|U(s+1, s)u_0\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq CMe^{\beta(t-s)}\|U(s+1, s)\|_{\mathcal{L}(L^r, L^q(\Omega))} \|u_0\|_{L^r(\Omega)} \\ &\leq CMe^{-\beta}e^{\beta(t+1-s)}\|u_0\|_{L^r(\Omega)}. \end{aligned}$$

De donde,

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^r(\Omega))} \leq Ke^{\beta(t-s)}$$

para todo  $t - s > 1$ . ■

También se tiene

**Lema 7.0.6** *Supongamos que  $U(t, s)$  verifica (7.0.3). Entonces, para  $1 < q \leq r \leq \infty$  se tiene*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))} \leq \begin{cases} K(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} & \text{si } t-s \leq 2 \\ Ke^{\beta(t-s)} & \text{si } t-s > 2 \end{cases} \quad (7.0.6)$$

para alguna constante  $K > 0$ .

**Demostración.** De la estimación (7.0.2) para  $t - s \leq 2$ , se tiene la existencia de una constante  $K_1$  tal que

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))} \leq K_1(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}.$$

y, para  $t - s > 2$ , de (7.0.5), se tiene la existencia de una constante  $K_2$  tal que

$$\begin{aligned} \|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))} &\leq \|U(t, t-1)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))} \|U(t-1, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \\ &\leq K_2e^{\beta(t-s)}. \end{aligned}$$

Luego, se verifica (7.0.6) para cierta constante  $K \geq 1$ . ■

Damos ahora condiciones suficientes para la estabilidad exponencial de un operador de evolución  $U(t, s) = U_C(t, s)$ . Para ello haremos uso de la estructura de espacio de Hilbert del espacio  $L^2(\Omega)$  así como del Lema 7.0.5. Consideramos el problema lineal homogéneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = C(t, x)u & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \quad t > s \\ u(s) = u_0. \end{cases} \quad (7.0.7)$$

En el caso más sencillo, cuando  $C(t, x) = C(x)$  no depende de  $t$ , sabemos que el semigrupo asociado a  $\Delta + C(x)$  es exponencialmente estable si y solo si el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -(\Delta + C(x))u &= \lambda u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

es positivo.

Ahora bien, para el caso en que  $C(t, x)$  dependa del tiempo, sea  $X = L^2(\Omega)$  y para cualquier tiempo fijado  $t \in \mathbb{R}$ , consideramos el primer autovalor  $\lambda_1(t)$  del problema

$$\begin{cases} -\Delta u - C(t, x)u &= \lambda(t)u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

que verifica

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - C(t, x)|u|^2) \, dx \geq \lambda_1(t) \|u\|^2, \quad (7.0.8)$$

para toda función regular  $u$ , donde hemos denotado por  $\|\cdot\|$  la norma en  $L^2(\Omega)$ .

Multiplicando la primera ecuación en (7.0.7) por  $u(t)$  e integrando en  $\Omega$ , tenemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - C(t, x)|u|^2) \, dx = 0.$$

Por (7.0.8) tenemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \lambda_1(t) \|u(t)\|^2 \leq 0$$

y por el Lema de Gronwall

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-\int_s^t \lambda_1(r) \, dr} \|u(s)\|^2.$$

Por tanto, se tiene la estabilidad exponencial si para algún  $R, \beta > 0$  y  $t \geq R$ ,  $s \leq -R$ , con  $R$  suficientemente grande, se tiene

$$\frac{\int_s^t \lambda_1(r) \, dr}{t - s} \geq 2\beta$$

que, de hecho, se verifica si

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \lambda_1(t) > 0.$$

Hemos probado pues el siguiente resultado.

**Lema 7.0.7** *Sea  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ . Supongamos que*

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \lambda_1(t) > 0$$

*donde  $\lambda_1(t)$  es el primer autovalor del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u - C(t, x)u &= \lambda(t)u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Entonces,  $\Delta + C(t, x)$  genera un operador de evolución exponencialmente estable en  $L^q(\Omega)$  para todo  $1 < q \leq \infty$ .*

Consideramos ahora perturbaciones de los operadores de evolución  $U = U_C$  definidos por las soluciones de (7.0.1) en  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q \leq \infty$ . Nuestro objetivo ahora es estimar el efecto de las perturbaciones en el tipo exponencial del operador de evolución resultante. De hecho, tenemos,



**Proposición 7.0.8** *Supongamos que  $U = U_C$  es el operador de evolución definido por las soluciones del problema (7.0.1) en  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q \leq \infty$ , como antes, de manera que existen  $M > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M e^{\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s. \quad (7.0.9)$$

*Supongamos que  $P \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , es una perturbación dada dependiente del tiempo de  $C$ . Entonces, si denotamos por  $P^+$  la parte positiva de  $P$ , se tiene*

*i) Si  $P^+ \in L^1(\mathbb{R}, L^\infty(\Omega))$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , verifica*

$$\|U_{C+P}(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s$$

*para cierta constante  $K$ .*

*ii) Si  $P^+ \in L^\sigma(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $1 < \sigma < \infty$  y  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , verifica que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $K_\varepsilon$  tal que*

$$\|U_{C+P}(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq K_\varepsilon e^{(\beta+\varepsilon)(t-s)} \quad \text{para todo } t > s.$$

*iii) Si  $P^+ \in L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , verifica*

$$\|U_{C+P}(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq K e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \quad \text{para todo } t > s$$

*para cierto  $\gamma$  que depende de  $\|P^+\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega))}$  y para alguna constante  $K$ .*

*iv) Si  $P^+ \in L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ ,  $p > N/2$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , verifica que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $K_\varepsilon$  tal que*

$$\|U_{C+P}(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq K_\varepsilon e^{(\beta+\varepsilon)(t-s)} \quad \text{para todo } t > s.$$

**Demostración.** Probamos primero que las perturbaciones no positivas no incrementan el tipo exponencial del operador de evolución. Más concretamente, probamos que si  $0 \geq P \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , entonces

$$|U_{C+P}(t, s)u_0| \leq U_C(t, s)|u_0|$$

puntualmente en  $\Omega$  para todo  $u_0 \in L^q(\Omega)$ . Para ver esto, notamos que si  $u_0 \geq 0$  entonces  $U_{C+P}(t, s)u_0 \geq 0$  lo que implica que  $|U_{C+P}(t, s)u_0| \leq U_{C+P}(t, s)|u_0|$ . Por tanto, es suficientemente probar lo anterior para datos iniciales no negativos. En ese caso, sea  $u(t, s; u_0) = U_{C+P}(t, s)u_0 \geq 0$ . Entonces, como  $P \leq 0$  tenemos

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = C(t, x)u + P(t, x)u \leq C(t, x)u \\ u(s) = u_0. \end{cases}$$

Luego, por el principio de comparación,  $0 \leq u(t, s; u_0) \leq U_C(t, s)u_0$  que es lo que queríamos probar.

Sea ahora  $P$  como en el enunciado del teorema. Escribiendo  $P = P^+ - P^-$  y usando el operador de evolución  $U_{C-P^-}(t, s)$ , que también verifica (7.0.9), tenemos que, por la fórmula de variación de constantes, para todo  $u_0 \in L^q(\Omega)$   $u(t, s; u_0) = U_{C+P}(t, s)u_0$  se verifica

$$u(t, s; u_0) = U_{C-P^-}(t, s)u_0 + \int_s^t U_{C-P^-}(t, \tau)P^+(\tau)u(\tau, s; u_0) d\tau.$$

**Caso A).** Supongamos ahora que  $p \geq q'$ . En este caso, el término  $P^+(\tau)u(\tau, s; u_0)$  puede ser estimado, usando la desigualdad de Hölder, en  $L^r(\Omega)$  con  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Luego, denotando  $z(t) = e^{-\beta(t-s)}\|u(t, s; u_0)\|_{L^q(\Omega)}$ , usando (7.0.2), y (7.0.9) tenemos

$$z(t) \leq M\|u_0\|_{L^q(\Omega)} + \int_s^t \frac{M}{(t-\tau)^{\frac{N}{2p}}} \|P^+(\tau)\|_{L^p(\Omega)} z(\tau) d\tau$$

y, además, para todo  $s \leq t_0 \leq t$

$$z(t) \leq Mz(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{M}{(t-\tau)^{\frac{N}{2p}}} \|P^+(\tau)\|_{L^p(\Omega)} z(\tau) d\tau.$$

Aplicando ahora el Lema de Gronwall singular (ver más adelante), con  $\beta = \frac{N}{2p} < 1$  obtenemos lo que queríamos probar en este caso.

**Caso B).** Supongamos ahora que  $p < q'$ . En este caso, usando la desigualdad de Hölder, sólo podemos obtener una estimación del término  $P^+(\tau)u(\tau, s, u_0)$  en  $L^1(\Omega)$ , pero, como el caso  $q = p'$  está incluido en el Caso A), anterior, tenemos

$$\|u(t, s, u_0)\|_{L^q(\Omega)} \leq M e^{\beta(t-s)} \|u_0\|_{L^q(\Omega)} + \int_s^t \frac{M e^{\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{N}{2q'}}} \|P^+(\tau)\|_{L^p(\Omega)} \|u(\tau, s, u_0)\|_{L^{p'}(\Omega)} d\tau$$

y entonces

$$\|u(t, s, u_0)\|_{L^q(\Omega)} \leq M e^{\beta(t-s)} \|u_0\|_{L^q(\Omega)} + M^2 e^{\mu(t-s)} \|u_0\|_{L^q(\Omega)} \int_s^t \frac{\|P^+(\tau)\|_{L^p(\Omega)}}{(t-\tau)^{\frac{N}{2q'}} (\tau-s)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p'})}} d\tau$$

donde  $\mu$  es o bien  $\beta + \varepsilon$ , o bien  $\beta + \gamma$  según los casos ii), iii) o iv) del enunciado del teorema. Para probar el resultado, basta usar la desigualdad de Hölder y observar que tomando  $\tau = s + z(t-s)$  tenemos

$$\int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{\sigma'N}{2q'}} (\tau-s)^{\sigma' \frac{N}{2} (\frac{1}{q}-\frac{1}{p'})}} = (t-s)^{1-\frac{\sigma'N}{2p}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{\frac{\sigma'N}{2q'}} z^{\sigma' \frac{N}{2} (\frac{1}{q}-\frac{1}{p'})}}$$

con  $\frac{\sigma'N}{2q'} < 1$  y  $\sigma' \frac{N}{2} (\frac{1}{q}-\frac{1}{p'}) < 1$  ya que  $\frac{\sigma'N}{2} < p < q'$ . Por tanto,

$$\|u(t, s, u_0)\|_{L^q(\Omega)} \leq M^2 e^{\mu(t-s)} \|u_0\|_{L^q(\Omega)} \left(1 + (t-s)^{\frac{1}{\sigma'} - \frac{N}{2p}} C(\sigma, q, p) \|P^+\|_{L^\sigma(\mathbb{R}, L^p(\Omega))}\right).$$

■

Probamos ahora el siguiente Lema que hemos usado en la prueba anterior.

#### Lema 7.0.9 Un Lema de Gronwall singular

Supongamos que  $a \in L^\sigma([0, \infty))$ ,  $1 \leq \sigma \leq \infty$  y  $0 \leq z(t)$  es una función localmente acotada tal que para todo  $0 \leq t_0 \leq t$  verifica

$$z(t) \leq M z(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{a(\tau)}{(t-\tau)^\beta} z(\tau) d\tau \quad (7.0.10)$$

con  $\beta\sigma' < 1$ . Entonces, para  $t \geq 0$  se tiene

$$0 \leq z(t) \leq M(\gamma) e^{\gamma t}$$

donde  $\gamma = 0$  si  $\sigma = 1$  (y  $\beta = 0$ ), o  $\gamma$  es arbitrariamente pequeña si  $1 < \sigma < \infty$  y  $\beta\sigma' < 1$ , o  $\gamma$  es proporcional a  $\|a\|_{L^\infty(0, \infty)}^{1/(1-\beta)}$  si  $\sigma = \infty$  y  $0 \leq \beta < 1$ .

En particular, si  $a \in L^\infty([0, \infty)) \cap L^1([0, \infty))$  y  $0 \leq \beta < 1$  entonces, para  $t \geq 0$ ,

$$0 \leq z(t) \leq M(\gamma) e^{\gamma t}$$

donde  $\gamma$  es arbitrariamente pequeño.

**Demostración.** Por una parte, nótese que el caso  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0$  se reduce al lema de Gronwall usual y entonces  $z(t) \leq M z(0) e^{\int_0^t a(s) ds}$  y el resultado, por tanto, es obvio.

Por otra parte, el caso  $\sigma = \infty$  y  $0 \leq \beta < 1$  es un caso particular del lema de Gronwall singular de [28] (Lema 7.1.1, pag. 188) que da  $\gamma = (\|a\|_{L^\infty(0, \infty)} \Gamma(1-\beta))^{1/(1-\beta)}$ .

Por tanto, queda probar el resultado en el caso  $1 < \sigma < \infty$  y  $\beta\sigma' < 1$ . Nótese que en este caso podemos tomar  $T_0$  suficientemente grande de manera que  $\|a\|_{L^\sigma(T_0, \infty)}$  sea tan pequeño como queramos. Además, de (7.0.10) tenemos que para  $T_0 \leq t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , denotando  $w(t_0, T) = \sup_{t_0 \leq \tau \leq t_0+T} z(\tau)$  y usando la desigualdad de Hölder,

$$z(t) \leq M z(t_0) + w(t_0, T) \|a\|_{L^\sigma(t_0, t_0+T)} \left( \int_{t_0}^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta\sigma'}} d\tau \right)^{1/\sigma'} \leq M z(t_0) + w(t_0, T) \delta(T_0, T)$$

donde denotamos  $\delta(T_0, T) = \|a\|_{L^\sigma(T_0, \infty)} C(\beta, \sigma') T^{1/\sigma' - \beta}$ , para alguna constante  $C(\beta, \sigma')$ .

Ahora, dado  $T_0$ , elegimos  $T$  tal que  $\delta(T_0, T) = \|a\|_{L^\sigma(T_0, \infty)} C(\beta, \sigma') T^{1/\sigma' - \beta} = 1/2$ . Tomando supremo en  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  tenemos,

$$z(t) \leq w(t_0) \leq 2Mz(t_0), \quad \text{para todo } t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Escribiendo  $t_1 = t_0 + T$  y repitiendo el proceso y la estimación anterior obtenemos una sucesión  $t_n = t_0 + nT$  tal que

$$z(t) \leq (2M)^n z(t_0), \quad \text{para todo } t_0 + (n-1)T \leq t \leq t_0 + nT$$

de donde,

$$z(t) \leq (2M)^{\frac{t-t_0}{T}+1} z(t_0) \leq (2M)^{\frac{t}{T}+1} z(t_0), \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Basta ahora elegir  $T_0$  suficientemente grande para que  $T$  sea tan grande como queramos para obtener el resultado.

Por último, si  $a \in L^\infty([0, \infty)) \cap L^1([0, \infty))$  y  $0 \leq \beta < 1$  entonces siempre podemos elegir  $\sigma$  tal que  $a \in L^\sigma([0, \infty))$  y  $\beta\sigma' < 1$  con lo que obtenemos el resultado. ■

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos el siguiente corolario que será de gran utilidad más adelante.

**Corolario 7.0.10** *En las hipótesis de la Proposición 7.0.8, supongamos además que el operador de evolución  $U_C(t, s)$  es exponencialmente estable en  $L^q(\Omega)$ , es decir, supongamos que se verifica (7.0.9) con  $\beta < 0$ . Entonces,*

i) *Si  $P^+ \in L^1(\mathbb{R}, L^\infty(\Omega))$ , o  $P^+ \in L^\sigma(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $1 < \sigma < \infty$  y  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , es exponencialmente estable.*

ii) *Si  $P^+ \in L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $p > \frac{N}{2}$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , es exponencialmente estable supuesto*

$$\beta + (M\|P^+\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega))} \Gamma(1-\delta))^{1/(1-\delta)} < 0$$

donde  $\delta = \frac{N}{2p} < 1$ .

iii) *Si  $P^+ \in L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $p > \frac{N}{2}$ , entonces el operador de evolución  $U = U_{C+P}$  en  $L^q(\Omega)$ , es exponencialmente estable.*

Una mirada detallada a la prueba anterior nos permite obtener la siguiente observación que usaremos más adelante:

**Nota 7.0.11** *La Proposición 7.0.8 y el Corolario 7.0.10 siguen siendo ciertos si pedimos que*

$$P^+ \in L^\sigma([s_0, \infty), L^p(\Omega))$$

para algún  $s_0 \in \mathbb{R}$  y  $\sigma$  y  $p$  como en los enunciados anteriores. En tal caso, obtenemos la estimación

$$\|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M_{s_0} e^{(\beta+\gamma)(t-s)} \quad \text{para todo } t > s > s_0$$

donde  $\gamma$  es arbitrariamente pequeño o depende de  $\|P^+\|_{L^\sigma([s_0, \infty), L^p(\Omega))}$  según los casos anteriores.

Para obtener una constante  $M_{s_0}$  independiente de  $s_0$  necesitaremos, pues, obtener una cota uniforme de  $\|P^+\|_{L^\sigma([s_0, \infty), L^p(\Omega))}$ , lo que requiere que  $P^+ \in L^\sigma(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ .

El siguiente corolario establece un resultado que será de utilidad en el estudio de problemas asintóticamente autónomos.

**Corolario 7.0.12** *Sea  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , tal que el operador de evolución generado por  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable.*

i) Supongamos que existen  $C^+ \in L^p(\Omega)$  y  $T_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $C - C^+ \in L^\sigma([T_0, \infty), L^p(\Omega))$  con,  $1 \leq \sigma < \infty$  y  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , o bien  $\sigma = \infty$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|C(t) - C^+\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Entonces, el semigrupo generado por  $\Delta + C^+$  decae exponencialmente.

ii) Supongamos que existen  $C^- \in L^p(\Omega)$  y  $T_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $C - C^- \in L^\sigma((-\infty, T_0], L^p(\Omega))$  con,  $1 \leq \sigma < \infty$  y  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , o bien  $\sigma = \infty$  y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|C(t) - C^-\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Entonces, el semigrupo generado por  $\Delta + C^-$  decae exponencialmente.

**Demostración.** Como el operador de evolución  $U_C$  es exponencialmente estable sabemos que

$$\|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M e^{\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s.$$

para cierto  $\beta < 0$ .

i) Sea  $P(t, x) = C^+(x) - C(t, x)$ . Las hipótesis del corolario implican que, para  $s_0$  suficientemente grande, la norma  $\|P\|_{L^\sigma([s_0, \infty), L^p(\Omega))}$  es tan pequeña como queramos. Por tanto, de la Proposición 7.0.8 y la Nota 7.0.11 tenemos que

$$\|U_{C+P}(t, s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M_{s_0} e^{(\beta+\varepsilon)(t-s)} \quad \text{para todo } t > s > s_0 \quad (7.0.11)$$

para  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño.

Por último, como  $C(t, x) + P(t, x) = C^+(x)$  tenemos que  $T_{C^+}(t) = U_{C^+}(t+s_0, s_0)$ ,  $t > 0$ , es un operador de evolución autónomo, es decir, un semigrupo. De hecho, es el semigrupo generado por  $\Delta + C^+$ . Luego, de (7.0.11),  $T_{C^+}(t)$  decae exponencialmente.

ii) Sea  $P(t, x) = C^-(x) - C(t, x)$ . Las hipótesis del corolario implican que, para  $t_0$  suficientemente negativo, la norma  $\|P\|_{L^\sigma([s_0, t_0], L^p(\Omega))}$  es tan pequeña como queramos. Por tanto, por la Proposición 7.0.8 y la Nota 7.0.11 tenemos que se verifica (7.0.11) para todo  $s_0 \leq s < t \leq t_0$  con  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño.

Como antes, al ser  $C(t, x) + P(t, x) = C^-(x)$  el semigrupo generado por  $\Delta + C^-$  verifica  $T_{C^-}(t) = U_{C^-}(t_0, t_0 - t)$ . Luego, por (7.0.11), podemos encontrar  $t$  tal que

$$\|T_{C^-}(t)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} < 1$$

y, por tanto,  $T_{C^-}(t)$  decae exponencialmente. ■

## 7.1. Trayectorias completas de problemas lineales.

Comenzamos estudiando el caso homogéneo. Para ello, consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = C(t, x)w & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ w(s) = w_0 \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.1.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^N$  y  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ .

Sea  $U_C(t, s)$  el operador de evolución en  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $X = C(\bar{\Omega})$  asociado con el problema anterior, es decir,  $U_C(t, s)w_0 = w(t, s; w_0)$ .

Sea  $\beta > 0$ , definimos  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ , la “cuenca de atracción”, formada por las familias de conjuntos acotados con crecimiento en  $-\infty$  a lo sumo exponencial con exponente menor que  $\beta$ , es decir, familias de acotados de la forma  $\{B(t)\}_t$  tales que para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe  $M_1(t_0) \geq 1$  tal que

$$e^{\gamma t} \|B(t)\|_X = \sup_{b \in B(t)} e^{\gamma t} \|b\|_X \leq M_1(t_0) \quad \text{para todo } t \leq t_0,$$

para cierta constante  $\beta > \gamma > 0$ .

**Nota 7.1.1** *Nótese que, en particular,  $\mathcal{D}$  incluye la clase  $\mathcal{D}_0$  que incluye la clase de acotados fijos, es decir,  $B(t) \equiv B$  para algún acotado  $B$ .*

*Nótese también que  $\mathcal{D}$  incluye funciones  $\psi$  sin más que tomar  $B(t) = \{\psi(t)\}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Por último, nótese que la clase  $\mathcal{D}$  impone cierta restricción al crecimiento cuando  $t \rightarrow -\infty$  pero no cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Teorema 7.1.2** *Supongamos que el operador de evolución  $U_C(t, s)$  para el problema (7.1.1) en  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $X = C(\bar{\Omega})$ , es exponencialmente estable, es decir, para algún  $\beta > 0$*

$$\|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\beta(t-s)} \quad \text{para todo } t > s. \quad (7.1.2)$$

*Entonces, la única trayectoria completa de (7.1.1) en  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$  es la solución trivial. De hecho,  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t$  con  $\mathcal{A}(t) = \{0\}$  es un atractor pullback que atrae a las familias de acotados en  $\mathcal{D}_\beta$ .*

*Además, la solución trivial también atrae hacia adelante en el tiempo a los acotados de  $X$ .*

**Demostración.** Es claro que  $\{0\}_t \in \mathcal{D}$  es una trayectoria completa de (7.1.1). Por tanto, tenemos que probar la unicidad. Sea  $\psi \in \mathcal{D}$  una trayectoria completa. Entonces

$$\psi(t) = U_C(t, s)\psi(s) \quad \text{para todo } t \geq s$$

y, tomando norma en la expresión anterior, tenemos

$$\|\psi(t)\|_X \leq \|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|\psi(s)\|_X \leq Me^{-\beta(t-s)} M_1(t) e^{\gamma s}.$$

Haciendo ahora  $s$  tender a  $-\infty$ ,

$$\|\psi(t)\|_X = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

por ser  $\gamma < \beta$ . Luego, la única trayectoria completa acotada en  $\mathcal{D}$  es 0.

Sea  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D}$ . Entonces, para todo  $w_s \in B(s)$ ,

$$\begin{aligned} \|U_C(t, s)w_s\|_X &\leq Me^{-\beta(t-s)} \|B(s)\|_X \\ &\leq Me^{-\beta(t-s)} M_1(t) e^{\gamma s} \leq M_2(t) e^{(\beta-\gamma)s} \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

para cierto  $\gamma < \beta$ . Luego, tomando límite cuando  $s \rightarrow -\infty$  tenemos

$$U_C(t, s)w_s \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

La atracción hacia adelante se sigue directamente de la condición de estabilidad exponencial (7.1.2). Por tanto, el resultado queda probado. ■

**Nota 7.1.3** *Para probar el teorema anterior en el caso de atracción de conjuntos acotados (esto es, cuando  $\mathcal{D}$  está formado por las familias de conjuntos acotados independientes del tiempo) no es necesario suponer la estabilidad exponencial de  $U$ . Es suficiente suponer que el operador de evolución decae a cero cuando  $s$  tiende  $-\infty$ , es decir,*

$$\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0 \quad \text{as } s \rightarrow -\infty.$$

Consideramos ahora el siguiente problema lineal no homogéneo

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= C(t, x)v + D(t, x) & \text{en } \Omega & t > s \\ v(s) &= v_s \\ v|_{\partial\Omega} &= 0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.1.4)$$

planteado, o bien en  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o bien en  $X = C(\bar{\Omega})$ .

Supongamos  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , y  $D \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$ , para algún  $\frac{qN}{N+2q} < r \leq \infty$  si  $X = L^q(\Omega)$  o  $r > N/2$  si  $X = C(\overline{\Omega})$ . Entonces, existe una única solución de (7.1.4) dada por la fórmula de variación de las constantes, es decir,

$$v(t, s, v_s) = U_C(t, s)v_s + \int_s^t U_C(t, \tau)D(\tau) d\tau. \quad (7.1.5)$$

Supongamos además que el operador de evolución  $U_C$  asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable, como en la Sección 7.1.

Entonces, el siguiente resultado establece la existencia de una única trayectoria completa de (7.1.4) bajo dos tipos diferentes de condiciones sobre el comportamiento de  $D$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Teorema 7.1.4** *Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $X = C(\overline{\Omega})$ . Supongamos que el operador de evolución  $U_C(t, s)$  es exponencialmente estable, es decir,*

$$\|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\beta(t-s)} \quad \text{con } \beta > 0 \text{ y } M \geq 1.$$

i) *Supongamos que*

$$D \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$$

*con  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$  si  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $N/2 < r \leq \infty$ , si  $X = C(\overline{\Omega})$ .*

*Entonces, existe una única trayectoria completa  $\phi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$  del problema (7.1.4).*

ii) *Supongamos ahora que o bien*

$$D \in L^\sigma((-\infty, T], L^r(\Omega)) \quad \text{para todo } T < \infty,$$

*o bien*

$$D \in L^\sigma(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$$

*(que corresponde con el caso  $T = \infty$ ), para  $1 \leq \sigma \leq \infty$  y cierto  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$  si  $X = L^q(\Omega)$  o  $N/2 < r \leq \infty$  si  $X = C(\overline{\Omega})$ .*

*Entonces, existe una trayectoria completa  $\phi \in L^\sigma((-\infty, T], X) \cap C(\mathbb{R}, X)$ , para todo  $T > 0$ , del problema (7.1.4).*

*Si además, suponemos que, o bien  $1 < \sigma \leq \infty$  y  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ , si  $X = L^q(\Omega)$ , o  $N\sigma'/2 < r \leq \infty$ , si  $X = C(\overline{\Omega})$ , respectivamente, o bien  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , si  $X = L^q(\Omega)$ , o  $r = \infty$ , si  $X = C(\overline{\Omega})$ , respectivamente. Entonces  $\phi \in L^\sigma((-\infty, T], X) \cap C_b((-\infty, T], X) \subset \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ , para todo  $T > 0$ , y es la única trayectoria completa en esta clase.*

*En cualquiera de los casos anteriores en los que la trayectoria completa verifica  $\phi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ , se tiene que  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  es el atractor pullback del problema (7.1.4), atrayendo familias de acotados en  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ .*

*Además,  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  atrae acotados de  $X$  hacia adelante en el tiempo. Concretamente, para todo acotado  $B \subset X$ , se tiene*

$$\|v(t, s; v_0) - \phi(t)\|_X \leq K e^{-\beta(t-s)}, \quad t > s \quad (7.1.6)$$

*para todo  $v_0 \in B$ , donde  $K = K(B)$ .*

**Demostración.** Probamos primero la existencia de una trayectoria completa del problema (7.1.4). Definimos

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t U_C(t, \tau)D(\tau) d\tau. \quad (7.1.7)$$

Si  $\phi(t)$  está bien definida entonces es una trayectoria completa de (7.1.4) ya que, dado  $t \geq s$

$$\begin{aligned} \phi(t) - U_C(t, s)\phi(s) &= \int_{-\infty}^t U_C(t, \tau)D(\tau) d\tau - U_C(t, s) \int_{-\infty}^s U_C(s, \tau)D(\tau) d\tau \\ &= \int_s^t U_C(t, \tau)D(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Además, en tal caso, tendríamos  $\phi \in C(\mathbb{R}, X)$ . Veremos más adelante que  $\phi(t)$  está bien definida y pertenece a  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ . Por ahora, supongamos que lo hemos probado.

Sea  $B = \{B(s)\}_s \subset \mathcal{D}$ . Fijamos  $\{v_s\}_s \in B$ . Entonces, la solución de (7.1.4) viene dada por la fórmula de variación de constantes (7.1.5). Sea  $w(t, s; v_s) = v(t, s; v_s) - \phi(t)$ . Entonces  $w$  es solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = C(t, x)w & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ w(s) = v_s - \phi(s) \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.1.9)$$

Luego, como  $\{B(s) - \phi(s)\}_s \in \mathcal{D}$ , del Teorema 7.1.2 se tiene

$$w(t, s; v_s) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty$$

uniformemente en familias de acotados dependientes del tiempo  $\{B(s)\}_s \subset \mathcal{D}$ . Luego, para todo  $t \in \mathbb{R}$

$$v(t, s; v_s) \rightarrow \phi(t) \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty.$$

Hemos probado, pues, que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}(t) = \{\phi(t)\}$  es el atractor pullback a tiempo  $t$  del problema (6.2.1).

Nótese que si fijamos  $s \in \mathbb{R}$  y un acotado  $B \subset X$  se tiene

$$\|v(t, s; v_0) - \phi(t)\|_X \leq K e^{-\beta(t-s)} \|v_0 - \phi(s)\|_X \leq K_1 e^{-\beta(t-s)} \rightarrow 0 \quad (7.1.10)$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ , para todo  $v_0 \in B$ , donde  $K_1$  depende del acotado  $B$ . Luego,  $\phi(t)$  también atrae hacia adelante en el tiempo a los acotados de  $X$ .

Pasamos ya a probar que  $\phi(t)$  está bien definida.

i) Como  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$  si  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $N/2 < r \leq \infty$ , si  $X = C(\bar{\Omega})$  y  $D \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$ , entonces, de (7.1.7) tenemos que, para todo  $t \leq t_0$ ,

$$e^{\gamma t} \phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{\gamma(t-\tau)} U_C(t, \tau) e^{\gamma \tau} D(\tau) d\tau$$

y usando (7.0.2), llegamos a

$$e^{\gamma t} \|\phi(t)\|_X \leq \sup_{\tau \leq t} e^{\gamma \tau} \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau$$

con  $1 < q \leq \infty$ .

Ahora bien, como  $r > \frac{qN}{N+2q}$ , si  $1 < q < \infty$ , o  $N/2 < r \leq \infty$  si  $q = \infty$ , tenemos que  $\frac{N}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) < 1$  y, por tanto, el término integral está acotado, independiente de  $t$ .

Luego  $\phi \in \mathcal{D}$  y, por el Teorema 7.1.2,  $\phi$  es la única trayectoria completa en  $\mathcal{D}$ .

ii) Supongamos ahora que  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$  para todo  $T < \infty$  (o incluso, para  $T = \infty$  si  $D \in L^\sigma(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$ ) y distinguiamos varios casos.

**Caso a)** Supongamos que  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$ ,  $1 \leq \sigma \leq \infty$  y  $q \leq r \leq \infty$ , si  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $1 \leq \sigma \leq \infty$  y  $r = \infty$  si  $X = C(\bar{\Omega})$ , respectivamente.

Comenzamos con el caso  $\sigma = \infty$ . Entonces, de (7.1.7) tenemos que, para  $t < T$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|_X &\leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} \int_s^t \|U_C(t, \tau) D(\tau)\|_X d\tau \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} \frac{M}{\beta} \left( 1 - e^{-\beta(t-s)} \right) \sup_{\tau \leq t} \|D(\tau)\|_X \\ &\leq \frac{M}{\beta} \|D\|_{L^\infty((-\infty, T), X)}. \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

Entonces,  $\phi \in L^\infty((-\infty, T), X)$ .

Probamos ahora el resultado en el caso en que  $\sigma = 1$ , es decir,  $D \in L^1((-\infty, T), X)$ . De (7.1.7), tenemos

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^1((-\infty, T), X)} &= \int_{-\infty}^T \|\phi(t)\|_X dt \leq \int_{-\infty}^T \int_{-\infty}^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau dt \\ &\leq \int_{-\infty}^T \int_{-\infty}^t M e^{-\beta(t-\tau)} \|D(\tau)\|_X d\tau dt \\ &\leq \int_{-\infty}^T \int_{\tau}^{\infty} M e^{-\beta(t-\tau)} \|D(\tau)\|_X dt d\tau \\ &\leq C \int_{-\infty}^T \|D(\tau)\|_X d\tau = C \|D\|_{L^1((-\infty, T), X)} \end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema de Fubini y la acotación de  $\int_{\tau}^T M e^{-\beta(t-\tau)} dt$  independiente de  $\tau$  y  $T \leq \infty$ . Luego,  $\phi \in L^1((-\infty, T), X)$ .

Ahora, del teorema de interpolación en espacios  $L^p(\Omega)$  (ver Teorema 5.2.3, p. 111, en Bergh y Löfström [16]) tenemos que si  $D \in L^\sigma((-\infty, T), X)$ ,  $1 \leq \sigma \leq \infty$ , entonces  $\phi \in L^\sigma((-\infty, T), X)$  y

$$\|\phi\|_{L^\sigma((-\infty, T), X)} \leq C \|D\|_{L^\sigma((-\infty, T), X)}.$$

Por último, probamos que si tomamos  $D \in L^\sigma((-\infty, T), X)$ ,  $1 \leq \sigma < \infty$ , entonces  $\phi \in L^\infty((-\infty, T), X)$ . En efecto, sea  $1 < \sigma < \infty$  entonces, de la expresión (7.1.7), usando la desigualdad de Hölder, tenemos que para  $t < T$

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|_X &\leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} \int_s^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau \\ &\leq M \limsup_{s \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{\beta \sigma'} \left( 1 - e^{-\beta \sigma' (t-s)} \right) \right)^{1/\sigma'} \left( \int_{-\infty}^t \|D(\tau)\|_X^\sigma d\tau \right)^{1/\sigma} \\ &\leq \frac{M}{(\beta \sigma')^{1/\sigma'}} \|D\|_{L^\sigma((-\infty, T), X)}. \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

Luego,  $\phi \in L^\infty((-\infty, T), X)$ . El caso  $\sigma = 1$  se prueba de manera análoga.

**Caso b)** Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ . Supongamos que  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$ ,  $1 \leq \sigma \leq \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r < q$ . En este caso, necesitamos usar la estimaciones de regularidad  $L^p$ - $L^q$  para el operador de evolución, ver (7.0.2).

Comenzamos con el caso  $\sigma = \infty$ . Supongamos  $D \in L^\infty((-\infty, T), L^r(\Omega))$  con  $\frac{qN}{N+2q} < r < q$ . Entonces, para  $t < T$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leq \int_{-\infty}^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_{L^q(\Omega)} d\tau \\ &\leq M \sup_{\tau \leq t} \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

donde hemos usado (7.0.2). Ahora bien, como  $r > \frac{qN}{N+2q}$  tenemos  $\frac{N}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) < 1$  y, por tanto, el término integral anterior está acotado independientemente  $t$ . Luego, de (7.1.13),

$$\|\phi\|_{L^\infty((-\infty, T), L^q(\Omega))} \leq C \|D\|_{L^\infty((-\infty, T), L^r(\Omega))}.$$

Supongamos ahora que  $\sigma = 1$ , es decir,  $D \in L^1((-\infty, T), L^r(\Omega))$ . Entonces, usando (7.0.2) como en



(7.1.13), tenemos

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{L^1((-\infty, T), L^q(\Omega))} &\leq \int_{-\infty}^T \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} M e^{-\beta(t-\tau)} \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^T \left[ \int_0^{T-\tau} M s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} e^{-\beta s} ds \right] \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} d\tau \\
&\leq C \int_{-\infty}^T \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} d\tau = C \|D\|_{L^1((-\infty, T), L^r(\Omega))}
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema de Fubini y la acotación de la integral  $\int_0^\infty s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} e^{-\beta s} ds$ , ya que  $r > \frac{Nq}{N+2q}$ .

De nuevo, el resultado en el caso  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$ ,  $1 < \sigma < \infty$ , se sigue del teorema de interpolación para los espacios  $L^p$  como en el Caso a) anterior.

Por último, probamos que si  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$ ,  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r < q$ , entonces  $\phi \in L^\infty((-\infty, T), L^q(\Omega))$ . De hecho, sea  $1 < \sigma < \infty$  entonces, como en (7.1.13), usando la desigualdad de Hölder tenemos que, para  $t < T$ ,

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} \int_s^t \|U_C(t, \tau) D(\tau)\|_{L^q(\Omega)} d\tau \\
&\leq \left( \int_0^\infty s^{-\frac{\sigma'N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} e^{-\beta\sigma's} ds \right)^{1/\sigma'} \left( \int_{-\infty}^t \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)}^\sigma d\tau \right)^{1/\sigma} \\
&\leq C \|D\|_{L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))}
\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

donde hemos usado que  $\frac{\sigma'N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}) < 1$  ya que  $r > \frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q}$ . Luego,  $\phi \in L^\infty((-\infty, T), L^q(\Omega))$ .

**Caso c)** Sea  $X = C(\overline{\Omega})$ . Supongamos que  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$  con  $1 \leq \sigma \leq \infty$ ,  $r > N/2$ . Este caso se prueba como el caso Caso b) con  $q = \infty$  y, o bien  $r = \infty$  si  $\sigma = 1$ , o bien  $r > N\sigma'/2$  si  $1 < \sigma \leq \infty$ .

■

**Nota 7.1.5** En la primera parte del caso ii) del Teorema hemos probado la existencia de una trayectoria completa  $\phi \in L^\sigma((-\infty, T), X) \cap C(\mathbb{R}, X)$ . En particular, esta trayectoria completa puede ser no acotada en tiempo e incluso no pertenecer a la clase  $\mathcal{D}$ . Es por esto por lo que no podemos probar unicidad para tales  $\phi(t)$ . Sin embargo, la trayectoria completa  $\phi(t)$  es única en la clase  $\phi + \mathcal{D}_\beta$ .

**Nota 7.1.6** Obsérvese que, por un argumento similar al de la prueba del Teorema anterior, si definimos  $E_\alpha = \{f \in C(\mathbb{R}, X) : e^{-\alpha|t|} f \in C_b(\mathbb{R}, X)\}$ , con  $\beta > \alpha > 0$ , se puede probar la existencia de una trayectoria completa en  $E_\alpha$  supuesto  $D \in E_\alpha$ . En tal caso necesitamos restringir la cuenca de atracción  $\mathcal{D}$  a familias de acotados con a lo sumo un crecimiento exponencial menor que  $\beta - \alpha$ .

Si consideramos sólo atracción pullback basta trabajar en

$$E_\alpha^- = \{f \in C(\mathbb{R}, X) : e^{\alpha s} f \in C_b((-\infty, \tau), X) \text{ para algún } \tau \in \mathbb{R}\}.$$

De manera análoga, si consideramos atracción hacia adelante, basta trabajar en

$$E_\alpha^+ = \{f \in C(\mathbb{R}, X) : e^{-\alpha t} f \in C_b((\tau, \infty), X) \text{ para algún } \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Nótese que después del Teorema anterior, una cuestión interesante es conocer el comportamiento asintótico de la trayectoria completa cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . De hecho, mirando más de cerca la prueba anterior se tiene que, en los casos del Teorema en los que  $\phi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ , dicha trayectoria completa converge, en realidad, a cero cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , como probamos a continuación.

**Corolario 7.1.7** Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$  o  $X = C(\overline{\Omega})$ . Supongamos que el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable.

i) Supongamos que  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$ , para  $T < \infty$ , con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ , o  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o  $\sigma = \infty$  y  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ . En el caso  $\sigma = \infty$  supondremos además que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|D(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces,  $\phi(t) \rightarrow 0$  en  $X$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

ii) Supongamos que  $D$  verifica las hipótesis del Teorema 7.1.4 y que  $D \in L^\sigma((T, \infty), L^r(\Omega))$ , para  $T > -\infty$ , con  $\sigma$  y  $r$  como en caso i). Además, en el último caso, supondremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|D(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces,  $\phi(t) \rightarrow 0$  en  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Luego, para todo conjunto  $B \subset X$  acotado se tiene

$$v(t, x; v_0) \rightarrow 0 \quad \text{en } X \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

uniformemente para  $v_0 \in B$ .

**Demostración.** El caso i) es una consecuencia directa de las desigualdades (7.1.11), (7.1.12), (7.1.13) y (7.1.14).

Por tanto, queda probar que  $\phi(t) \rightarrow 0$  en  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En tal caso, el resto de resultados son consecuencia de (7.1.6). Para ello, nótese que toda solución de (7.1.4) verifica la fórmula de variación de constantes (ver (7.1.5))

$$v(t, s; v_s) = U_C(t, s)v_s + \int_s^t U_C(t, \tau)D(\tau) d\tau$$

y como el operador de evolución es exponencialmente estable, el primer término tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para el término integral, sean  $t > T > s$  que fijaremos luego. Entonces

$$\left\| \int_s^t U_C(t, \tau)D(\tau) d\tau \right\|_X \leq \int_s^T \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau + \int_T^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau$$

**Caso a)** Supongamos que, o bien  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , y  $1 \leq \sigma \leq \infty$ ,  $r \geq q$ ; o bien  $X = C(\overline{\Omega})$ ,  $1 \leq \sigma \leq \infty$  y  $r = \infty$ .

Supongamos que  $\sigma = \infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tenemos, por un parte,

$$\begin{aligned} \int_T^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau &\leq \int_T^t M e^{-\beta(t-\tau)} \|D(\tau)\|_X d\tau \\ &\leq \frac{M}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-T)}\right) \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq T} \|D(\tau)\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

eligiendo  $T$  suficientemente grande. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_s^T \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau &\leq \int_s^T M e^{-\beta(t-\tau)} \|D(\tau)\|_X d\tau \\ &= \frac{M}{\beta} e^{-\beta(t-T)} \left(1 - e^{-\beta(T-s)}\right) \|D\|_{L^\infty((s, \infty), X)} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

eligiendo  $t$  suficientemente grande. Luego, para todo  $t$  suficientemente grande

$$\|\phi(t)\|_X < \varepsilon,$$

es decir,  $\phi(t) \rightarrow 0$  en  $X$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En el caso en que  $D \in L^\sigma((T, \infty), X)$ ,  $1 < \sigma < \infty$ , argumentando como en (7.1.12) en la prueba del Teorema 7.1.4, tenemos

$$\int_T^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau \leq M \left( \frac{1 - e^{-\beta\sigma'(t-T)}}{\beta\sigma'} \right)^{1/\sigma'} \|D\|_{L^\sigma((T, t), X)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\int_s^T \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_X d\tau \leq M e^{-\beta(t-T)} \left( \frac{1 - e^{-\beta\sigma'(T-s)}}{\beta\sigma'} \right)^{1/\sigma'} \|D\|_{L^\sigma((s, \infty), X)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para  $T$  grande y  $t \rightarrow \infty$ .

El caso  $\sigma = 1$  se tiene de manera análoga.

**Caso b)** Supongamos  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , y  $1 \leq \sigma \leq \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r < q$ .

Supongamos además  $\sigma = \infty$ . En tal caso,  $r > \frac{Nq}{N+2q}$ . Argumentando como en (7.1.13) en la prueba del Teorema 7.1.4, tenemos que para  $T$  grande y  $t \rightarrow \infty$

$$\int_T^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_{L^q(\Omega)} d\tau \leq \text{Mess} \sup_{\tau \geq T} \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} \int_T^t \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}} d\tau < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\begin{aligned} \int_s^T \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_{L^q(\Omega)} d\tau &\leq M(t-T)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \int_s^T e^{-\beta(t-\tau)} \|D(\tau)\|_{L^r(\Omega)} d\tau \\ &\leq \frac{K}{\beta} e^{-\beta(t-T)} \left(1 - e^{-\beta(T-s)}\right) \|D\|_{L^\infty((s, \infty), L^r(\Omega))} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

para cierta constante  $K > 0$ .

Supongamos ahora  $1 < \sigma < \infty$ . De nuevo, argumentando como en (7.1.14) en la prueba del Teorema 7.1.4, tenemos que para  $T$  grande y  $t \rightarrow \infty$

$$\int_T^t \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_{L^q(\Omega)} d\tau \leq M \left( \int_T^t \frac{e^{-\beta\sigma'(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})\sigma'}} d\tau \right)^{1/\sigma'} \|D\|_{L^\sigma((T, t), L^r(\Omega))} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\begin{aligned} \int_s^T \|U_C(t, \tau)D(\tau)\|_{L^q(\Omega)} d\tau &\leq M(t-T)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \left( \int_s^T e^{-\beta\sigma'(t-\tau)} d\tau \right)^{1/\sigma'} \|D\|_{L^\sigma((s, \infty), L^r(\Omega))} \\ &\leq K e^{-\beta(t-T)} \left( \frac{1 - e^{-\beta\sigma'(T-s)}}{\beta\sigma'} \right)^{1/\sigma'} \|D\|_{L^\sigma((s, \infty), L^r(\Omega))} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

para cierta constante  $K > 0$ .

**Caso c)** Sea  $X = C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que  $D \in L^\sigma((T, \infty), L^r(\Omega))$  con  $1 \leq \sigma \leq \infty$ ,  $r > N/2$ . El resultado en este caso se obtiene como el Caso b) con  $q = \infty$  y  $r = \infty$ . ■

Ahora, combinando los argumentos del Teorema 7.1.4 y el Corolario 7.1.7, tenemos el siguiente

**Corolario 7.1.8** *Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$  o  $X = C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable.*

*Supongamos que  $D_0$  está en las hipótesis del Teorema 7.1.4 y denotamos por  $\phi_0$  la trayectoria completa correspondiente. Supongamos además que  $D - D_0$  está en las hipótesis del Corolario 7.1.7.*

*Entonces, (7.1.4) tiene una trayectoria completa,  $\phi$ , y  $\phi - \phi_0 \rightarrow 0$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$  o  $-\infty$ , de acuerdo con los casos del Corolario 7.1.7.*

Nótese que, por ejemplo, lo anterior es válido si  $D_0 \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$  mientras que  $D - D_0 \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$ . En tal caso,  $D$  no verifica las hipótesis del Teorema.

Consideramos ahora el problema  $T$ -periódico asociado a (7.1.4), es decir, suponemos que  $C(t, x)$  y  $D(t, x)$  son funciones  $T$ -periódicas. El siguiente resultado establece que, en el caso  $T$ -periódico, la única trayectoria completa dada por el Teorema 7.1.4 es  $T$ -periódica.

**Corolario 7.1.9** *Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , o  $X = C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , y el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable, y*

$$D \in L^\infty(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$$

para cierto  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$  si  $X = L^q(\Omega)$  o cierto  $N/2 < r \leq \infty$  si  $X = C(\bar{\Omega})$  respectivamente.

Supongamos que  $C(t, x)$  y  $D(t, x)$  son funciones  $T$ -periódicas. Entonces, la única trayectoria completa,  $\phi \in \mathcal{D}$  del problema (7.1.4) es  $T$ -periódica.

**Demostración.** Nótese que estamos en las hipótesis del Teorema 7.1.4 ya que  $D \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$ . Sea  $\phi \in \mathcal{D}$  la única trayectoria completa dada por el Teorema 7.1.4. Entonces,

$$\phi_t(t) - \Delta\phi(t) = C(t, x)\phi(t) + D(t, x)$$

y, por la periodicidad de  $C$  y  $D$  tenemos

$$\phi_t(t) - \Delta\phi(t) = C(t + T, x)\phi(t) + D(t + T, x)$$

que después de un cambio de variable da

$$\phi_t(t - T) - \Delta\phi(t - T) = C(t, x)\phi(t - T) + D(t, x)$$

Así,  $w(t) = \phi(t - T)$  es una trayectoria completa del problema (7.1.4). Pero, por el Teorema 7.1.4 tenemos que  $\phi(t) = w(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , esto es,  $\phi(t) = \phi(t - T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En otras palabras,  $\phi$  es  $T$ -periódica. ■

## 7.2. Problemas lineales asintóticamente autónomos y periódicos.

En esta sección estudiamos el problema lineal de evolución

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = C(t, x)v + D(t, x) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ v(s) = v_0 \end{cases} \quad (7.2.1)$$

donde  $C(t, x)$  y  $D(t, x)$  convergen en algún sentido cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

En el caso en que  $C$  y  $D$  converjan a funciones independientes del tiempo veremos más adelante que, en condiciones adecuadas, el comportamiento asintótico hacia adelante y desde atrás en el tiempo de las soluciones del problema (7.2.1) viene descrito en término de ciertas funciones  $\phi^\pm(x)$  que pueden ser caracterizadas como soluciones de ciertos problemas elípticos.

Probaremos un resultado análogo en el caso en que  $C$  y  $D$  sean funciones periódicas.

**Teorema 7.2.1** *Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$  o  $X = C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable.*

*i) Supongamos que existe  $C^- \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$  tal que, para  $T < \infty$ ,*

$$C - C^- \in L^\sigma((-\infty, T), L^p(\Omega))$$

con  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|C(t) - C^-\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

si  $\sigma = \infty$ .

Supongamos también que existe  $D^- \in L^r(\Omega)$  tal que, para  $T < \infty$ ,

$$D - D^- \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$$

con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$  o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|D(t) - D^-\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces, existe una única solución  $\phi^-$  de

$$\begin{cases} -\Delta\phi^- &= C^-(x)\phi^- + D^-(x) \\ \phi^-|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \quad (7.2.2)$$

y (7.2.1) tiene un atractor pullback dado por una trayectoria completa de (7.2.1)  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  que verifica  $\phi(t) \rightarrow \phi^-$  en  $X$ , cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

ii) Supongamos que  $C$  y  $D$  están en las condiciones del Teorema 7.1.4. Supongamos además que existe  $C^+ \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ , tal que para  $-\infty < T$ ,

$$C \in D_\beta(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \quad y \quad C - C^+ \in L^\sigma((T, \infty), L^p(\Omega))$$

con  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|C(t) - C^+\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

si  $\sigma = \infty$ .

Supongamos también que existe  $D^+ \in L^r(\Omega)$  tal que, para  $-\infty < T$

$$D \in D_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega)) \quad y \quad D - D^+ \in L^\sigma((T, \infty), L^r(\Omega))$$

con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|D(t) - D^+\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces, existe una única solución  $\phi^+$  de

$$\begin{cases} -\Delta\phi^+ &= C^+(x)\phi^+ + D^+(x) \\ \phi^+|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \quad (7.2.3)$$

y para todo acotado  $B \subset X$ , se tiene que  $v(t, s, u_0) \rightarrow \phi^+$  en  $X$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente para  $u_0 \in B$ . Además, existe un atractor pullback  $\mathcal{A}$  dado por  $\mathcal{A}(t) = \{\phi(t)\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  donde  $\phi(t)$  es la única trayectoria completa de (7.2.1) y verifica  $\phi(t) \rightarrow \phi^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demostración.** Por el Corolario 7.0.12 sabemos que  $C^\pm(s)$  son tales que los semigrupos generados por  $\Delta + C^\pm(x)$  decaen exponencialmente. Luego, existe una única solución de los problemas (7.2.2) y (7.2.3) que denotamos  $\phi^\pm$ . Sea  $v_0 \in X$ , denotamos por  $v(t, s, v_0)$  la única solución del problema (7.2.1). Entonces  $w = v(t, s, v_0) - \phi^\pm$  verifica

$$\begin{cases} w_t - (\Delta + C(t, x))w &= D(t, x) + (\Delta + C(t, x))\phi^\pm = \tilde{D}^\pm(t, x) \\ w(s) &= v_0 - \phi^\pm \\ w|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (7.2.4)$$

donde

$$\tilde{D}^\pm(t, x) = D(t, x) + [\Delta + C(t, x)]\phi^\pm = (D(t, x) - D^\pm(x)) + (C(t, x) - C^\pm(x))\phi^\pm.$$

Nótese que, por regularidad elíptica (ver Gilbard y Trudinger [25] o Ladyzhenskaya y Ural'tseva [31]),  $D^\pm \in L^r(\Omega)$  implica que  $\phi^\pm \in L^s(\Omega)$  para todo  $s$  tal que  $\frac{1}{r} - \frac{2}{N} < \frac{1}{s}$  y, por tanto, para cada  $t$ ,  $(C(t) - C^\pm)\phi^\pm \in L^m(\Omega)$  con  $\frac{1}{m} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p} > \frac{1}{r} - \frac{2}{N} + \frac{1}{p}$  y como  $p > N/2$  podemos tomar  $m > r$ . Luego, para todo  $t$ ,  $\tilde{D}^\pm(t) \in L^r(\Omega)$ .

Ahora, en el caso i) note que tenemos  $\tilde{D}^-(t, x) = (D(t, x) - D^-(x)) + (C(t, x) - C^-(x))\phi^-$  y  $\tilde{D}^- \in L^\sigma((-\infty, T], L^r(\Omega))$  con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{D}^-(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces, por la parte i) del Corolario 7.1.7 se tiene el resultado.

Para el caso ii) tenemos  $\tilde{D}^+(t, x) = (D(t, x) - D^+(x)) + (C(t, x) - C^+(x))\phi^+$  y  $\tilde{D}^+ \in L^\sigma([T, \infty), L^r(\Omega))$  con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{D}^+(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Luego, la parte ii) del Corolario 7.1.7 proporciona el resultado. ■

Análogamente, para el caso de problemas asintóticamente periódicos tenemos

**Teorema 7.2.2** *Sea  $X = L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$  o  $X = C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que los operadores de evolución asociados a  $\Delta + C(t, x)$  y  $\Delta + C^\pm(t, x)$  son exponencialmente estables, donde  $C^\pm \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ , son funciones  $T$ -periódicas.*

*Supongamos además, que  $D^\pm \in L^\infty(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$  para cierto  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$  si  $X = L^q(\Omega)$  o  $N/2 < r \leq \infty$  si  $X = C(\bar{\Omega})$ , son funciones  $T$ -periódicas.*

*Definimos  $\phi^\pm(t)$  como las únicas trayectorias completas de los problemas periódicos*

$$\begin{cases} z_t^\pm - \Delta z^\pm = C^\pm(t, x)z^\pm + D^\pm(t, x) \\ z|_{\partial\Omega}^\pm = 0 \end{cases} \quad (7.2.5)$$

*que, además, son  $T$ -periódicas.*

*i) Supongamos que para  $T_0 < \infty$ ,*

$$C - C^- \in L^\sigma((-\infty, T_0), L^p(\Omega))$$

*con  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , y*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|C(t) - C^-(t)\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

*si  $\sigma = \infty$ .*

*Supongamos también que para  $T_0 < \infty$ ,*

$$D - D^- \in L^\sigma((-\infty, T_0), L^r(\Omega))$$

*con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$  o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|D(t) - D^-(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

*Entonces, (7.2.1) tiene un atractor pullback que viene dado por la única trayectoria completa de (7.2.1)  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  que verifica  $\phi(t) - \phi^-(t) \rightarrow 0$  en  $X$ , cuando  $t \rightarrow -\infty$ .*

*ii) Supongamos que, para  $-\infty < T_0$ ,*

$$C \in D_\beta(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \quad \text{y} \quad C - C^+ \in L^\sigma((T_0, \infty), L^p(\Omega))$$

*con  $p > \frac{N\sigma'}{2}$ , y*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|C(t) - C^+(t)\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

si  $\sigma = \infty$ .

Supongamos también que, para  $-\infty < T_0$

$$D \in D_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega)) \quad y \quad D - D^+ \in L^\sigma((T_0, \infty), L^r(\Omega))$$

con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|D(t) - D^+(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces, para todo acotado  $B \subset X$ , se tiene que  $v(t, s; u_0) - \phi^+(t) \rightarrow 0$  en  $X$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente para  $u_0 \in B$ . Además, existe un atractor pullback para el problema (7.2.1)  $\mathcal{A}$  que viene dado por  $\mathcal{A}(t) = \{\phi(t)\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  donde  $\phi(t)$  es la única trayectoria completa de (7.2.1) y verifica  $\phi(t) - \phi^+(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demostración.** Como los operadores de evolución asociados a  $\Delta + C^\pm(t, x)$  son exponencialmente estables, sabemos, por el Corolario 7.1.9, que los problemas (7.2.5) tienen una única trayectoria completa  $\phi^\pm$  que son  $T$ -periódicas. Tomamos ahora  $v_0 \in X$  y denotamos por  $v(t, s, v_0)$  la única solución del problema (7.2.1). Entonces  $w = v(t, s, v_0) - \phi^\pm(t)$  verifica

$$\begin{cases} w_t - (\Delta + C(t, x))w &= \tilde{D}^\pm(t, x) \\ w(s) &= v_0 - \phi^\pm(s) \\ w|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (7.2.6)$$

donde

$$\tilde{D}^\pm(t, x) = (D(t, x) - D^\pm(t, x)) + (C(t, x) - C^\pm(t, x))\phi^\pm(t).$$

Nótese que, por regularidad parabólica, para todo  $t$ ,  $D^\pm(t) \in L^r(\Omega)$  se tiene que  $\phi^\pm(t) \in L^s(\Omega)$  para todo  $s$  tal que  $\frac{1}{r} - \frac{2}{N} < \frac{1}{s}$  y entonces, para todo  $t$ ,  $(C(t) - C^\pm(t))\phi^\pm(t) \in L^m(\Omega)$  con  $\frac{1}{m} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p} > \frac{1}{r} - \frac{2}{N} + \frac{1}{p}$  y, como  $p > N/2$ , podemos tomar  $m > r$ . Por tanto, para todo  $t$ ,  $\tilde{D}^\pm(t) \in L^r(\Omega)$ .

Luego, en el caso i), tenemos  $\tilde{D}^-(t, x) = (D(t, x) - D^-(t, x)) + (C(t, x) - C^-(t, x))\phi^-(t)$  y  $\tilde{D}^- \in L^\sigma((-\infty, T_0], L^r(\Omega))$  con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{D}^-(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Entonces, por la parte i) del Corolario 7.1.7 se tiene el resultado.

Para el caso ii) tenemos  $\tilde{D}^+(t, x) = (D(t, x) - D^+(t, x)) + (C(t, x) - C^+(t, x))\phi^+(t)$  y  $\tilde{D}^+ \in L^\sigma([T_0, \infty), L^r(\Omega))$  con, o bien  $1 < \sigma < \infty$ ,  $\frac{N\sigma'q}{N\sigma'+2q} < r \leq \infty$ ,  $\sigma = 1$  y  $q \leq r \leq \infty$ , o bien  $\sigma = \infty$ ,  $\frac{Nq}{N+2q} < r \leq \infty$ , y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{D}^+(t)\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Luego, por la parte ii) del Corolario 7.1.7 se tiene el resultado. ■

# Capítulo 8

## El problema no lineal.

Consideramos ahora el problema no lineal, no autónomo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \quad t > s \\ u(s) = u_0 \in X \end{cases} \quad (8.0.1)$$

donde  $X = C(\bar{\Omega})$  y  $f(t, x, u)$  es continua, localmente Hölder en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ . De los resultados del Capítulo 6.1, dado  $u_0 \in X$ , (8.0.1) tiene una única solución local que, además, es regular.

Supongamos que  $f$  verifica la condición de disipación

$$uf(t, x, u) \leq C(t, x)u^2 + D(t, x)|u| \quad (8.0.2)$$

con  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para cierto  $p > N/2$  tal que el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$ , que denotamos por  $U_C(t, s)$ , es exponencialmente estable, y cierta función  $D \geq 0$  con valores en un espacio adecuado  $L^r(\Omega)$ .

Para asegurar que las soluciones del problema (8.0.1) estén globalmente definidas hacia adelante en el tiempo, basta probar que las soluciones del problema (8.0.1) están acotadas para todo  $t \geq s$ . Pero esto se sigue de la propiedad de disipación de  $f$  (8.0.2) (ver (8.1.7) el la prueba del Lema 8.1.2 más adelante).

De esta forma, las soluciones del problema (8.0.1) definen un *operador de evolución* dado por

$$U(t, s)u_0 = u(t, s, x; u_0) \quad t \geq s.$$

Además, por el Teorema B.4.1 este operador conserva el orden (ver también Arrieta et al. [10]).

### 8.1. Trayectorias completas extremales para problemas no lineales no autónomos

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado que garantiza la existencia de dos trayectorias completas extremales del problema (8.0.1) que, además, son *atrayentes* en sentido pullback. Un resultado relacionado con éste para operadores de evolución abstractos que verifican que, o bien existe un par de sub-supertrayectorias, o bien existe un atractor pullback para el sistema que esté contenido en un intervalo de orden, puede verse en Langa y Suárez [33]. En el primer caso, los autores prueban la existencia de trayectorias completas extremales entre la sub y la supertrayectoria (ver Nota 8.1.5 más adelante para más detalles).

Observemos que este resultado es el análogo al Teorema 1.0.1 para problemas no autónomos.

Como en el caso autónomo, para probar los resultados, jugarán un papel fundamental las soluciones completas del problema lineal

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = C(t, x)v + D(t, x) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \quad t > s \\ v(s) = v_0 - \phi^\pm(s) \end{cases} \quad (8.1.3)$$



**Teorema 8.1.1** *Supongamos que  $X = C(\overline{\Omega})$  y  $f$  es una función continua, localmente Hölder en  $t$ , localmente Lipschitz en  $u$ , y verifica (8.0.2) con  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ , con  $0 < \alpha \leq 1$ , para algún  $p > N/2$ .*

*Supongamos además, que el operador de evolución asociado a  $\Delta + C(t, x)$  es exponencialmente estable con exponente  $\beta$  y  $D(t, x)$  es tal que el problema lineal (8.1.3) posee un atractor pullback en la clase  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$  dado por una trayectoria completa  $\{\phi(t)\}_t$  (como, por ejemplo, en los Teoremas 7.1.4, 7.2.1 o 7.2.2).*

*Entonces, las soluciones de (8.0.1) son globales y podemos definir el operador de evolución  $U(t, s)$  definido por las soluciones de (8.0.1).*

*Además, existen dos trayectorias completas extremales, una maximal,  $\varphi_M \in \mathcal{D}_\beta$ , y otra minimal,  $\varphi_m \in \mathcal{D}_\beta$ , en el sentido de que cualquier otra trayectoria completa de (8.0.1) en  $\mathcal{D}_\beta$ ,  $\psi$ , verifica  $\varphi_m(t) \leq \psi(t) \leq \varphi_M(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

*El intervalo de orden  $I(t) = [\varphi_m(t), \varphi_M(t)]$  es invariante hacia adelante en el tiempo y atrae uniformemente la dinámica del sistema en sentido pullback, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$*

$$\varphi_m(t, x) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; v_s) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; v_s) \leq \varphi_M(t, x) \quad (8.1.4)$$

*uniformemente en  $x \in \overline{\Omega}$  para todo  $\{v_s\}$  en  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$ . Además,  $\varphi_M(t)$  (resp.  $\varphi_m(t)$ ) es globalmente asintóticamente estable por arriba (resp. por abajo) en sentido pullback, es decir, para todo  $v \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, X)$ ,  $v \geq \varphi_M$  (resp.  $v \leq \varphi_m$ ) se tiene*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v_s) = \varphi_M(t) \quad (\text{resp. } \varphi_m(t)).$$

*Como consecuencia, existe un atractor pullback para (8.0.1) con cuenca de atracción  $\mathcal{D}_\beta$ , denotado por  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t$ , y*

$$\mathcal{A}(t) \subset I(t) = [\varphi_m(t), \varphi_M(t)] \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

*Además,  $\varphi_m(t), \varphi_M(t) \in \mathcal{A}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Veremos posteriormente que  $\varphi_m$  y  $\varphi_M$  son  $T$ -periódicas si lo es  $f$ , es decir, si  $f(t+T, x, u) = f(t, x, u)$ .

Siguiendo el resultado análogo para problemas autónomos (véase la Sección 2.2), probamos el resultado en dos pasos. Primero, probamos que las soluciones de (8.0.1) están asintóticamente acotadas por la única trayectoria completa del problema lineal (8.1.3) (con  $C$  y  $D$  de (8.0.2)). Después, pasamos a probar el Teorema 8.1.1.

**Lema 8.1.2** *En las hipótesis del Teorema 8.1.1, las soluciones de (8.0.1) son globales y verifican*

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} |u(t, s, x; v_s)| \leq \phi(t, x) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (8.1.5)$$

*uniformemente en  $x \in \overline{\Omega}$  para todo  $\{v_s\}$  en  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$ , donde  $\phi(t)$  es el atractor pullback en la clase  $\mathcal{D}$ , dado por la trayectoria completa  $\{\phi(t)\}_t$  del problema*

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= C(t, x)v + D(t, x) & \text{en } \Omega, & t > s \\ v &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (8.1.6)$$

*Además, el intervalo de orden  $[-\phi(t), \phi(t)]$  es invariante hacia adelante en el tiempo para (8.0.1).*

**Nota 8.1.3** *En particular, como el límite en (8.1.5) es uniforme en  $x \in \overline{\Omega}$ , se tiene que el intervalo  $[-\phi(t) - \delta, \phi(t) + \delta]$  absorbe a tiempo  $t$  en sentido pullback a las soluciones de (8.0.1). De hecho, para todo tiempo fijo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\delta > 0$ , existe un tiempo  $s_0$  tal que*

$$-\phi(t) - \delta \leq u(t, s; v_s) \leq \phi(t) + \delta$$

*para todo  $s < s_0$ .*

**Demostración del Lema 8.1.2.** Sabemos que existe una única trayectoria completa acotada de (8.1.6) que denotamos  $\phi(t)$ . Es más,  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t = \{\phi(t)\}_t$  es el atractor pullback para este problema. Dado  $u_0 \in X$ , sea  $v(t, s, x; u_0)$  la única solución a tiempo  $t$  del problema (8.1.6) empezando en  $u_0$  y  $u(t, s, x; u_0)$  la solución a tiempo  $t$  de (8.0.1) con dato inicial  $u_0$ . Fijamos  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D}$  y  $v_s \in B(s)$ . Por (8.0.2) y el principio de comparación, ver Teorema B.4.1,

$$|u(t, s, x; v_s)| \leq v(t, s, x; |v_s|) \quad (8.1.7)$$

mientras ambas soluciones existan. Como  $v$  permanece acotada en  $X$  en intervalos finitos de tiempo entonces lo mismo le ocurre a  $u$  y por tanto, está definida globalmente, es decir, para todo  $t \geq s$ . Ahora bien, tenemos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} v(t, s, x; |v_s|) = \phi(t, x)$$

en  $C(\bar{\Omega})$ . Luego

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; v_s) \leq \phi(t, x)$$

uniformemente en  $x \in \bar{\Omega}$  y  $v_s \in B(s)$ . Argumentando con  $-v(t, s, x; -|v_s|)$  en vez de  $v(t, s, x; |v_s|)$ , se tiene

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} |u(t, s, x; v_s)| \leq \phi(t, x)$$

para todo  $\{v_s\}$  en  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D}$ .

Por último, nótese que si  $\{u_s\}$  es tal que  $u_s \leq \phi(s)$  entonces, por el principio de comparación

$$u(t, s; u_s) \leq u(t, s; \phi(s)) \leq v(t, s; \phi(s)) = \phi(t) \quad \text{para todo } t > s.$$

Tomando ahora  $\{u_s\}$  tal que  $u_s \geq -\phi(s)$  tenemos

$$u(t, s; u_s) \geq u(t, s; -\phi(s)) \geq -v(t, s; -\phi(s)) = -\phi(t) \quad \text{para todo } t > s.$$

Luego,

$$U(t, s)[- \phi(s), \phi(s)] \subset [- \phi(t), \phi(t)],$$

es decir,  $\{[- \phi(t), \phi(t)]\}_t$  es un conjunto invariante hacia adelante en el tiempo para (8.0.1). ■

Usando este lema, podemos probar ya el Teorema 8.1.1.

**Demostración del Teorema 8.1.1.** Sea  $U(t, s)$  el operador de evolución no lineal asociado a (8.0.1). Por el Teorema B.4.1, sabemos que este operador conserva el orden. Además,  $\phi(t)$  es una supertrayectoria ya que la solución de (8.0.1) que parte de  $\phi(s)$  verifica, por (8.1.7),

$$u(t, s; \phi(s)) \leq v(t, s; \phi(s)) = \phi(t)$$

donde  $v$  denota la solución del problema lineal (8.1.6). Nótese que para la última igualdad hemos usado el hecho de que  $\phi(t)$  es una trayectoria completa del problema lineal.

A continuación, probamos que, como  $\phi(t)$  es una supertrayectoria del problema no lineal,  $U(t, s)\phi(s)$  es monótona cuando  $s \rightarrow -\infty$  y  $U(t, s)\phi(s) \rightarrow \varphi_M(t)$  cuando  $s \rightarrow -\infty$  uniformemente en  $x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De hecho, para un tiempo fijo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene, de la definición de supertrayectoria

$$U(t, s)\phi(s) \leq \phi(t) \quad \text{para todo } s \leq t$$

y, en particular,

$$U(s + \varepsilon, s)\phi(s) \leq \phi(s + \varepsilon) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Luego, por monotonía,

$$U(t, s)\phi(s) = U(t, s + \varepsilon)U(s + \varepsilon, s)\phi(s) \leq U(t, s + \varepsilon)\phi(s + \varepsilon).$$

Por tanto,  $\{U(t, s)\phi(s)\}_s$  es no creciente cuando  $s \rightarrow -\infty$ . Además, está acotada inferiormente (por  $-\phi(t) - \delta$  para algún  $\delta > 0$ , ver Nota 8.1.3). Luego, converge puntualmente a cierta función que denotamos

$\varphi_M(t, x)$ . Es más, esta convergencia es uniforme en espacio por el Teorema de Ascoli-Arzelá:  $\{U(t, s)\phi(s)\}_s$  es equicontinuo y acotado por el efecto regularizante del operador de evolución ya que  $\phi(t)$  se puede escribir  $U(t, s)\phi(s) = U(t, t-1)U(t-1, s)\phi(s)$  donde  $\{U(t-1, s)\phi(s)\}_{s \leq s_0}$  está acotado (para cierto  $s_0$ ). Luego, por el efecto regularizante del operador de evolución (véase el Teorema 6.1.13) sabemos que  $\{U(t, s)\phi(s)\}_{s \leq s_0} = U(t, t-1)\{U(t-1, s)\phi(s)\}_{s \leq s_0}$  es pre-compacto en  $C(\overline{\Omega})$ . Luego,  $U(t, s)\phi(s) \rightarrow \varphi_M(t) \in C_0(\overline{\Omega})$  uniformemente en  $\Omega$  cuando  $s \rightarrow -\infty$ .

La continuidad de  $U(t, s)$  implica que  $\varphi_M(t)$  es una trayectoria completa de (8.0.1). De hecho,

$$\begin{aligned} U(t, s)\varphi_M(s) &= U(t, s) \lim_{r \rightarrow -\infty} U(s, r)\phi(r) = \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} U(t, s)U(s, r)\phi(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} U(t, r)\phi(r) = \varphi_M(t). \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Probamos ahora que, asintóticamente, todas las trayectorias del problema (8.0.1) entran por debajo de  $\varphi_M$ , uniformemente en  $x$ . Fijamos  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D}$  y  $v_s \in B(s)$ . De (8.1.7) tenemos

$$u(t, s; v_s) \leq v(t, s; |v_s|) \quad \text{para todo } t \geq s.$$

Haciendo actuar el operador de evolución en ambos lados de la desigualdad, tenemos, por monotonía

$$U(r, t)u(t, s; v_s) = u(r, s; v_s) \leq U(r, t)v(t, s; |v_s|) \quad \text{para todo } r \geq t \geq s.$$

Tomando ahora límite cuando  $s$  tiende a  $-\infty$  tenemos

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} u(r, s; v_s) \leq U(r, t)\phi(t) \quad (8.1.9)$$

para todo  $t \leq r$ , donde hemos usado la continuidad de  $U(t, s)$ . Haciendo tender  $t$  a  $-\infty$  tenemos

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} u(r, s; v_s) \leq \varphi_M(r),$$

como queríamos probar. La maximalidad de  $\varphi_M(t)$  sigue de esta desigualdad.

De la desigualdad (8.1.9) tenemos la estabilidad asintótica global por arriba de la trayectoria completa maximal. En efecto, fijamos  $r \in \mathbb{R}$  y suponemos que  $\{v_s\} \in \mathcal{D}_\beta$  es tal que  $v_s \geq \varphi_M(s)$  para todo  $s$ . Entonces, por monotonía

$$\varphi_M(r) = u(r, s; \varphi_M(s)) \leq u(r, s; v_s)$$

para todo  $s \leq r$ . Ahora bien, tomando límite cuando  $s \rightarrow -\infty$  y usando (8.1.9) tenemos

$$\varphi_M(r) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(r, s; v_s) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(r, s; v_s) \leq U(r, t)\phi(t)$$

para todo  $t \leq r$ . Tomando ahora límite cuando  $t \rightarrow -\infty$  tenemos

$$\varphi_M(r) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(r, s; v_s) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(r, s; v_s) \leq \varphi_M(r).$$

Por tanto,  $u(r, s; v_s) \rightarrow \varphi_M(r)$  cuando  $s \rightarrow -\infty$  lo que prueba la estabilidad asintótica por arriba de la trayectoria completa maximal. El resultado para la trayectoria completa minimal se prueba de manera análoga.

Para probar la invarianza de  $I(t)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$  tomamos  $u_s$  tal que

$$\varphi_m(s) \leq u_s \leq \varphi_M(s).$$

Entonces, haciendo actual el operador de evolución en ambos lados de la desigualdad tenemos, por el principio de comparación,

$$\varphi_m(t) = U(t, s)\varphi_m(s) \leq u(t, s; u_s) \leq U(t, s)\varphi_M(s) = \varphi_M(t).$$

Luego,  $U(t, s)I(s) \subset I(t)$ , es decir,  $I(t)$  es invariante por  $U$  hacia adelante en el tiempo.

Pasamos ahora a probar la existencia del atractor pullback  $\mathcal{A}$ . A saber, como señalamos en la Nota 8.1.3, el intervalo de orden dependiente del tiempo,  $[-\phi(t) - \delta, \phi(t) + \delta]$  en  $C(\overline{\Omega})$  es un conjunto absorbente para  $U(t, s)$ . Sea

$$J(t) = \overline{U(t, t-1)[-\phi(t-1) - \delta, \phi(t-1) + \delta]}.$$

Del efecto regularizante de  $U(t, s)$  tenemos que  $J(t)$  es compacto en  $C(\overline{\Omega})$ . Además,  $J(t)$  es un conjunto absorbente en sentido pullback. Luego, por el Teorema 6.1.8 existe el atractor pullback  $\mathcal{A}$  para  $U(t, s)$ .

Por último, es claro que  $\mathcal{A}(t) \subset I(t)$  y  $\varphi_m(t), \varphi_M(t) \in \mathcal{A}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Nota 8.1.4** *Obsérvese que si  $C$  y  $D$  están en las hipótesis del Corolario 7.1.7 entonces se tiene que  $\phi(t)$  converge a 0 en  $X = C(\overline{\Omega})$  cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ . En particular, esto mismo es cierto para las soluciones del problema no lineal (8.0.1).*

*Por otra parte, si  $C$  y  $D$  están en las hipótesis del Teorema 7.2.1, el Corolario 7.1.9 o el Teorema 7.2.2 entonces  $\phi(t)$  es asintóticamente constante o periódica.*

**Nota 8.1.5** *Nótese que, con el resultado anterior, obtenemos información global sobre la dinámica del problema (8.0.1) así como propiedades uniformes en el comportamiento asintótico de sus soluciones. A saber, obtenemos información sobre la dinámica del problema en todo el espacio de fases  $X$  (de hecho, en la cuenca de atracción  $\mathcal{D}$ ) y la convergencia uniforme de las soluciones al intervalo de orden definido por las dos trayectorias completas extremas.*

*Además, de la prueba anterior, es fácil extender los resultados obtenidos para el caso particular del problema (8.0.1) al marco general de operadores de evolución que conservan el orden que se considera en [33].*

*Puede encontrarse un resultado relacionado a éste en Langa y Suárez [33] (Teorema 3.4). Dicho resultado establece la existencia de trayectorias completas extremas en un intervalo de orden definido por un par de sub-supersoluciones.*

Consideramos ahora el problema  $T$ -periódico asociado a (6.0.1), es decir, suponemos que  $f(t, x, u)$  es una función  $T$ -periódica. Este tipo de problemas ha sido ampliamente estudiado (ver, por ejemplo, Daners y Koch–Medina [21] o Hess [30]). Además, supongamos que  $f$  verifica (8.0.2) con funciones  $T$ -periódicas  $C(t, x)$  y  $D(t, x)$ .

Una sencilla aplicación de nuestro resultado principal, Teorema 8.1.1, proporciona la existencia de soluciones extremas  $T$ -periódicas del problema no lineal.

**Corolario 8.1.6** *En el caso de una ecuación  $T$ -periódica, las soluciones extremas de (8.0.1) proporcionadas por el Teorema 8.1.1 son  $T$ -periódicas. En particular, existen dos soluciones extremas  $T$ -periódicas del problema (8.0.1).*

**Demostración.** Por el Corolario 7.1.9 sabemos que la única trayectoria completa de (8.1.6) en  $\mathcal{D}_\beta$  es  $T$ -periódica. Sólo tenemos que comprobar que la trayectoria completa maximal del Teorema 8.1.1 es  $T$ -periódica. Pero, sabemos que

$$U(t, s)\phi(s) \rightarrow \varphi_M(t) \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty.$$

Podemos usar ahora que  $\phi(s)$  y  $f(t, x, u)$  son funciones  $T$ -periódicas y, entonces,

$$U(T + t, T + s)\phi(T + s) = U(t, s)\phi(s)$$

donde el primer miembro de la desigualdad tiende a  $\varphi_M(T + t)$  cuando  $s \rightarrow -\infty$  y el segundo tiende a  $\varphi_M(t)$  cuando  $s \rightarrow -\infty$ . Luego,  $\varphi_M(t) = \varphi_M(T + t)$  y, por tanto,  $\varphi_M$  es  $T$ -periódica como queríamos probar. El mismo argumento se aplica a  $\varphi_m(t)$ . ■

**Nota 8.1.7** *En el estudio de las ecuaciones periódicas, es habitual considerar la aplicación de Poincaré asociada a (8.0.1):  $S = U(T, 0)$ , donde  $U(t, s)$  es el operador de evolución definido por las soluciones de (6.0.1) (ver, por ejemplo, Hess [30]).*

En este caso, la estabilidad exponencial del operador de evolución generado por  $\Delta + C(t, x)$  es equivalente a que la aplicación de Poincaré  $S_C$  asociada a este operador tiene radio espectral menor que uno.

En tal caso, esto implica  $1 \in \rho(S_C)$  (la resolvente de  $S_C$ ) y por la Proposición 6.9 de Daners y Koch-Medina [21] tenemos la existencia de una única solución periódica del problema lineal establecida en el Corolario 7.1.9. Sin embargo, nosotros hemos dado otra prueba que sigue directamente del hecho de que estamos trabajando con ecuaciones de coeficientes periódicos.

## 8.2. Comportamiento asintótico hacia adelante en el tiempo

Para estudiar el comportamiento asintótico hacia adelante en el tiempo de una ecuación no autónoma, los conceptos naturales son aquellos de operadores de evolución asintóticamente compactos y atractor uniforme definidos por Haraux en [27] y Chepyzhov y Vishik en [19]. Estos conceptos son los siguientes

### Definición 8.2.1

i) Diremos que  $U(t, s)$  es asintóticamente compacto en  $\sigma \in \mathbb{R}$  si para la familia uniparamétrica  $U_\sigma(t, 0) = U(t + \sigma, \sigma)$ ,  $t \geq 0$ , existe un conjunto compacto  $K_\sigma \subset X$ , que puede depender de  $\sigma$ , que atrae hacia adelante en tiempo a conjuntos acotados de  $X$ .

Diremos que  $U(t, s)$  es asintóticamente compacto si es asintóticamente compacto para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

ii) Diremos que  $U(t, s)$  es uniformemente asintóticamente compacto si existe un conjunto compacto  $K \subset X$  tal que para todo conjunto acotado  $B \subset X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} \text{dist}(U(t + s, s)B, K) = 0.$$

iii) Diremos que un conjunto compacto  $\mathcal{F}_U$  es el atractor uniforme de  $U(t, s)$  si es el menor conjunto compacto verificando la definición ii).

Como veremos más adelante, en algunos casos, esta noción de atractor puede ser demasiado fuerte para el estudio del comportamiento hacia adelante en el tiempo de una ecuación no autónoma. Es por esto por lo que construiremos ahora otro tipo de atractor que proporciona información sobre la dinámica hacia adelante en el tiempo.

Consideramos un operador de evolución asintóticamente compacto  $U(t, s)$ . Entonces, fijado  $s \in \mathbb{R}$ , por definición, existe un conjunto compacto  $K_s$  que atrae hacia adelante en el tiempo a conjuntos acotados de datos iniciales empezando a tiempo  $s$ .

Luego, de manera usual, dado un acotado  $B \subset X$  definimos el conjunto  $\omega$ -límite desde tiempo  $s$  como

$$\omega_s(B) = \{u \in X : \exists t_n \uparrow \infty, v_n \in B, \text{ t.q. } U(t_n, s)v_n \rightarrow u \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Con esto, es claro que  $\mathcal{F}_s = \omega_s(K_s) \subset K_s$  es el mínimo conjunto compacto que atrae a acotados de  $X$  hacia adelante en el tiempo para la familia uniparamétrica  $U_s(t, 0) = U(t + s, s)$ ,  $t \geq 0$ .

No es difícil probar que existe una relación de monotonía entre esta familia de conjuntos compactos (véase Haraux [27]). Concretamente,

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{para todo } s < t.$$

Un caso interesante es cuando el conjunto compacto  $K_\sigma$  en la Definición 8.2.1 es de hecho independiente de  $\sigma$ , esto es, existe un conjunto compacto  $K \subset X$  tal que para todo  $s \in \mathbb{R}$  y cualquier acotado  $B \subset X$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_X(U(t, s)B, K) = 0.$$

En tal caso, tenemos la existencia de un atractor del problema (8.0.1) hacia adelante en el tiempo en el sentido de la Definición 6.1.7 que puede ser caracterizado por

$$\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{F}_s} \subset K$$

donde  $\mathcal{F}_s = \omega_s(K) \subset K$ .

Para mostrar como se aplica lo anterior al problema (8.0.1), tomamos  $X = C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que  $f$  es continua, localmente Hölder en  $t$ , localmente Lipschitz en  $u$ , y verifica (8.0.2) con  $C \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$  con  $0 < \alpha \leq 1$  y algún  $p > N/2$ , y  $D$  es tal que existe una única trayectoria completa  $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$  para el problema lineal (7.1.4) verificando

$$\|v(t, s; u_0) - \phi(t)\|_X \leq M e^{-\beta(t-s)}$$

para todo  $u_0 \in B$  donde  $B$  es cualquier acotado de  $X$ , con  $M = M(B)$  (véanse los Teoremas 7.1.4, 7.2.1 y 7.2.2 para tales condiciones sobre  $C$  y  $D$ ). Entonces, dado un conjunto acotado  $B$  de  $X$  y  $\varepsilon > 0$  existe un tiempo  $T = T(\varepsilon)$  tal que para todo  $u_0 \in B$ ,

$$\|v(t, s; u_0) - \phi(t)\|_X < \varepsilon \quad \text{para todo } t - s \geq T. \quad (8.2.1)$$

En particular, para  $R = \|\phi\|_{L^\infty(X)} + 1$ ,

$$\|v(t, s; u_0)\|_X \leq R \quad \text{para todo } t - s \geq T.$$

Además, sabemos que  $|u(t, s; u_0)| \leq v(t, s; |u_0|)$  para todo  $t > s$ . Luego, para todo  $t - s \geq T$ ,

$$\|u(t, s; u_0)\|_X \leq \|v(t, s; u_0)\|_X \leq R, \quad (8.2.2)$$

es decir, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $B_X(0, R)$  es un conjunto absorbente hacia adelante en el tiempo para  $U(t, s)$ . Es más, por el efecto regularizante del operador de evolución, las soluciones del problema no lineal entran en una cierta bola  $\overline{B_Y(0, R_Y)} \subset B_X(0, R)$  de un subespacio  $Y$  con inclusión compacta en  $X$ . Luego,  $K = \overline{B_Y(0, R_Y)} \subset B_X(0, R)$  es un conjunto compacto absorbente hacia adelante en el tiempo independiente de  $s$ , donde la clausura la hemos tomado en  $X$ .

Ahora, es claro que en este caso, tenemos que los conjuntos  $\mathcal{F}_s$  y  $\mathcal{F}$  definidos anteriormente pueden ser también descritos como

$$\mathcal{F}_s = \overline{\bigcup_{B \subset B(X)} w_s(B)}$$

donde  $B(X)$  denota el conjunto de los conjuntos acotados de  $X$  y

$$\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \omega_s(B_X(0, R))}.$$

**Nota 8.2.2** *Nótese que la construcción anterior puede llevarse a cabo para (8.0.1) sin suponer la acotación de  $\phi(t)$ . Concretamente, todo lo anterior sigue siendo válido si  $\phi \in \mathcal{D}_\gamma$  para algún  $0 < \gamma < \beta$  ya que, en tal caso,*

$$\begin{aligned} \|v(t, s; u_s) - \phi(t)\|_X &\leq M e^{-\beta(t-s)} \|u_s - \phi(s)\| \leq M_1 e^{-\beta(t-s)} e^{-\gamma s} \\ &\leq M_1 e^{-\gamma t} e^{-(\beta-\gamma)(t-s)} = M_1 e^{-\gamma t} e^{-(\beta-\gamma)(t-s)}. \end{aligned}$$

Y, para  $t > 0$  tenemos

$$\|v(t, s; u_s) - \phi(t)\|_X \leq M_1 e^{-(\beta-\gamma)(t-s)}.$$

Luego, como  $\beta - \gamma > 0$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $T = T(\varepsilon) > 0$  tal que para todo  $t - s > T$ ,  $t > 0$ ,

$$\|v(t, s; u_s) - \phi(t)\|_X < \varepsilon.$$

*El argumento sigue ahora como antes.*

Probamos ahora un resultado sobre la estructura del atractor hacia adelante en el tiempo,  $\mathcal{F}$ , de (8.0.1). Para ello, sea  $\{B(t)\}_t$  una familia invariante para  $U(t, s)$ , esto es,  $U(t, s)B(s) = B(t)$  para todo  $t > s$ . Denotamos por  $\omega(B)$  el conjunto

$$\omega(B) = \{u \in X : \exists t_n \uparrow \infty, v_n \in B(t_n), \text{ t.q. } v_n \rightarrow u \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

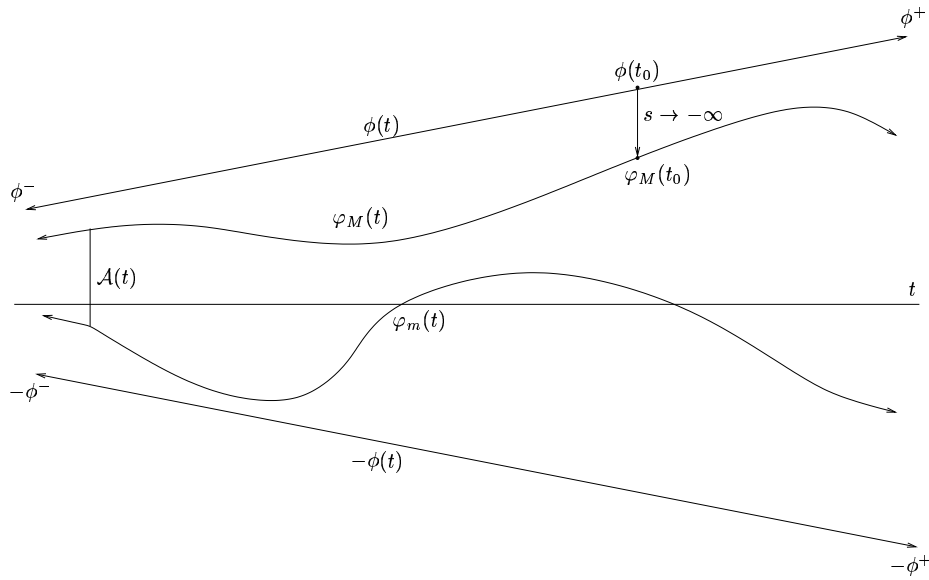


Figura 8.1: Esquema de las trayectorias completas  $\phi$ ,  $\varphi_m$  y  $\varphi_M$

**Proposición 8.2.3** Sea  $\{B(t)\}_t$  un conjunto invariante para  $U(t, s)$ . Entonces

$$\omega(B) \subset \mathcal{F}$$

donde  $\mathcal{F}$  es el atractor hacia adelante en el tiempo de  $U(t, s)$  definido anteriormente.

En particular, si  $\mathcal{A}$  es el atractor pullback para  $U(t, s)$  entonces  $\omega(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ . Además, si  $\psi(t)$  es una trayectoria completa de  $U(t, s)$  entonces  $\omega(\psi) \subset \mathcal{F}$ .

**Demostración.** De (8.2.2) y el efecto regularizante, si tomamos  $r - s > T$  como antes, tenemos

$$B(r) = U(r, s)B(s) \subset K$$

donde  $K = \overline{B_Y(0, R_Y)} \subset \overline{B_X(0, R)}$ . Luego, para todo  $t > r$ ,

$$B(t) = U(t, r)B(r) \subset U(t, r)K.$$

Tomando límites de sucesiones cuando  $t$  tiende a  $\infty$  tenemos

$$\omega(B) \subset \omega_r(K) \subset \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$$

donde  $\omega_r(K)$  es el conjunto  $\omega$ -límite desde tiempo  $r$  definido anteriormente. ■

**Nota 8.2.4** La noción atractor hacia adelante en tiempo  $\mathcal{F}$  que hemos definido anteriormente es más débil que la de atractor uniforme. En particular, puede existir el atractor que hemos definido en ocasiones en las que el atractor uniforme no. Esto es debido a que, para la definición de atractor uniforme, es esencial el hecho de que las trayectorias completas consideradas sean acotadas (véase Chepyzhov y Vishik [19]). Concretamente, se puede probar (véase Chepyzhov y Vishik [19]) que

$$\mathcal{F}_U = \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}(t)}$$

donde  $\mathcal{A}$  es el atractor pullback que atrae conjuntos acotados.

Consideremos ahora un problema lineal cuya única trayectoria completa es no acotada hacia atrás en el tiempo. Entonces, el único conjunto que satisface la Definición 8.2.1 es

$$\mathcal{F}_U = \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi(t)}$$

que no es un conjunto acotado y, por tanto, no es compacto. Sin embargo, existe el atractor (no uniforme) hacia adelante en el tiempo tal y como lo hemos definido,

$$\mathcal{F} = \omega(\phi) = \{u \in X : \exists t_n \uparrow \infty, \text{ t.q. } \phi(t_n) \rightarrow u \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$$

Como caso particular, consideramos ahora el caso de problemas asintóticamente autónomos. Concretamente, supongamos en primer lugar que  $f$  verifica la condición de disipación (8.0.2) con  $C(t, x) \rightarrow C^+(x)$ ,  $D(t, x) \rightarrow D^+(x)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  como en el Teorema 7.2.1. De los resultados anteriores tenemos, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{A}(t) \subset [\varphi_m(t), \varphi_M(t)] \subset [-\phi(t), \phi(t)] \subset \overline{B_X(0, R)}$$

y todos estos conjuntos son invariantes. Luego, denotando  $I = \{I(t)\}_t = \{[\varphi_m(t), \varphi_M(t)]\}_t$ , tenemos por el Teorema 7.2.1 y la Proposición 8.2.3,

$$\omega(\mathcal{A}) \subset \omega(I) \subset \mathcal{F} \subset [-\phi^+, \phi^+].$$

Observamos ahora que por ser  $\{\varphi_m(t)\}_t$ ,  $\{\varphi_M(t)\}_t$  trayectorias completas relativamente compactas, podemos definir  $\omega(\varphi_M)$  y  $\omega(\varphi_m)$ , que son conjuntos compactos y conexos de  $X$ . Luego,

$$\omega(\mathcal{A}) \subset \omega(I) \subset [\psi_m, \psi_M] \cap \mathcal{F} \subset [-\phi^+, \phi^+]$$

donde

$$\psi_m(x) = \inf_{v \in \omega(\varphi_m)} v(x) \quad \text{and} \quad \psi_M(x) = \sup_{v \in \omega(\varphi_M)} v(x).$$

Nótese que puede realizarse un análisis análogo hacia atrás en el tiempo cuando  $C(t, x) \rightarrow C^-(x)$ ,  $D(t, x) \rightarrow D^-(x)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  considerando el conjunto  $\alpha$ -límite de un conjunto invariante,

$$\alpha(B) = \{u \in X : \exists t_n \uparrow -\infty, v_n \in B(t_n), \text{ t.q. } v_n \rightarrow u \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Volviendo al comportamiento hacia adelante, supongamos ahora además que  $f(t, x, u) \rightarrow g(x, u)$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$ , uniformemente en  $x \in \overline{\Omega}$ , para  $u$  en conjuntos acotados de  $X$ . Entonces, se prueba en Mischaikow et al. [38] que el operador de evolución asociado a la ecuación (8.0.1) es asintóticamente autónomo en el sentido de Thieme (véase Thieme [49]). Luego, el conjunto  $\omega$ -límite de cualquier punto  $\omega_s(u_0)$  es invariante por el semiflujo  $S(t)$  definido por las soluciones de la ecuación límite

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= g(x, v), & t > 0 \\ v(0) &= v_0 \\ v|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (8.2.3)$$

(véase el Teorema 2.5, p. 760 en Thieme [49]). Además, si los equilibrios del problema límite son aislados, la existencia de una función de Lyapunov para el problema límite (8.2.3) implica que dichos equilibrios no están encadenados de manera cíclica en el sentido de la Definición 1.3 de Mischaikow et al. [38].

Por tanto, del Teorema 4.2 y el Corolario 4.3, p. 762, de Thieme [49] el conjunto  $\omega$ -límite de cualquier solución del problema no autónomo es un punto de equilibrio de  $S(t)$ . Luego, se tiene que

$$\omega(\varphi_m) = \{\varphi_m^\infty\}, \quad \omega(\varphi_M) = \{\varphi_M^\infty\} \subset \mathcal{F},$$

para ciertos equilibrios  $\varphi_m^\infty \leq \varphi_M^\infty$  del problema autónomo límite. Además, tenemos

$$\omega(\mathcal{A}) \subset \omega(I) \subset [\varphi_m^\infty, \varphi_M^\infty] \subset [-\varphi_m^+, \varphi_M^+] \subset [-\phi^+, \phi^+]$$

donde  $\varphi_m^+$ ,  $\varphi_M^+$  son los equilibrios extremales del problema límite supuesto que existen, véase la Parte I de esta memoria.



Es más,  $\omega(\mathcal{A})$  está contenido en el atractor del problema límite (véase el Teorema 3.7.2, p. 45, de Hale [26] o el Teorema 4.3.6, p. 96, de Henry [28]).

Por otra parte, de los argumentos anteriores es claro que también

$$\mathcal{F} \subset [\varphi_m^+, \varphi_M^+]$$

ya que  $\mathcal{F}$  puede obtenerse como la unión de conjuntos  $\omega$ -límite de conjuntos acotados fijos y, por el Teorema 3.7.2, p. 45, de Hale [26] o el Teorema 4.3.6, p. 96, en [28], debe ser un conjunto invariante del problema límite.

### 8.3. Un ejemplo: la ecuación logística no autónoma.

Consideramos ahora la ecuación logística no autónoma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \quad t > s \\ u(s) = v_s \end{cases} \quad (8.3.1)$$

con

$$f(t, x, u) = m(t, x)u - n(t, x)|u|^{\rho-1}u$$

donde  $n \geq 0$  y  $\rho > 1$ .

A continuación veremos cómo se pueden aplicar las técnicas anteriormente estudiadas a este problema concreto.

**Teorema 8.3.1** *Supongamos que  $n(t, x) \geq 0$  y  $m(t, x)$  es tal que el operador de evolución asociado a  $\Delta + m(t, x)$  es exponencialmente estable. Entonces,  $\|u(t, s; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  o  $s \rightarrow -\infty$ , uniformemente para  $u_0$  en acotados de  $X = C(\overline{\Omega})$ .*

*En particular, el atractor pullback viene dado por  $\mathcal{A}(t) = \{0\}$  y el atractor hacia adelante viene dado por  $\mathcal{F} = \{0\}$ .*

**Demostración.** Nótese que usando  $n(t, x) \geq 0$  tenemos que  $f(t, x, u)$  verifica

$$f(t, x, u)u = m(t, x)u^2 - n(t, x)|u|^{\rho+1} \leq m(t, x)u^2 \quad (8.3.2)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Ahora bien, como  $m(t, x)$  es tal que el semigrupo de evolución asociado a  $\Delta + m(t, x)$  es exponencialmente estable, se tiene, por Theorem 8.1.1 con  $C(t, x) = m(t, x)$  y  $D(t, x) = 0$ , y (8.3.2) que existen dos trayectorias completas acotadas extremales del problema (8.3.1). Pero, en este caso, ambas trayectorias son iguales y coinciden con la solución trivial. Por tanto, el atractor pullback y el atractor hacia adelante en el tiempo vienen dados por 0. De hecho,  $\phi(t) \equiv 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

Supongamos ahora que  $m(t, x)$  es tal que el operador de evolución generado por  $\Delta + m(t, x)$  no es exponencialmente estable.

**Teorema 8.3.2** *Sea  $X = C(\overline{\Omega})$ . Supongamos que el operador de evolución generado por  $\Delta + m(t, x)$  no es exponencialmente estable pero existe una descomposición  $m(t, x) = m_1(t, x) + m_2(t, x)$  con  $m_2(t, x) \geq 0$  y*

$$m_1 \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega)), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad p > N/2.$$

*tal que el operador de evolución asociado a  $\Delta + m_1(t, x)$  sí es exponencialmente estable con exponente  $\beta$ . Sea  $D = \beta \left(\frac{m_2}{n^{1/\rho}}\right)^{\rho'}$ . Supongamos que, o bien*

- i)  $D \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$  con  $N/2 < r \leq \infty$ ; o bien*
- ii) para todo  $T$ ,  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$  con  $1 \leq \sigma \leq \infty$  y  $N\sigma'/2 < r \leq \infty$  si  $1 < \sigma < \infty$ , o  $r = \infty$  si  $\sigma = 1$ , o  $N/2 < r \leq \infty$  si  $\sigma = \infty$ .*

*Entonces, podemos aplicar el Teorema 8.1.1 y entonces*

1. Existe un atractor pullback  $\mathcal{A}(t) \subset [\varphi_m(t), \varphi_M(t)]$  donde  $\varphi_m(t)$  y  $\varphi_M(t)$  son las trayectorias completas extremales dadas por el Teorema 8.1.1. En particular, el intervalo ordenado  $[\varphi_m(t), \varphi_M(t)]$  atrae a tiempo  $t$  en sentido pullback.
2. Para soluciones no negativas también existe un atractor pullback  $\mathcal{A}_+(t) \subset [0, \varphi_M(t)]$ . En particular, existe un conjunto que atrae a tiempo  $t$  a las soluciones no negativas en sentido pullback que viene dado por  $[0, \varphi_M(t)]$ .

**Demstración.** Aplicando la desigualdad de Young a  $f$  se tiene

$$f(t, x, u) \leq m_1(t, x)u + \beta \left( \frac{m_2(t, x)}{n(t, x)^{1/\rho}} \right)^{\rho'}$$

para todo  $u \geq 0$ . Para  $u < 0$  se tiene una expresión similar y, por tanto,

$$f(t, x, u)u \leq m_1(t, x)u^2 + \beta \left( \frac{m_2(t, x)}{n(t, x)^{1/\rho}} \right)^{\rho'} |u|.$$

Luego, si se tiene i) o ii), podemos aplicar nuestro teorema principal (Teorema 8.1.1 con  $C(t, x) = m_1(t, x)$  y  $D(t, x) = \beta \left( \frac{m_2(t, x)}{n(t, x)^{1/\rho}} \right)^{\rho'}$ ) y obtener la existencia de dos trayectorias completas maximales y un atractor pullback  $\mathcal{A}(t)$  tal que

$$\mathcal{A}(t) \subset [\varphi_m(t), \varphi_M(t)].$$

Además, como 0 es solución del problema, por el principio de comparación tenemos que la trayectoria completa maximal es no negativa y la minimal, no positiva. Luego, si consideramos únicamente soluciones no negativas, el atractor pullback  $\mathcal{A}_+(t)$  verifica

$$\mathcal{A}_+(t) \subset [0, \varphi_M(t)] \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

donde  $\varphi_M(t)$  es la trayectoria completa maximal y hemos denotado por  $[\cdot, \cdot]$  el intervalo de orden. ■

Nótese que, en general, las soluciones del problema (8.3.1) pueden no estar acotadas cuando  $t$  tiende  $+\infty$ , por ejemplo si  $n(t, x) \equiv n(t)$  tiende 0 cuando  $t$  tiende  $+\infty$  y  $m(t, x) = \lambda$ , una constante positiva mayor que el primer autovalor del operador de Laplace en  $\Omega$  con condiciones de contorno Dirichlet (ver Langa y Suárez [33], Lema 4.5, y Teorema 8.3.3 más adelante). De hecho, supongamos que sobre un subdominio regular adecuado  $\Omega_0 \subset \Omega$  se tiene  $0 < N(t) = \max_{x \in \Omega_0} n(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $m = m(x)$ . Entonces, es claro que las soluciones de

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = m(x)w - N(t)w^3 & \text{en } \Omega_0, \quad t > s \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega_0 \\ w(0) = w_0 \geq 0 \end{cases}$$

proporcionan cotas inferiores para las soluciones no negativas de (8.3.1) restringidas a  $\Omega_0$ . Por tanto, si el primer autovalor de  $-\Delta - m(x)I$  con condiciones de contorno Dirichlet en  $\Omega_0$  es negativo, entonces, usando los argumentos en Langa y Suárez [33], Lema 4.5, se puede probar que  $w(t, x)$  se vuelve no acotado en  $\Omega_0$  y por tanto también lo hacen las soluciones de (8.3.1).

En particular, no existe un atractor hacia adelante en el tiempo para (8.3.1) en el sentido clásico. Sin embargo, podemos obtener la existencia de un atractor pullback como muestra el resultado anterior.

### 8.3.1. Algunos ejemplos

Veamos ahora a través de cuatro ejemplos que aun cuando el término no lineal no tiene ningún comportamiento especial respecto al tiempo  $t$ , a veces, la cota lineal de Lema 8.1.2 sí que puede presentarlo. En concreto,  $\phi(t)$  puede ser independiente de  $t$  o  $T$ -periódica, por ejemplo, mientras que el término de reacción  $f$  no. En los siguientes ejemplos consideramos que la no linealidad  $f$  es de la forma

$$f(t, x, u) = m(t, x)u - n(t, x)u^3 \tag{8.3.3}$$

donde  $n \geq 0$  y  $m(t, x)$  admite una descomposición de la forma

$$m(t, x) = m_1(t, x) + m_2(t, x)$$

tal que el operador de evolución generado por  $\Delta + m_1(t, x)$  es exponencialmente estable.

**Ejemplo a.** Supongamos que

$m_1(t, x)$  es una función  $T$ -periódica

y

$$m_2(t, x) = a(t)g^2(t, x)$$

donde  $g(t, x) \geq 0$  es una función  $T$ -periódica y  $a(t) \geq 0$  es arbitraria. Sea

$$n(t, x) = a^3(t)h^2(t, x)$$

para cierta función  $0 \leq h(t, x)$   $T$ -periódica. Entonces,  $f$  verifica (8.0.2) con

$$C(t, x) = m_1(t, x) \quad \text{and} \quad D(t, x) = g^3(t, x)/h(t, x)$$

que son funciones  $T$ -periódicas. Por tanto,  $\phi(t)$  es una solución  $T$ -periódica del problema lineal, es decir, obtenemos una cota  $T$ -periódica del atractor pullback del problema no lineal (que puede no ser  $T$ -periódico).

**Ejemplo b.** Supongamos ahora que

$$m_1(t, x) = m_0(x), \quad m_2(t, x) = a(t, x)g_0^2(x), \quad n(t, x) = a^3(t, x)h_0(x)$$

donde  $h_0 \geq 0$ ,  $m_0, g_0 \geq 0$  no dependen de  $t$  y  $a(t, x) \geq 0$  es arbitraria. Entonces,  $f$  verifica (8.0.2) con

$$C(t, x) = m_0(x) \quad \text{y} \quad D(t, x) = g_0^3(x)/h_0(x).$$

y, entonces, el problema lineal

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = C(t, x)v + D(t, x) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ v(s) = v_s \end{cases} \quad (8.3.4)$$

es un problema parabólico autónomo. Luego, el único equilibrio de (8.3.4) proporciona cotas para el problema no lineal, es decir, tenemos una cota independiente del tiempo para el atractor pullback del problema no lineal.

**Ejemplo c.** Supongamos ahora que

$m_1(t, x)$  es una función  $T$ -periódica

y

$$m_2(t, x) = a(t, x)b(t, x)g^2(t, x) \quad \text{y} \quad n(t, x) = a^3(t, x)b(t, x)h^2(t, x).$$

con  $g(t, x) \geq 0$  y  $h(t, x) \geq 0$ , funciones  $T$ -periódicas y  $a(t, x) \geq 0$  arbitraria. Supongamos que  $0 \leq b(t, x) \rightarrow b_0(x)$  uniformemente en  $x$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$ . En este caso

$$C(t, x) = m_1(t, x) \quad \text{y} \quad D(t, x) = b(t, x)g^3(t, x)/h(t, x).$$

Nótese que si denotamos  $D^+(t, x) = b_0(x)g^3(t, x)/h(t, x)$  entonces  $D(t, x) - D^+(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t$  tiende a infinito. Luego  $\phi(t)$  es la única trayectoria completa del problema asintóticamente  $T$ -periódico (8.3.4). Por tanto,  $\phi(t)$  es asintóticamente  $T$ -periódica.

**Ejemplo d.** Si en el ejemplo anterior suponemos que  $m_1, g$  y  $h$  no dependen de  $t$ , esto es,

$$m_1(t, x) = m_0(x), \quad m_2(t, x) = a(t, x)b(t, x)g_0^2(x), \quad n(t, x) = a^3(t, x)b(t, x)h_0^2(x)$$

con  $a(t, x) \geq 0$  arbitraria y  $0 \leq b(t, x) \rightarrow b_0(x)$  uniformemente en  $x$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$ , entonces

$$C(t, x) = m_0(x)$$

y

$$D(t, x) = b^2(t, x)g_0^3(x)/h(x) \rightarrow D^+(x) = b_0^2(x)g_0^3(x)/h(x) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Luego,  $\phi(t)$  verifica un problema lineal asintóticamente autónomo. En particular, de los resultados de la Sección 8.2 tenemos cotas para el comportamiento asintótico de las soluciones del problema no lineal hacia adelante en el tiempo.

### 8.3.2. Una ecuación logística homogénea en espacio

Para ilustrar el uso de las técnicas anteriores en las aplicaciones, consideramos ahora el caso particular en el que el coeficiente  $n$  sólo depende de  $t$ , y  $m$  es constante, es decir.,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = mu - n(t)u^3 & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) = u_0 \geq 0. \end{cases} \quad (8.3.5)$$

Este caso ha sido considerado por Langa y Suárez en [33], cuyos resultados se pueden resumir como sigue

**Teorema 8.3.3** *Supongamos que  $0 < n(t) \leq N$  para algún  $N > 0$ . Sea  $\lambda_1$  el primer autovalor de  $-\Delta$  con condiciones Dirichlet.*

1. Si  $m < \lambda_1$  entonces  $\|u(t, s; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  o  $s \rightarrow -\infty$  para todo  $u_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ .
2. Supongamos  $m > \lambda_1$ . Entonces,
  - a) si  $u_0 \geq 0$  ( $u_0 \not\equiv 0$ ) y  $n(t) \rightarrow 0$  cuando  $t$  tiende a  $+\infty$  entonces, para todos  $M > 0$  y  $s \in \mathbb{R}$  existe  $t_0$  tal que para todo  $t > t_0$ ,  $\|u(t, s; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} > M$ , es decir, las soluciones de (8.3.5) son no acotadas;
  - b) existe un atractor pullback para las soluciones no negativas  $\mathcal{A}(t)$  tal que

$$\mathcal{A}(t) \subset [0, r(t)], \quad \text{con } r^2(t) = \frac{e^{2mt}}{\int_{-\infty}^t e^{2m\tau} n(\tau) d\tau} ;$$

- c) existe una trayectoria completa maximal; y
- d) el sistema es permanente en sentido pullback.

Para probar este resultado, explotando de manera esencial el hecho de que  $m$  es constante,  $n = n(t)$  y el problema tiene condiciones de contorno Dirichlet, Langa y Suárez usan la EDO

$$\begin{cases} \dot{y} = my - n(t)y^3 \\ y(s) = y_s. \end{cases} \quad (8.3.6)$$

Para soluciones positivas de (8.3.5), las soluciones de esta ecuación proporcionan cotas para la solución de (8.3.5) ya que

$$0 \leq u(t, s; u_s) \leq y(t, s; y_s)$$

con  $y_s = \|u_s\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Además, podemos resolver explícitamente la EDO (8.3.6) y obtener que  $y(t)$  viene dado por

$$y(t, s; y_s)^2 = \frac{e^{2mt}}{\frac{e^{2ms}}{y_s} + 2 \int_s^t e^{2m\tau} n(\tau) d\tau}.$$

Esto permite obtener una cota de la solución a tiempo  $t$  cuando  $s$  tiende  $-\infty$

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} \|y(t, s; y_s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq r^2(t) = \frac{e^{2mt}}{2 \int_{-\infty}^t e^{2m\tau} n(\tau) d\tau}. \quad (8.3.7)$$

En particular, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $T(t) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|u(t, s; u_s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r(t)$$

para todo  $s \leq T(t)$ . Luego, el intervalo de orden  $[0, r(t)]$  es un conjunto absorbente a tiempo  $t$  en sentido pullback, para todo  $t$ . Entonces, usando el efecto regularizante de la ecuación parabólica, encuentran que existe un conjunto absorbente a tiempo  $t$ , en sentido pullback, en  $C_0^1(\bar{\Omega})$  que es compacto en  $C_0(\bar{\Omega})$ . De aquí se deduce que existe el atractor pullback.

Observemos de nuevo que, en el argumento anterior, resolver explícitamente la EDO (8.3.6) es esencial a la hora de obtener la existencia de un conjunto absorbente y, por tanto, del atractor pullback. Es también esencial el hecho de que los coeficientes  $m$  y  $n$  no dependen de  $x$ .

Los métodos estudiados en los capítulos anteriores se pueden aplicar a (8.3.5) sin hacer uso de la EDO (8.3.6) pero, en ese caso, necesitamos imponer alguna restricción sobre el comportamiento de  $n(t)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Por ejemplo, para obtener la existencia de una trayectoria completa del problema lineal, como hicimos en el Teorema 7.1.4, necesitamos imponer ciertas restricciones sobre el coeficiente  $n$ . En ese teorema, probamos la existencia de una trayectoria completa dada por

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t U_C(t, r) D(r) dr$$

con  $C$  y  $D$  como en (8.1.6). En la prueba del Teorema 8.3.2 se demuestra que podemos elegir  $C$  como  $C = \lambda_1 - \beta$ , con  $\beta > 0$  arbitrariamente pequeño y así

$$\|U_C(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\beta(t-s)}$$

y, por la desigualdad de Young, se podemos tomar  $D$  como

$$D(r) = \left[ \frac{(m + (\beta - \lambda_1)^3)}{n(r)} \right]^{1/2}.$$

Ahora, nótese que existe  $\beta > 0$  tal que  $D \in \mathcal{D}_\beta$  si y sólo si  $n(t)$  está alejado de cero, cuando  $t \rightarrow \infty$ , o bien

$$\liminf_{s \rightarrow -\infty} n(t) e^{-2\gamma t} > 0$$

para algún  $\gamma < \beta$ , y, en tal caso, por el Teorema 7.1.4, existe una única trayectoria completa  $\phi(t)$  en  $\mathcal{D}_\beta$ .

Luego, podemos aplicar el Teorema 8.1.1 y se tiene el resultado. En particular, obtenemos los puntos 2.c) y 2.d) y el análogo al punto 2.b) del Teorema 8.3.3

Nótese que en el caso considerado en los capítulos anteriores, cuando  $m$  y  $n$  dependen de  $x$  y  $t$ , no disponemos de la EDO (8.3.6). Sin embargo, el punto 1) del Teorema 8.3.3 se obtiene gracias al Teorema 8.3.1, mientras que los puntos 2.b) y 2.c) se pueden obtener del Teorema 8.3.2. Por último, para el punto 2.d), de los resultados en el Capítulo 9 se obtiene la permanencia en sentido pullback para la ecuación logística no homogénea en espacio. Además, obtenemos más información sobre las soluciones y el comportamiento asintótico de las soluciones del problema (8.3.5) ya que, por ejemplo, probamos que bajo ciertas condiciones de inestabilidad de 0 existe una trayectoria completa minimal alejada de cero que es asintóticamente estable por abajo. Para el punto 2.a) véanse los comentarios después del Teorema 8.3.2.

Nótese que el argumento sigue siendo válido si suponemos  $n = n(t, x)$  y  $n(t, x) \rightarrow 0$  uniformemente en  $x \in \Omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En tal caso, se tiene la existencia de  $\phi(t)$  supuesto que existe  $\beta > 0$  tal que

$$D(t, x) = \left[ \frac{(m + (\beta - \lambda_1)^3)}{n(t, x)} \right]^{1/2} \in \mathcal{D}_\beta$$

que se verifica si para cierto  $\gamma < \beta$

$$\liminf_{s \rightarrow -\infty} e^{-2\gamma t} \|n(t)\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$$

esto es,  $\|n(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  a lo sumo exponencialmente cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

## 8.4. Algunas generalizaciones

Con mínimas modificaciones, los resultados de los Capítulos 7 y 8 se pueden trasladar a otro tipo de problemas distintos de los del modelo (8.0.1).

Por ejemplo, los resultados sobre ecuaciones lineales del Capítulo 7 siguen siendo válidos para operadores más generales que (7.0.1), incluso dependientes del tiempo, y otras condiciones de contorno (ver Sección 1.1). Por ejemplo, usando los resultados de Daners y Koch–Median [21], se pueden considerar operadores de la forma

$$A(t, D)u = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t) \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^N a_i(x, t) \partial_i u + a(x, t)u$$

con coeficientes suficientemente regulares y condiciones de contorno Dirichlet o Robin dependiente del tiempo

$$\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + b(x)u$$

sin condición de signo sobre el coeficiente  $b(x)$ . Todos estos operadores verifican el principio del máximo (ver Daners y Koch–Medina [21], pag. 120) y las estimaciones (7.0.2).

También se pueden obtener de Daners y Koch–Medina [21] y Lunardi [36] los resultados referentes a la existencia de solución del problema no lineal del Teorema 6.1.13.

Por tanto, el análisis sobre trayectorias completas de la Sección 7.1 se puede llevar a cabo sin mayores cambios. Por supuesto, los casos asintóticamente autónomo o periódico de la Sección 7.2 requieren un tratamiento específico pero completamente similar.

De aquí se siguen los resultados para ecuaciones no lineales del Capítulo 8.



## Capítulo 9

# Existencia, unicidad y atracción de trayectorias completas positivas

Nuestro objetivo en este capítulo será probar, bajo ciertas condiciones apropiadas, la existencia de una única trayectoria completa, acotada y no degenerada para el problema de reacción difusión no autónomo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) = u_0 \end{cases} \quad (9.0.1)$$

cuyas soluciones denotaremos por  $u(t, s; u_0)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado regular y  $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suficientemente regular verificando  $f(t, x, 0) \geq 0$  y

$$\frac{f(t, x, u)}{u} \quad \text{es no creciente para} \quad u \geq 0. \quad (9.0.2)$$

Por solución no degenerada en  $\pm\infty$  entenderemos que cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $u(x, t)$  permanece alejado de cero en algún sentido que precisaremos más adelante. La acotación, a lo largo de este capítulo, la entenderemos en sentido  $C^1(\overline{\Omega})$ .

Probaremos también que esta única trayectoria completa positiva,  $u(t, x)$ , captura la dinámica asintótica de todas las soluciones positivas de (9.0.1) en sentido pullback y hacia adelante en el tiempo como ahora precisamos. Primero, esta solución atrae a dinámica de todas las soluciones positivas de (9.0.1) en sentido pullback, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_0) = u(t) \quad (9.0.3)$$

uniformemente para  $u_0 \geq 0$  en acotados de datos iniciales en  $X = C(\overline{\Omega})$ .

Además, atrae hacia adelante en el tiempo, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, s; u_0) - u(t)) = 0 \quad (9.0.4)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ , uniformemente para  $u_0 \geq 0$  en acotados de datos iniciales en  $X = C(\overline{\Omega})$ .

Nótese que sobre  $f$  supondremos cierta regularidad que asegure para todo  $u_0 \in X = C(\overline{\Omega})$ , (9.0.1) tiene una única solución  $t > s$  que denotamos  $u(t, s; u_0) = U(t, s)u_0$  donde  $U(t, s)$  es el operador de evolución asociado a (9.0.1), que al igual que antes, verifica  $U(t, s) \in \mathcal{L}(X)$  y

- i)  $U(t, t) = I$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $U(t, s)U(s, r)u = U(t, r)u$  para todo  $r \leq s \leq t$ ,  $u \in X$ , y
- iii)  $u \mapsto U(t, r)u$  es continuo en  $X$  para  $t > r$ .

Además, en tal caso  $U(t, s)$  conserva el orden y regulariza las soluciones en el sentido de que  $U(t, s)$  es continuo y acotado de  $X = C(\overline{\Omega})$  en  $C_0^1(\overline{\Omega})$ , el subconjunto de  $C^1(\overline{\Omega})$  de funciones que se anulan en  $\partial\Omega$ . Tales condiciones han sido estudiadas en el Capítulo 8.



Nótese que en el caso autónomo, es decir, cuando  $f$  no depende de  $t$ , la unicidad de equilibrio positivo,  $u_E(x)$ , para el problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (9.0.5)$$

con  $\frac{f(x, u)}{u}$  decreciente ha sido estudiado en la Sección 3.3 de esta memoria. Además, este equilibrio es globalmente asintóticamente estable para el problema de evolución autónomo correspondiente, ver también Brézis y Oswald [17] y Fraile et al. [24].

Por otra parte, en el caso periódico, es decir, cuando  $f(t+T, x, u) = f(t, x, u)$ , la unicidad de soluciones periódicas positivas de (9.0.1), supuesto (9.0.2), se probó en Hess [30], donde también se prueba que esta solución es globalmente asintóticamente estable. Más recientemente, el caso  $f(t, x, u) = \lambda u - b(t, x)u^\rho$  ha sido considerado en Langa et al. [32] bajo la restricción

$$0 < a_0 \leq b(t, x) \leq A_0, \quad \text{con} \quad A_0 \leq \rho a_0.$$

Todos estos resultados entran dentro del resultado general que estableceremos más adelante. En particular, probaremos el resultado de Langa et al. [32] sin la restricción anterior.

Precisamos ahora las definiciones hechas anteriormente.

### Definición 9.0.1

i) Una función positiva con valores en  $X = C(\overline{\Omega})$  que se anula en  $\Omega$ , es no degenerada en  $\infty$  (respectivamente  $-\infty$ ) si existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $u$  está definida en  $[t_0, \infty)$  (respectivamente  $(-\infty, t_0]$ ) y existe una función  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi_0(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ , tal que

$$u(t, x) \geq \varphi_0(x) \quad \text{para todo } t \geq t_0 \quad (9.0.6)$$

(respectivamente para todo  $t \leq t_0$ ).

ii) Una función positiva con valores en  $X = C(\overline{\Omega})$  que se anula en  $\Omega$ , es acotada superiormente en  $\infty$  (respectivamente  $-\infty$ ) si existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $u$  está definida en  $[t_0, \infty)$  (respectivamente  $(-\infty, t_0]$ ) y existe una función  $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi_1(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ , tal que

$$u(t, x) \leq \varphi_1(x) \quad \text{para todo } t \geq t_0 \quad (9.0.7)$$

(respectivamente para todo  $t \leq t_0$ ).

Nótese que para que se satisfaga (9.0.7) es suficiente que  $0 \leq u(t)$  esté acotada en  $C^1(\overline{\Omega})$  para todo  $t \geq t_0$  (respectivamente para todo  $t \leq t_0$ ).

Precisamos ahora las hipótesis sobre el término no lineal. Supondremos que  $f(t, x, u)$  es continua en  $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}$ , localmente Lipschitz en  $u$  y localmente Hölder en  $t$ , y verifica las dos siguientes condiciones de no degeneración. En primer lugar, si  $u(t, x)$  es una función positiva no degenerada en  $\infty$  (respectivamente en  $-\infty$ ) y acotada superiormente, entonces

$$q(t, x) := \frac{f(t, x, u(t, x))}{u(t, x)} \geq q_0(x) \quad \text{para todo } t \geq t_0 \quad (9.0.8)$$

(respectivamente para todo  $t \leq t_0$ ) para todo  $x \in \Omega$  y  $q_0 \in L^p(\Omega)$  con  $p > N/2$ .

Además, supondremos que si  $0 \leq u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$  son curvas positivas no degeneradas y acotadas en  $\infty$  (respectivamente en  $-\infty$ ) tales que para algún conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y  $\alpha > 0$  se tiene

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) \geq \alpha > 0 \quad \text{e.c.t. } x \in A$$

entonces el potencial

$$P(t, x) := \frac{f(t, x, u_1(t, x))}{u_1(t, x)} - \frac{f(t, x, u_2(t, x))}{u_2(t, x)} \geq 0 \quad (9.0.9)$$

verifica que existe un conjunto de medida positiva, que seguimos denotando  $A \subset \Omega$  y un número positivo que seguimos denotando  $\alpha > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P(t, x) \geq \alpha > 0 \quad \text{e.c.t.} \quad x \in A \quad (9.0.10)$$

(con una condición análoga cuando  $t \rightarrow -\infty$ ).

Por último, supongamos la siguiente condición de compacidad: si  $u(t, x)$  es una trayectoria completa positiva de (9.0.1) acotada superiormente en  $\infty$  (resp. en  $-\infty$ ) entonces, para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\{u(t, \cdot), \quad t \geq t_0\} \quad \text{es precompacto en} \quad L^1(\Omega) \quad (9.0.11)$$

(resp. para  $t \leq t_0$ ).

## 9.1. Unicidad de trayectorias completas positivas no degeneradas

En esta sección vamos a probar el siguiente resultado de unicidad de trayectoria completa positiva

**Teorema 9.1.1** *Supongamos que se tiene (9.0.2), las condiciones de no generación (9.0.8) y (9.0.9) y la hipótesis de compacidad (9.0.11) cuando  $t \rightarrow -\infty$ .*

*Si  $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$  son trayectorias completas positivas, no degeneradas y acotadas en  $-\infty$  del problema (9.0.1), entonces  $u_1 = u_2$ .*

Nótese que sin ningún tipo de no degeneración de la solución, la unicidad anterior puede no ser cierta. De hecho, en el caso autónomo (9.0.5) supongamos que la solución positiva,  $u_E(x)$ , existe,  $f(x, 0) = 0$  y  $u = 0$  es inestable en el sentido de que el primer autovalor del problema linealizado de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta z = \partial_u f(x, 0)z + \lambda z & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (9.1.1)$$

verifica  $\lambda_1 < 0$ . Entonces, el problema de evolución asociado (9.0.1) tiene como operador de evolución  $U(t, s)u_0 = T(t-s)u_0$  donde  $T(t)$  es un semigrupo no lineal. Luego, si existe una conexión heteroclínica para  $T(t)$  ente el equilibrio inestable  $u = 0$  y el equilibrio estable  $u_E$ , entonces (9.0.1) tendría una trayectoria completa positiva y acotada,  $u_1(t)$ , verificando  $u_1(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow -\infty$ , y  $u_1(t) \rightarrow u_E$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , además de la trayectoria completa no degenerada  $u_2(t) = u_E$ . Además,  $u_1(t) \leq u_2(t)$ .

Para probar el teorema, observamos que si  $u(t, x)$  es una trayectoria completa positiva y no degenerada, TCPND, en  $-\infty$ , del problema (9.0.1), entonces también lo es para el problema lineal

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = q(t, x)z, & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (9.1.2)$$

con  $q(t, x) := \frac{f(t, x, u(t, x))}{u(t, x)}$ .

Nótese que por los resultados del Capítulo 7, si  $q \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$  para algún  $0 < \alpha \leq 1$  y  $p > N/2$ , entonces (9.1.2) define un operador de evolución que conserva el orden  $T_q(t, s)$  en  $\mathcal{L}(Y)$  donde o bien  $Y = L^r(\Omega)$ , con  $1 \leq r < \infty$ , o bien  $Y = C(\bar{\Omega})$ .

Tenemos entonces

**Proposición 9.1.2** *En las hipótesis anteriores, supongamos que el problema (9.1.2) tiene una TCPND acotada superiormente en  $-\infty$ .*

*Entonces, para  $Y = L^r(\Omega)$ , con  $1 \leq r < \infty$  o  $Y = C(\bar{\Omega})$  y para todo  $s \leq t \leq t_0$  se tiene*

$$C_0(t_0) \leq \|T_q(t, s)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C_1(t_0) \quad (9.1.3)$$

donde  $t_0$  es como en la Definición 9.0.1.

**Demostración.** En primer lugar, nótese que dado  $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$  que se anula en  $\partial\Omega$ , existe  $\lambda = \lambda(u_0)$  tal que  $|u_0(x)| \leq \lambda\varphi_0(x)$  en  $\Omega$ . Entonces, por comparación, tenemos que para todo  $s \leq t \leq t_0$

$$|T_q(t, s)u_0(x)| \leq \lambda T_q(t, s)\varphi_0(x) \leq \lambda T_q(t, s)z(s)(x) = \lambda z(t, x)$$

de donde

$$\|T_q(t, s)u_0\|_Y \leq \lambda \|z(t)\|_Y \leq \lambda \sup_{t \leq t_0} \|z(t)\|_Y.$$

Luego,  $T_q(t, s)$  está acotado puntualmente en un subconjunto denso de  $Y$  y, por tanto, del Principio de Acotación Uniforme tenemos la cota superior para  $\|T_q(t, s)\|_{\mathcal{L}(Y)}$ .

Por otra parte, tenemos

$$0 < \varphi_0(x) \leq z(t, x) = T_q(t, s)z(s)(x)$$

y por tanto

$$\|\varphi_0\|_Y \leq \|T_q(t, s)\|_{\mathcal{L}(Y)} \|z(s)\|_Y$$

de donde obtenemos la cota inferior para  $\|T_q(t, s)\|_{\mathcal{L}(Y)}$ . ■

Como consecuencia tenemos para el problema no lineal (9.0.1)

**Corolario 9.1.3** *Supongamos que se tiene (9.0.2) y que  $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$  son TCPND y acotadas superiormente en  $-\infty$  del problema (9.0.1).*

Entonces, si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (u_2(t) - u_1(t)) = 0 \quad \text{en } L^1(\Omega)$$

entonces  $u_1(t) = u_2(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Si denotamos  $q_i(t, x) := \frac{f(t, x, u_i(t, x))}{u_i(t, x)}$ , para  $i = 1, 2$ , entonces, por (9.0.2),  $q_1(t, x) \geq q_2(t, x)$  y se tiene

$$(u_1)_t - \Delta u_1 = q_1(t, x)u_1 \geq q_2(t, x)u_1.$$

En particular  $u_1(t) \geq T_{q_2}(t, s)u_1(s)$  y como  $u_2(t) = T_{q_2}(t, s)u_2(s)$ , se tiene

$$u_1(t) - u_2(t) \geq T_{q_2}(t, s)(u_1(s) - u_2(s)).$$

Ahora bien, por la Proposición 9.1.2 y la hipótesis sobre  $u_1, u_2$ , tomando límites cuando  $s \rightarrow -\infty$ , tenemos que  $u_1(t) - u_2(t) \geq 0$  para todo  $t \leq t_0$ . Luego  $u_1(t) = u_2(t)$  para todo  $t \leq t_0$ . Además, de esto último se tiene la igualdad también para  $t \geq t_0$ . ■

Supondremos pues en lo que sigue que  $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$  son TCPND y acotadas superiormente en  $-\infty$  del problema (9.0.1) tales que

$$0 \leq u_2(t) - u_1(t) \not\rightarrow 0 \quad \text{en } L^1(\Omega)$$

cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Nótese que, del teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, por ser las soluciones acotadas superiormente, la condición anterior equivale a

$$0 \leq u_2(t, x) - u_1(t, x) \not\rightarrow 0 \quad \text{e.c.t. } x \in \Omega,$$

cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Además, por la hipótesis de compacidad (9.0.11) cuando  $t \rightarrow -\infty$  podemos suponer que para cierto conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y algún  $\alpha > 0$  se tiene

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) \geq \alpha > 0.$$

De hecho, en caso contrario tendríamos  $\liminf_{t \rightarrow -\infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) = 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$  y entonces la hipótesis de compacidad (9.0.11) implicaría que, tomando subsucesiones si es necesario,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) = 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$  de donde se tiene la convergencia  $L^1(\Omega)$  que es una contradicción.

Ahora, la ecuación para  $u_2(t)$  se puede escribir como

$$(u_2)_t - \Delta u_2 = q_2(t, x)u_2 = (q_1(t, x) - P(t, x))u_2$$

donde

$$P(t, x) = (q_1 - q_2)(t, x) \geq 0$$

y verifica (9.0.10) cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Además, por la hipótesis (9.0.8) tenemos  $q_1(t, x) \geq q_0(x)$  para todo  $t \leq t_0$ , para todo  $x \in \Omega$  y para  $q_0 \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ .

Por tanto, el Teorema 9.1.1 quedará probado cuando probemos la Proposición 9.1.4 más adelante, ya que ésta implica que  $u_2$  no es una TCPND de (9.0.1), que es una contradicción. Nótese que esta proposición implica que si un problema lineal tiene una TCPND en  $-\infty$  entonces una perturbación sostenida destruye estas soluciones.

**Proposición 9.1.4** *Supongamos que para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$q(t, x) \geq q_0(x) \quad \text{para todo } t \leq t_0$$

*para todo  $x \in \Omega$  y  $q_0 \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ , y*

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = q(t, x)z, & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

*tiene una TCPND y acotada en  $-\infty$ . Entonces,*

*i) Si existen un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y  $\alpha > 0$  tales que*

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} P(t, x) \geq \alpha > 0 \quad \text{e.c.t. } x \in A$$

*entonces el problema perturbado*

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + P(t, x)v = q(t, x)v, & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (9.1.4)$$

*no tiene ninguna TCPND acotada en  $-\infty$ .*

*ii) Si  $P(t, x) \geq \varphi_0(x)$  para alguna función positiva en  $\Omega$ , que puede anularse en  $\partial\Omega$ , entonces  $v = 0$  es la única trayectoria completa acotada no negativa de (9.1.4).*

**Demostración.**

i) Supongamos lo contrario, es decir, que existe una TCPND y acotada en  $-\infty$  de (9.1.4),  $v$ . Entonces, para  $s < t \leq t_0$  tenemos, por la fórmula de variación de constantes,

$$0 \leq v(t) = T_q(t, s)v(s) - \int_s^t T_q(t, r)P(r, \cdot)v(r) dr \leq T_q(t, s)v(s) \quad (9.1.5)$$

Denotamos  $J(s) = \int_s^t T_q(t, r)P(r, \cdot)v(r) dr \geq 0$  que es creciente cuando  $s \downarrow -\infty$  ya que el integrando es no negativo. Entonces, por (9.1.5), la Proposición 9.1.2 y la acotación de  $v$ , tenemos que  $J(s)$  está acotado en  $L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ , cuando  $s \rightarrow -\infty$ .

Luego, por el teorema de la convergencia monótona, tenemos

$$0 \leq \int_{-\infty}^t T_q(t, r)P(r, \cdot)v(r) dr \in L^1(\Omega)$$

que es equivalente a

$$\int_{-\infty}^t \|T_q(t, r)P(r, \cdot)v(r)\|_{L^1(\Omega)} dr < \infty.$$

En particular, existe una sucesión  $r_n \rightarrow -\infty$  tal que, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|T_q(t, r_n)P(r_n, \cdot)v(r_n)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Por las hipótesis sobre  $P(t, x)$  y por ser  $v$  no degenerada

$$0 \leq \int_{\Omega} T_q(t, r_n)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) dx \rightarrow 0. \quad (9.1.6)$$

donde  $\mathcal{X}_A$  denota la función característica.

Ahora bien, por el Lema 9.1.6, más adelante, tenemos que existe una función  $\varphi_2 \in C^1(\overline{\Omega})$  con  $\varphi_2(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ , tal que

$$T_q(r_n + 1, r_n)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) \geq \varphi_2(x) \quad \text{para todo } n.$$

Luego podemos escribir, para  $t > r_n + 1$ ,

$$T_q(t, r_n)(\mathcal{X}_A \varphi_0) = T_q(t, r_n + 1)T_q(r_n + 1, r_n)(\mathcal{X}_A \varphi_0) \geq T_q(t, r_n + 1)\varphi_2 \geq 0$$

y el término de la izquierda converge a cero en  $L^1(\Omega)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Pero, como  $z$  es una TCPND y acotada superiormente en  $-\infty$ , entonces existe  $\lambda > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z(r_n + 1) \leq \varphi_1 \leq \lambda\varphi_2$  y por tanto

$$0 < \varphi_0 \leq z(t) = T_q(t, r_n + 1)z(r_n + 1) \leq \lambda T_q(t, r_n + 1)\varphi_2 \rightarrow 0 \quad \text{en } L^1(\Omega)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , que es una contradicción.

ii) Supongamos lo contrario, es decir, que el problema (9.1.4) tiene una trayectoria completa acotada no negativa,  $v$ , distinta de la trivial. Supongamos en primer lugar que existen un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y  $\alpha > 0$  tales que

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) \geq \alpha > 0.$$

Entonces, por la hipótesis sobre  $P$ , argumentando como en i), tenemos (9.1.6) lo que nos lleva a una contradicción como antes. Luego, podemos suponer que  $\liminf_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$ . Pero entonces, denotando por  $U(t, s)$  al operador de evolución asociado a (9.1.4), podemos escribir  $v(t) = U(t, t-1)v(t-1)$  y por el efecto regularizante de  $U(t, s)$  tenemos que  $v(t)$  es precompacto en  $L^1(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Pero entonces, pasando a subsucesiones si fuera necesario, tenemos que  $v(t)$  debe converger a cero en  $L^1(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Ahora bien, de la segunda desigualdad en (9.1.5) y la Proposición 9.1.2 tenemos

$$\|v(t)\| \leq C\|v(s)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow -\infty$$

es decir,  $v(t) = 0$ .

Supongamos ahora que  $v$  es una trayectoria completa tal que

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0.$$

Por el efecto regularizante de la ecuación (9.1.4), cuyo operador de evolución denotamos por  $T_{q-P}(t, s)$  tenemos que  $\{v(t)\}_{t \leq 0}$  está en un acotado de  $C^\theta(\overline{\Omega})$ , para algún  $0 < \theta < 1$ , ya que podemos escribir  $v(t) = T_{q-P}(t, t-1)v(t-1)$  (ver demostración del Teorema 8.1.1). En particular,  $\{v(t)\}_{t \leq 0}$  es relativamente compacto en  $C(\overline{\Omega})$  y por tanto, existen  $v^* \in C(\overline{\Omega})$  y una sucesión  $t_n \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $v(t_n) \rightarrow v^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Ahora bien, para esta sucesión, se tiene que o bien  $v^* \equiv 0$  con lo que no tendríamos nada que probar o bien existen un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y  $\alpha > 0$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(t_n, x) \geq \alpha > 0.$$

Pero, procediendo como antes tenemos que  $v^*$  debe ser idénticamente nula. Como el argumento es válido para cualquier subsucesión tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0$$

que es una contradicción. Como antes,  $v(t) \equiv 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Nota 9.1.5** *Nótese que, en realidad, la última parte de la prueba del punto i) de la Proposición anterior prueba que para cualquier dato inicial no negativo  $u_0$ , no idénticamente nulo, y  $t \in \mathbb{R}$  la curva  $\{T_q(t, s)u_0, s < t\}$  es no degenerada en  $-\infty$ . Esto junto con (9.1.6) lleva a contradicción.*

Probamos ahora el siguiente resultado sobre no degeneración utilizado anteriormente.

**Lema 9.1.6** *Supongamos que para algún intervalo no acotado  $I \subset \mathbb{R}$  tenemos*

$$q(t, x) \geq q_0(x) \quad \text{para todo } t \in I$$

para todo  $x \in \Omega$  y  $q_0 \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ .

Entonces, dado  $0 \leq \xi \in L^1(\Omega)$  existe una función  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $\varphi(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ , tal que

$$T_q(s+1, s)\xi \geq \varphi \tag{9.1.7}$$

para todo  $s$  con  $s, s+1 \in I$ .

**Demostración.** Basta notar que usando comparación

$$T_q(s+1, s)\xi \geq T_{q_0}(s+1, s)\xi = S_{q_0}(1)\xi = \varphi$$

donde  $S_{q_0}(t)$  denota el semigrupo asociado a la ecuación autónoma no lineal

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = q_0(x)z, & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \blacksquare$$

Nótese que las hipótesis del Lema pueden leerse como  $q(t, x) = q^+(t, x) - q^-(t, x) \geq q_0(x)$  y por tanto, son necesarias para obtener el resultado. De hecho, si  $q^-(t, x)$  puede hacerse muy grande en algún subconjunto de  $\Omega$  cuando  $t \in (s, s+1) \subset I$  y  $|s| \rightarrow \infty$ , es fácil ver que  $T_q(s+1, s)\xi$  debe tender a cero sobre este conjunto y por tanto la conclusión del lema falla.

## 9.2. Comportamiento de las soluciones positivas hacia adelante en el tiempo

Tratamos ahora el comportamiento asintótico hacia adelante en el tiempo de las soluciones positivas del problema (9.0.1). En particular probamos que supuesto que se verifica (9.0.2) todas las soluciones positivas de (9.0.1) tienen el mismo comportamiento asintótico cuando  $t \rightarrow \infty$ . Concretamente probamos

**Teorema 9.2.1** *Supongamos que se tienen (9.0.2) y las condiciones de no degeneración (9.0.8) y (9.0.9) y la hipótesis de compacidad 9.0.11 cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

*Si  $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$  son soluciones positivas, no degeneradas y acotadas superiormente en  $\infty$  de (9.0.1) entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) = 0 \quad \text{uniformemente en } x \in \Omega.$$

Empezamos con el siguiente resultado sobre ecuaciones lineales.

**Proposición 9.2.2** *Sea  $T_q(t, s)$  el operador de evolución asociado a la ecuación (9.1.2).*

*i) Supongamos que para algún  $s \in \mathbb{R}$  existe una solución positiva acotada de (9.1.2),  $z(t)$ , para  $t > s$ .*

*Entonces, todas las soluciones no negativas de (9.1.2) están acotadas para  $t > s$  y para todo  $t \geq t_0 \geq s$  se tiene*

$$\|T_q(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C_1(t_0)$$

para  $Y = L^r(\Omega)$ , con  $1 \leq r < \infty$  o  $Y = C(\bar{\Omega})$ .

*En particular, o bien todas las soluciones positivas de (9.1.2) son acotadas o bien son no acotadas para  $t > s$ .*

ii) Supongamos además que la solución en i) es tal que  $z(t) \rightarrow 0$  en  $L^\infty(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces, todas las soluciones de (9.1.2) convergen a cero uniformemente en  $\Omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

iii) Si  $z(t)$  para  $t > s$  es una solución positiva acotada de (9.1.2), entonces  $z(t) \rightarrow 0$  en  $L^\infty(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si y solo si

$$z(t_k, x) \rightarrow 0 \quad \text{e.c.t.} \quad x \in \Omega$$

para alguna subsucesión  $t_k \rightarrow \infty$ .

iv) Supongamos que para algún  $s \in \mathbb{R}$  existe una solución positiva no degenerada en  $\infty$ , SPND, de (9.1.2),  $z$ , en el sentido de la Definición 9.0.1.

Entonces, todas las soluciones no triviales de (9.1.2) son SPND en  $\infty$  y para todo  $t \geq t_0 \geq s$  se tiene

$$C_0(t_0) \leq \|T_q(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(Y)}$$

para  $Y = L^r(\Omega)$ , con  $1 \leq r < \infty$  o  $Y = C(\bar{\Omega})$ .

### **Demostración.**

i) y ii). Es claro que, para todo  $t > s$ , si  $0 \leq v_0 \leq z(s)$  entonces  $0 \leq v(t) = T_q(t, s)v_0 \leq T_q(t, s)z(s) = z(t)$  y, por tanto,  $v$  también está acotada o tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, siempre podemos suponer  $v_0 \in C_0^1(\bar{\Omega})$ , ya que de otra forma basta desplazar el tiempo inicial a la derecha y usar el efecto regularizante del operador de evolución. Luego, para cualquier  $t_0 \geq s$  existe  $0 < \lambda = \lambda(v_0, t_0)$ , tal que  $|v_0(x)| \leq \lambda z(x, t_0)$  y entonces

$$|v(t, x)| = |T_q(t, t_0)v_0(x)| \leq \lambda T_q(t, t_0)z(t_0)(x) = \lambda z(t, x)$$

y por tanto

$$\|v(t)\|_Y \leq \lambda \|z(t)\|_Y$$

que está acotado o converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además

$$\|T_q(t, t_0)v_0\|_Y \leq \lambda \|z(t)\|_Y \leq \lambda \sup_{t \geq t_0} \|z(t)\|_Y.$$

Luego,  $T_q(t, t_0)$  está acotada puntualmente en un subconjunto denso de  $Y$  de donde, por el Principio de Acotación Uniforme se tiene la cota superior para  $\|T_q(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(Y)}$ .

iii) Como  $z$  está acotada en  $L^\infty(\Omega)$  para  $t > s$ , entonces si  $z(x, t_k) \rightarrow 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$  para alguna subsucesión  $t_k \rightarrow \infty$  entonces el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue implica que  $\|z(t_k)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ . Entonces, por los resultados del Capítulo 7 (ver (7.0.2))

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \begin{cases} \frac{C}{(t - t_k)^{N/2}} \|z(t_k)\|_{L^1(\Omega)} & \text{para } t_k < t < t_k + 1 \\ C \|z(t_k)\|_{L^1(\Omega)} & \text{para } t > t_k + 1 \end{cases} \quad (9.2.1)$$

para alguna constante  $C$  independiente de  $k$  y, entonces, tomando  $t > t_k + 1$  se tiene el resultado.

iv) Como  $0 \leq \varphi_0 \leq z(t) = T_q(t, t_0)z(t_0)$  entonces

$$\|\varphi_0\|_Y \leq \|T_q(t, t_0)z(t_0)\|_Y \|z(t_0)\|_Y$$

y obtenemos la estimación.

Por otra parte, sea  $v_0 \geq 0$ . Nótese que para  $t > s + 1$  se tiene  $v(t) = T_q(t, s + 1)T_q(s + 1, s)v_0$  y  $w_0 = T_q(s + 1, s)v_0 \in C_0^1(\bar{\Omega})$  es positivo en  $\Omega$ . Por tanto, existe  $\delta > 0$  tal que  $w_0 \geq \delta z(s + 1)$  y entonces

$$v(t) = T_q(t, s)w_0 \geq \delta T_q(t, s + 1)z(s + 1) = \delta z(t) \geq \delta \varphi_0$$

Luego  $v$  es una SPND en  $\infty$ . ■

Consideramos ahora las soluciones no negativas del problema no lineal (9.0.1) con la condición (9.0.2). Se tiene entonces

**Corolario 9.2.3** *Los resultados de la Proposición 9.2.2 siguen siendo válidos para soluciones no negativas de (9.0.1), suponiendo que el punto iii) se lee: si  $u_1(t), u_2(t)$  para  $t > s$  son soluciones positivas acotadas de (9.0.1) y*

$$u_1(t_k, x) - u_2(t_k, x) \rightarrow 0 \quad \text{e.c.t.} \quad x \in \Omega$$

para alguna subsucesión  $t_k \rightarrow \infty$  entonces

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente en} \quad x \in \Omega \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

**Demostración.**

i) y ii). Si para todo  $t > s$ ,  $u(t)$  es una solución positiva acotada de (9.0.1) entonces si  $v(t)$  es otra solución tal que  $v(t) \leq u(t)$  entonces el resultado es obvio. Por otra parte, si  $v(t) \geq u(t)$  entonces

$$v_t - \Delta v = \frac{f(t, x, v)}{v} v \leq \frac{f(t, x, u)}{u} v = q(t, x)v.$$

Luego,

$$0 \leq v(t) \leq T_q(t, s)v(s) \tag{9.2.2}$$

donde  $T_q(t, s)$  verifica las hipótesis i) o ii) de la Proposición 9.2.2 respectivamente (con  $z(t) = u(t)$ ). Por tanto se tiene el resultado.

iii) Nótese que siempre podemos suponer  $u_1(t) \leq u_2(t)$  de donde por (9.2.2) aplicado a  $v = u_2$  y  $q(t, x) = \frac{f(t, x, u_1)}{u_1}$  y usando  $u_1(t) = T_q(t, t_k)u_1(t_k)$  tenemos

$$0 \leq u_2(t) - u_1(t) \leq T_q(t, t_k)(u_2(t_k) - u_1(t_k)).$$

Usando ahora (9.2.1) se tiene el resultado.

iv) Si  $u(t)$  para  $t > s$  es una SPND de (9.0.1) y  $v(t)$  es otra solución tal que  $v(t) \geq u(t)$  entonces es claro que  $v$  también es una SPND. Por otra parte, si  $0 \leq v(t) \leq u(t)$ , argumentando como antes, tenemos

$$v_t - \Delta v = \frac{f(t, x, v)}{v} v \geq \frac{f(t, x, u)}{u} v = q(t, x)v.$$

Luego  $v(t) \geq T_q(t, s)v(s)$  y el resultado se sigue de la Proposición. ■

Por tanto, podemos suponer en adelante que (9.0.1) tiene una SPND acotada y entonces todas las soluciones no triviales son SPND acotadas. Luego, suponiendo las condiciones de no degeneración (9.0.8) y (9.0.9) cuando  $t \rightarrow \infty$ , estamos ya en posición de poder probar el resultado principal de esta sección, el Teorema 9.2.1.

**Demostración del Teorema 9.2.1** Supongamos que  $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$  son soluciones positivas, no degeneradas y acotadas superiormente en  $\infty$  del problema (9.0.1). Por el Corolario 9.2.3 iii), si  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) = 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$  entonces se obtiene el resultado. Luego, por la hipótesis de compacidad (9.0.11) podemos suponer que existen un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y algún  $\alpha > 0$  tales que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (u_2(t, x) - u_1(t, x)) \geq \alpha > 0.$$

Entonces, la ecuación para  $u_2(t)$  se puede escribir como

$$(u_2)_t - \Delta u_2 = q_2(t, x)u_2 = (q_1(t, x) - P(t, x))u_2$$

donde,

$$P(t, x) = (q_1 - q_2)(t, x) \geq 0$$

verifica (9.0.10).

Además, por (9.0.8) tenemos  $q(t, x) \geq q_0(x)$  para todo  $t \geq t_0$ , para todo  $x \in \Omega$  y  $q_0 \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ .

Ahora bien, por la Proposición 9.2.4 más adelante, tenemos que  $u_2(t)$  no es una SPND, lo que es una contradicción. ■

Enunciamos y probamos ahora la Proposición usada en la demostración anterior que además es interesante en sí misma. Nótese que este resultado es el análogo en  $\infty$  a la Proposición 9.1.4 y establece que las perturbaciones sostenidas destruyen la existencia de soluciones no degeneradas.



**Proposición 9.2.4** *Supongamos que para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$q(t, x) \geq q_0(x) \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

*para todo  $x \in \Omega$  y  $q_0 \in L^p(\Omega)$  para algún  $p > N/2$ , y*

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = q(t, x)z, & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

*tiene una SPND acotada superiormente para  $t > s$ . Entonces*

*i) Si existen un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y  $\alpha > 0$  tales que*

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} P(t, x) \geq \alpha > 0 \quad \text{e.c.t. } x \in A$$

*entonces el problema perturbado*

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + P(t, x)v = q(t, x)v, & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (9.2.3)$$

*no tiene ninguna SPND en  $\infty$ .*

*ii) Si  $P(t, x) \geq \varphi_0(x)$  para alguna función positiva en  $\Omega$ , que puede anularse en  $\partial\Omega$ , entonces todas las soluciones de (9.2.3) decaen a cero uniformemente en  $\Omega$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

### **Demostración.**

i) Supongamos lo contrario, es decir, que existe una SPND (que debe ser necesariamente acotada superiormente) en  $\infty$  del problema (9.2.3),  $v$ . Entonces, para  $t \geq t_0 > s$  tenemos, por la fórmula de variación de constantes,

$$0 \leq v(t) = T_q(t, t_0)v(t_0) - \int_{t_0}^t T_q(t, r)P(r, \cdot)v(r) dr \leq T_q(t, t_0)v(t_0). \quad (9.2.4)$$

Denotando  $J(t) = \int_{t_0}^t T_q(t, r)P(r, \cdot)v(r) dr \geq 0$  tenemos, por (9.2.4) y las hipótesis que  $J(t)$  está acotado en  $L^p(\Omega)$  para  $1 \leq p \leq \infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En particular,

$$0 \leq \int_{t_0}^t \int_{\Omega} T_q(t, r)P(r, x)v(r, x) dx dr \leq C.$$

Por ser  $v$  no degenerada en  $\infty$  y las hipótesis sobre  $P(t, x)$ , tenemos que existe un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  tal que, si  $t_0$  es suficientemente grande,

$$0 \leq \int_{t_0}^{t-1} \int_{\Omega} T_q(t, r)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) dx dr \leq \int_{t_0}^t \int_{\Omega} T_q(t, r)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) dx dr \leq C \quad (9.2.5)$$

Nótese ahora que podemos escribir, para  $t > r + 1 \geq t_0 + 1$ ,

$$T_q(t, r)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) = T_q(t, r+1)T_q(r+1, r)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x)$$

de donde, por el Lema 9.1.6 se tiene

$$T_q(r+1, r)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) \geq \varphi_2(x)$$

para alguna función  $\varphi_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi_2(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ . Ahora, como  $z$  es una SPND acotada superiormente se tiene que para algún  $\delta > 0$  independiente de  $r$ ,  $\varphi_2(x) \geq \delta \varphi_1(x) \geq \delta z(x, r+1)$  y entonces

$$T_q(t, r)(\mathcal{X}_A \varphi_0)(x) \geq \delta T_q(t, r+1)z(x, r+1) = \delta z(t, x) \geq \delta \varphi(x)$$

para alguna función  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ . Luego,

$$0 \leq \int_{t_0}^{t-1} \int_{\Omega} \varphi(x) dx dr \leq C$$

que es una contradicción.

ii) Supongamos lo contrario, es decir, que  $v$  es una solución no negativa de (9.2.3) (que debe ser necesariamente acotada superiormente). Supongamos además que existe un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega$  y algún  $\alpha > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} v(t, x) \geq \alpha > 0.$$

Entonces, usando la hipótesis sobre  $P$  y argumentando como en i) tenemos (9.2.5) y se llega a contradicción como antes.

Luego, podemos suponer que  $\liminf_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0$  e.c.t.  $x \in \Omega$ . Pero entonces, denotando por  $U(t, s)$  al operador de evolución asociado a (9.2.3), podemos escribir  $v(t) = U(t, t_0)v(t_0)$  y por el efecto regularizante de  $U(t, s)$  tenemos que  $v(t)$  es precompacto en  $L^1(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Pero entonces, pasando a subsucesiones si fuera necesario, tenemos que  $v(t)$  debe converger a cero en  $L^1(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Pero entonces, por la segunda desigualdad en (9.2.4) y (9.2.1) se tiene, para todo  $t > t_0 + 1$ ,

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|v(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t_0 \rightarrow \infty. \blacksquare$$

### 9.3. Existencia de trayectorias completas positivas no degeneradas

En esta sección estudiamos la existencia de trayectorias completas no negativas o positivas del problema (9.0.1). Además, damos condiciones que garantizan que las trayectorias completas son no degeneradas y acotadas superiormente en  $\pm\infty$ .

Comenzamos con el caso en que la dinámica asintótica de (9.0.1) es trivial y no existen trayectorias completas no negativas. De hecho, como consecuencia de la Proposición 9.2.2 y el Corolario 9.2.3 tenemos

**Teorema 9.3.1** *Supongamos que  $f(t, x, 0) = 0$ , se verifica (9.0.2) y*

$$m(t, x) = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(t, x, u)}{u}$$

*es tal que el operador de evolución lineal  $T_m(t, s)$ , como en (9.1.2), es exponencialmente estable.*

*Entonces, todas las soluciones de (9.0.1) verifican  $\|u(t, s; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  o  $s \rightarrow -\infty$  uniformemente para  $u_0$  en acotados de  $X = C(\bar{\Omega})$ .*

*En particular  $u(t) = 0$  es la única trayectoria completa no negativa y atrae todas las soluciones de (9.0.1) en sentido pullback y hacia adelante en el tiempo.*

**Demostración.** Si  $0 \leq u(t, x)$  es una solución no negativa de (9.0.1), entonces

$$u_t - \Delta u = \frac{f(t, x, u)}{u} u \leq m(t, x)u$$

y, por tanto,  $0 \leq u(t) \leq T_m(t, s)u_0$  de donde se tiene el resultado.  $\blacksquare$

Recordemos que como consecuencia de los resultados de los Capítulos 7 y 8 se tiene la existencia de una trayectoria completa no negativa de (9.0.1). Además, esta trayectoria es estable por arriba en sentido pullback. Nótese también que para esto no hace falta suponer (9.0.2). Concretamente, recopilando los resultados de dichos capítulos, se tiene

**Teorema 9.3.2** *Supongamos que  $f(t, x, 0) \geq 0$  y*

$$f(t, x, u) \leq C(t, x)u + D(t, x) \quad \text{para todo } u \geq 0, \tag{9.3.1}$$

*tal que el operador de evolución  $T_C(t, s)$  como en (9.1.2), es exponencialmente estable con exponente  $\beta > 0$ . Entonces, en cada una de las siguientes hipótesis sobre  $D$  existe una trayectoria completa maximal  $0 \leq \varphi_M \in \mathcal{D}_\beta = \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, C_0(\bar{\Omega}))$  en el sentido de que cualquier otra trayectoria completa de (9.0.1) en  $\mathcal{D}_\beta$ ,  $\psi$ , verifica  $0 \leq \psi(t) \leq \varphi_M(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

i)  $D \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, L^r(\Omega))$  con  $N/2 < r \leq \infty$ ; en tal caso  $\varphi_M \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, C_0(\overline{\Omega}))$ , o

ii) para todo  $T < \infty$ ,  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$  con  $1 < \sigma < \infty$  y  $N\sigma/2 < r \leq \infty$ , o  $N/2 < r \leq \infty$  si  $\sigma = \infty$ , o  $r = \infty$  si  $\sigma = 1$ ; en tal caso  $\varphi_M \in L^\infty((-\infty, T), C_0(\overline{\Omega})) \subset \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, C_0(\overline{\Omega}))$ .

Es más, en cada uno de los casos anteriores, el intervalo de orden  $I(t) = [0, \varphi_M(t)]$  es invariante hacia adelante en el tiempo y atrae uniformemente toda la dinámica de las soluciones positivas de (9.0.1) en sentido pullback, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene

$$0 \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; v_s) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(t, s, x; v_s) \leq \varphi_M(t, x) \quad (9.3.2)$$

uniformemente en  $x \in \overline{\Omega}$  para todo  $0 \leq \{v_s\}$  en  $\{B(s)\}_s \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_\beta$ .

Además,  $\varphi_M(t)$  es globalmente asintóticamente estable por arriba en sentido pullback, es decir, para todo  $v \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, C_0(\overline{\Omega}))$ ,  $v \geq \varphi_M$  se tiene

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v(s)) = \varphi_M(t).$$

Recordamos que la trayectoria completa maximal  $\varphi_M(t)$  construida anteriormente puede no estar acotada cuando  $t$  tiende a  $+\infty$  (ver Capítulo 7, Sección 8.3).

Además, como consecuencia del Teorema 8.1.1 existe un atractor en sentido pullback para soluciones no negativas de (9.0.1) con cuenca de atracción  $\mathcal{D}_\beta$ , que denotamos  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_t$ , y

$$\mathcal{A}(t) \subset I(t) = [0, \varphi_M(t)] \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Además,  $\varphi_M(t) \in \mathcal{A}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Damos ahora condiciones para que una trayectoria completa de (9.0.1) sea acotada superiormente en  $\pm\infty$  en el sentido de la Definición 9.0.1.

**Proposición 9.3.3** i) Supongamos que una trayectoria completa de (9.0.1),  $u(t)$ , verifica

$$u \in L^\infty((-\infty, T), C_0(\overline{\Omega}))$$

para algún  $T \in \mathbb{R}$  y  $f(\cdot, u(\cdot))$  permanece en un conjunto acotado de  $L^p(\Omega)$  para algún  $p > N$ . Entonces,  $u$  está acotada superiormente y es precompacta en  $L^1(\Omega)$  en  $-\infty$ .

ii) Supongamos que una trayectoria completa de (9.0.1),  $u(t)$ , verifica

$$u \in L^\infty((T, \infty), C_0(\overline{\Omega}))$$

para algún  $T \in \mathbb{R}$  y  $f(\cdot, u(\cdot))$  permanece en un conjunto acotado de  $L^p(\Omega)$  para algún  $p > N$ . Entonces,  $u$  está acotada superiormente y es precompacta en  $L^1(\Omega)$  en  $\infty$ .

**Demostración.** Como observamos en la Definición 9.0.1, para probar que  $u$  está acotada superiormente basta probar que está acotada en  $C^1(\overline{\Omega})$ . Entonces

i) Nótese que dado  $t < T$  se tiene  $u(t) = U(t, s)u(s) = U(t, t-1)u(t-1)$  y  $u(t-1)$  permanece en un conjunto acotado de  $C_0(\overline{\Omega})$ . Por tanto, basta probar que  $U(t, t-1)$  transforma un conjunto acotado de  $C_0(\overline{\Omega})$  en un conjunto acotado de  $C^1(\overline{\Omega})$  independientemente de  $t$ . Para ello, nótese que si  $\eta \in B \subset C_0(\overline{\Omega})$  es un conjunto acotado entonces, de la fórmula de variación de constantes para (9.0.1) se tiene

$$U(t, t-1)\eta = e^{\Delta}\eta + \int_{t-1}^t e^{\Delta(t-\tau)} f(\tau, U(\tau, t-1)\eta) d\tau. \quad (9.3.3)$$

Como  $f(\tau, U(\tau, t-1)\eta)$  permanece en un conjunto acotado de  $L^p(\Omega)$ , para algún  $p > N$ , independientemente de  $t$ , el resultado se sigue del efecto regularizante del semigrupo del calor.

ii) Ahora, dado  $t > s > T$  se tiene

$$u(t) = e^{\Delta(t-s)}u(s) + \int_s^t e^{\Delta(t-\tau)} f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (9.3.4)$$

De nuevo  $f(\tau, u(\tau))$  permanece en un conjunto acotado de  $L^p(\Omega)$ , para algún  $p > N$ , independientemente de  $t$  y el resultado se sigue de las cotas exponenciales para el semigrupo del calor. ■

En particular, de los resultados de los Capítulos 7 y 8 se tiene

**Corolario 9.3.4** *En las condiciones del Teorema 9.3.2,*

*i) Supongamos que  $D$  verifica que para todo  $T < \infty$ ,  $D \in L^\sigma((-\infty, T), L^r(\Omega))$  con  $1 < \sigma < \infty$  y  $N\sigma'/2 < r \leq \infty$ , o  $N/2 < r \leq \infty$  si  $\sigma = \infty$ , o  $r = \infty$  si  $\sigma = 1$ .*

*Entonces,  $\varphi_M \in L^\infty((-\infty, T), C_0(\overline{\Omega})) \subset \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, C_0(\overline{\Omega}))$  está acotada superiormente en  $-\infty$ .*

*ii) Supongamos que  $D$  verifica alguna de las hipótesis de los casos i) o ii) del Teorema 9.3.2 y además  $D \in L^\sigma((T, \infty), L^r(\Omega))$ , para todo  $T > -\infty$ , con  $\sigma$  y  $r$  como en el caso i).*

*Entonces,  $\varphi_M \in \mathcal{D}_\beta(\mathbb{R}, C_0(\overline{\Omega})) \cap L^\infty((T, \infty), C_0(\overline{\Omega}))$  y está acotada superiormente en  $\infty$ .*

**Nota 9.3.5** *Nótese que el Corolario 7.1.7 implica que en cualquiera de los casos del Corolario 9.3.4, si  $1 \leq \sigma < \infty$  entonces*

$$\varphi_M(t) \rightarrow 0$$

*cuando  $t$  tiende a  $-\infty$  o  $\infty$ . Lo mismo se tiene si  $\sigma = \infty$  y  $\|D(t)\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Estos casos no están incluidos en el Teorema 9.3.1.*

*Por tanto, supondremos de aquí en adelante que  $\sigma = \infty$  y  $N/2 < r \leq \infty$  y  $D(t)$  no tiende a cero en  $L^\infty(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

Nos centramos ahora en la cuestión de la no degeneración de las soluciones positivas de (9.0.1) en  $\pm\infty$ . Para ello, en lo que sigue usaremos las propiedades de las soluciones de la ecuación autónoma no lineal

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f_0(x, w) & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ w(0) = u_0 \end{cases} \quad (9.3.5)$$

cuyas soluciones denotamos por  $w(t; u_0)$ , con  $f_0(x, 0) \geq 0$  y

$$\frac{f_0(x, u)}{u} \quad \text{es no creciente para } u \geq 0. \quad (9.3.6)$$

Bajo condiciones adecuadas sobre  $f_0$ , este problema tiene un único equilibrio positivo,  $u_E^0(x) > 0$  en  $\Omega$ , ver Sección 3.3 y Brézis y Oswald [17]. Además,  $u_E^0(x)$  es globalmente asintóticamente estable, es decir, para todo conjunto acotado  $B$  de funciones positivas alejadas de cero, se tiene

$$w(t; u_0) \rightarrow u_E^0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad (9.3.7)$$

uniformemente para todo  $0 \leq u_0 \in B$ .

Luego, en cuanto a no degeneración de soluciones en  $-\infty$  se refiere, tenemos el siguiente resultado. Nótese que este resultado establece no sólo la no degeneración sino la estabilidad asintótica por abajo en sentido pullback de una solución minimal positiva de (9.0.1). Nótese también que no se usa la hipótesis (9.0.2).

**Teorema 9.3.6** *Supongamos que estamos en las condiciones del Teorema 9.3.2 y que para todo  $t \leq t_0 \leq \infty$*

$$f_0(x, u) \leq f(t, x, u) \quad \text{para todo } x \in \Omega, u \geq 0 \quad (9.3.8)$$

*para algún  $f_0$  verificando (9.3.6) y (9.3.7).*

*Entonces, la trayectoria maximal completa  $\varphi_M(t)$  construida en el Teorema 9.3.2 es una TCPND en  $-\infty$ .*

*Además, existe una TCPND en  $-\infty$  que es minimal para  $t \in \mathbb{R}$  que denotamos  $\varphi_m(t)$ . Es más,  $I^+(t) = [\varphi_m(t), \varphi_M(t)]$  es invariante hacia adelante en el tiempo para (9.0.1), es decir,*

$$U(t, s)I^+(s) \subset I^+(t) \quad \text{para todo } s < t$$

*y atrae uniformemente la dinámica del sistema en sentido pullback, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$0 \leq \varphi_m(t) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_0) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_0) \leq \varphi_M(t) \quad (9.3.9)$$

*uniformemente para  $u_0 > 0$  en conjuntos acotados de datos iniciales positivos alejados de cero.*

En particular, existe un atractor pullback para las soluciones positivas de (9.0.1),  $\{\mathcal{A}_+(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ , que verifica

$$\mathcal{A}_+(t) \subset [\varphi_m(t), \varphi_M(t)] \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

y  $\varphi_m(t), \varphi_M(t) \in \mathcal{A}_+(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Además,  $\varphi_m$  es asintóticamente estable por abajo en sentido pullback para  $t \in \mathbb{R}$ , esto es, para cualquier función no degenerada en  $-\infty$ ,  $v \in C_b(\mathbb{R}, X)$  tal que  $0 \leq v(s) \leq \varphi_M(s)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v(s)) = \varphi_m(t).$$

Por último, si  $t_0 = \infty$  entonces  $\varphi_m$  y  $\varphi_M$  son TCPND en  $\infty$ .

**Demostración.** Nótese que por el principio de comparación tenemos que para cualquier dato inicial no negativo y  $s < t \leq t_0$

$$0 \leq w(t - s; u_0) \leq u(t, s; u_0)$$

donde  $w$  es la solución del problema autónomo (9.3.5).

Consideramos ahora  $u_E^0(x)$  el único equilibrio positivo de (9.3.5). Nótese que  $u_E^0(x)$  puede ser visto como una subtrayectoria de (9.0.1) ya que, por el principio de comparación,

$$0 \leq u_E^0(x) = w(r - s; u_E^0(x)) \leq U(r, s)u_E^0(x) \quad (9.3.10)$$

para todo  $r \geq s$ . Luego, haciendo actual el operador de evolución  $U(t, r)$  en (9.3.10) tenemos, por el principio de comparación

$$U(t, r)u_E^0(x) \leq U(t, r)U(r, s)u_E^0(x) = U(t, s)u_E^0(x) \quad (9.3.11)$$

para todo  $s \leq r \leq t$ . De donde tenemos que  $0 \leq u(t, s; u_E^0) = U(t, s)u_E^0$  es creciente en  $s$  tendiendo a  $-\infty$ .

Ahora bien, como estamos en las hipótesis del Teorema 9.3.2, tenemos, en particular, la existencia de una trayectoria completa maximal no negativa  $\varphi_M(t)$ . De donde, tomando límites en (9.3.10) cuando  $s \rightarrow \infty$  tenemos por (9.3.2)

$$0 \leq u_E^0 \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_E^0) \leq \varphi_M(t) \quad \text{para } t \leq t_0. \quad (9.3.12)$$

En particular,  $\varphi_M$  es no degenerada en  $-\infty$ .

Además,  $u(t, s; u_E^0) \geq 0$  está acotada superiormente y es creciente cuando  $s \rightarrow -\infty$ . Luego, converge puntualmente a cierta función que denotamos  $\varphi_m(t, x)$ . Es más, esta convergencia es uniforme en espacio por el Teorema de Ascoli-Arzelá:  $\{u(t, s; u_E^0)\}_s$  es equicontinuo y acotado por el efecto regularizante del operador de ya que  $\{u(t - 1, s; u_E^0)\}_{s \leq s_0}$  está acotado (para cierto  $s_0$ ). Luego, por el efecto regularizante del operador de evolución (véase el Teorema 6.1.13) sabemos que  $\{u(t, s; u_E^0)\}_{s \leq s_0} = U(t, t - 1)\{u(t - 1, s; u_E^0)\}_{s \leq s_0}$  es pre-compacto en  $C(\bar{\Omega})$ . Luego,  $u(t, s; u_E^0) \rightarrow \varphi_m(t) \in C_0(\bar{\Omega})$  uniformemente en  $\Omega$  cuando  $s \rightarrow -\infty$ . Por (9.3.12),  $\varphi_m$  verifica

$$0 \leq u_E^0 \leq \varphi_m(t) \leq \varphi_M(t) \quad \text{para } t \leq t_0.$$

Además, por la continuidad de  $U(t, s)$ ,  $t > s$ , siguiendo el mismo argumento que el la prueba del Teorema 8.1.1 se tiene que  $\varphi_m(t)$  es una trayectoria completa de (9.0.1) que claramente es no degenerada en  $-\infty$ . Además, de lo anterior también obtenemos que  $0 \leq \varphi_m(t) \leq \varphi_M(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Probamos ahora (9.3.9). Supongamos primero  $t \leq t_0$ . Sea  $B$  un conjunto acotado de datos iniciales alejados de cero, es decir,

$$\text{dist}(B, \{0\}) > 0.$$

Sean  $s < r < t \leq t_0$ . Entonces, para todo dato inicial  $\{u_s\}_s$  tal que  $u_s \in B$  para todo  $s$  tenemos

$$w(r - s; u_s) \leq u(r, s; u_s) \quad \text{para todo } s < r < t_0 \quad (9.3.13)$$

y haciendo actuar el operador de evolución en ambos miembros de la desigualdad tenemos para todo  $s < r < t < t_0$

$$U(t, r)w(r - s; u_s) \leq U(t, r)u(r, s; u_s) = u(t, s; u_s).$$

Tomando primero el límite cuando  $s$  tiende a  $-\infty$  y usando la estabilidad asintótica de  $u_E^0$  para (9.3.5) (ver (9.3.7)) junto con la continuidad de  $U$ , tenemos

$$0 \leq u_E^0 \leq U(t, r)u_E^0 \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_s).$$

Tomando ahora límite cuando  $r$  tiende a  $-\infty$  tenemos

$$0 \leq u_E^0 \leq \varphi_m(t) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_s) \quad (9.3.14)$$

donde el límite es uniforme para  $u_s$  en conjuntos acotado de  $X^+ \setminus \{0\}$  alejados de cero. Esto y (9.3.2) proporciona (9.3.9).

Supongamos ahora que  $t > t_0$ . Entonces, haciendo actuar el operador de evolución en (9.3.13) tenemos, para  $r < \tau < t_0 < t$ ,

$$U(t, \tau)U(\tau, r)u(r - s; u_s) \leq U(t, \tau)U(\tau, r)u(r, s; u_s) = u(t, s; u_s).$$

De nuevo, tomando límite cuando  $s \rightarrow -\infty$  como antes, tenemos

$$U(t, \tau)U(\tau, r)u_E^0 \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_s)$$

y tomando ahora límite cuando  $r \rightarrow -\infty$  se tiene

$$U(t, \tau)\varphi_m(\tau) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_s).$$

Por último, usando que  $\varphi_m$  es una trayectoria completa se tiene

$$0 \leq \varphi_m(t) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; u_s).$$

Probemos ahora que  $\varphi_m(t)$  es asintóticamente estable por abajo en sentido pullback para  $t \in \mathbb{R}$ . Sea ahora,  $v \in C_b(\mathbb{R}, X)$  una función no degenerada en  $-\infty$  tal que  $0 < v(s) \leq \varphi_m(s)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Entonces, para  $s < t$ ,

$$u(t, s; v(s)) \leq u(t, s; \varphi_m(s)) = \varphi_m(t).$$

Tomando ahora límite cuando  $s \rightarrow -\infty$  y usando (9.3.14) tenemos

$$\varphi_m(t) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v(s)) \leq \limsup_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v(s)) \leq \varphi_m(t).$$

Por tanto,  $\varphi_m$  es asintóticamente estable por abajo en sentido pullback para  $t \in \mathbb{R}$ .

Por último, probamos que  $\varphi_m(t)$  es la trayectoria completa positiva minimal no degenerada en  $-\infty$ . Para ello, sea  $\psi$  otra trayectoria completa positiva no degenerada en  $-\infty$ . Sea  $v \in C_b(\mathbb{R}, X)$  una función no degenerada en  $-\infty$  tal que  $0 \leq v(s) \leq \psi(s)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Entonces, por el principio de comparación, tenemos para  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$u(t, s; v(s)) \leq U(t, s)\psi(s) = \psi(t).$$

Tomando ahora límite cuando  $s \rightarrow -\infty$  tenemos, de los resultados anteriores,

$$\varphi_m(t) \leq \liminf_{s \rightarrow -\infty} u(t, s; v(s)) \leq \psi(t) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Luego,  $\varphi_m(t) \leq \psi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

La invarianza hacia adelante en el tiempo de  $I^+(t)$  se sigue del principio de comparación y el hecho de que  $\varphi_m(t)$  y  $\varphi_M(t)$  son trayectorias completas. El resto se sigue fácilmente. ■

**Nota 9.3.7** Observamos que el Teorema anterior implica que (9.0.1) es permanente en sentido pullback.

Observamos también que si  $t_0 = \infty$  en el Teorema anterior, entonces toda trayectoria completa no trivial  $\psi(t)$  en el intervalo de orden  $[0, \varphi_m(t)]$  debe verifica  $\psi(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Esto es, debe conectar 0 en  $t = -\infty$  con  $\varphi_m(t)$  en  $t = \infty$ .

**Nota 9.3.8** El resultado anterior prueba que si se tiene la unicidad de soluciones dada por el Teorema 9.1.1 entonces existe una única trayectoria completa positiva de (9.0.1), es decir,  $\varphi_m(t) = \varphi_M(t)$  y entonces es globalmente asintóticamente estable en sentido pullback.

Damos ahora otras condiciones para que las soluciones de (9.0.1) sean SPND en  $\infty$ .

**Proposición 9.3.9** Supongamos que para  $t \geq t_0$

$$f_0(x, u) \leq f(t, x, u) \quad \text{para todo } x \in \Omega, u \geq 0 \quad (9.3.15)$$

para alguna función  $f_0$  verificando (9.3.6) y (9.3.7).

Entonces, para todo  $s \geq t_0$  y todo dato inicial no negativo, la solución de (9.0.1),  $u(t, s; u_0)$ , es una SPND en  $\infty$ .

**Demostración.** Basta notar que por el principio de comparación

$$w(t - s; u_0) \leq u(t, s; u_0)$$

y el resultado se sigue de (9.3.7). ■

Nótese que los argumentos anteriores sugieren otro tipo de condiciones para obtener que las trayectorias completas están acotadas superiormente. Estas condiciones son complementarias a las del Corolario 9.3.4.

**Proposición 9.3.10** Supongamos que para  $t \leq t_0 \leq \infty$  ( $o t \geq t_0$  respectivamente) se tiene

$$f(t, x, u) \leq f_1(x, u) \quad \text{para todo } x \in \Omega, u \geq 0 \quad (9.3.16)$$

para alguna función  $f_1$  verificando (9.3.6) y (9.3.7).

Entonces, cualquier trayectoria completa no negativa de (9.0.1) está acotada superiormente en  $-\infty$  ( $o \infty$  respectivamente).

**Demostración.** Nótese que por comparación se tiene que cualquier dato inicial no negativo y  $s < t \leq t_0$

$$0 \leq u(t, s; u_0) \leq w(t - s; u_0)$$

donde  $w$  es la solución del problema (9.3.5) con término no lineal  $f_1(x, u)$ . Entonces, la propiedad (9.3.7) proporciona el resultado. ■

**Nota 9.3.11** Nótese que combinando los argumentos anteriores se tiene que si para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f_0(x, u) \leq f(t, x, u) \leq f_1(x, u) \quad \text{para todo } x \in \Omega, u \geq 0$$

con  $f_0$  y  $f_1$  verificando (9.3.6) y (9.3.7) entonces podemos obtener la existencia de dos trayectorias completas extremales  $\varphi_m \leq \varphi_M$  que verifican (9.3.9), son no degeneradas y están acotadas superiormente en  $\pm\infty$ . Estas ideas han sido empleadas en [32].

## 9.4. Un ejemplo: ecuaciones logísticas

Mostramos ahora cómo se pueden aplicar nuestras técnicas a una importante clase de problemas definidos por la ecuación logística no autónoma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{en } \Omega, t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) = u_0 \end{cases} \quad (9.4.1)$$

con no linealidad

$$f(t, x, u) = m(t, x)u - g(t, x, u)u \quad (9.4.2)$$

donde  $m$  es una función continua y localmente Hölder en  $t$  y  $g(t, x, u) \geq 0$  es una función regular, creciente en  $u$ . Un caso particularmente importante es cuando se tiene el término no lineal

$$f(t, x, u) = m(t, x)u - n(t, x)u^\rho, \quad \rho \geq 2 \quad (9.4.3)$$

donde  $n \geq 0$  es también continua y localmente Hölder en  $t$ . Todos estos ejemplos verifican (9.0.2).

Nótese que para estos problemas, se tiene que para una función  $u$  verificando  $\varphi_0(x) \leq u(t, x) \leq \varphi_1(x)$  para todo  $x \in \Omega$  y  $t$  en algún intervalo  $I$ , para ciertas funciones  $\varphi_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi_i(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anulan en  $\partial\Omega$ ,

$$q(t, x) = \frac{f(t, x, u(t, x))}{u(t, x)} = m(t, x) - g(t, x, u(t, x)) \geq m(t, x) - g(t, x, \varphi_1(x))$$

para (9.4.2) y

$$q(t, x) = \frac{f(t, x, u(t, x))}{u(t, x)} = m(t, x) - n(t, x)u^{\rho-1}(t, x) \geq m(t, x) - n(t, x)\varphi_1^{\rho-1}(x)$$

para (9.4.3). Por tanto, para que se tenga (9.0.8) pediremos  $g(t, x, \varphi_1(x)) \geq q_0(x)$  o  $m(t, x) - n(t, x)\varphi_1^{\rho-1}(x) \geq q_0(x)$  respectivamente. Por ejemplo, en el caso en que  $m(t, x)$  esté acotada independientemente de  $x$  y  $t$  esto se tiene, respectivamente, si las partes negativas de  $g(t, x, \varphi_1(x))$ , o  $n(t, x)$  no se vuelven demasiado grandes.

Por otra parte, para funciones verificando  $\varphi_0(x) \leq u_1(t, x) \leq u_2(t, x) \leq \varphi_1(x)$  para todo  $x \in \Omega$  y  $t$  en algún intervalo  $I$ , para ciertas funciones  $\varphi_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi_i(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anulan en  $\partial\Omega$ , tenemos, para (9.4.2),

$$0 \leq P(t, x) = \frac{f(t, x, u_1(t, x))}{u_1(t, x)} - \frac{f(t, x, u_2(t, x))}{u_2(t, x)} = g(t, x, u_2(t, x)) - g(t, x, u_1(t, x)),$$

luego,

$$P(t, x) = \partial_u g(t, x, \xi(t, x))(u_2(t, x) - u_1(t, x))$$

para algún  $\varphi_0(x) \leq \xi(t, x) \leq \varphi_1(x)$ .

Por otra parte, para (9.4.3),

$$0 \leq P(t, x) = \frac{f(t, x, u_1(t, x))}{u_1(t, x)} - \frac{f(t, x, u_2(t, x))}{u_2(t, x)} = n(t, x)(u_2^{\rho-1}(t, x) - u_1^{\rho-1}(t, x))$$

luego

$$P(t, x) \geq (\rho - 1)n(t, x)\varphi_0^{\rho-2}(x)(u_2(t, x) - u_1(t, x))$$

Por tanto, para tener la condición (9.0.10) pediremos una no degeneración para la derivada de  $g$ : para todo subconjunto  $\Omega_0 \subset \Omega$  existe un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega_0$  y  $\alpha > 0$  tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \partial_u g(t, x, \xi(t, x)) \geq \alpha > 0 \quad e.c.t. \quad x \in A$$

Para (9.4.3) esto se traduce en que para todo subconjunto  $\Omega_0 \subset \Omega$  existen un conjunto de medida positiva  $A \subset \Omega_0$  y algún  $\alpha > 0$  tales que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} n(t, x) \geq \alpha > 0 \quad e.c.t. \quad x \in A$$

(respectivamente cuando  $t \rightarrow -\infty$ ). Esto se tiene en particular si  $n(t, x) \geq N(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$  y todo  $t$  en un intervalo no acotado.

Con todo esto, podemos aplicar los resultados de las Secciones 9.1 y 9.2 al problema (9.4.1).

Como en la Sección 9.3, nótese que podemos aplicar el Teorema 9.3.1 si el operador de evolución asociado a  $\Delta + m(t, x)$  es exponencialmente estable.



Por otra parte, nótese que para (9.4.3), si suponemos que existe una descomposición  $m(t, x) = m_1(t, x) + m_2(t, x)$  con  $m_2(t, x) \geq 0$  y

$$m_1 \in C^\alpha(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \quad \text{con} \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad \text{y algún} \quad p > N/2.$$

tales que el operador de evolución asociado a  $\Delta + m_1(t, x)$  es exponencialmente estable con exponente  $\beta > 0$  entonces, usando la desigualdad de Young, se tiene que se verifica (9.3.1) con

$$C(t, x) = m_1(t, x) \quad \text{y} \quad D(t, x) = A \left( \frac{m_2(t, x)}{n^{\frac{1}{p}}(t, x)} \right)^{\rho'}$$

para alguna constante  $A$ . Entonces, se puede aplicar el Teorema 9.3.2.

Por otra parte, para

$$f_0(x, u) = M(x)u - N(x)u^\rho$$

se verifican (9.3.8) y (9.3.15) supuesto que  $m(t, x) \geq M(x)$  para ciertos  $M \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $0 \leq n(t, x) \leq N(x)$  para todo  $t$  en un intervalo no acotado adecuado. Además, (9.3.16) se verifica con  $f_1 = f_0$  como antes supuesto que  $m(t, x) \leq M(x)$  para ciertos  $M \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$  y  $0 \leq N(x) \leq n(t, x)$ .

De los resultado de la Sección 3.3 y el Capítulo 5 y Brézis y Oswald [17], el problema (9.3.5) verifica (9.3.7) supuesto que cero es una solución inestable para

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = M(x)v & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (9.4.4)$$

y existe una descomposición  $M(x) = M_1(x) + M_2(x)$ , con  $M_2 \geq 0$ , tal que el semigrupo generado por  $\Delta + M_1(x)$  decaiga exponencialmente y

$$D_0 = \left( \frac{M_2}{N^{\frac{1}{p}}} \right)^{\rho'} \in L^\sigma(\Omega) \quad (9.4.5)$$

para algún  $\sigma > N/2$ .

## 9.5. Algunas generalizaciones y extensiones

Nótese que la mayor parte del análisis en las secciones anteriores pueden llevarse a cabo para ecuaciones más generales de la forma

$$\begin{cases} u_t + A(t, D)u = f(t, x, u), & \text{en } \Omega \quad t > s \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) = u_0 \end{cases} \quad (9.5.1)$$

donde  $A(t, D)$  representa un operador diferencial elíptico general, que puede depender del tiempo, de la forma

$$A(t, D)u = -\operatorname{div}(a(t, x)\nabla u) + c(t, x)u$$

o incluso

$$A(t, D)u = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^N a_i(t, x)\partial_i u + a(t, x)u$$

con coeficientes regulares adecuados (ver Sección 1.1).

Nótese que para estos problemas se pueden aplicar la mayor parte de los argumentos de este capítulo. En primer lugar, se necesita un resultado de existencia y unicidad de solución adecuado para poder definir el operador de evolución  $U(t, s)$  como para (9.0.1). Entonces, hemos de suponer las condiciones (9.0.2) y (9.0.9). Nótese que la condición (9.0.8) se impone para poder usar el Lema 9.1.6; ver más abajo para ver cómo obtener este resultado en el caso más general de la ecuación (9.5.1).

Después, se necesita un resultado adecuado de existencia para las ecuaciones lineales de la forma (9.1.2), que se leería ahora como

$$\begin{cases} z_t + A(t, D)z &= q(t, x)z, & \text{en } \Omega \\ z &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (9.5.2)$$

para una clase adecuada de potenciales  $q(t, x)$ . Con esto, se puede definir el operador de evolución  $T_q(t, s)$  de la Sección 9.1.

Con esto, todos los argumentos de la Sección 9.1 siguen siendo válidos supuesto que se pruebe el resultado análogo al del Lema 9.1.6 para (9.5.2): para todo  $0 \leq \xi \in L^1(\Omega)$  existe una función  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi(x) > 0$  en  $\Omega$ , que se anula en  $\partial\Omega$ , tal que

$$T_q(s+1, s)\xi \geq \varphi \quad (9.5.3)$$

para todo  $s$  tal que  $s, s+1 \in I$ ; ver (9.1.7). Nótese que este resultado es válido, supuesto que se verifica (9.0.8), en el caso de operadores  $A$  independientes el tiempo. Sin embargo, puede ser cierto sin necesidad de suponer (9.0.8). Por ejemplo en el caso periódico, se verifica usando la positividad fuerte de la aplicación de Poincaré, ver Hess [30].

Entonces, por los resultados de la Sección 9.2, nótese que sólo se necesita establecer una estimación del efecto regularizante análogo a (9.2.1) (puede que con un exponente diferente en lugar de  $N/2$ ).

Por otra parte, los resultados de existencia de la Sección 9.3, Teorema 9.3.2 pueden trasladarse a (9.5.1) ver Sección 8.4. Además, sería necesario imponer ciertas condiciones para obtener la Proposición 9.3.3 y el Corolario 9.3.4. Sin embargo, el resto de los resultados de esta sección dependen del uso de problemas autónomos adecuados con los que comparar, ver (9.3.5). Esta herramienta debería sustituirse por una adecuada a (9.5.1) para obtener la no degeneración y la acotación superior.

Para otras condiciones de contorno, nótese que si se consideran condiciones Neumann o Robin, los argumentos son algo más simples. De hecho, en estos casos las soluciones de (9.5.1) se vuelven estrictamente positivas en todo  $\Omega$ . Luego, en la definición de no degeneración, Definición 9.0.1, las funciones  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  se pueden tomar como constantes positivas. Esto simplifica mucho las demostraciones en este Capítulo.



**Parte III**

**Aplicaciones**



# Capítulo 10

## Difusión alta

En este capítulo estudiaremos varios ejemplos que, además de ser interesantes en sí mismos, permiten mostrar cómo se aplican las técnicas estudiadas en las secciones anteriores a ejemplos concretos.

Los ejemplos elegidos son dos problemas de difusión alta, es decir, problemas en los que la difusión se hace infinita en alguna región del dominio. Concretamente, en el primero de ellos, la zona de difusión alta tocará a la frontera del dominio en zonas donde las condiciones de contorno son Dirichlet y en zonas donde son Robin al mismo tiempo; en el segundo, la zona de difusión alta será un entorno de la frontera que, en este caso, tendrá condiciones Robin.

Como veremos, en este tipo de problemas, se produce un proceso de homogeneización espacial en la zona en la que la difusión es alta. Además, veremos también cómo interactúan las condiciones de contorno con la difusión. En el primer caso, como la zona de difusión alta tiene intersección no vacía con la parte de frontera con condiciones Dirichlet, tendremos que, necesariamente, en esa región la solución va a ser nula produciéndose así una propagación de las condiciones Dirichlet a toda la región de difusión alta. En el segundo ejemplo, sin embargo, gracias a la interacción de la condición de frontera con la difusión alta va a aparecer una aportación directa procedente de la condición de frontera en la zona de difusión alta.

En el primer ejemplo, veremos que a pesar de que el problema límite que obtendremos es un problema estándar, sin embargo, las zonas de frontera con condiciones de contorno mixtas y Dirichlet van a tener intersección no vacía. Como consecuencia, vamos a perder regularidad en las soluciones del problema límite. En el segundo ejemplo, el problema límite que obtendremos no será un problema estándar lo que hará necesario el uso de soluciones  $\varepsilon$ -regulares para obtener existencia de solución (ver Arrieta et al. [8]).

Este tipo de problemas han sido estudiados en Rodríguez-Bernal [42] (problema elíptico) y Arrieta et al. [12] (problema parabólico) en el caso en que la zona de difusión alta no toca a la frontera. El caso en que la difusión alta se tiene en todo el dominio ha sido estudiado en Rodríguez-Bernal y Willie [43] y Willie [50].

En las Figuras 10.1 y 10.2 mostramos otras configuraciones de dominios que pueden tratarse con las mismas técnicas que los estudiados más adelante. Hemos denotado por  $\Omega_0$  la región del dominio donde la difusión es alta, por  $\Gamma_D$  la región de frontera con condiciones Dirichlet y por  $\Gamma_N$  la región de frontera con condiciones Robin o Neumann.

En la Figura 10.1 mostramos dos tipos de configuraciones en las cuales la zona de difusión alta tiene contacto con la frontera de dominio pero no llega a recubrirla completamente. En el caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet, la solución va a ser cero en la región con difusión alta (como el en primer ejemplo que presentamos). Por tanto, el problema límite va a ser un problema de Dirichlet estándar en  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ , donde a lo sumo se perderá la regularidad de la frontera. En el caso de condiciones Neumann o Robin, la solución será constante en  $\Omega_0$  y dicha constante dependerá explícitamente de las condiciones de contorno.

Las configuraciones de dominio mostradas en la Figura 10.2 dan lugar, en el límite, a dos problemas de Dirichlet estándar desacoplados, siendo la solución igual a cero en la región de difusión alta.

El esquema que seguiremos en su estudio es el siguiente. En primer lugar, estudiaremos los problemas lineales elípticos aproximados. Estos problemas serán problemas estándar y usaremos las herramientas

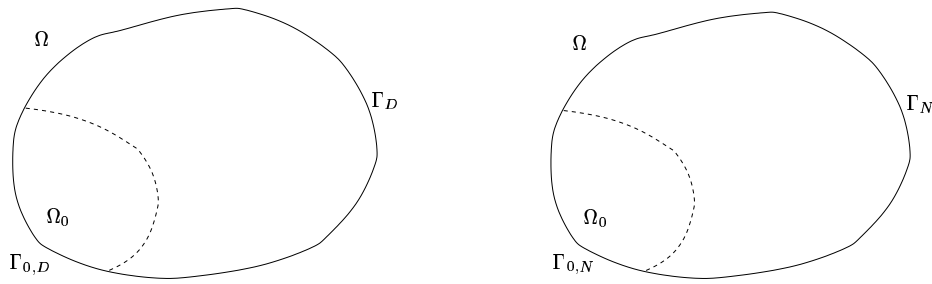


Figura 10.1: Dominios. Casos Dirichlet y Neumann

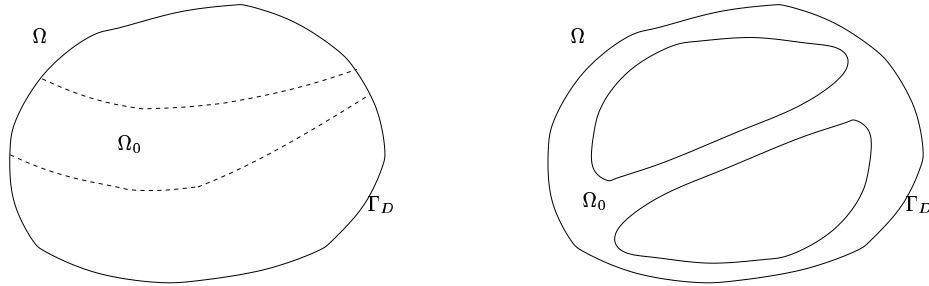


Figura 10.2: Otras configuraciones posibles

habituales para su estudio. Una vez analizados, deduciremos cuál debe ser el problema límite y estudiaremos su buen planteamiento. Una vez identificado el problema límite, probaremos que, efectivamente, las soluciones de los problemas aproximados convergen a las soluciones del problema límite. Por último, estudiaremos la convergencia espectral de los problemas aproximados al problema límite donde probaremos que los autovalores y las autofunciones pasan al límite de manera adecuada.

Una vez estudiados los problemas elípticos pasaremos a estudiar los problemas parabólicos lineales asociados. Concretamente, probaremos que dichos problemas están bien planteados y que pasan al límite. Con este estudio de los problemas lineales podremos pasar ya a considerar los problemas parabólicos no lineales. Los problemas no lineales aproximados serán problemas estándar que se pueden enmarcar dentro de los problemas con condiciones de contorno no lineales estudiados en la Parte I. Bajo ciertas condiciones de disipación, obtendremos la existencia de atractor para las soluciones aproximadas así como cotas uniformes para las soluciones de los problemas aproximados. A partir de aquí, podremos plantear el problema parabólico límite y probar que está bien planteado, posee un atractor y verifica las cotas uniformes obtenidas para los problemas aproximados. Como observamos anteriormente, en el primer ejemplo el problema límite va a ser un problema estándar y su buen planteamiento se va a obtener de manera inmediata. En el segundo ejemplo, sin embargo, el buen planteamiento del problema va a requerir más esfuerzo no pudiéndose obtener de la forma habitual.

Por último, las cotas uniformes y la convergencia de los problemas parabólicos lineales, permite obtener la semicontinuidad superior de los atractores y de los equilibrios extremales. Además, enunciaremos una propiedad que garantiza que los equilibrios extremales pasan al límite.

## 10.1. Difusión alta hasta la frontera

Comenzamos con un problema de difusión alta hasta la frontera en el que el problema límite resultante es un problema estándar con condiciones de frontera mixtas (tanto Robin como Dirichlet) en el que las fronteras van a tener intersección no vacía. Esto va a impedir obtener soluciones muy regulares.

### 10.1.1. Planteamiento del problema elíptico

Sea  $\Omega$  un abierto acotado regular de  $\mathbb{R}^N$ . Denotamos por  $\Gamma$  su frontera y suponemos que  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  con  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$ . Además, consideramos  $\Omega_0 \subset \Omega$  un abierto tal que  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$  tiene intersección no vacía con  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_D$ , que denotamos por  $\Gamma_{0,N}$  y  $\Gamma_{0,D}$ , respectivamente. Sea  $\Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$ .

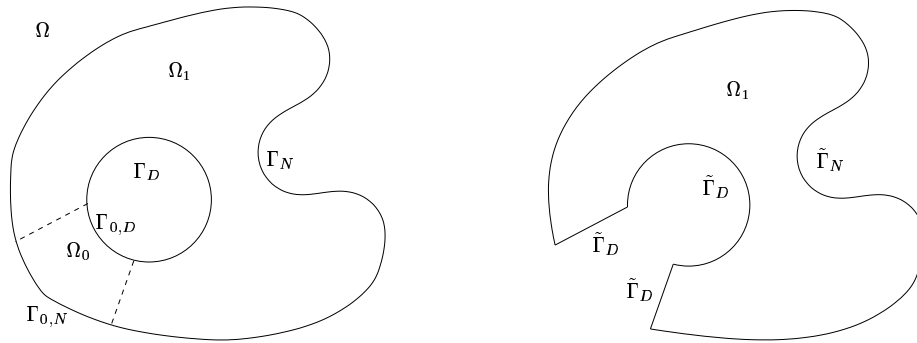


Figura 10.3: Dominios de los problemas original y límite

Nos planteamos en primer lugar estudiar la convergencia de los problemas

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + (\lambda + V(x))u^\varepsilon = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{n}_\varepsilon} + b(x)u^\varepsilon = g & \text{sobre } \Gamma_N \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \end{cases} \quad (10.1.1)$$

donde

- $d_\varepsilon(x)$  son funciones suficientemente regulares, estrictamente positivas y tales que

$$0 < m_0 < d_\varepsilon(x) < M_\varepsilon \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad (10.1.2)$$

Además

$$d_\varepsilon(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{uniformemente en compactos de } \Omega_0 \\ d_0(x) & \text{uniformemente en } \Omega_1 \end{cases} \quad (10.1.3)$$

- $\lambda$  es una constante positiva.
- $V$  es una función de  $L^\infty(\Omega)$ .
- $b$  es una función de  $L^\infty(\Gamma_N)$ .
- $f$  es una función de  $H_{\Gamma_D}^{-1}(\Omega)$ .
- $g$  es un elemento de  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ .

Denotaremos  $\tilde{\Gamma}_N = \Gamma_N \setminus \bar{\Gamma}_{0,N}$  y  $\tilde{\Gamma}_D = \partial\Omega_1 \setminus \tilde{\Gamma}_N$ .

**Nota 10.1.1** *Todo lo que sigue sigue siendo válido suponiendo  $V \in L^\sigma(\Omega)$ ,  $\sigma > N/2$  y  $b \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N - 1$ .*

### 10.1.2. Marco funcional

A continuación describimos el marco funcional que emplearemos para el estudio del problema (ver Rodríguez-Bernal [42]).

Sea  $H^1(\Omega)$  el espacio de Sobolev, denotamos por  $H^{-1}(\Omega)$  su dual. Sea

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$$



y denotamos por  $H_{\Gamma_D}^{-1}(\Omega)$  su dual. Definimos el espacio

$$Y_\varepsilon = \{z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : -\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla z) \in L^2(\Omega)\}$$

Para  $u \in Y_\varepsilon$  podemos definir  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \in H^{-1/2}(\Gamma)$  por

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}, \gamma(v) \right\rangle_{-1/2, 1/2} = \int_\Omega \text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u)v + \int_\Omega d_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v \quad (10.1.4)$$

para toda  $v \in H^1(\Omega)$ . El espacio  $Y_\varepsilon$  es un espacio de Banach para la norma

$$\|z\|_{Y_\varepsilon} = \|\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla z)\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{H^1(\Omega)}$$

que es un espacio de Hilbert y la aplicación  $z \mapsto \frac{\partial z}{\partial \vec{n}_\varepsilon}$  es continua entre  $Y_\varepsilon$  y  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Denotamos el dual de  $H^{1/2}(\Gamma_N)$  por  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ .

Definimos a continuación una serie de espacios que nos serán de utilidad en lo que sigue. Será en estos espacios en los que “vivan” las soluciones del problema límite. Sean

$$L_{\Omega_0}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \Omega_0\}, \quad H_{\Omega_0}^1(\Omega) = L_{\Omega_0}^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \equiv H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

y, por último,

$$Y_{\Omega_0} = \{z \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) : -\text{Div}(d_0(x)\nabla z) \in L^2(\Omega_1)\}.$$

### 10.1.3. Los problemas elípticos aproximados

Estudiemos, antes que nada, la existencia de solución del problema elíptico lineal

$$\begin{cases} -\text{div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u = g & \text{sobre } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (10.1.5)$$

Tomando funciones test  $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  en la formulación del problema (10.1.5) e integrando formalmente por partes, tenemos

$$\int_\Omega d_\varepsilon(x)\nabla u \nabla \phi + \int_\Omega (\lambda + V(x))u\phi + \int_{\Gamma_N} b(x)u\phi = \int_\Omega f\phi + \int_{\Gamma_N} g\phi \quad \forall \phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega).$$

Se tiene entonces el siguiente resultado

**Teorema 10.1.2** *El operador  $T_\varepsilon$  definido por la forma bilineal*

$$\tau_\varepsilon(u, v) = \langle T_\varepsilon u, v \rangle = \int_\Omega d_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v + \int_\Omega (\lambda + V(x))uv + \int_{\Gamma_N} b(x)uv \quad (10.1.6)$$

es un isomorfismo, para  $\lambda$  suficientemente grande, entre  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  y  $H_{\Gamma_D}^{-1}(\Omega)$ , y entre  $Y_\varepsilon$  y  $L^2(\Omega) + H^{-1/2}(\Gamma_N)$ . Además, entre estos últimos espacios,  $T_\varepsilon$  viene dado por

$$T_\varepsilon = (-\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla \cdot) + (\lambda + V(x)) \cdot)_\Omega + \left( \frac{\partial \cdot}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) \cdot \right)_{\Gamma_N}.$$

Por restricción a  $L^2(\Omega)$ ,  $T_\varepsilon$  induce un operador autoadjunto, positivo con resolvente compacta,  $B_\varepsilon$ , con dominio

$$D(B_\varepsilon) = \left\{ u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : -\text{Div}(d_\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + bu = 0 \text{ sobre } \Gamma_N \right\},$$

y para  $u \in D(B_\varepsilon)$ ,

$$B_\varepsilon u = -\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u.$$

**Demostración.** El operador  $T_\varepsilon$  está en las condiciones del Teorema de Lax-Milgram para  $\lambda$  suficientemente grande y por tanto es un isomorfismo entre  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  y  $H_{\Gamma_D}^{-1}(\Omega)$ .

Sea  $h = f_\Omega + g_{\Gamma_N} \in L^2(\Omega) + H^{-1/2}(\Gamma_N)$  y sea  $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  tal que  $T_\varepsilon u = h$ . Entonces, para toda  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle T_\varepsilon u, \phi \rangle = \int_\Omega d_\varepsilon(x) \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega (\lambda + V(x)) u \phi = \int_\Omega f \phi.$$

Luego integrando por partes en la primera integral llegamos a que  $-\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u) + (\lambda + V(x)) u = f$  en el sentido de las distribuciones y, además, por ser  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $V \in L^\infty(\Omega)$  y  $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  tenemos  $-\text{div}(d_\varepsilon(x) \nabla u) \in L^2(\Omega)$  y la ecuación se verifica en  $L^2(\Omega)$ . Por tanto,  $u \in Y_\varepsilon$ . Además,  $T_\varepsilon$  y su inversa son continuas en estos espacios, luego  $T_\varepsilon$  también es un isomorfismo entre  $Y_\varepsilon$  y  $L^2(\Omega) + H^{-1/2}(\Gamma_N)$ .

Si tomamos ahora  $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ , tenemos que

$$\int_\Omega d_\varepsilon(x) \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega (\lambda + V(x)) u \phi + \int_{\Gamma_N} b(x) u \phi = \int_\Omega f \phi + \int_{\Gamma_N} g \phi$$

e integrando por partes y teniendo en cuenta la ecuación que verifica  $u$  en  $\Omega$ , tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) u = g \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma_N).$$

Luego  $T_\varepsilon$  viene dado por

$$T_\varepsilon = (-\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla \cdot) + (\lambda + V(x)) \cdot)_\Omega + \left( \frac{\partial \cdot}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) \cdot \right)_{\Gamma_N}.$$

Si restringimos este operador a  $L^2(\Omega)$ , tenemos que  $T_\varepsilon$  induce un operador autoadjunto, positivo con resolvente compacta,  $B_\varepsilon$ , con dominio  $D(B_\varepsilon) = \{u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : T_\varepsilon u \in L^2(\Omega)\}$ . Ahora bien, si  $u \in D(B_\varepsilon)$ , como  $D(B_\varepsilon) \subset Y_{\varepsilon,2}$  tenemos  $-\text{Div}(d_\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega)$ . Por otra parte,  $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  y como  $V \in L^\infty(\Omega)$ , tenemos  $-\text{Div}(d_\varepsilon \nabla u) + V u \in L^2(\Omega)$ . Tomando  $u \in D(B_\varepsilon)$  y  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tenemos que se verifica la ecuación  $-\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u) + (\lambda + V(x)) u = f$  en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (de hecho, se verifica en  $L^2(\Omega)$ ). Tomando ahora  $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ , tenemos que  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b u = 0$  sobre  $\Gamma_N$ . Luego,

$$D(B_\varepsilon) = \left\{ u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : -\text{Div}(d_\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b u = 0 \text{ sobre } \Gamma_N \right\}$$

y para  $u \in D(B_\varepsilon)$ ,

$$B_\varepsilon u = -\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u) + (\lambda + V(x)) u$$

■

Una consecuencia inmediata de este teorema es la existencia de solución del problema (10.1.5) con segundo miembro en  $L^2(\Omega) + H^{-1/2}(\Gamma_N)$ .

**Corolario 10.1.3** *Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  es una solución de*

$$T_\varepsilon u = h = f_\Omega + g_{\Gamma_N}$$

donde  $f_\Omega \in L^2(\Omega)$  y  $g_{\Gamma_N} \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ , entonces  $u \in Y_\varepsilon$  y

$$\begin{cases} -\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u) + (\lambda + V(x)) u & = f & \text{en } L^2(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) u & = g & \text{en } H^{-1/2}(\Gamma_N) \\ u & = 0 & \text{en } \Gamma_D \end{cases}$$

### 10.1.4. El problema límite elíptico

Como dijimos en la introducción, la difusión alta va a provocar una homogeneización espacial en  $\Omega_0$  por lo que en dicha región, en el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la solución va a ser constante. Además, en nuestro caso, la solución en una parte de la frontera de  $\Omega_0$  ( $\Gamma_{0,D}$ ) debe ser 0 por lo que la solución en todo  $\Omega_0$  va a ser 0.

El siguiente resultado nos proporciona un resultado de existencia de solución del problema elíptico límite mientras que el Corolario 10.1.5 muestra explícitamente el problema límite.

**Teorema 10.1.4** *Sea  $T_0$  el operador definido por la forma bilineal*

$$\tau_0(u, v) = \langle T_0 u, v \rangle = \int_{\Omega_1} d_0(x) \nabla u \nabla v + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x)) uv + \int_{\tilde{\Gamma}_N} b(x) uv \quad (10.1.7)$$

con  $u, v \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ , que es un isomorfismo entre  $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  y su dual  $H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$ .

La restricción

$$T_0 : Y_{\Omega_0} \longrightarrow L_{\Omega_0}^2(\Omega) + H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_N) \subset H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$$

también es un isomorfismo. Además, sobre estos espacios,

$$T_0 u = (-\text{Div}(d_0(x) \nabla u) + (\lambda + V(x))u)_{\Omega_1} + \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}_0} + b(x)u \right)_{\tilde{\Gamma}_N}. \quad (10.1.8)$$

Por otra parte, la restricción de  $T_0$  a  $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  induce un operador no acotado, positivo, autoadjunto, con resolvente compacta,  $B_0$ , con dominio

$$D(B_0) = \left\{ u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) : -\text{div}(d_0(x) \nabla u) \in L_{\Omega_0}^2(\Omega) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}_0} + b(x)u = 0 \text{ sobre } \tilde{\Gamma}_N \right\}$$

y para  $u \in D(B_0)$ ,

$$B_0(u) = (-\text{div}(d_0(x) \nabla u) + (\lambda + V)u) \chi_{\Omega_1}.$$

Nótese que  $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  se puede identificar con  $H_{\tilde{\Gamma}_D}^1(\Omega_1)$  (ver Figura 10.3) por lo que el problema elíptico límite es un problema estándar planteado en  $H_{\tilde{\Gamma}_D}^1(\Omega_1)$ . La única diferencia con el planteamiento de los problemas aproximados es que, en el problema límite, las zonas de la frontera en los que las condiciones de contorno son Dirichlet tocan las zonas con condiciones de contorno tipo Robin, es decir,  $\tilde{\Gamma}_N \cap \tilde{\Gamma}_D \neq \emptyset$  (ver figura 10.3). Esto se traduce en una falta de regularidad adicional de las soluciones de los problemas elípticos. Por tanto, la prueba del siguiente resultado es análoga a la del Teorema 10.1.2.

Se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 10.1.5** *Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  es solución de*

$$T_0 u = f_{\Omega} + g_{\Gamma_N} \quad (10.1.9)$$

donde  $f \in L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  y  $g \in H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_N)$ , entonces  $u \in Y_{\Omega_0}$  y (10.1.9) es equivalente a

$$\begin{cases} -\text{Div}(d_0(x) \nabla u) + (\lambda + V(x))u = f & \text{en } \Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}_\varepsilon} + b(x)u = g & \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N \\ u = 0 & \text{en } \Omega_0 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (10.1.10)$$

### 10.1.5. Convergencia de las soluciones de los problemas elípticos

Sean  $u_\varepsilon$  y  $u$  soluciones de los problemas (10.1.5) y (10.1.10), respectivamente. Veamos que podemos pasar al límite en los problemas aproximados (10.1.5) y obtenemos el problema (10.1.10). Comenzamos enunciando dos resultados de Rodríguez-Bernal [42] (Lema 4.3 y Teorema 4.4 i), pag. 1371) que serán de utilidad en lo que sigue.

**Lema 10.1.6** *Supongamos que, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,*

$$d_\varepsilon(x) \rightarrow d_0(x) \text{ uniformemente en } \Omega_1 \text{ y } u^\varepsilon \rightarrow u \text{ en } H^1(\Omega_1) \text{ -débil.}$$

Entonces

$$\int_{\Omega_1} d_0(x) |\nabla u|^2 \leq \liminf_\varepsilon \int_{\Omega_1} d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2.$$

Si, además,  $u^\varepsilon \rightarrow u$  en  $L^2(\Omega_1)$ , entonces  $u^\varepsilon \rightarrow u$  en  $H^1(\Omega_1)$  si y sólo si

$$\int_{\Omega_1} d_0(x) |\nabla u|^2 = \lim_\varepsilon \int_{\Omega_1} d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2.$$

**Lema 10.1.7** *Supongamos que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon \subset H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$  están acotadas en  $L^2(\Omega)$  y  $0 \leq \int_\Omega d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq M$  con  $M$  una constante independiente de  $\varepsilon$ . Entonces, tomando una subsucesión si es necesario,  $u^\varepsilon$  converge a  $u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$  débil en  $H^1(\Omega)$  y fuerte en  $L^2(\Omega)$ .*

Además,

$$\lim_\varepsilon \int_\Omega d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 = \int_\Omega d_0(x) |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_1} d_0(x) |\nabla u|^2$$

si y sólo si  $u^\varepsilon$  converge a  $u$  fuerte en  $H^1(\Omega)$  y  $\lim_\varepsilon \int_{\Omega_0} d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 = 0$ .

Con estos resultados ya podemos probar que podemos pasar al límite en los problemas aproximados.

**Teorema 10.1.8** *Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supongamos que para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\{h_\varepsilon\}_\varepsilon \subset H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$  están acotadas y convergen débilmente a  $h \in H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$ . Supongamos  $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$  están acotadas en  $L^2(\Omega)$  y verifican*

$$T_\varepsilon u = (L_\varepsilon + (\lambda I + V)_\Omega + (b\gamma)_\Gamma) u^\varepsilon = h^\varepsilon$$

Entonces  $0 \leq \int_\Omega d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq M$  para alguna constante independiente de  $\varepsilon$  y tomando subsucesiones si fuese necesario,  $u^\varepsilon$  converge a  $u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$  débil en  $H^1(\Omega)$  y  $Vu^\varepsilon$  y  $bu^\varepsilon$  convergen a  $Vu$  y  $bu$  en  $L^2(\Omega)$  y  $L^2(\Gamma_N)$ , respectivamente. Además,  $u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$  y verifica

$$T_0 u = (L_0 + (\lambda I + V)_\Omega + (b\gamma)_{\Gamma_N}) u = h|_{H^1_{\Omega_0}(\Omega)} \text{ en } H^{-1}_{\Omega_0}(\Omega)$$

Por último,  $u^\varepsilon$  converge fuerte a  $u$  en  $H^1(\Omega)$  si y sólo si  $\langle h_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{-1,1} \rightarrow \langle h, u \rangle_{-1,1}$  y esto se da, por ejemplo, si  $h^\varepsilon \rightarrow h$  fuerte en  $H^{-1}(\Omega)$ . Además, en tal caso

$$\lim_\varepsilon \tau_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \tau_0(u, u). \quad (10.1.11)$$

**Demostración.** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\{h_\varepsilon\}_\varepsilon \subset H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$  acotadas y convergentes débilmente a  $h \in H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$ . Supongamos  $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$  están acotadas en  $L^2(\Omega)$  y verifican

$$T_\varepsilon u = (L_\varepsilon + (\lambda I + V)_\Omega + (b\gamma)_\Gamma) u^\varepsilon = h^\varepsilon.$$

Entonces,

$$\int_\Omega d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 + \int_\Omega (\lambda + V(x)) |u^\varepsilon|^2 + \int_{\Gamma_N} b(x) |u^\varepsilon|^2 = \langle h_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{-1,1}. \quad (10.1.12)$$

Acotando convenientemente y teniendo en cuenta (10.1.2) llegamos a que  $\int_\Omega d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq M$  y podemos aplicar el Lema 10.1.7 y tenemos que, para una subsucesión,  $u^\varepsilon$  converge a  $u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$  débil en  $H^1(\Omega)$  y fuerte en  $L^2(\Omega)$ . Además, como  $V \in L^\infty(\Omega)$  y  $b \in L^\infty(\Gamma_N)$ , tenemos que  $Vu^\varepsilon$  y  $bu^\varepsilon$  convergen fuerte a  $Vu$  y  $bu$  en  $L^2(\Omega)$  y  $L^2(\Gamma_N)$ , respectivamente.

Ahora, dada  $\phi \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ , tenemos

$$\tau_\varepsilon(u, \phi) = \int_{\Omega_1} d_\varepsilon(x) \nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x)) u \phi + \int_{\Gamma_N} b(x) u \phi = \langle h_\varepsilon, \phi \rangle_{-1,1}$$

podemos pasar al límite y tenemos

$$\tau_0(u, \phi) = \int_{\Omega_1} d_0(x) \nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x)) u \phi + \int_{\tilde{\Gamma}_N} b(x) u \phi = \langle h, \phi \rangle_{-1,1}$$

es decir,  $T_0 u = h|_{H^1_{\Omega_0}(\Omega)}$ . Tomando  $\phi = u$ , tenemos

$$\int_{\Omega_1} d_0(x) |\nabla u|^2 + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x)) |u|^2 + \int_{\tilde{\Gamma}_N} b(x) |u|^2 = \langle h, u \rangle_{-1,1} \quad (10.1.13)$$

En particular, de (10.1.12) y (10.1.13), tenemos  $\lim \int_{\Omega} d_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 = \int_{\Omega_1} d_0(x) |\nabla u|^2$  si y sólo si  $\langle h_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{-1,1} \rightarrow \langle h, u \rangle_{-1,1}$  y esto último se da si  $h_\varepsilon$  o  $u_\varepsilon$  convergen fuerte. Además, en tal caso,

$$\lim_{\varepsilon} \tau_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \tau_0(u, u).$$

■

Veamos ahora cómo se comporta la solución y su derivada normal en las diferentes regiones del dominio.

**Corolario 10.1.9** *Supongamos que en las condiciones del Teorema 10.1.8,  $h^\varepsilon = f^\varepsilon_\Omega + g^\varepsilon_\Gamma$  y  $f^\varepsilon \rightarrow f$  en  $L^2(\Omega)$ -débil y  $g^\varepsilon \rightarrow g$  en  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ -débil. Entonces*

1. *En el interior de  $\Omega_1$ ,*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) &\rightarrow \operatorname{Div}(d_0(x) \nabla u) \text{ en } L^2(\Omega_1) \text{-débil} \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} \text{ en } H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_N) \end{aligned}$$

2. *En el interior de  $\Omega_0$ ,*

$$\operatorname{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) \rightarrow f \text{ en } L^2(\Omega_0) \text{-débil}$$

3. *Sobre la frontera de  $\Omega_0$ ,*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{0,N}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} &\rightarrow \int_{\Gamma_{0,N}} g \\ \int_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{0,N}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} &\rightarrow - \left( \int_{\Gamma_{0,N}} g + \int_{\Omega_0} f \right) \end{aligned}$$

Además,  $u^\varepsilon$  converge fuerte a  $u$  en  $H^1(\Omega)$  si y sólo si  $\langle g_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{\Gamma_N} \rightarrow \langle g, u \rangle_{\Gamma_N}$  y esto pasa, por ejemplo, si  $g^\varepsilon$  converge a  $g$  fuerte en  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ . En tal caso,

$$\lim_{\varepsilon} \int_{\Omega_0} d_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 = 0.$$

**Demostración.** Supongamos ahora que  $h^\varepsilon = f^\varepsilon_\Omega + g^\varepsilon_\Gamma$  y  $f^\varepsilon \rightarrow f$  en  $L^2(\Omega)$ -débil y  $g^\varepsilon \rightarrow g$  en  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ -débil. Tenemos que  $u^\varepsilon$  es la solución del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + (\lambda + V(x)) u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) u^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases}$$

luego,

$$-\operatorname{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) = f^\varepsilon - (\lambda + V(x)) u^\varepsilon \text{ en } \Omega_1$$

y el segundo miembro converge a  $f - (\lambda + V(x))u = -\text{Div}(d_0(x)\nabla u)$  en  $L^2(\Omega_1)$ -débil, luego,

$$\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) \rightarrow \text{Div}(d_0(x)\nabla u) \text{ en } L^2(\Omega_1)\text{-débil}$$

Por la misma razón, en  $\Omega_0$  tenemos

$$\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) \rightarrow f \text{ en } L^2(\Omega_0)\text{-débil}$$

ya que  $u_\varepsilon \rightarrow 0$  en  $H^1(\Omega_0)$ .

Por otra parte, de (10.1.4), para toda  $\phi \in H^1_{\Omega_0}(\Omega)$

$$\left\langle \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\partial\Omega_1} = \int_{\Omega_1} \text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon)\phi + \int_{\Omega_1} d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon \nabla \phi$$

donde el segundo miembro converge a

$$\int_{\Omega_1} \text{Div}(d_0(x)\nabla u)\phi + \int_{\Omega_1} d_0(x)\nabla u \nabla \phi = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\partial\Omega_1}$$

Ahora bien, como  $\phi = 0$  en  $\Omega_0$  y en  $\tilde{\Gamma}_D$ , tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\partial\Omega_1} = \left\langle \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\tilde{\Gamma}_N} \quad \text{y} \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\partial\Omega_1} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\tilde{\Gamma}_N}$$

luego

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} \text{ en } H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_N)$$

Veamos qué pasa en  $\Omega_0$ . Por una parte, sabemos que  $-\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) \rightarrow f$  en  $L^2(\Omega_0)$ -débil. Por otra,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) &= \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} = \int_{\Gamma_{0,N}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + \int_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{0,N}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \\ &= \int_{\Gamma_{0,N}} (g^\varepsilon - bu^\varepsilon) + \int_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{0,N}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \end{aligned}$$

donde el primer miembro converge a  $-\int_{\Omega_0} f$  y el primer término del segundo miembro converge a  $\int_{\Gamma_{0,N}} (g - bu) = \int_{\Gamma_{0,N}} g$  por ser  $u = 0$  sobre  $\Gamma_0$ . Además,  $\int_{\Gamma_{0,D}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} = 0$ . De aquí, obtenemos

$$\int_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{0,N}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \rightarrow - \left( \int_{\Gamma_{0,N}} g + \int_{\Omega_0} f \right)$$

Por el teorema sabemos que  $u^\varepsilon$  converge fuerte a  $u$  en  $L^2(\Omega)$ , luego la convergencia fuerte de  $u^\varepsilon$  en  $H^1(\Omega)$  es equivalente a la convergencia  $\langle g_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{\Gamma_N} \rightarrow \langle g, u \rangle_{\Gamma_N}$ . ■

### 10.1.6. El problema de autovalores

Sean  $B_\varepsilon$  y  $B_0$ , los operadores de las secciones anteriores. Como tienen resolvente compacta, su espectro está formado por autovalores de multiplicidad finita,  $\sigma(B_\varepsilon) = \{\mu_n^\varepsilon\}$  y  $\sigma(B_0) = \{\mu_n\}$  sucesiones crecientes tendiendo a  $\infty$ .

El siguiente resultado establece la convergencia espectral de los problemas aproximados (10.1.5) al problema límite (10.1.10). La prueba sigue la línea del Teorema 5.1 de [42].

**Teorema 10.1.10** *Supongamos que el espectro de  $B_\varepsilon$  viene dado por*

$$\mu_1^\varepsilon \leq \dots \leq \mu_n^\varepsilon \leq \mu_{n+1}^\varepsilon \leq \dots$$

contando multiplicidades y, para cada  $n$ , sea  $\phi_n^\varepsilon$  una autofunción de  $\mu_n^\varepsilon$  tal que  $\|\phi_n^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$  y  $\{\phi_n^\varepsilon\}_n$  forman una base de Hilbert de  $L^2(\Omega)$ . Supongamos, también, que el espectro de  $B_0$  viene dado por

$$\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1} \leq \dots$$

contando multiplicidades. Entonces, se verifican

1. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_n^\varepsilon \rightarrow \mu_n \quad \text{cuando } \varepsilon \text{ tiende a } 0$$

2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y para toda sucesión convergente a 0, que seguiremos denotando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , existe una subsucesión  $\varepsilon_j$  tal que

$$\phi_n^{\varepsilon_j} \rightarrow \phi_n \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \quad \text{cuando } j \text{ tiende a } \infty$$

fuerte en  $H^1(\Omega)$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} d_{\varepsilon_j} |\nabla \phi_n^{\varepsilon_j}|^2 = 0$ , donde  $\phi_n$  es una autofunción de  $B_0$  correspondiente a  $\mu_n$  y  $\{\phi_n\}_n$  forman una base de Hilbert de  $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$ .

**Demostración.** Procedemos por inducción sobre  $n$ . Por la caracterización mín-máx de los autovalores, tenemos, para  $\lambda$  suficientemente grande,

$$\mu_1^\varepsilon = \inf_{\substack{u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|u\| = 1}} \int_{\Omega} d_\varepsilon |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} (\lambda + V) |u|^2 + \int_{\Gamma_N} b |u|^2 = \inf_{\substack{u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|u\| = 1}} \tau_\varepsilon(u, u) > 0$$

y

$$\mu_1 = \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \\ \|u\| = 1}} \int_{\Omega_1} d_0 |\nabla u|^2 + \int_{\Omega_1} (\lambda + V) |u|^2 + \int_{\bar{\Gamma}_N} b |u|^2 = \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \\ \|u\| = 1}} \tau_0(u, u) > 0$$

donde  $\|\cdot\|$  representa la norma en  $L^2(\Omega)$ .

Si imponemos que  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ , por ser  $u = 0$  en  $\Omega_0$  y de la convergencia de  $d_\varepsilon$ , tenemos

$$\mu_1^\varepsilon \leq \tau_\varepsilon(u, u) \rightarrow \tau_0(u, u)$$

y, en particular,  $\limsup_\varepsilon \mu_1^\varepsilon \leq \mu_1$ .

Sea, ahora,  $\{\phi_1^\varepsilon\}_\varepsilon$  la familia de las primeras autofunciones, entonces

$$\tau_\varepsilon(\phi_1^\varepsilon, \phi_1^\varepsilon) = \int_{\Omega} d_\varepsilon(x) |\nabla \phi_1^\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} (\lambda + V(x)) |\phi_1^\varepsilon|^2 + \int_{\Gamma_N} b(x) |\phi_1^\varepsilon|^2 = \mu_1^\varepsilon \leq M$$

para alguna constante independiente de  $\varepsilon$ . Por tanto, del Teorema 10.1.8 tenemos que, tomando subsucesiones si hace falta,  $\mu_1^\varepsilon \rightarrow \mu^0$  y  $\phi_1^\varepsilon \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$ -débil y  $L^2(\Omega)$ -fuerte, con  $\|\phi\| = 1$ . Además,  $V\phi_1^\varepsilon \rightarrow V\phi$  en  $L^2(\Omega)$  y  $b\phi_1^\varepsilon \rightarrow b\phi$  en  $L^2(\Gamma_N)$ . Pero  $B_\varepsilon(\phi_1^\varepsilon) = \mu_1^\varepsilon \phi_1^\varepsilon$  y entonces, como  $\mu_1^\varepsilon \phi_1^\varepsilon$  converge a  $\mu^0 \phi^0$  en  $H^{-1}(\Omega)$ , por el Teorema 10.1.8,  $\phi$  verifica  $B_0(\phi) = \mu^0 \phi$  y tenemos  $\phi_1^\varepsilon \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  fuerte en  $H^1(\Omega)$  y  $\lim_\varepsilon \int_{\Omega_0} d_\varepsilon |\nabla \phi_1^\varepsilon|^2 = 0$ .

Por tanto,  $\mu^0 = \tau_0(\phi, \phi) \geq \mu_1$ . Como el argumento es independiente de la subsucesión que tomemos, tenemos que  $\liminf_\varepsilon \mu_1^\varepsilon \geq \mu_1$ . Luego,  $\lim_\varepsilon \mu_1^\varepsilon = \mu_1$  y la función  $\phi$  es una autofunción (normalizada) de  $\mu_1$ .

Hemos probado el teorema para el caso  $n = 1$ . Supongamos ahora que se verifica para los  $n$  primeros autovalores. Por la caracterización mín-máx de los autovalores,

$$\mu_{n+1}^\varepsilon = \inf_{\substack{u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ u \perp \phi_1^\varepsilon, \dots, \phi_n^\varepsilon \\ \|u\| = 1}} \tau_\varepsilon(u, u).$$

Tomamos cualquier sucesión que tienda a cero y la seguimos denotando por  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Entonces, existe  $\{\varepsilon_j\}$  tal que, para todo  $i = 1, \dots, n$

$$\phi_i^{\varepsilon_j} \rightarrow \phi_i \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

en  $H^1(\Omega)$ -fuerte,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} d_\varepsilon |\nabla \phi_1^\varepsilon|^2 = 0$  y  $\phi_i$  es una autofunción de  $\mu_i$  y  $\{\phi_i\}$  son ortonormales entre sí en  $L^2(\Omega)$ . Con esto,

$$\mu_{n+1} = \inf_{\substack{u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \\ u \perp \phi_1, \dots, \phi_n \\ \|u\| = 1}} \tau_0(u, u).$$

Definimos en  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$ , las proyecciones  $P_n^{\varepsilon_j} = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i^{\varepsilon_j}, \cdot \rangle_\Omega \phi_i^{\varepsilon_j}$ ,  $Q_n^{\varepsilon_j} = I - P_n^{\varepsilon_j}$ , y  $P_n = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, \cdot \rangle_\Omega \phi_i$ ,  $Q_n = I - P_n$ . De la convergencia fuerte de las  $\phi_i^{\varepsilon_j}$ , tenemos

$$P_n^{\varepsilon_j} \rightarrow P_n, \quad Q_n^{\varepsilon_j} \rightarrow Q_n$$

en  $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ .

Dado  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ , tomamos  $u^{\varepsilon_j} = Q_n^{\varepsilon_j}(u)$  que es ortogonal a  $\{\phi_1^{\varepsilon_j}, \dots, \phi_n^{\varepsilon_j}\}$  en  $L^2(\Omega)$  y converge a  $u^0 = Q_n(u)$  fuerte en  $H^1(\Omega)$ . Si probamos que

$$\mu_{n+1}^{\varepsilon_j} \leq \frac{\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j})}{\|u^{\varepsilon_j}\|^2} \rightarrow \frac{\tau_0(u^0, u^0)}{\|u^0\|^2} \text{ cuando } j \rightarrow \infty \quad (10.1.14)$$

al ser  $u^0 \perp \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  arbitrario, tenemos que  $\limsup_j \mu_{n+1}^{\varepsilon_j} \leq \mu_{n+1}$  que es una cota independiente de  $\varepsilon$ . Luego,  $\limsup_\varepsilon \mu_{n+1}^{\varepsilon_j} \leq \mu_{n+1}$ .

Probemos (10.1.14). La primera desigualdad es inmediata por la caracterización mín-máx de los autovalores. Como  $u^{\varepsilon_j} = Q_n^{\varepsilon_j}(u) = u - P_n^{\varepsilon_j}(u)$ , tenemos

$$\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j}) = \tau_{\varepsilon_j}(u, u) + \tau_{\varepsilon_j}(P_n^{\varepsilon_j}(u), P_n^{\varepsilon_j}(u)) - 2\tau_{\varepsilon_j}(u, P_n^{\varepsilon_j}(u))$$

Como  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ ,  $\tau_{\varepsilon_j}(u, u) \rightarrow \tau_0(u, u)$  y

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon_j}(u, P_n^{\varepsilon_j}(u)) &= \int_{\Omega_1} d_\varepsilon(x) \nabla u \nabla P_n^{\varepsilon_j}(u) + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x)) u P_n^{\varepsilon_j}(u) + \int_{\tilde{\Gamma}_N} b(x) u P_n^{\varepsilon_j}(u) \\ &\rightarrow \int_{\Omega_1} d_0(x) \nabla u \nabla P_n(u) + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x)) u P_n(u) + \int_{\tilde{\Gamma}_N} b(x) u P_n(u) = \tau_0(u, P_n(u)) \end{aligned}$$

Por último,

$$\tau_{\varepsilon_j}(P_n^{\varepsilon_j}(u), P_n^{\varepsilon_j}(u)) = \sum_{i=1}^n |\langle \phi_i^{\varepsilon_j}, u \rangle|^2 \tau_{\varepsilon_j}(\phi_i^{\varepsilon_j}, \phi_i^{\varepsilon_j})$$

que, por (10.1.11) y la convergencia de  $\phi_i^{\varepsilon_j}$ , converge a

$$\sum_{i=1}^n |\langle \phi_i, u \rangle|^2 \tau_0(\phi_i, \phi_i) = \tau_0(P_n(u), P_n(u))$$

Como  $u^0 = Q_n(u) = u - P_n(u)$ , tenemos que  $\tau_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, u^{\varepsilon_j}) \rightarrow \tau_0(u^0, u^0)$ . Además,

$$\|u^{\varepsilon_j}\| = \|Q_n^{\varepsilon_j}(u)\| \rightarrow \|Q_n(u)\| = \|u^0\|$$

Luego hemos probado (10.1.14).

Tomando ahora la familia de las  $(n+1)$ -ésimas autofunciones  $\{\phi_{n+1}^\varepsilon\}_\varepsilon$ , tenemos

$$\tau_\varepsilon(\phi_{n+1}^\varepsilon, \phi_{n+1}^\varepsilon) = \mu_{n+1}^\varepsilon \leq M$$



donde  $M$  es una constante independiente de  $\varepsilon$ . Por tanto,  $\int_{\Omega} d_{\varepsilon} |\nabla \phi_{n+1}^{\varepsilon}|^2$  está acotado y por el Teorema 10.1.8 y pasando a subsucesiones si hiciera falta, tenemos  $\mu_{n+1}^{\varepsilon} \rightarrow \mu^0$  y  $\phi_{n+1}^{\varepsilon} \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$  -débil y  $L^2(\Omega)$ -fuerte con  $\|\phi\| = 1$ . Además, para toda  $i = 1, \dots, n$  tenemos  $\mu_i^{\varepsilon} \rightarrow \mu$  y  $\phi_i^{\varepsilon} \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ . Tenemos también que  $V \phi_i^{\varepsilon} \rightarrow V \phi_i$  y  $b \phi_i^{\varepsilon} \rightarrow b \phi_i$  en  $L^2(\Omega)$  y  $L^2(\Gamma_N)$  respectivamente. Ahora bien,  $B_{\varepsilon}(\phi_{n+1}^{\varepsilon}) = \mu_{n+1}^{\varepsilon} \phi_{n+1}^{\varepsilon}$  y  $\mu_{n+1}^{\varepsilon} \phi_{n+1}^{\varepsilon}$  converge a  $\mu^0 \phi$  en  $H^1(\Omega)$ , luego, por el Teorema 10.1.8,  $B_0(\phi) = \mu^0 \phi$  y  $\phi_{n+1}^{\varepsilon} \rightarrow \phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  fuerte en  $H^1(\Omega)$  y, además,  $\lim_{\varepsilon} \int_{\Omega_0} d_{\varepsilon} |\nabla \phi_{n+1}^{\varepsilon}|^2 = 0$ .

Como  $\langle \phi_{n+1}^{\varepsilon}, \phi_i^{\varepsilon} \rangle_{\Omega} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces, en el límite,  $\langle \phi, \phi_i \rangle_{\Omega} = 0$ . Por tanto,  $\mu^0 = \tau_0(\phi, \phi) \geq \mu_{n+1}$ . Luego,  $\lim_{\varepsilon} \mu_{n+1}^{\varepsilon} = \mu_{n+1}$  y la función  $\phi$  anterior, que puede depender de la subsucesión, es una autofunción de  $\mu_{n+1}$ . Con esto, hemos probado el caso  $n + 1$ . ■

### 10.1.7. Convergencia de los problemas parabólicos lineales

En esta sección probaremos la convergencia de los problemas parabólicos lineales aproximados asociados a (10.1.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{\varepsilon} - \operatorname{div}(d_{\varepsilon}(x) \nabla u^{\varepsilon}) + c(x) u^{\varepsilon} = f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \vec{n}_{\varepsilon}} + b(x) u^{\varepsilon} = g \quad \text{sobre } \Gamma_N \\ u^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \\ u^{\varepsilon}(0) = u_0 \end{array} \right.$$

en  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  al problema parabólico lineal límite asociado a (10.1.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \operatorname{div}(d_0(x) \nabla u) + c(x) u = f \quad \text{en } \Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} + b(x) u = g \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

en  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_1)$ . Denotaremos por  $\lambda_n^{\varepsilon}$  y  $\lambda_n^0$  los autovalores de los operador  $B_{\varepsilon}$  y  $B_0$  respectivamente.

Nótese que como estamos trabajando con operadores autoadjuntos, compactos y con dominio denso, el problema está bien definido en  $L^2(\Omega)$  y, además, podemos construir una escala de espacios de potencias fraccionaria  $X^{\gamma}$  verificando  $X^{\gamma} \subset H^{2\gamma}(\Omega)$  (ver Henry [28]).

Sea pues  $P : L^2(\Omega) \rightarrow L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  la proyección de  $L^2(\Omega)$  en  $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  dada por  $Pf = 0$  en  $\Omega_0$  y  $Pf = f$  en  $\Omega_1$ . Se tiene el siguiente resultado de continuidad de los problemas parabólicos aproximados (ver Proposición 4.6, pag. 48, de Arrieta et al. [10])

**Proposición 10.1.11** *Supongamos  $\lambda_1^0 > 0$ . Entonces, dado  $\gamma \in [0, 1)$  existen  $\alpha \in ((1 + \gamma)/2, 1)$  y una función  $c(\varepsilon) \geq 0$  con  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tal que para todo  $h \in H^{-\gamma}(\Omega) \equiv (H^{\gamma}(\Omega))'$*

$$\|e^{-A_{\varepsilon} t} h - e^{-A_0 t} h^*\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\varepsilon) t^{-\alpha} \|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)}, \quad t > 0 \quad (10.1.15)$$

donde  $h^* \in (H_{\Omega_0}^{\gamma}(\Omega))' \equiv (H_{\Gamma_{1,D}}^{\gamma}(\Omega_1))'$  denota la restricción de  $h$  al espacio  $H_{\Omega_0}^{\gamma} \equiv H_{\Gamma_{1,D}}^{\gamma}(\Omega_1)$  (donde la equivalencia de espacios se tiene extendiendo por cero a todo  $\Omega$ ).

**Demostración.** Sean  $X_{\varepsilon}^{\gamma}$  los espacios de potencias fraccionarias asociados a los operadores  $A_{\varepsilon}$ . Entonces  $X_{\varepsilon}^0 \equiv L^2(\Omega)$  con la misma norma y, de (10.1.3),  $X_{\varepsilon}^{1/2} \hookrightarrow H^1(\Omega)$ , con constante de inyección uniforme, es decir, existe una constante  $C$  tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{X_{\varepsilon}^{1/2}}$$

para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Usando ahora interpolación tenemos que  $X_{\varepsilon}^{\gamma} \hookrightarrow H^{2\gamma}(\Omega)$  para  $0 < \gamma \leq 1/2$  con constante de inyección uniforme y, por dualidad,  $H^{-2\gamma}(\Omega) \equiv (H^{2\gamma}(\Omega))' \hookrightarrow X_{\varepsilon}^{-\gamma}$  para  $0 < \gamma \leq 1/2$  con constante de inyección uniforme.

Para probar (10.1.15) basta probar que es cierto para sucesiones, es decir, que dada una sucesión  $\{\varepsilon_k\}$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , existen una subsucesión, que seguimos denotando igual, y una sucesión  $\delta_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , tal que

$$\|e^{-A_{\varepsilon_k} t} h - e^{-A_0 t} h^*\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta_k t^{-\alpha} \|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)}, \quad t > 0. \quad (10.1.16)$$

Para ello, denotamos por  $\{\lambda_n^\varepsilon, w_n^\varepsilon\}$  un conjunto de autovalores y autofunciones del operador  $A_\varepsilon$  para  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Por el Teorema 10.1.10 sabemos que para dada una sucesión  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , existe una subsucesión, que seguimos denotando igual, y una familia ortonormal de autofunciones de (10.1.24), que denotamos  $\{w_n^0\}_{n=1}^\infty$ , tales que  $w_n^{\varepsilon_k} \rightarrow w_n^0$  en  $H^1(\Omega)$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Sea  $h \in C^\infty(\bar{\Omega}) \subset H^{-\gamma}(\Omega)$ . Entonces,  $h$  se puede escribir como

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k}$$

donde por  $(\cdot, \cdot)$  denotamos el producto escalar en  $L^2(\Omega)$ . Además, sabemos que

$$e^{-A_{\varepsilon_k} t} h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, w_n^{\varepsilon_k}) e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} w_n^{\varepsilon_k}.$$

Del mismo modo, la proyección sobre  $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$  verifica

$$Ph = \sum_{n=1}^{\infty} (Ph, w_n^0) w_n^0 = \sum_{n=1}^{\infty} (h, w_n^0) w_n^0$$

y

$$e^{-A_0 t} Ph = \sum_{n=1}^{\infty} (Ph, w_n^0) e^{-\lambda_n^0 t} w_n^0 = \sum_{n=1}^{\infty} (h, w_n^0) e^{-\lambda_n^0 t} w_n^0$$

donde hemos usado que  $Ph$  y  $w_n^0$  son nulas en  $\Omega_0$ .

Fijamos ahora un parámetro  $\delta > 0$  y consideramos dos casos

i) Supongamos  $0 < t \leq \delta$ . En este caso, usando la inyección continua  $X_0^{1/2} \subset H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \equiv H^1_{\Gamma_D}(\Omega_1)$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{-A_{\varepsilon_k} t} h - e^{-A_0 t} Ph\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \|e^{-A_{\varepsilon_k} t} h\|_{X_0^{1/2}} + C \|e^{-A_0 t} Ph\|_{X_0^{1/2}} \\ &\leq C t^{-1/2-\gamma/2} \|h\|_{X_0^{-\gamma/2}} + C t^{-1/2-\gamma/2} \|Ph\|_{X_0^{-\gamma/2}} \\ &\leq C t^{-(1+\gamma)/2} (\|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)} + \|Ph\|_{H^{-\gamma}(\Omega)}) \\ &\leq 2C t^{-(1+\gamma)/2} \|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)} \\ &\leq 2C t^{\alpha-(1+\gamma)/2} t^{-\alpha} \|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)} \leq 2C \delta^\mu t^{-\alpha} \|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)} \end{aligned}$$

con  $\mu = \alpha - (1 + \gamma)/2 > 0$  (ya que  $\alpha \in ((1 + \gamma)/2, 1)$ ).

ii) Supongamos ahora  $t > \delta$ . Fijamos  $\beta \in (0, 1)$ . Por la convergencia de los autovalores  $\lambda_n^{\varepsilon_k} \rightarrow \lambda_n^0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y  $\lambda_n^0 \rightarrow +\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que existen  $N(\delta), k_1(\delta) \in \mathbb{N}$ , tales que

$$\lambda_n^{\varepsilon_k} e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} \leq \delta t^{-\beta} \quad \text{para todo } n \geq N(\delta), \quad k \geq k_1(\delta), \quad t > \delta.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer  $\lambda_{N(\delta)}^0 < \lambda_{N(\delta)+1}^0$ . Luego, de la descomposición espectral del semigrupo lineal, tenemos

$$\begin{aligned} \|e^{-A_{\varepsilon_k} t} h - e^{-A_0 t} Ph\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} - \sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^0 t} (Ph, w_n^0) w_n^0 \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_n^0 t} (Ph, w_n^0) w_n^0 \right\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

pero, usando la inyección continua  $X_\varepsilon^{1/2} \subset H^1(\Omega)$  con constante independiente de  $\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left\| \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} \right\|_{X_{\varepsilon_k}^{1/2}} \\
&= C \left[ \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} \lambda_n^{\varepsilon_k} e^{-2\lambda_n^{\varepsilon_k} t} (h, w_n^{\varepsilon_k})^2 \right]^{1/2} \\
&\leq C \delta t^{-\beta} \left( \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\varepsilon_k}} |(h, w_n^{\varepsilon_k})|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \delta t^{-\beta} \|h\|_{H^{-1}(\Omega)}
\end{aligned} \tag{10.1.17}$$

y, de la misma forma,

$$\left\| \sum_{N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_n^0 t} (Ph, w_n^0) w_n^0 \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta t^{-\beta} \|Ph\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Por último,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} - \sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^0 t} (Ph, w_n^0) w_n^0 \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} - e^{-\lambda_n^0 t}) (h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^0 t} ((h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} - (Ph, w_n^0) w_n^0) \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N(\delta)} \lambda_n^{\varepsilon_k} |e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} - e^{-\lambda_n^0 t}| \|h\|_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^0 t} \|(h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} - (h, w_n^0) w_n^0\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Para el primer sumando tenemos que, para  $n \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeño tal que  $\lambda_n^\varepsilon \geq \lambda_1^0/2$ ,

$$|e^{-\lambda_n^\varepsilon t} - e^{-\lambda_n^0 t}| \leq |\lambda_n^\varepsilon - \lambda_n^0| t e^{-t\lambda_1^0/2}$$

para todo  $t$ . De dónde,

$$\sum_{n=1}^{N(\delta)} \lambda_n^{\varepsilon_k} |e^{-\lambda_n^{\varepsilon_k} t} - e^{-\lambda_n^0 t}| \|h\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \sum_{n=1}^{N(\delta)} |\lambda_{N(\delta)}^{\varepsilon_k}| |\lambda_n^\varepsilon - \lambda_n^0| t e^{-t\lambda_1^0/2} \|h\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \delta t^{-\beta} \|h\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

para todo  $k \geq k_2(\delta) \geq k_1(\delta)$ .

Para el segundo sumando tenemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_n^0 t} \|(h, w_n^{\varepsilon_k}) w_n^{\varepsilon_k} - (h, w_n^0) w_n^0\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq e^{-\lambda_1^0 t} \sum_{n=1}^{N(\delta)} \|(h, w_n^{\varepsilon_k} - w_n^0) w_n^{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega)} + \|(h, w_n^0) (w_n^{\varepsilon_k} - w_n^0)\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq e^{-\lambda_1^0 t} \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|w_n^{\varepsilon_k} - w_n^0\|_{H^1(\Omega)} (\|w_n^{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega)} + \|w_n^0\|_{H^1(\Omega)}) \|h\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\leq \delta t^{-\beta} \|h\|_{H^{-1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

para todo  $k \geq k_3(\delta) \geq k_2(\delta)$ .

En particular, hemos probado que existe una constante  $C$  tal que dado  $\beta \in (0, 1)$  y  $\delta$  arbitrariamente pequeño, existe  $k_3$  tal que

$$\|e^{-A_{\varepsilon_k} t} h - e^{-A_0 t} P h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta t^{-\beta} \|h\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad k \geq k_3, \quad t > \delta$$

Usando ahora la continuidad de la inyección  $H^{-\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$  y uniendo i) y ii) tenemos probado el resultado  $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Por un argumento de densidad se tiene la prueba para todo  $h \in H^{-\gamma}(\Omega)$ . ■

En particular, se tiene (ver Corolario 4.8 en Arrieta et al. [10])

**Corolario 10.1.12** *Existen  $\alpha \in (3/4, 1)$  y una función  $c(\cdot) > 0$  con  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que para todo  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Gamma)$  se tiene*

$$\|e^{-A_\varepsilon t}(f_\Omega + g_\Gamma) - e^{-A_0 t}(f_\Omega^* + g_\Gamma)\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\varepsilon)t^{-\alpha}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}), \quad t > 0$$

donde  $f_\Omega^* = P f$ , la proyección de  $L^2(\Omega)$  sobre  $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ .

Otra consecuencia interesante es la regularización  $L^2 - L^\infty$  del semigrupo del problema límite (ver Corolario 4.9 de Arrieta et al. [10]). Para probar dicho resultado, usaremos el siguiente lema de Arrieta et al. [10]

**Lema 10.1.13 (Lema 4.4 de Arrieta et al. [10])** *Sea  $A$  el operador elíptico asociado al problema modelo (10.1.5) para  $\varepsilon$  fijo. Si el primer autovalor de  $A$  es  $\lambda_1 > 0$  entonces existe una constante  $M = M(\Omega, \lambda_1, \inf_\Omega d(x), \|b\|_{L^\infty(\Gamma_N)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}, N)$  tal que*

$$\|e^{-A t} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M t^{-N} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 10.1.14** *Existe una constante  $M > 0$  tal que para todo  $f \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ ,*

$$\|e^{-A_0 t} f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M t^{-N} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Demostración.** Por el Lema 10.1.13 aplicado a  $A_\varepsilon$  se tiene que existe  $\tilde{M}$ , independiente de  $\varepsilon$ , tal que  $\|e^{-A_\varepsilon t} f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{M} t^{-N} \|f\|_{L^2(\Omega)}$ . Tomando límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y usando el Corolario 10.1.12 (teniendo en cuenta que en este caso  $f^* = f$ ) se tiene

$$\|e^{-A_0 t} f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{M} t^{-N} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

### 10.1.8. Los problemas parabólicos no lineales aproximados

Consideramos ahora los problemas parabólicos no lineales asociados a (10.1.1).

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + c(x) u^\varepsilon = f(x, u^\varepsilon) & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) u^\varepsilon = g(x, u^\varepsilon) & \text{sobre } \Gamma_N \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ u^\varepsilon(0) = u_0 \end{cases} \quad (10.1.19)$$

con  $u_0 \in X$  donde  $X$  es algún espacio de la clase  $\mathcal{E}$  definida en la Sección 1.1.3, i.e.,

$$\mathcal{E} = \{L^q(\Omega), W_{\Gamma_D}^{1,q}(\Omega), 1 < q < \infty\}.$$

Supongamos que  $f$  y  $g$  verifican las siguientes condiciones de crecimiento

$(\mathbf{G})_{\mathbf{X}} : f(x, \cdot), g(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son localmente Lipschitz uniformemente en  $x \in \Omega$  y  $x \in \Gamma$  respectivamente. Además,

1. Si  $X = L^q(\Omega)$ , suponemos que  $f$  y  $g$  verifican una relación de la forma

$$|j(x, u) - j(x, v)| \leq c|u - v|(|u|^{\rho_f - 1} + |v|^{\rho_f - 1} + 1) \quad (10.1.20)$$

con exponentes  $\rho_f$  y  $\rho_g$  respectivamente, tales que, para  $N \geq 2$  (resp.  $N = 1$ )

$$\rho_f \leq \rho_\Omega := 1 + \frac{2q}{N}, \quad \rho_g \leq \rho_\Gamma := 1 + \frac{1}{N} \quad (\text{resp. } \rho_g \leq \rho_\Gamma := 1 + q)$$

2. Si  $X = W_{\Gamma_D}^{1,q}(\Omega)$ , suponemos que se tiene alguna de las siguientes condiciones

a)  $q > N$

b)  $q = N$  y  $f, g$  verifican que para todo  $\eta > 0$  existe  $c_\eta > 0$  tal que

$$|j(x, u) - j(x, v)| \leq c_\eta(e^{\eta|u|^{\frac{N}{N-1}}} + e^{\eta|v|^{\frac{N}{N-1}}})|u - v| \quad (10.1.21)$$

c)  $1 < q < N$  y  $f, g$  verifican (10.1.20) con exponentes

$$\rho_f \leq \rho_\Omega := 1 + \frac{2q}{N-q}, \quad \rho_g \leq \rho_\Gamma := 1 + \frac{q}{N-q}$$

Supongamos además que existen  $C_\Omega \in L^p(\Omega)$ ,  $0 \leq D_\Omega \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ ,  $C_\Gamma \in L^r(\Omega)$  y  $D_\Gamma \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N - 1$ , tal que

$$sf(x, s) \leq C_\Omega(x)s^2 + D_\Omega(x)|s| \quad x \in \Omega \quad (10.1.22)$$

$$sg(x, s) \leq C_\Gamma(x)s^2 + D_\Gamma(x)|s| \quad x \in \Gamma \quad (10.1.23)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por último, supongamos que se tiene la condición de disipación

$(\mathbf{D})_0$  : El primer autovalor,  $\lambda_1^0$ , del siguiente problema es positivo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_0(x)\nabla u) + (c(x) - C_\Omega(x))u = \lambda u & \text{en } \Omega_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \setminus \tilde{\Gamma}_N \\ d_0(x)\frac{\partial u}{\partial n} + (b(x) - C_\Gamma(x))u = 0 & \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N. \end{cases} \quad (10.1.24)$$

Denotamos por  $\lambda_1^\varepsilon$  el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (c(x) - C_\Omega(x))u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ d_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial n} + (b(x) - C_\Gamma(x))u = 0 & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases} \quad (10.1.25)$$

Nótese que la condición  $(D)_0$  junto con la convergencia del primer autovalor  $\lambda_1^\varepsilon$  de los problemas aproximados a  $\lambda_1^0$  implican que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\lambda_1^\varepsilon > 0$ .

De los resultados en Arrieta et al. [10] (ver Sección 1.1.3) se tiene la existencia y unicidad de solución del problema (10.1.19) así como la existencia de un atractor global para dicho problema. En concreto, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 10.1.15** *Sea  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Sea  $X$  algún espacio de la clase  $\mathcal{E}$ . Supongamos que  $f$  y  $g$  son localmente Lipschitz y verifican  $(G)_X$ . Entonces, dado  $u_0 \in X$  existe una única solución  $u_\varepsilon(\cdot; u_0)$  del problema (10.1.19) definida para todo  $t \geq 0$ . Además, dicha solución depende continuamente de los datos y es clásica para  $t > 0$ . Por último se tiene el siguiente efecto regularizante: si  $u_0 \in X$  entonces  $u_\varepsilon(t; u_0) \in Y$  para cualquier otro espacio  $Y$  de la clase  $\mathcal{E}$ ,  $t > 0$ .*

*Por tanto, se puede definir el semigrupo  $S_\varepsilon(t)$  en  $X$  dado por las soluciones de (10.1.19) con dato inicial  $u_0 \in X$ . Además, este semigrupo posee un atractor global  $\mathcal{A}^\varepsilon_X$  en  $X$  y para todo  $Y$  de la clase  $\mathcal{E}$  tal que  $Y \subset X$  también existe el atractor  $\mathcal{A}^\varepsilon_Y$ . Es más,  $\mathcal{A}^\varepsilon_X = \mathcal{A}^\varepsilon_Y$  y atrae acotados de  $X$  en la topología de  $Y$ .*

Como consecuencias de los resultados obtenidos en la Sección 2.2.3 (ver también Arrieta et al. [10]) se tienen las siguientes estimaciones uniformes para las soluciones de (10.1.19)

**Teorema 10.1.16** *En las condiciones del Teorema 10.1.15, fijado  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $K_\varepsilon > 0$  tal que*

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_X^\varepsilon} \sup_{0 \leq \alpha < 1} \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{H^{2\alpha}(\Omega)} \} \leq K_\varepsilon.$$

Veamos a continuación que existe una cota uniforme en  $L^\infty$  y  $H^1$  de los atractores de los problemas (10.1.25) (es decir, si fijamos  $\alpha = 1/2$ , la constante  $K_\varepsilon$  que aparece en el Teorema 10.1.16 puede ser tomada independiente de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño).

Para ello, en primer lugar observamos que en la Sección 2.2 probamos que, fijado  $\delta$ , el intervalo ordenado  $[-\phi^\varepsilon - \delta, \phi^\varepsilon + \delta]$  es un conjunto absorbente (ver Nota 2.2.8). Probamos ahora que, además, en este caso, las soluciones del problema no lineal entran en dicho intervalo en un tiempo uniforme, independiente de  $\varepsilon$ .

**Proposición 10.1.17** *Fijado  $\varepsilon > 0$ , las soluciones del problema (10.1.19) verifican*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi^\varepsilon(x)$$

*uniformemente en  $x$  para  $u_0$  en acotados de datos iniciales, donde  $\phi^\varepsilon$  es la solución del problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_\varepsilon(x) \nabla \phi^\varepsilon) + c(x) \phi^\varepsilon = C_\Omega(x) \phi^\varepsilon + D_\Omega(x) & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) \phi^\varepsilon = C_\Gamma(x) \phi^\varepsilon + D_\Gamma(x) & \text{sobre } \Gamma_N \\ \phi^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (10.1.26)$$

*Además, para todo  $\delta > 0$ , dado un acotado  $B$  de  $X$ , existe un tiempo  $T_0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que para todo  $u_0 \in B$*

$$|u^\varepsilon(t, x; u_0)| \leq \phi^\varepsilon(x) + \delta \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad t > T_0$$

*para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .*

**Demostración.** La existencia y unicidad de  $\phi^\varepsilon$  se tiene por ser  $\lambda_1^\varepsilon > 0$ . La primera parte de la proposición se sigue entonces de los resultados obtenidos en la Parte I.

Para la segunda parte, notemos que

$$v^\varepsilon(t, x; u_0) = \phi^\varepsilon + w^\varepsilon(t, x; u_0)$$

donde  $w^\varepsilon$  denota la solución del problema parabólico lineal homogéneo asociado a (10.1.26), es decir,  $w^\varepsilon(t; u_0) = e^{-A_\varepsilon t} u_0$  y por tanto,

$$\|w^\varepsilon(t, x; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M t^{-N} e^{-\lambda_1^\varepsilon t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

con  $M$  independiente de  $\varepsilon$ , donde hemos aplicado el Lema 10.1.13 y la convergencia de  $\lambda_1^\varepsilon$  a  $\lambda_1^0$ .

Como consecuencia de esta estimación tenemos que existe un tiempo  $T_0$  tal que

$$v^\varepsilon(t, x; u_0) \leq \phi^\varepsilon(x) + \delta \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad t > T_0.$$

Para obtener el resultado, basta recordar que, por monotonía,  $|u^\varepsilon(t, x; u_0)| \leq v^\varepsilon(t, x; u_0)$ . ■

En particular,

**Proposición 10.1.18** *Para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{u \in \mathcal{A}^\varepsilon} (\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)}) \leq K \quad (10.1.27)$$

*con  $K$  independiente de  $\varepsilon$ .*

**Demostración.** Por las estimaciones uniformes sobre los atractores de los problemas (10.1.19) tenemos que para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\sup_{u \in \mathcal{A}^\varepsilon} (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)}) \leq K_\varepsilon.$$

Lo que tenemos que probar ahora es que  $K_\varepsilon$  no depende de  $\varepsilon$ . Para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , recordamos que la acotación uniforme del atractor viene dada por la solución del problema lineal elíptico que proviene de (10.1.22) y (10.1.23) (ver Teorema 2.2.12), es decir,

$$\sup_{u \in \mathcal{A}^\varepsilon} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$$

donde  $\phi^\varepsilon$  es solución del problema (10.1.26).

Ahora bien, por el Lema B.1 en Arrieta et al. [10] sabemos que existe una cierta constante  $K_0$  tal que

$$\|\phi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_0$$

para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Por tanto, los atractores  $\mathcal{A}^\varepsilon$  están uniformemente acotados para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , i.e.,

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{u \in \mathcal{A}^\varepsilon} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_0$$

Además, por ser  $f$  y  $g$  Lipschitz en acotados

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{u \in \mathcal{A}^\varepsilon} \{\|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma_N)}\} \leq K_1$$

para cierta constante  $K_1$ .

Para probar la estimación  $H^1$  basta usar la fórmula de variación de las constantes, las acotaciones  $L^\infty$  ya obtenidas y acotación de los primeros autovalores  $\lambda_1^\varepsilon$  (recordamos que dichos autovalores convergen). Nótese que en este caso, todas las constantes que aparecen en la fórmula de variación de las constantes pueden ser acotadas uniformemente en  $\varepsilon$  ya que la constante de inyección de  $X^{1/2} \subset H^1(\Omega)$  es independiente de  $\varepsilon$ .

De donde, se tiene (10.1.27) como queríamos probar. ■

Como consecuencia de los resultados obtenidos en la Parte I tenemos

**Teorema 10.1.19** *En las condiciones del Teorema 10.1.15, existen dos equilibrios extremales  $\varphi_m^\varepsilon \leq \varphi_M^\varepsilon$  tales que  $\mathcal{A}^\varepsilon \subset [\varphi_m^\varepsilon, \varphi_M^\varepsilon]$ ,  $\varphi_m^\varepsilon, \varphi_M^\varepsilon \in \mathcal{A}^\varepsilon$  y*

$$\varphi_m^\varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t, x; u_0) \leq \varphi_M^\varepsilon$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  para  $u_0$  en acotados de  $X$ .

### 10.1.9. El problema parabólico límite

El problema parabólico límite no lineal asociado a (10.1.10) viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)\nabla u) + c(x)u = f(x, u) & \text{en } \Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} + b(x)u = g(x, u) & \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N \\ u = 0 & \text{en } \Omega_0 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \\ u(0) = u_0 & \end{array} \right. \quad (10.1.28)$$

con  $f$  y  $g$  son globalmente Lipschitz. Nótese que gracias a la cota uniforme en  $L^\infty$  para las soluciones en el atractor dadas por (10.1.27) podemos truncar las funciones  $f$  y  $g$  y suponer, sin falta de generalidad, que son globalmente Lipschitz

Este problema es equivalente a encontrar una función  $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_1)$  tal que

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)\nabla u) + c(x)u = f(x, u) & \text{en } \Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_0} + b(x)u = g(x, u) & \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (10.1.29)$$

En concreto, basta extender por cero la solución de este problema para obtener la solución del problema (10.1.28).

El siguiente resultado proporciona la existencia local y global de soluciones así como del atractor del problema límite y algunas propiedades notables de éste.

**Teorema 10.1.20** *Sea  $X = L^2(\Omega_1)$ . Supongamos que  $f$  y  $g$  son globalmente Lipschitz. Entonces, dado  $u_0 \in L^2(\Omega_1)$ , existe una única solución local del problema (10.1.29). Además, dichas soluciones verifican el principio de comparación.*

*Supongamos además que  $f$  y  $g$  verifican (10.1.22) y (10.1.23). Entonces, las soluciones del problema (10.1.29) son globales.*

*Por último supongamos que se tiene la propiedad  $(D)_0$ . Entonces, existe  $\mathcal{A}^0$  el atractor global del problema (10.1.29) que es compacto en  $H^1(\Omega)$  y acotado en  $L^\infty(\Omega)$ . Además, existen dos soluciones extremales  $\varphi_m^0 \leq \varphi_M^0$  tales que  $\mathcal{A}^0 \subset [\varphi_m^0, \varphi_M^0]$ ,  $\varphi_m^0, \varphi_M^0 \in \mathcal{A}^0$  y*

$$\varphi_m^0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u^0(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u^0(t, x; u_0) \leq \varphi_M^0$$

*uniformemente en  $x \in \Omega$  para  $u_0$  en acotados de  $X$ .*

**Demostración.** Nótese que en  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_1)$  el operador de Nemitski asociado a  $h = f_\Omega + g_\Gamma$  sigue siendo globalmente Lipschitz de  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_1)$  en  $H_{\Gamma_D}^{-\gamma}(\Omega_1)$  con  $\gamma > 1/2$ . Por tanto la existencia local del problema se sigue de la teoría general para ecuaciones parabólicas (ver Henry [28]). Además, dicho problema verifica el principio de comparación (véase Teorema 1.3.2, pag. 12, en Davies [22]).

La existencia global se tiene ya que  $f$  y  $g$  verifican (10.1.22) y (10.1.23). Mientras que la existencia de atractor se tiene por la propiedad  $(D)_0$ .

En el caso de trabajar con datos iniciales en  $L^2(\Omega_1)$  el operador de Nemitski asociado a  $h$  no está bien definido (nótese que no podemos definir la aplicación traza en  $L^2(\Omega_1)$ ). Sin embargo, sí que se puede probar existencia de solución usando a través de las soluciones  $\varepsilon$ -regulares. En concreto, si  $u_0 \in L^2(\Omega_1) = X_0^0$  podemos aplicar la teoría general desarrollada en Arrieta y Carvalho [8] y Arrieta et al. [11] obtener así los resultados del teorema. Nótese que si definimos  $E^\alpha = X_0^{\alpha-1}$  entonces  $h : E^{1+1/2} \rightarrow E^{1-s}$ ,  $s > 1/4$ , y es globalmente Lipschitz. En la notación de Arrieta y Carvalho [8] y Arrieta et al. [11] esta aplicación es  $\varepsilon$ -regular para  $\varepsilon = 1/2$  relativo a  $(E^1, E^0)$ . Aplicando el Teorema 1 de Arrieta y Carvalho [8] o el Teorema 2.2 de Arrieta et al. [11] se tiene la existencia de solución. El resto sigue como en la Parte I de esta memoria. ■

Nótese que aunque el problema límite es un problema estándar (en sentido de que podemos plantear el problema en espacios naturales), el hecho de que  $\bar{\Gamma}_{1,N} \cap \bar{\Gamma}_{1,D} \neq \emptyset$  limita la regularidad de las soluciones.

Enunciamos ahora un resultado que establece a acotación uniforme de  $\mathcal{A}^0$ , el atractor del problema (10.1.29).

**Proposición 10.1.21** *La soluciones del problema (10.1.19) verifican*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi^0(x)$$

*uniformemente en  $x$  para  $u_0$  en acotados de datos iniciales, donde  $\phi^0$  es la solución del problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_0(x)\nabla \phi^0) + c(x)\phi^0 = C_\Omega(x)\phi^0 + D_\Omega(x) & \text{en } \Omega_1 \\ \frac{\partial \phi^0}{\partial \bar{n}_0} + b(x)\phi^0 = C_\Gamma(x)\phi^0 + D_\Gamma(x) & \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N \\ \phi^0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \setminus \tilde{\Gamma}_N. \end{cases} \quad (10.1.30)$$



Además, existe una constante  $K_0$  tal que

$$\sup_{u \in \mathcal{A}^0} \{ \|u\|_{H^1(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)} \} \leq K_0.$$

**Demostración.** La existencia y unicidad de  $\phi^0$  se tiene por ser  $\lambda_1^0 > 0$ . La primera parte de la proposición se obtiene entonces por los resultados obtenidos en la Parte I de esta memoria.

Por el Teorema 10.1.8,  $\phi^\varepsilon \rightarrow \phi^0$  en  $H^1(\Omega)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, por la Proposición 10.1.18 sabemos que  $\|\phi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$  luego

$$\|\phi^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_0$$

lo que implica que existe una constante  $K_1$  tal que

$$\sup_{u \in \mathcal{A}^0} \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)} \} \leq K_1.$$

La estimación  $H^1$  sigue como en la prueba del Lema 10.1.18. ■

### 10.1.10. Semicontinuidad superior de los atractores

En esta sección vamos a probar cierta continuidad de los atractores de los problemas (10.1.19) y (10.1.29) en  $\varepsilon = 0$ . Para ello seguiremos los argumentos de la Sección 5.1 de Arrieta et al. [10]. Aunque las pruebas de los resultados que enunciaremos a continuación son similares a los de esta referencia, las detallamos por completitud.

Para probar la semicontinuidad superior usaremos la acotación uniforme de los atractores dada por los resultados de las Proposiciones 10.1.18 y 10.1.21.

El siguiente resultado compara la dinámica asintótica de los problemas (10.1.19) y (10.1.28) en la métrica de  $H^1(\Omega)$  (ver Teorema 5.2 de Arrieta et al. [10]).

**Teorema 10.1.22** *Los atractores globales,  $\mathcal{A}_\varepsilon$  y  $\mathcal{A}_0$ , son semicontinuos superiormente para  $\varepsilon = 0$  en  $H^1(\Omega)$ .*

**Demostración.** En primer lugar, como hemos obtenido estimaciones uniformes sobre los atractores de (10.1.19) y (10.1.28) en  $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  (ver Lema 10.1.18 y la Proposición 10.1.21), podemos suponer que existe una constante  $K_0$  tal que

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_\varepsilon} (\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)}) \leq K_0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

ya que  $f$  y  $g$  son globalmente Lipschitz.

Denotamos por  $S_\varepsilon$  y  $S_0$  los semigrupos no lineales asociados a (10.1.19) y (10.1.28) respectivamente. De la fórmula de variación de las constantes, para  $\eta_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$ , tenemos

$$S_\varepsilon(t)\eta_\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t}\eta_\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)}(f_\Omega(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon) + g_\Gamma(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon))ds,$$

$$S_0(t)P\eta_\varepsilon = e^{-A_0 t}P\eta_\varepsilon + \int_0^t e^{-A_0(t-s)}(f_\Omega(S_0(s)P\eta_\varepsilon) + g_\Gamma(S_0(s)P\eta_\varepsilon))ds$$

donde  $P$  es el operador de proyección de  $L^2(\Omega)$  a  $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$  definido en la Sección 10.1.7.

En particular, teniendo en cuenta la Proposición 10.1.11 y el Corolario 10.1.12 tenemos, para  $t \in (0, \tau)$ ,

$$\begin{aligned}
& \|S_\varepsilon(t)\eta_\varepsilon - S_0(t)P\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}\eta_\varepsilon - e^{-A_0 t}P\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \\
& + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}(f_\Omega(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon) + g_\Gamma(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon) - \\
& \quad - e^{-A_0(t-s)}(Pf_\Omega(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon) + g_\Gamma(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon))\|_{H^1(\Omega)} ds \\
& + \int_0^t \|e^{-A_0(t-s)}(Pf_\Omega(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon) + g_\Gamma(S_\varepsilon(s)\eta_\varepsilon) - f_\Omega(S_0(s)P\eta_\varepsilon) - g_\Gamma(S_0(s)P\eta_\varepsilon))\|_{H^1(\Omega)} ds \\
& \leq c(\varepsilon)t^{-\alpha}K_0 + \int_0^t c(\varepsilon)(t-s)^{-\alpha}K_0 ds + \int_0^t (t-s)^{-\beta}L\|S_\varepsilon(t)\eta_\varepsilon - S_0(t)P\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} ds \\
& \leq c(\varepsilon)K_0\frac{\tau}{1-\alpha}t^{-\alpha} + L\int_0^t (t-s)^{-\beta}\|S_\varepsilon(t)\eta_\varepsilon - S_0(t)P\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} ds
\end{aligned}$$

donde  $\alpha \in (3/4, 1)$  viene dado por el Corolario 10.1.12 y  $\beta \in (0, 1)$ . Por el Lema de Gronwall singular, ver Lema 7.0.9 o Henry [28], tenemos que existen una constante  $M = M(\alpha, \beta, L, \tau)$  y una función positiva  $c(\cdot)$ , con  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tal que

$$\|S_\varepsilon(t)\eta_\varepsilon - S_0(t)P\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq Mc(\varepsilon)K_0t^{-\alpha}, \quad t \in (0, \tau), \quad \eta_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon. \quad (10.1.31)$$

Nótese ahora que fijado  $\delta > 0$ , existe  $\tau = \tau(\delta)$  tal que  $\text{dist}_{H^1}(S_0(\tau)P\eta_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq \delta/2$ , para todo  $\eta_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$  y para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , ya que  $\cup_\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon$  está en un acotado de  $H^1(\Omega)$  y, por tanto,  $\cup_\varepsilon P\mathcal{A}_\varepsilon$  está en un acotado de  $H^1_{\Omega_0}(\Omega)$  y por el Teorema 10.1.20,  $\mathcal{A}_0$  atrae acotados de  $H^1_{\Omega_0}(\Omega)$ . Además, como los atractores son invariantes, tenemos que dado  $v_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$  existe  $\eta_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$  con  $S_\varepsilon(\tau)\eta_\varepsilon = v_\varepsilon$ . Por tanto, eligiendo  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$  tal que  $Mc(\varepsilon)K_0\tau^{-\alpha} \leq \delta/2$ , para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ , tenemos

$$\text{dist}_{H^1}(v_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq \|v_\varepsilon - S_0(\tau)\eta_\varepsilon\|_{H^1} + \text{dist}(S_0(\tau)\eta_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq \delta, \quad v_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

de donde se tiene la semicontinuidad superior en  $H^1$ . ■

También se tiene convergencia de las trayectorias en los atractores (ver Proposición 5.3 de Arrieta et al. [10]).

**Proposición 10.1.23** *Sea  $\varepsilon_k$  una sucesión tal que  $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_0)$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y  $\phi_{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$  tal que  $\phi_{\varepsilon_k} \rightarrow \phi_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , en  $H^1(\Omega)$ . Entonces,  $u^0(\cdot)$ , la órbita positiva que pasa por  $\phi^0$ , verifica  $u^0(\cdot) \subset \mathcal{A}_0$ . Además,*

$$u^{\varepsilon_k} \rightarrow u^0 \quad \text{en } C([0, T], H^1(\Omega)), \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \text{ para todo } T > 0 \quad (10.1.32)$$

donde  $u^{\varepsilon_k}(\cdot) \subset \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$  es la órbita positiva que pasa por  $\phi_{\varepsilon_k}$  y  $u^0(\cdot)$  es la órbita positiva que pasa por  $\phi_0$ .

**Demostración.** En primer lugar, como  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  y  $\phi_{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$  en  $H^1(\Omega)$ , la semicontinuidad superior en  $H^1(\Omega)$  implica que  $\phi_0 \in \mathcal{A}_0$  y, por tanto,  $u^0(\cdot) \subset \mathcal{A}_0$ .

Supongamos que no se tiene (10.1.32), es decir, podemos elegir una sucesión  $\varepsilon_k$  y funciones  $\phi_{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$  tales que  $\phi_{\varepsilon_k} \rightarrow \phi_0 \in \mathcal{A}_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y  $\eta > 0$ , de manera que

$$\|u^{\varepsilon_k}(\cdot) - u^0(\cdot)\|_{C([0, T], H^1(\Omega))} \geq \eta, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10.1.33)$$

Pero, por la invarianza de los atractores, existen  $\psi_{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$ , con  $S_{\varepsilon_k}(1)\psi_{\varepsilon_k} = \phi_{\varepsilon_k}$ . Además, de la semicontinuidad de los atractores establecida en el Teorema 10.1.22 podemos elegir una subsucesión que seguimos denotando igual y una función  $\psi_0 \in \mathcal{A}_0$  tales que  $\psi_{\varepsilon_k} \rightarrow \psi_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Ahora, por ser  $P\psi_{\varepsilon_k} \rightarrow P\psi_0 = \psi_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , la dependencia continua del semigrupo  $S_0$  y (10.1.31) tenemos que

$$u^{\varepsilon_k}(t) = S_{\varepsilon_k}(t+1)\psi_{\varepsilon_k} \rightarrow S_0(t+1)\psi_0 \quad \text{en } C([0, T], H^1(\Omega)) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

En particular, tomando  $t = 0$ ,  $\phi_{\varepsilon_k} = S_{\varepsilon_k}(1)\psi_{\varepsilon_k} \rightarrow S_0(1)\psi_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Por tanto  $S_0(1)\psi_0 = \phi_0$ . Luego, por la unicidad de soluciones hacia adelante en el tiempo,  $S_0(t+1)\psi_0 = u^0(t)$  lo que contradice la existencia de  $\eta > 0$  verificando (10.1.33). ■

Con esto, se puede probar el siguiente resultado (ver Corolario 5.3 de Arrieta et al. [10])

**Corolario 10.1.24** *Para toda sucesión  $\varepsilon_k$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y para toda sucesión de órbitas completas  $u^{\varepsilon_k}(\cdot) \in \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$ , existen una subsucesión  $\varepsilon_{k_j}$  y una órbita completa  $u^0(\cdot) \in \mathcal{A}_0$  tales que*

$$u^{\varepsilon_{k_j}}(\cdot) \rightarrow u^0(\cdot) \quad \text{en } C([-T, T], H^1(\Omega)), \text{ cuando } j \rightarrow \infty \text{ para todo } T > 0.$$

**Demostración.** Basta usar la invarianza y compacidad de los atractores, la Proposición 10.1.23 y un argumento estándar de diagonalización para obtener la subsucesión deseada. ■

En particular, para puntos de equilibrio se tiene el siguiente resultado

**Corolario 10.1.25** *Para toda sucesión  $\varepsilon_k$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y para toda sucesión de equilibrios  $\varphi^{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_{\varepsilon}$ , existen una subsucesión  $\varepsilon_{k_j}$  y un equilibrio  $\varphi^0 \in \mathcal{A}_0$  del problema límite tales que*

$$\varphi^{\varepsilon_{k_j}} \rightarrow \varphi^0 \quad \text{en } H^1(\Omega), \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

Una vez probada la convergencia de equilibrios a equilibrios, una cuestión interesante es cuándo los equilibrios extremales aproximados convergen al equilibrio extremal del problema límite, es decir, en el caso de los equilibrios extremales

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_M^\varepsilon = \varphi_M^0 \quad (10.1.34)$$

(análogamente para los equilibrios minimales).

Nótese que en particular, del Corolario 10.1.25, hemos obtenido que para cualquier  $\varphi^0$  punto de acumulación en  $H^1(\Omega)$  del conjunto formado por los equilibrios maximales de los problemas aproximados  $\{\varphi_M^\varepsilon\}$ , se tiene

$$\varphi^0 \leq \varphi_M^0.$$

El problema es entonces obtener la otra desigualdad.

Supongamos que de tiene la siguiente propiedad

**(P)** En todo entorno de  $\varphi_M^0$  (extendido por 0 fuera de  $\Omega_1$ ) existe un equilibrio de los problemas aproximados, es decir, existe una sucesión de equilibrios de los problemas aproximados  $\{\varphi^{\varepsilon_n}\}$  tales que  $\varphi^{\varepsilon_n} \rightarrow \varphi_M^0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sea ahora  $\varphi^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_M^{\varepsilon_n}$  un punto de acumulación en  $H^1(\Omega)$  del conjunto de los equilibrios maximales. Entonces,

$$\varphi_M^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{\varepsilon_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_M^{\varepsilon_n} = \varphi^0.$$

Luego,  $\varphi_M^0 \leq \varphi^0$ , de donde  $\varphi^0 = \varphi_M^0$  y se tiene (10.1.34).

Basta entonces dar condiciones que aseguren que se tiene (P) para asegurar el paso al límite en los equilibrios maximales.

Enunciamos a continuación dos propiedades que aseguran que se tiene la propiedad (P).

1) Supongamos que existe un único equilibrio positivo el problema límite, y por tanto es el maximal,  $\varphi_M^0$ . Consideramos su extensión por cero a  $\Omega$ . Entonces, si  $\varphi_M^\varepsilon \geq 0$  no idénticamente nulos y existe una sucesión  $\varepsilon_n$  para la cual  $\varphi_M^{\varepsilon_n} \rightarrow \varphi^0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para cierto  $\varphi^0 \geq 0$  no idénticamente nulo entonces debe ser  $\varphi^0 = \varphi_M^0$ . Tenemos pues que se verifica la propiedad (P).

2) Si  $\varphi_M^0$  es hiperbólico, usando las técnicas de Arrieta y Carvalho [9] es posible obtener que la propiedad (P) es cierta en este caso.

## 10.2. Difusión alta en un entorno de la frontera

Como segundo ejemplo, vamos a estudiar un problema de difusión alta en un dominio con condición de frontera Robin donde la región de difusión alta es un entorno de la frontera. Al pasar al límite en la ecuación obtendremos un problema no estándar en el que tendremos una EDO en la región de difusión alta y en el resto, una EDP con condición de contorno tipo Dirichlet dada por la solución de la EDO.

En el análisis seguiremos los mismo pasos que en el caso anterior.

### 10.2.1. Planteamiento del problema

Dado  $\Omega$  un abierto acotado regular de  $\mathbb{R}^N$  y denotamos por  $\Gamma$  su frontera. Además, consideramos  $\Omega_0 \subset \Omega$  un abierto tal que  $\Gamma \cap \Gamma_0 = \Gamma$ , donde  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ . Nos planteamos estudiar la convergencia de los problemas

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} -\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + (\lambda + V(x))u^\varepsilon = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u^\varepsilon = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (10.2.1)$$

donde

- $d_\varepsilon(x)$  son funciones suficientemente regulares, estrictamente positivas y tales que

$$0 < m_0 < d_\varepsilon(x) < M_\varepsilon \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad (10.2.2)$$

Además

$$d_\varepsilon(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{uniformemente en compactos de } \Omega_0 \\ d_0(x) & \text{uniformemente en } \Omega_1 \end{cases} \quad (10.2.3)$$

- $\lambda$  es una constante positiva.
- $V$  es una función de  $L^\infty(\Omega)$ .
- $b$  es una función de  $L^\infty(\Gamma)$ .
- $f$  es una función de  $H^{-1}(\Omega)$ .
- $g$  es un elemento de  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

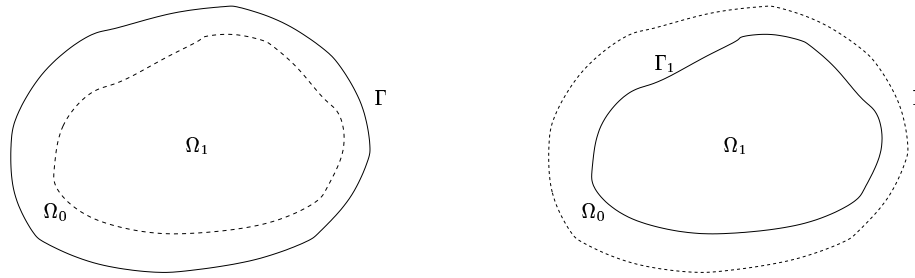


Figura 10.4: Dominio del problema aproximado y el problema límite.

Nótese que la principal diferencia con el caso anterior es que la región donde la difusión es alta es un entorno de la frontera. De esta forma, el dominio  $\Omega_1$  es interior al dominio original.

**Nota 10.2.1** Al igual que en el caso anterior, todo lo que sigue sigue siendo válido suponiendo  $V \in L^\sigma(\Omega)$ ,  $\sigma > N/2$  y  $b \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N - 1$ .

Para estudiar este problema, seguiremos la línea de argumentación de la Sección 10.1 por lo que omitiremos, en general, las pruebas de los resultados indicando en cada caso las diferencias con el problema allí tratado.

### 10.2.2. Marco funcional

Sea  $H^1(\Omega)$  el espacio de Sobolev habitual. Como en la Sección 10.1.2 denotamos por  $H^{-1}(\Omega)$  su dual. Consideramos el espacio  $Y_\varepsilon$  definido en la Sección 10.1.2. Vimos en esa misma sección que podemos definir la derivada normal de  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \in H^{-1/2}(\Gamma)$  por

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}, \gamma(v) \right\rangle_{-1/2, 1/2} = \int_{\Omega} \text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u)v + \int_{\Omega} d_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v \quad (10.2.4)$$

para toda  $v \in H^1(\Omega)$ . Vimos además que el espacio  $Y_\varepsilon$  es un espacio de Banach para la norma

$$\|z\|_{Y_\varepsilon} = \|\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla z)\|_{L^p(\Omega)} + \|z\|_{H^1(\Omega)}$$

que es un espacio de Hilbert y la aplicación  $z \mapsto \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}$  es continua entre  $Y_\varepsilon$  y  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Definimos a continuación una serie de espacios análogos a los definidos en la Sección 10.1.2 que nos serán de utilidad en lo que sigue. Sean

$$L^2_{\Omega_0}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ es constante sobre } \Omega_0\}, \quad H^1_{\Omega_0}(\Omega) = L^2_{\Omega_0}(\Omega) \cap H^1(\Omega)$$

y, por último,

$$Y_{\Omega_0} = \{z \in H^1_{\Omega_0}(\Omega) : -\text{Div}(d_0(x)\nabla z) \in L^2(\Omega_1)\}.$$

Nótese que aunque usamos la misma notación que en la Sección 10.1 los espacios empleados son esencialmente diferentes. En este caso, consideramos espacios en los que las funciones son constantes en una determinada región  $\Omega_0$  mientras que en el caso anterior usábamos funciones que se anulaban en dicha región. Esto va a provocar que el problema límite que obtengamos va a ser un problema no estándar (ver Sección 10.2.4, más adelante).

### 10.2.3. Los problemas aproximados

Al igual que antes, comenzamos con el estudio de la existencia de solución de los problemas aproximados que en este caso son

$$\begin{cases} -\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (10.2.5)$$

Tomando como funciones test  $\phi \in H^1(\Omega)$  en la formulación del problema (10.2.5) e integrando formalmente por partes, tenemos

$$\int_{\Omega} d_\varepsilon(x)\nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega} (\lambda + V(x))u\phi + \int_{\Gamma} b(x)u\phi = \int_{\Omega} f\phi + \int_{\Gamma} g\phi.$$

Nótese que el resultado que establece el buen planteamiento del problema es similar al Teorema 10.1.2 del caso anterior. La única diferencia reside en los espacios en los que buscamos la solución. Enunciamos el resultado por completitud.

**Theorem 10.2.1** *El operador  $T_\varepsilon$  definido por la forma bilineal*

$$\tau_\varepsilon(u, v) = \langle T_\varepsilon u, v \rangle = \int_{\Omega} d_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v + \int_{\Omega} (\lambda + V(x))uv + \int_{\Gamma} b(x)uv \quad (10.2.6)$$

*es un isomorfismo entre  $H^1(\Omega)$  y  $H^{-1}(\Omega)$ , y entre  $Y_\varepsilon$  y  $L^2(\Omega) + H^{-1/2}(\Gamma)$ . Además, entre estos últimos espacios,  $T_\varepsilon$  viene dado por*

$$T_\varepsilon = (-\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla \cdot) + (\lambda + V(x)) \cdot)_\Omega + \left( \frac{\partial \cdot}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) \cdot \right)_\Gamma.$$

*Por restricción a  $L^2(\Omega)$ ,  $T_\varepsilon$  induce un operador autoadjunto, positivo con resolvente compacta,  $B_\varepsilon$ , con dominio*

$$D(B_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : -\text{Div}(d_\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + bu = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\},$$

*y para  $u \in D(B_\varepsilon)$ ,*

$$B_\varepsilon u = -\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u.$$

Se tiene también el análogo al Corolario 10.1.3.

**Corolario 10.2.2** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  es una solución de

$$T_\varepsilon u = h = f_\Omega + g_\Gamma$$

donde  $f_\Omega \in L^2(\Omega)$  y  $g_{\Gamma_N} \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ , entonces  $u \in Y_\varepsilon$  y

$$\begin{cases} -\text{Div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u = f & \text{en } L^2(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u = g & \text{en } H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

#### 10.2.4. El problema límite

Al igual que en el caso anterior, la solución en la región donde la difusión es alta la solución va a ser constante. Esta vez, se producirá un balance entre la condición de contorno en la frontera de  $\Omega$  y la reacción en  $\Omega_0$  que determinará el valor de la solución en  $\Omega_0$  así como la condición de frontera que debe satisfacer la solución límite en  $\Gamma_1$  (ver Figura 10.2.1.)

Se tiene el siguiente resultado de existencia de solución para el problema límite. El Corolario 10.2.2 muestra explícitamente el problema límite.

**Teorema 10.2.3** Sea  $T_0$  el operador definido por la forma bilineal

$$\tau_0(u, v) = \langle T_0 u, v \rangle = \int_{\Omega_1} d_0(x)\nabla u \nabla v + \int_{\Omega} (\lambda + V(x))uv + \int_{\Gamma} b(x)uv \quad (10.2.7)$$

con  $u, v \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ , que es un isomorfismo entre  $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  y su dual  $H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$ .

La restricción

$$T_0 : Y_{\Omega_0} \longrightarrow L_{\Omega_0}^2(\Omega) \subset H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$$

también es un isomorfismo. Además, sobre estos espacios,

$$\begin{aligned} T_0 u &= \left[ \left( -\text{Div}(d_0(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u \right) \chi_{\Omega_1} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \left( \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} (\lambda + V) + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma} b \right) u_{\Omega_0} \right] \chi_{\Omega_0} \right] \Big|_{\Omega} \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

Por otra parte, la restricción de  $T_0$  a  $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  induce un operador no acotado, positivo, autoadjunto, con resolvente compacta,  $B_0$ , con dominio

$$D(B_0) = \{ u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) : -\text{div}(d_0(x)\nabla u) \in L^2(\Omega_1) \}$$

y para  $u \in D(B_0)$ ,

$$B_0(u) = (-\text{div}(d_0(x)\nabla u) + (\lambda + V)u) \chi_{\Omega_1}$$

**Demostración.** Sea  $h \in L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  y sea  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  tal que  $T_0 u = h$ . Multiplicando por  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$  tenemos

$$\int_{\Omega_1} d_0(x)\nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega_1} (\lambda + V(x))u\phi = \int_{\Omega_1} h\phi$$

Luego,  $-\text{Div}(d_0(x)\nabla u) + (\lambda + V(x))u = h$  en  $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ , de donde  $-\text{Div}(d_0(x)\nabla u) \in L^2(\Omega_1)$  y por tanto  $u \in Y_{\Omega_0}$  y la igualdad es, de hecho, en  $L^2(\Omega_1)$ . La continuidad se obtiene fácilmente a partir de la expresión de  $T_0$ . Tomando ahora  $\phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega_1} d_0(x)\nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega} (\lambda + V(x))u\phi + \int_{\Gamma} b(x)u\phi = \int_{\Omega} h\phi$$

Integrando por partes en la primera integral y teniendo en cuenta la ecuación que verifica  $u$  en  $\Omega_1$  y que  $\phi = \phi_{\Omega_0}$  en  $\Omega_0$ , tenemos

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \left( \int_{\Omega_0} (\lambda + V) + \int_{\Gamma} b \right) u_{\Omega_0} = |\Omega_0| h_{\Omega_0}$$

donde  $h_{\Omega_0}$  es el valor de  $h$  en  $\Omega_0$ . Luego  $T_0$  viene dado por la expresión (10.2.8). ■

**Corollary 10.2.2** Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $y u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  es solución de

$$T_0 u = f_{\Omega} \quad (10.2.9)$$

donde  $f \in L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  entonces  $u \in Y_{\Omega_0}$  y (10.1.9) es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{Div}(d_0(x) \nabla u) + (\lambda + V(x))u = f & \text{en } \Omega_1 \\ u = u_{\Omega_0} & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \left( \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} (\lambda + V) + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma} b \right) u_{\Omega_0} = f_{\Omega_0} \end{array} \right. \quad (10.2.10)$$

### 10.2.5. Paso al límite

El siguiente resultado se obtiene de manera análoga a como obtuvimos el Teorema 10.1.8 en el caso de la Sección 10.1.

**Teorema 10.2.4** Supongamos que para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\{h_{\varepsilon}\}_{\varepsilon} \subset H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$  están acotadas y convergen débilmente a  $h \in H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$ . Supongamos  $\{u^{\varepsilon}\}_{\varepsilon}$  están acotadas en  $L^2(\Omega)$  y verifican

$$T_{\varepsilon} u = (L_{\varepsilon} + (\lambda I + V)_{\Omega} + (b\gamma)_{\Gamma}) u^{\varepsilon} = h_{\varepsilon}$$

Entonces  $0 \leq \int_{\Omega} d_{\varepsilon}(x) |\nabla u^{\varepsilon}|^2 \leq M$  para alguna constante independiente de  $\varepsilon$  y tomando subsucesiones si fuese necesario,  $u^{\varepsilon}$  converge a  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  débil en  $H^1(\Omega)$  y  $Vu^{\varepsilon}$  y  $bu^{\varepsilon}$  convergen a  $Vu$  y  $bu$  en  $L^2(\Omega)$  y  $L^2(\Gamma)$ , respectivamente. Además,  $u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$  y verifica

$$T_0 u = (L_0 + (\lambda I + V)_{\Omega} + (b\gamma)_{\Gamma_N}) u = h|_{H_{\Omega_0}^1(\Omega)} \quad \text{en } H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega).$$

Por último,  $u^{\varepsilon}$  converge fuerte a  $u$  en  $H^1(\Omega)$  si y sólo si  $\langle h_{\varepsilon}, u^{\varepsilon} \rangle_{-1,1} \rightarrow \langle h, u \rangle_{-1,1}$  y esto se da, por ejemplo, si  $h^{\varepsilon} \rightarrow h$  fuerte en  $H^{-1}(\Omega)$ . Además, en tal caso

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_{\varepsilon}(u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) = \tau_0(u, u) \quad (10.2.11)$$

Como consecuencia de este resultado obtenemos cierta convergencia de las derivadas normales en la frontera de la región donde la difusión crece a infinito.

**Corolario 10.2.5** Supongamos que en las condiciones del Teorema 10.2.4,  $h^{\varepsilon} = f_{\Omega}^{\varepsilon} + g_{\Gamma}^{\varepsilon}$  y  $f^{\varepsilon} \rightarrow f$  en  $L^2(\Omega)$ -débil y  $g^{\varepsilon} \rightarrow g$  en  $H^{-1/2}(\Gamma)$ -débil. Entonces

1. En el interior de  $\Omega_1$ ,

$$\begin{aligned} \text{Div}(d_{\varepsilon}(x) \nabla u^{\varepsilon}) &\rightarrow \text{Div}(d_0(x) \nabla u) \text{ en } L^2(\Omega_1) \text{-débil} \\ \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \vec{n}_{\varepsilon}} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma_1) \end{aligned}$$

2. En el interior de  $\Omega_0$ ,

$$\text{Div}(d_{\varepsilon}(x) \nabla u^{\varepsilon}) \rightarrow f \text{ en } L^2(\Omega_0) \text{-débil}$$

3. Por último,

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} + \left[ \int_{\Omega_0} (\lambda + V(x)) + \int_{\Gamma} b \right] u_{\Omega_0} = \int_{\Omega_0} f + \int_{\Gamma} g.$$

Además,  $u^\varepsilon$  converge fuerte a  $u$  en  $H^1(\Omega)$  si y sólo si  $\langle g_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Gamma \rightarrow \langle g, u \rangle_\Gamma$  y esto pasa, por ejemplo, si  $g^\varepsilon$  converge a  $g$  fuerte en  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . En tal caso,  $\lim_\varepsilon \int_{\Omega_0} d_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 = 0$ .

**Demostración.** Supongamos ahora que  $h^\varepsilon = f_\Omega^\varepsilon + g_\Gamma^\varepsilon$  y  $f^\varepsilon \rightarrow f$  en  $L^2(\Omega)$ -débil y  $g^\varepsilon \rightarrow g$  en  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ -débil. Tenemos que  $u^\varepsilon$  es la solución del problema

$$\begin{cases} -\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + (\lambda + V(x)) u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) u^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases}$$

luego,

$$-\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) = f^\varepsilon - (\lambda + V(x)) u^\varepsilon \text{ en } \Omega_1$$

y el segundo miembro converge a  $f - (\lambda + V(x))u = -\text{Div}(d_0(x) \nabla u)$  en  $L^2(\Omega_1)$ -débil, luego,

$$\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) \rightarrow \text{div}(d_0(x) \nabla u) \text{ en } L^2(\Omega_1)\text{-débil.}$$

En  $\Omega_0$  tenemos

$$\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) \rightarrow f \text{ en } L^2(\Omega_0)\text{-débil.}$$

Por otra parte, de (10.1.4), para toda  $\phi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$

$$\left\langle \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\partial \Omega_1} = \int_{\Omega_1} \text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) \phi + \int_{\Omega_1} d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla \phi$$

donde el segundo miembro converge a

$$\int_{\Omega_1} \text{Div}(d_0(x) \nabla u) \phi + \int_{\Omega_1} d_0(x) \nabla u \nabla \phi = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}, \gamma(\phi) \right\rangle_{\partial \Omega_1}$$

luego

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma_1).$$

Veamos qué pasa en  $\Omega_0$ . Por una parte, sabemos que  $-\text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) \rightarrow f - (\lambda + V(x))u$  en  $L^2(\Omega_0)$ -débil. Por otra,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \text{Div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) &= \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \\ &= \int_{\Gamma} (g^\varepsilon - b u^\varepsilon) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} \end{aligned}$$

donde el primer miembro converge a  $-\int_{\Omega_0} f + (\lambda + V(x))u$  y, el primer término del segundo miembro converge a  $\int_{\Gamma} (g - bu)$  y el segundo a  $\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}$ . De aquí, obtenemos

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} + \left[ \int_{\Omega_0} (\lambda + V(x)) + \int_{\Gamma} b \right] u_{\Omega_0} = \int_{\Omega_0} f + \int_{\Gamma} g.$$

Por el teorema sabemos que  $u^\varepsilon$  converge fuerte a  $u$  en  $L^2(\Omega)$ , luego la convergencia fuerte de  $u^\varepsilon$  en  $H^1(\Omega)$  es equivalente a la convergencia  $\langle g_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{\Gamma_N} \rightarrow \langle g, u \rangle_{\Gamma_N}$ . ■



### 10.2.6. El problema de autovalores

Sean  $B_\varepsilon$  y  $B_0$ , los operadores de las secciones anteriores. Como tienen resolvente compacta, su espectro está formado por autovalores de multiplicidad finita,  $\sigma(B_\varepsilon) = \{\mu_n^\varepsilon\}$  y  $\sigma(B_0) = \{\mu_n\}$  que son sucesiones crecientes tendiendo a  $\infty$ .

El siguiente resultado es el análogo al Teorema 10.1.10. Su prueba es similar a la de dicho teorema.

**Teorema 10.2.6** *Supongamos que el espectro de  $B_\varepsilon$  viene dado por*

$$\mu_1^\varepsilon \leq \dots \leq \mu_n^\varepsilon \leq \mu_{n+1}^\varepsilon \leq \dots$$

*contando multiplicidades y, para cada  $n$ , sea  $\phi_n^\varepsilon$  una autofunción de  $\mu_n^\varepsilon$  tal que  $\|\phi_n^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$  y  $\{\phi_n^\varepsilon\}_n$  forman una base de Hilbert de  $L^2(\Omega)$ . Supongamos, también, que el espectro de  $B_0$  viene dado por*

$$\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1} \leq \dots$$

*contando multiplicidades. Entonces, se verifican*

1. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_n^\varepsilon \rightarrow \mu_n \quad \text{cuando } \varepsilon \text{ tiende a } 0$$

2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y para toda sucesión convergente a 0, que seguiremos denotando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , existe una subsucesión  $\varepsilon_j$  tal que

$$\phi_n^{\varepsilon_j} \rightarrow \phi_n \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) \quad \text{cuando } j \text{ tiende a } \infty$$

*fuerte en  $H^1(\Omega)$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} d_{\varepsilon_j} |\nabla \phi_n^{\varepsilon_j}|^2 = 0$ , donde  $\phi_n$  es una autofunción de  $B_0$  correspondiente a  $\mu_n$  y  $\{\phi_n\}_n$  forman una base de Hilbert de  $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$ .*

### 10.2.7. Convergencia de los problemas parabólicos lineales

En esta sección probaremos la convergencia de los problemas parabólicos lineales

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(d_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + c(x) u^\varepsilon = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x) u^\varepsilon = g & \text{sobre } \Gamma \\ u^\varepsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

en  $H^1(\Omega)$  al problema lineal límite

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{Div}(d_0(x) \nabla u) + (\lambda + V(x)) u = f & \text{en } \Omega_1 \\ u = u_{\Omega_0} & \text{en } \Gamma_1 \\ \dot{u}_{\Omega_0} + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \frac{1}{|\Omega_0|} \left( \int_{\Omega_0} (\lambda + V) + \int_{\Gamma} b \right) u_{\Omega_0} = \int_{\Omega_0} f + \frac{|\Gamma|}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma} g \end{cases}$$

en  $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ .

Para ello, sea  $P : L^2(\Omega) \rightarrow L_{\Omega_0}^2(\Omega)$  la proyección de  $L^2(\Omega)$  en  $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$ , es decir,  $Pf = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} f$  en  $\Omega_0$  y  $Pf = f$  en  $\Omega_1$ . Se tiene el siguiente resultado de continuidad de los problemas parabólicos aproximados (ver Proposición 10.1.11 o Proposición 4.6, pag. 48, de Arrieta et al. [10])

**Proposición 10.2.7** *Supongamos  $\lambda_1^0 > 0$ . Entonces, dado  $\gamma \in [0, 1)$  existen  $\alpha \in ((1 + \gamma)/2, 1)$  y una función  $c(\varepsilon) \geq 0$  con  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tal que para todo  $h \in H^{-\gamma}(\Omega) \equiv (H^\gamma(\Omega))'$*

$$\|e^{-A_\varepsilon t} h - e^{-A_0 t} h^*\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\varepsilon) t^{-\alpha} \|h\|_{H^{-\gamma}(\Omega)}, \quad t > 0 \quad (10.2.12)$$

donde  $h^* \in (H_{\Omega_0}^\gamma(\Omega))'$  denota la restricción de  $h$  al espacio  $H_{\Omega_0}^\gamma(\Omega)$ .

En particular, se tiene (ver Corolario 10.1.12 o Corolario 4.8 en Arrieta et al. [10])

**Corolario 10.2.8** *Existen  $\alpha \in (3/4, 1)$  y una función  $c(\cdot) > 0$  con  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que para todo  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in L^2(\Gamma)$  se tiene*

$$\|e^{-A_\varepsilon t}(f_\Omega + g_\Gamma) - e^{-A_0 t}(f_\Omega^* + g_\Gamma)\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\varepsilon)t^{-\alpha}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}), \quad t > 0$$

donde  $f_\Omega^* = Pf$ , la proyección de  $L^2(\Omega)$  sobre  $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ .

Otra consecuencia interesante es la regularización  $L^2$ - $L^\infty$  del semigrupo del problema límite (ver Corolario 10.1.14 o Corolario 4.9 de Arrieta et al. [10]). Concretamente,

**Corolario 10.2.9** *Existe una constante  $M > 0$  tal que para todo  $f \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ ,*

$$\|e^{-A_0 t} f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M t^{-N} \|f\|_{L^2_{\Omega_0}(\Omega)}.$$

### 10.2.8. Los problemas parabólicos aproximados

Consideramos ahora los problemas parabólicos no lineales asociados a (10.2.1).

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(d_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + c(x)u^\varepsilon = f(x, u^\varepsilon) & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\varepsilon} + b(x)u^\varepsilon = g(x, u^\varepsilon) & \text{sobre } \Gamma \\ u^\varepsilon(0) = u_0 & \end{cases} \quad (10.2.13)$$

con  $u_0 \in X$  donde  $X$  es algún espacio de la clase  $\mathcal{E}$  definida en la Sección 1.1.3, es decir,

$$\mathcal{E} = \{L^q(\Omega), W^{1,q}(\Omega), 1 < q < \infty\}.$$

Supongamos que  $f$  y  $g$  verifican las siguientes condiciones de crecimiento  $(G)_X$  de la Sección 10.1.8. Al igual que en dicha sección, supongamos además que existen  $C_\Omega \in L^p(\Omega)$ ,  $0 \leq D_\Omega \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ ,  $C_\Gamma \in L^r(\Omega)$  y  $D_\Gamma \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N - 1$ , tal que

$$sf(x, s) \leq C_\Omega(x)s^2 + D_\Omega(x)|s| \quad x \in \Omega \quad (10.2.14)$$

$$sg(x, s) \leq C_\Gamma(x)s^2 + D_\Gamma(x)|s| \quad x \in \Gamma \quad (10.2.15)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por último, supongamos que se tiene la condición de disipación análoga a  $(D)_0$  de la Sección 10.1.8, es decir,

**(D)<sub>0</sub>** : El primer autovalor,  $\lambda_1^0$ , del siguiente problema en  $H_0^1(\Omega_0)$  es positivo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_0(x)\nabla u) + (c(x) - C_\Omega(x))u = \lambda u & \text{en } \Omega_1 \\ u = u_{\Omega_0} & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \left( \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} (c(x) - C_\Omega(x)) + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma} (b - C_\Gamma) \right) u_{\Omega_0} = \lambda u_{\Omega_0} & \text{en } \Omega_0 \end{cases} \quad (10.2.16)$$

Denotamos por  $\lambda_1^\varepsilon$  el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + (c(x) - C_\Omega(x))u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ d_\varepsilon(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + (b(x) - C_\Gamma(x))u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (10.2.17)$$

De nuevo,  $(D)_0$  junto con la convergencia del primer autovalor  $\lambda_1^\varepsilon$  de los problemas aproximados a  $\lambda_1^0$  implican la existencia de  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\lambda_1^\varepsilon > 0$ .

De los resultados de la Sección 1.1.3 (ver también Arrieta et al. [10]) se tiene la existencia y unicidad de solución del problema (10.2.13) así como la existencia de un atractor global para dicho problema. En concreto, los resultados del Teorema 10.1.15 son válidos para este caso.

Una propiedad importante es la siguiente estimación uniforme del tiempo de entrada de las soluciones de los problemas aproximados dentro de un conjunto absorbente. La prueba es análoga a la de la Proposición 10.1.17

**Proposición 10.2.10** *Fijado  $\varepsilon > 0$ , las soluciones del problema (10.2.13) verifican*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t, x; u_0)| \leq \phi^\varepsilon(x)$$

*uniformemente en  $x$  para  $u_0$  en acotados de datos iniciales donde  $\phi^\varepsilon$  es la única solución del problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d_\varepsilon(x)\nabla u) + c(x)u &= C_\Omega(x)u + D_\Omega(x) & \text{en } \Omega \\ d_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + b(x)u &= C_\Gamma(x)u + D_\Gamma(x) & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

*Además, para todo  $\delta > 0$ , dado un acotado  $B$  de  $X$ , existe un tiempo  $T_0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que para todo  $u_0 \in B$*

$$|u^\varepsilon(t, x; u_0)| \leq \phi^\varepsilon(x) + \delta \quad \text{para todo } x \in \Omega \quad t > T_0$$

*para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .*

Además, al igual que en la Sección 10.1.8, como consecuencia de los resultados obtenidos en la Sección 2.2.3 (ver también Arrieta et al. [10]) se tienen las siguientes estimaciones uniformes para las soluciones de (10.2.13)

**Teorema 10.2.11** *En las condiciones del Teorema 10.1.15, fijado  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $K_\varepsilon > 0$  tal que*

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_X^\varepsilon} \sup_{0 \leq \alpha < 1} \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{H^{2\alpha}(\Omega)} \} \leq K_\varepsilon.$$

De nuevo, como en la Sección 10.1.8 existe una cota uniforme en  $L^\infty$  y  $H^1$  de los atractores de los problemas (10.2.17) (es decir, si fijamos  $\alpha = 1/2$ , la constante  $K_\varepsilon$  que aparece en el Teorema 10.2.11 puede ser tomada independiente de  $\varepsilon$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño). Concretamente se tiene el siguiente lema cuya prueba sigue la línea de la prueba del Lema 10.1.18.

**Lema 10.2.12** *Para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{u \in \mathcal{A}^\varepsilon} (\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)}) \leq K \quad (10.2.18)$$

*con  $K$  independiente de  $\varepsilon$ .*

Por último, como consecuencia de los resultados obtenidos en el Capítulo I tenemos

**Teorema 10.2.13** *En las condiciones del Teorema 10.1.15, existen dos equilibrios extremales  $\varphi_m^\varepsilon \leq \varphi_M^\varepsilon$  tales que  $\mathcal{A}^\varepsilon \subset [\varphi_m^\varepsilon, \varphi_M^\varepsilon]$ ,  $\varphi_m^\varepsilon, \varphi_M^\varepsilon \in \mathcal{A}^\varepsilon$  y*

$$\varphi_m^\varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t, x; u_0) \leq \varphi_M^\varepsilon$$

*uniformemente en  $x \in \Omega$  para  $u_0$  en acotados de  $X$ .*

### 10.2.9. El problema parabólico límite

El problema parabólico límite no lineal asociado a (10.1.10) viene dado por

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_0(x)\nabla u) + c(x)u &= f(x, u) & \text{en } \Omega_1 \\ u &= u_{\Omega_0} & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \dot{u}_{\Omega_0} + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \frac{1}{|\Omega_0|} \left( \int_{\Omega_0} c(x) + \int_{\Gamma} b \right) u_{\Omega_0} &= \int_{\Omega_0} f(x, u_{\Omega_0}) + \frac{|\Gamma|}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma} g(x, u_{\Omega_0}) & \text{en } \Omega_0 \end{cases} \quad (10.2.19)$$

Nótese que gracias a las cotas uniformes en  $L^\infty$  para las soluciones en el atractor dadas en 10.2.12 podemos truncar las funciones  $f$  y  $g$  y suponer, sin falta de generalidad, que son globalmente Lipschitz. Esto va a ser fundamental a la hora de tratar este problema límite.

Aunque el problema límite no es un problema estándar, podemos concluir la existencia global de soluciones y de atractor para este problema como mostramos en el siguiente teorema.

**Teorema 10.2.14** Sea  $X = L^2(\Omega)$ . Supongamos que  $f$  y  $g$  son globalmente Lipschitz en  $u$ . Entonces, dado  $u_0 \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ , existe una única solución local del problema (10.2.19). Además, dichas soluciones verifican el principio de comparación.

Supongamos además que  $f$  y  $g$  verifican (10.2.14) y (10.2.15). Entonces, las soluciones del problema (10.2.19) son globales.

Por último supongamos que se tiene la propiedad  $(D)_0$ . Entonces, existe  $\mathcal{A}^0$  el atractor global del problema (10.2.19) que es compacto en  $H^1(\Omega)$  y acotado en  $L^\infty(\Omega)$ . Además, existen dos soluciones extremales  $\varphi_m^0 \leq \varphi_M^0$  tales que  $\mathcal{A}^0 \subset [\varphi_m^0, \varphi_M^0]$  y

$$\varphi_m^0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u^0(t, x; u_0) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u^0(t, x; u_0) \leq \varphi_M^0$$

uniformemente en  $x \in \Omega$  para  $u_0$  en acotados de  $X$ .

**Demostración.** El operador de Nemitski asociado a  $h = f_\Omega + g_\Gamma$  está bien definido y sigue siendo globalmente Lipschitz de  $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$  en  $L^2_{\Omega_0}(\Omega)$  (nótese que podemos definir la traza de una función de  $L^2(\Omega)$  como su valor constante en  $\Omega_0$ ). Por tanto la existencia local del problema se sigue de la teoría general para ecuaciones parabólicas (ver Henry [28]).

Veamos ahora que el problema (10.2.16) verifica el principio de comparación. En efecto, sabemos que los problemas elípticos aproximados (10.2.5) verifican tal principio, es decir, si  $u^\varepsilon, v^\varepsilon$  son solución del problema elíptico (10.2.5) con términos no homogéneos  $f, \tilde{f} \in L^2_{\Omega_0}(\Omega)$ ,  $f \leq \tilde{f}$ , respectivamente, entonces  $u^\varepsilon \leq v^\varepsilon$ . Ahora bien, pasando al límite en  $\varepsilon$  tenemos, por el Corolario 10.2.5,  $u \leq v$ . Luego, se verifica el principio de comparación (ver Apéndice A en Arrieta et al. [10]).

La existencia global para (10.2.19) se tiene ya que  $f$  y  $g$  verifican (10.2.14) y (10.2.15) y se tiene el principio de comparación. La existencia de atractor se tiene por la propiedad de disipación  $(D)_0$ . La existencia de equilibrios extremales se sigue del Teorema 2.2.2.

Queda probar la acotación  $L^\infty$  del atractor. Para ello denotamos por  $\mathcal{A}_0$  dicho atractor. Por el principio de comparación y las propiedades (10.2.14) y (10.2.15) tenemos que  $|u(t, u_0)| \leq v(t, |u_0|)$  donde  $u$  es la solución del problema no lineal (10.2.19) y  $v$  denota la solución del problema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_t - \operatorname{div}(d_0(x)\nabla v) + (c(x) - C_\Omega(x))v = D_\Omega(x) & \text{en } \Omega_1 \\ v = v_{\Omega_0} & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \dot{v}_{\Omega_0} + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + \frac{1}{|\Omega_0|} \left( \int_{\Omega_0} (c(x) - C_\Omega(x)) + \int_{\Gamma} (b(x) - C_\Gamma(x)) \right) v_{\Omega_0} \\ = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} D_\Omega(x) + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma} D_\Gamma(x) & \text{en } \Omega_0 \end{array} \right.$$

que podemos escribir como  $v_t + \tilde{A}_0 v = h$  donde  $h = D_\Omega(x)\chi_{\Omega_1} + \frac{1}{|\Omega_0|} (\int_{\Omega_0} D_\Omega + \int_{\Gamma} D_\Gamma)\chi_{\Omega_0}$ . Sea  $\phi^0$  el único punto de equilibrio de este problema. Por el Teorema 10.2.4,  $\phi^\varepsilon \rightarrow \phi^0$  en  $H^1(\Omega)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, por la Proposición 10.2.12 sabemos que  $\|\phi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$  luego  $\phi^0 \in L^\infty(\Omega)$ . Si denotamos  $w(t, u_0) = u(t, u_0) - \phi^0 = e^{-\tilde{A}_0 t}(|u_0| - \phi^0)$  tenemos, por el Corolario 10.2.9

$$\|v(t, u_0) - \phi^0\|_{L^\infty} \leq M t^{-k} (\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Luego, por comparación,

$$\|u(t, u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi^0\|_{L^\infty(\Omega)} + M t^{-k} (\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Por tanto, haciendo tender  $t \rightarrow \infty$  se tiene

$$\mathcal{A}_0 \subset \{u \in H^1_{\Omega_0}(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi^0\|_{L^\infty(\Omega)}\} \subset L^\infty(\Omega).$$

■

Enunciamos ahora el análogo a la Proposición 10.1.21 que establece a acotación uniforme de  $\mathcal{A}^0$ , el atractor del problema (10.2.19).

**Proposición 10.2.15** Existe una constante  $K_0$  tal que

$$\sup_{u \in \mathcal{A}^0} \{\|u\|_{H^1(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g(u)\|_{L^\infty(\Gamma)}\} \leq K_0.$$

### 10.2.10. Semicontinuidad superior de los atractores

En esta sección probaremos la semicontinuidad superior de los atractores de los problemas (10.2.13) y (10.2.19) en  $\varepsilon = 0$ . Para ello seguiremos los argumentos de la Sección 10.1.10 (ver también Sección 5.1 de Arrieta et al. [10]). Las pruebas de los resultados que enunciaremos a continuación son similares a los resultados análogos en la Sección 10.1.10 por ello, sólo daremos el enunciado y el resultado correspondiente en dicha sección.

Para probar la semicontinuidad superior, necesitamos en primer lugar, la acotación uniforme de los atractores. Dicha acotación uniforme viene dada por los resultados del Lema 10.2.12 y la Proposición 10.2.15.

El siguiente resultado compara la dinámica asintótica de los problemas (10.1.19) y (10.1.28) en la métrica de  $H^1(\Omega)$  (ver Teorema 10.1.22 en la Sección 10.1.10 o Teorema 5.2 de Arrieta et al. [10]).

**Teorema 10.2.16** *Los atractores globales,  $\mathcal{A}_\varepsilon$  y  $\mathcal{A}_0$ , son semicontinuos superiormente para  $\varepsilon = 0$  en  $H^1(\Omega)$ .*

También se tiene convergencia de las trayectorias en los atractores (ver Proposición 10.1.23 en la Sección 10.1.10 o Proposición 5.3 de Arrieta et al. [10]).

**Proposición 10.2.17** *Sea  $\varepsilon_k$  una sucesión tal que  $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_0)$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y  $\phi_{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$  tal que  $\phi_{\varepsilon_k} \rightarrow \phi_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , en  $H^1(\Omega)$ . Entonces,  $u^0(\cdot)$ , la órbita positiva que pasa por  $\phi^0$ , verifica  $u^0(\cdot) \subset \mathcal{A}_0$ . Además,*

$$u^{\varepsilon_k} \rightarrow u^0 \quad \text{en } C([0, T], H^1(\Omega)), \text{ cuando } k \rightarrow \infty \text{ para todo } T > 0 \quad (10.2.20)$$

donde  $u^{\varepsilon_k}(\cdot) \subset \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$  es la órbita positiva que pasa por  $\phi_{\varepsilon_k}$  y  $u^0(\cdot)$  es la órbita positiva que pasa por  $\phi_0$ .

Con esto, se puede probar el siguiente resultado (ver Corolario 10.1.24 en la Sección 10.1.10 o Corolario 5.3 de Arrieta et al. [10])

**Corolario 10.2.18** *Par toda sucesión  $\varepsilon_k$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y para toda sucesión de órbitas completas  $u^{\varepsilon_k}(\cdot) \subset \mathcal{A}_{\varepsilon_k}$ , existen una subsucesión  $\varepsilon_{k_j}$  y una órbita completa  $u^0(\cdot) \subset \mathcal{A}_0$  tales que*

$$u^{\varepsilon_{k_j}}(\cdot) \rightarrow u^0(\cdot) \quad \text{en } C([-T, T], H^1(\Omega)), \text{ cuando } j \rightarrow \infty \text{ para todo } T > 0.$$

Por último, enunciaremos a continuación una propiedad de convergencia de los equilibrios de los problemas aproximados a equilibrios del problema límite.

**Corolario 10.2.19** *Para toda sucesión  $\varepsilon_k$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , y para toda sucesión de equilibrios  $\varphi^{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_\varepsilon$ , existen una subsucesión  $\varepsilon_{k_j}$  y un equilibrio  $\varphi^0 \in \mathcal{A}_0$  del problema límite tales que*

$$\varphi^{\varepsilon_{k_j}} \rightarrow \varphi^0 \quad \text{en } H^1(\Omega), \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

Al igual que en el primer ejemplo, una vez probada la convergencia de equilibrios a equilibrios, una cuestión interesante es cuándo los equilibrios extremales aproximados convergen al equilibrio extremal del problema límite, es decir, en el caso de los equilibrios extremales

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_M^\varepsilon = \varphi_M^0 \quad (10.2.21)$$

(análogamente para los equilibrios minimales).

Nótese que en particular, del Corolario 10.2.19, hemos obtenido que para cualquier  $\varphi^0$  punto de acumulación en  $H^1(\Omega)$  del conjunto formado por los equilibrios maximales de los problemas aproximados  $\{\varphi_M^\varepsilon\}$ , se tiene

$$\varphi^0 \leq \varphi_M^0.$$

El problema de nuevo es obtener la otra desigualdad.

La siguiente propiedad análoga a la propiedad (P) de la Sección 10.1.10 va a garantizar la otra desigualdad (la prueba es análoga, ver Sección 10.1.10 para más detalles).

**(P)** En todo entorno de  $\varphi_M^0$  existe un equilibrio de los problemas aproximados, es decir, existe una sucesión de equilibrios de los problemas aproximados  $\{\varphi^{\varepsilon_n}\}$  tales que  $\varphi^{\varepsilon_n} \rightarrow \varphi_M^0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Parte IV**  
**Apéndice**



# Apéndice A

## Algunas definiciones y resultados previos

### A.1. Sobre la Teoría de Semigrupos.

Sea  $X$  un espacio de Banach con norma  $\|\cdot\|$ . Consideramos el problema de evolución

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x \in X \end{cases}$$

donde  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal en  $X$ . Denotamos por  $e^{tA}$  el semigrupo generado por  $A$ .

**Definición A.1.1** *Se dice que  $A$  es un operador sectorial si existen constantes  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in (\pi/2, \pi)$ ,  $M > 0$  tales que*

$$\text{I) } \rho(A) \supset S_{\theta, \omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}.$$

$$\text{II) } \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad \forall \lambda \in S_{\theta, \omega}.$$

Nótese que no estamos pidiendo, en la definición anterior, que el dominio del operador  $A$ ,  $D(A)$ , sea denso en  $X$ . En particular, no pedimos que el semigrupo generado por  $A$  sea fuertemente continuo.

$D(A)$  es denso en  $X$  si y sólo si el semigrupo generado por  $A$  es fuertemente continuo. Esto se tiene de la propiedad siguiente

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tA}x = x \iff x \in \overline{D(A)}$$

(ver Proposición 2.1.4 de Lunardi [36], pag. 38).

**Definición A.1.2** *Diremos que un semigrupo  $S(t)$  es analítico si la aplicación  $t \mapsto S(t)$  es analítica de  $(0, \infty)$  a  $\mathcal{L}(X)$ , donde por  $\mathcal{L}(X)$  denotamos el espacio de aplicaciones lineales de  $X$  en  $X$ .*

Una propiedad importante es la siguiente

**Proposición A.1.3** *Si  $A$  es sectorial entonces  $e^{tA}$  es analítico.*

Para terminar, enunciamos una propiedad sobre el efecto regularizante del semigrupo generado por  $A$ .

**Proposición A.1.4** *Dado  $x \in X$ ,  $e^{tA}x \in D(A)$  para todo  $t > 0$ .*



## A.2. Algunos resultados de la teoría de atractores

En esta sección recordamos algunas definiciones y enunciamos una serie de resultado sobre la teoría de atractores que usaremos en lo que sigue. Para más detalle véase Hale [26].

Sea  $X$  un espacio de Banach y  $S(t)$  un semigrupo en  $X$ .

**Definición A.2.1** Dado  $x \in X$ , se define la semi-órbita positiva que parte de  $x$  como  $\gamma^+(x) = \{S(t)x, t \geq 0\}$ . Dado  $B \subset X$  se define  $\gamma^+(B) = \cup_{x \in B} \gamma^+(x)$

**Definición A.2.2** Si  $\gamma_+(x)$  es relativamente compacta, se define el  $\omega$ -límite de  $x$  como

$$\omega(x) = \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t)x}.$$

Dado un conjunto  $B \subset X$  definimos el  $\omega$ -límite de  $B$  como

$$\omega(B) = \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t)B}.$$

**Proposición A.2.3** Sea  $x_0 \in X$ . Podemos caracterizar  $\omega(x_0)$  como los elementos  $x \in X$  tales que existe una sucesión  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  tendiendo a  $\infty$  tales que  $T(t_n)x_0 \rightarrow x$ . Dado un conjunto  $B \subset X$ , podemos caracterizar los elementos de  $\omega(B)$  como los elementos  $x \in X$  tales que existen una sucesión  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  tendiendo a  $\infty$  y una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset B$  tales que  $T(t_n)x_n \rightarrow x$

**Definición A.2.4** Decimos que un conjunto  $A \subset X$  atrae a  $B \subset X$  si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)B, A) \rightarrow 0.$$

**Definición A.2.5** Decimos que  $S(t)$  es puntualmente disipativo si existe un acotado  $B \subset X$  tal que atrae todo punto de  $X$ .

**Definición A.2.6** Decimos que  $B \subset X$  es un conjunto absorbente para  $S(t)$  si para todo acotado  $D \subset X$  existe  $t_0 > 0$  tal que para todo

$$S(t)D \subset B \text{ para todo } t > t_0.$$

**Definición A.2.7** Un conjunto  $A \subset X$  se dice positivamente invariante si  $S(t)A \subset A$  para todo  $t > 0$ .

Un conjunto  $A \subset X$  se dice invariante si  $S(t)A = A$  para todo  $t > 0$ .

**Definición A.2.8** Se dice que un conjunto  $A \subset X$  es un atractor global para  $S(t)$  si verifica

1.  $A$  es maximal compacto e invariante.
2.  $A$  atrae a todos los acotados de  $X$ .

**Teorema A.2.9** Supongamos que existe un conjunto absorbente y compacto,  $B$ . Entonces  $A = \omega(B)$ . Además, si  $B$  es conexo entonces  $A$  es conexo.

**Definición A.2.10** Decimos que  $S(t)$  es asintóticamente regular si para todo conjunto cerrado, acotado, no vacío,  $B \subset X$  tal que  $S(t)B \subset B$  para todo  $t > 0$ , existe un compacto  $J \subset B$  tal que  $J$  atrae a  $B$ .

**Definición A.2.11** Decimos que  $S(t)$  es asintóticamente compacto (o de clase  $AK$ ) si para todo acotado  $B \subset X$  tal que  $\{S(t)B\}_{t \geq 0}$  es acotado se tiene que toda sucesión  $\{S(t_j)x_j\}_j$ , con  $x_j \in B$  y  $t_j \uparrow \infty$ , es precompacta.

**Nota A.2.12** En el caso en que las órbitas estén acotadas, la propiedad de ser asintóticamente compacto equivale a ser asintóticamente regular dada por Hale en [26]. En esta misma referencia se dan algunas propiedades suficientes para tener que el semigrupo sea asintóticamente regular.

**Definición A.2.13** *Decimos que  $S(t)$  es condicionalmente completamente continuo para  $t \geq t_1$  si para todo  $t \geq t_1$  y cada acotado  $B$  de  $X$  para el cual el conjunto  $\{S(s)B : 0 \leq s \leq t\}$  sea acotado, se tiene que  $S(t)B$  es precompacto.*

*Diremos que  $S(t)$  es completamente continuo si es condicionalmente completamente continuo y para todo acotado  $B$  y  $t \geq 0$ , el conjunto  $\{S(s)B : 0 \leq s \leq t\}$  es acotado.*

**Proposición A.2.14 (Corolario 3.2.2 de [26], pag. 37)** *Un semigrupo condicionalmente completamente continuo para  $t \geq t_0$  es asintóticamente regular.*

**Teorema A.2.15 (Teorema 3.4.6, pag. 39 de [26])** *Sea  $S(t) : X \rightarrow X$ ,  $t \geq 0$ , asintóticamente regular y puntualmente disipativo. Supongamos, además, que toda órbita de un conjunto acotado es acotada.*

*Entonces, existe un atractor global  $\mathcal{A}$  para  $S(t)$ . Es más, si  $S(t)$  es inyectivo en  $\mathcal{A}$  entonces  $S(t)|_{\mathcal{A}}$  es un grupo. Por último, si además  $X$  es un espacio de Banach, entonces  $\mathcal{A}$  es conexo.*

**Teorema A.2.16 (Teorema 3.4.8, pag. 40 de [26])** *Si existe  $t_1 \geq 0$  tal que  $S(t) : X \rightarrow X$ ,  $t \geq 0$ , es completamente continuo para todo  $t > t_1$  y puntualmente disipativo entonces existe un atractor global  $\mathcal{A}$  para  $S(t)$ .*

*Si  $X$  es un espacio de Banach entonces  $\mathcal{A}$  es conexo y, si  $t_1 = 0$  entonces existe un punto de equilibrio para  $S(t)$ . Si, además, si  $S(t)$  es inyectivo en  $\mathcal{A}$  entonces  $S(t)|_{\mathcal{A}}$  es un grupo*



## Apéndice B

# Existencia y unicidad de solución de problemas lineales.

### B.1. El semigrupo en $L^\infty(\Omega)$ . $\Omega$ acotado.

En primer lugar vamos a estudiar un caso especial que, como veremos más adelante, será de gran utilidad. Nos planteamos el estudio del problema en  $X = L^\infty(\Omega)$ . En este caso, el semigrupo pierde la propiedad de ser fuertemente continuo (es decir, no es continuo en  $t = 0$ ) pero sigue siendo analítico para  $t > 0$ .

Comenzamos con el resultado para el semigrupo lineal generado por un operador de la forma

$$Au \equiv -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + c(x)u$$

o de la forma

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^N a_i(x)\partial_i u + a(x)u,$$

en ambos casos asumiendo que los coeficientes poseen cierta regularidad adecuada.

El operador de contorno  $\mathcal{B}$  es del tipo

$$\mathcal{B}u = u \quad (\text{condiciones de contorno tipo Dirichlet})$$

o bien,

$$\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + b(x)u \quad (\text{condiciones de contorno tipo Robin}).$$

sin restricción de signo sobre  $b \in C^1(\partial\Omega)$ .

En concreto, para condiciones de contorno tipo Dirichlet se tiene el siguiente resultado (ver Corolario 3.1.21 de Lunardi [36], pag. 97).

**Teorema B.1.1** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto acotado.*

1. *Consideramos la realización del operador  $A$  en  $L^\infty(\Omega)$ , que denotamos  $A_\infty$*

$$\begin{cases} D(A_\infty) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in L^\infty(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_\infty : D(A_\infty) \longrightarrow L^\infty(\Omega), \quad A_\infty u = Au \end{cases}$$

*Entonces,  $A_\infty$  es sectorial,*

$$D(A_\infty) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

*y*

$$\overline{D(A_\infty)} = C_D(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u_{\partial\Omega} = 0\}.$$

2. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $C(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_\infty$

$$\begin{cases} D(A_0) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in C(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_0 : D(A_0) \longrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad A_0 u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_0$  es sectorial,

$$D(A_0) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_0)} = C_D(\overline{\Omega}).$$

En el caso de condiciones de contorno tipo Robin el resultado es el siguiente (ver Corolario 3.1.24 de Lunardi [36], pag. 100).

**Teorema B.1.2** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado.

1. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $L^\infty(\Omega)$ , que denotamos  $A_{1\infty}$

$$\begin{cases} D(A_{1\infty}) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in L^\infty(\Omega), Bu|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_{1\infty} : D(A_{1\infty}) \longrightarrow L^\infty(\Omega), \quad A_{1\infty} u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_{1\infty}$  es sectorial,

$$D(A_{1\infty}) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{1\infty})} = C(\overline{\Omega}).$$

2. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $C(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_1$

$$\begin{cases} D(A_1) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in C(\overline{\Omega}), Bu|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_1 : D(A_1) \longrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad A_1 u = Au \end{cases}$$

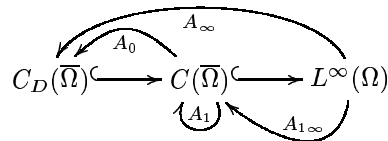
Entonces,  $A_1$  es sectorial,

$$D(A_1) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_1)} = C(\overline{\Omega}).$$

En el siguiente esquema, que resume los resultados anteriores, mostramos cuál es el dominio del operador  $A$  tomando diferentes espacios base. Concretamente, el esquema muestra relaciones de la forma  $X \xrightarrow{A} \overline{D(A)}$ , donde  $X$  es el espacio base. En particular, esto muestra el efecto regularizante del semigrupo generado por  $A$  para  $t > 0$ .



## B.2. El semigrupo en $L^\infty(\Omega)$ . $\Omega$ no acotado

Comenzamos suponiendo que  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Denotaremos

$$BC(\mathbb{R}^N) = C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

es decir, el espacio de funciones continuas y acotadas de  $\mathbb{R}^N$ ; y

$$BUC(\mathbb{R}^N) = \{u \in BC(\mathbb{R}^N) : u \text{ es uniformemente continua en } \mathbb{R}^N\},$$

es decir, el espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas de  $\mathbb{R}^N$ .

En este caso, tenemos el siguiente resultado sobre la generación de semigrupos en  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$  (ver Teorema 3.1.7, pag. 78 y Corolario 3.1.9, pag. 81 de Lunardi [36]).

**Teorema B.2.1** *Se tiene,*

1. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , que denotamos  $A_\infty$

$$\begin{cases} D(A_\infty) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N) : Au, u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)\} \\ A_\infty : D(A_\infty) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad A_\infty u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_\infty$  es sectorial,

$$D(A_\infty) \subset C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_\infty)} = BUC(\mathbb{R}^N).$$

2. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BC(\mathbb{R}^N)$ , que denotamos  $A_C$

$$\begin{cases} D(A_C^D) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N) : Au, u \in BC(\mathbb{R}^N)\} \\ A_C : D(A_C) \longrightarrow BC(\mathbb{R}^N), \quad A_C u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_C$  es sectorial,

$$D(A_C) \subset C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_C)} = BUC(\mathbb{R}^N).$$

3. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BUC(\mathbb{R}^N)$ , que denotamos  $A_{UC}$

$$\begin{cases} D(A_{UC}^D) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N) : Au, u \in BUC(\mathbb{R}^N)\} \\ A_{UC} : D(A_{UC}) \longrightarrow BUC(\mathbb{R}^N), \quad A_{UC} u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_{UC}$  es sectorial,

$$D(A_{UC}) \subset C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{UC})} = BUC(\mathbb{R}^N).$$

4. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BUC_0(\mathbb{R}^N)$ , que denotamos  $A_0$

$$\begin{cases} D(A_0) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N) : Au, u \in BUC_0(\mathbb{R}^N)\} \\ AD_0 : D(A_0) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^N), \quad A_{BUC_0} u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_0$  es sectorial,

$$D(A_0^D) \subset C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_0)} = BUC_0(\mathbb{R}^N).$$

Con la notación anterior, el siguiente esquema refleja el dominio del operador  $A$  y el efecto regularizante, para  $t > 0$ , del semigrupo generado por  $A$ , tomando diferentes espacios base.

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{A_0}{\curvearrowright} & & \overset{A_{UC}}{\curvearrowright} & \overset{A_C}{\curvearrowright} & \overset{A_\infty}{\curvearrowright} & \\ C_0 \equiv BUC_0(\mathbb{R}^N) & \hookrightarrow & BUC(\mathbb{R}^N) & \hookrightarrow & BC(\mathbb{R}^N) & \hookrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

En el caso en que  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$  debemos distinguir entre el caso de condiciones de Dirichlet en la frontera y condiciones Robin (o Neumann).

Para condiciones de contorno Dirichlet en un dominio no acotado, introducimos los espacios de funciones que incorporan las condiciones de contorno en la frontera de  $\Omega$  (que denotamos por el subíndice  $D$ ). Tenemos el siguiente resultado (ver Corolario 3.1.21 de Lunardi [36], pag. 97).

**Teorema B.2.2** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto no acotado,  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ .

1. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $L^\infty(\Omega)$ , que denotamos  $A_\infty^D$

$$\begin{cases} D(A_\infty^D) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in L^\infty(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_\infty^D : D(A_\infty^D) \longrightarrow L^\infty(\Omega), \quad A_\infty^D u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_\infty^D$  es sectorial,

$$D(A_\infty^D) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_\infty^D)} = BUC_D(\overline{\Omega}).$$

2. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BC(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_C^D$

$$\begin{cases} D(A_C^D) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in BC(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_C^D : D(A_C^D) \longrightarrow BC(\overline{\Omega}), \quad A_C^D u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_C^D$  es sectorial,

$$D(A_C^D) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_C^D)} = BUC_D(\overline{\Omega}).$$

3. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BUC(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_{UC}^D$

$$\begin{cases} D(A_{UC}^D) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in BUC(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_{UC}^D : D(A_{UC}^D) \longrightarrow BUC(\overline{\Omega}), \quad A_{UC}^D u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_{UC}^D$  es sectorial,

$$D(A_{UC}^D) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{UC}^D)} = BUC_D(\overline{\Omega}).$$

4. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BUC_0(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_0^D$

$$\begin{cases} D(A_0^D) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in BUC_0(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_0^D : D(A_0^D) \longrightarrow C_0(\overline{\Omega}), \quad A_0^D u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_0^D$  es sectorial,

$$D(A_0^D) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_0^D)} = BUC_{0,D}(\overline{\Omega}).$$

Para condiciones de contorno Robin (o Neumann) podemos plantear el problema sin necesidad de introducir espacios que incorporen condiciones de contorno. El resultado que se tiene es el siguiente (ver Corolario 3.1.24 en Lunardi [36], pag. 100)

**Teorema B.2.3** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto no acotado,  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ .

1. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $L^\infty(\Omega)$ , que denotamos  $A_{1\infty}$

$$\begin{cases} D(A_{1\infty}) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in L^\infty(\Omega), Bu|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_{1\infty} : D(A_{1\infty}) \longrightarrow L^\infty(\Omega), \quad A_{1\infty} u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_{1\infty}$  es sectorial,

$$D(A_{1\infty}) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{1\infty})} = BUC(\overline{\Omega}).$$

2. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BC(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_{1C}$

$$\begin{cases} D(A_{1C}) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in BC(\overline{\Omega}), Bu|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_{1C} : D(A_{1C}) \longrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad A_{1C} u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_{1C}$  es sectorial,

$$D(A_{1C}) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{1C})} = BUC(\overline{\Omega}).$$



3. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BUC(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_{1UC}$

$$\begin{cases} D(A_{1UC}) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in BUC(\overline{\Omega}), Bu|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_{1UC} : D(A_{1UC}) \rightarrow C(\overline{\Omega}), \quad A_{1UC}u = Au \end{cases}$$

Entonces,  $A_{1UC}$  es sectorial,

$$D(A_{1UC}) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{1UC})} = BUC(\overline{\Omega}).$$

4. Consideramos la realización del operador  $A$  en  $BUC_0(\overline{\Omega})$ , que denotamos  $A_{10}$

$$\begin{cases} D(A_{10}) = \{u \in \bigcap_{p \geq 1} W_{loc}^{1,p}(\Omega) : Au, u \in BUC_0(\overline{\Omega}), Bu|_{\partial\Omega} = 0\} \\ A_{10} : D(A_{10}) \rightarrow C(\overline{\Omega}), \quad A_{10}u = Au \end{cases}$$

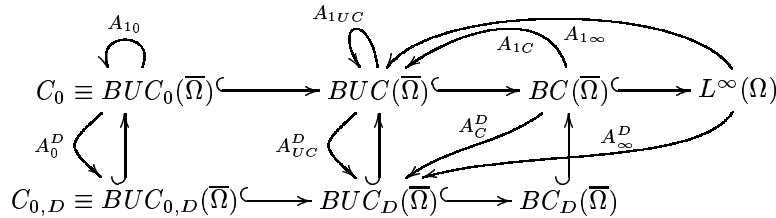
Entonces,  $A_{10}$  es sectorial,

$$D(A_{10}) \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1$$

y

$$\overline{D(A_{10})} = BUC_0(\overline{\Omega}).$$

En el siguiente diagrama se muestra un resumen de los resultados anteriores acerca de la generación de semigrupos analíticos en  $L^\infty(\Omega)$  para  $\Omega$  un dominio no acotado de  $\mathbb{R}^N$ . Como en los diagramas anteriores se muestra  $X \xrightarrow{A} \overline{D(A)}$ . En particular, reflejan también el efecto regularizante del semigrupo generado por  $A$  para  $t > 0$ .



### B.3. El semigrupo no lineal

Consideramos ahora el problema

$$\begin{cases} u_t + Au = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u(0) = u_0 \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.3.1})$$

con  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $(x, u)$  y localmente Lipschitz en  $u$  y los operadores  $A$  y  $\mathcal{B}$  como antes. Entonces se tiene el siguiente resultado (ver Proposición 7.1.2 de Lunardi [36], pag. 258).

**Teorema B.3.1** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado o no de  $\mathbb{R}^N$ . Supongamos que  $f$  es localmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, dado  $u_0 \in X$  existe una solución local del problema  $u \in C([0, \delta]; X) \cap C((0, \delta]; D(A))$  ( $\delta > 0$ ) que viene dada por la fórmula de variación de las constantes*

$$u(t, x; u_0) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(u(s))ds, \quad 0 \leq t \leq \delta. \quad (\text{B.3.2})$$

Si  $u_0 \in D(A)$  entonces,  $u \in C([0, \delta]; D(A))$ . Además,  $u$  es la única solución del problema en  $C([0, \delta]; X) \cap C^1((0, \delta]; X)$ .

## B.4. Sobre la monotonia de soluciones.

Como hemos mencionado en la introducción, una de las principales herramientas que vamos a emplear son los métodos de monotonia. Enunciamos a continuación una serie de resultados relacionados con estos métodos (ver Apéndice A de Arrieta et al. [10]).

El primer resultado establece el principio de comparación para el problema

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t, x, u) & \text{en } \Omega \\ u(0) = u_0 \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.4.3})$$

(ver Apéndice A de Arrieta et al. [10]).

**Teorema B.4.1** Sean  $f, g : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas, localmente Hölder en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ . Supongamos que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$  y  $u \in \mathbb{R}$  se tiene

$$f(t, x, u) \leq g(t, x, u).$$

Entonces, si  $u_0 \leq v_0$  son dos datos iniciales ordenados de  $X$ , se tiene

$$u_f(t, s, x; u_0) \leq u_g(t, s, x; v_0)$$

mientras ambas soluciones existan, donde hemos denotado por  $u_f(t, s, x; u_0)$  la solución a tiempo  $t$  del problema (6.1.1) con dato inicial  $u_0$  a tiempo  $s$  y término no lineal  $f$ .

Mostramos ahora una serie de resultados abstractos que son de gran utilidad en esta memoria. Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t, u) & \text{en } \Omega \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{B.4.4})$$

planteado en un espacio de Banach  $X$  dotado de un orden ' $\leq$ '. Supongamos que  $A$  es sectorial y que  $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  es localmente Hölder en tiempo y localmente Lipschitz en  $u$ . En estas condiciones existe una solución local del problema (B.4.4) que viene dada por la fórmula de variación de las constantes

$$u(t) = S(t-s)u_0 + \int_s^t S(t-r)f(r, u(r)) dr$$

donde  $S(t)$  denota el semigrupo generado por  $A$  a tiempo  $t$ .

A continuación damos una definición del concepto de subsolución y supersolución del problema B.4.4 en un sentido generalizado (ver Apéndice A en Arrieta et al. [10]).

**Definición B.4.2** Decimos que  $v(t) \in C([0, \delta], X^\alpha)$  es una subsolución para el problema (B.4.4) si

$$v(t) \leq S(t)v(s) + \int_s^t S(t-r)f(r, v(r)) dr$$

para todos  $0 \leq s \leq t \leq \delta$ .

Decimos que  $v(t)$  es una supersolución para el problema (B.4.4) si

$$v(t) \geq S(t)v(s) + \int_s^t S(t-r)f(r, v(r)) dr$$

para todos  $0 \leq s \leq t \leq \delta$ .

Si estamos trabajando en un espacio  $X$  suficientemente regular, toda subsolución así definida verifica la siguiente desigualdad

$$u_t + Au \leq f(t, u)$$

en el sentido de las distribuciones o incluso puntualmente.

Se tiene el siguiente resultado de Arrieta et al. [10] del cuya prueba damos una breve idea.

**Teorema B.4.3 (Teorema A.12 de [10])** *Supongamos que  $f$  es creciente. Sea  $v(t)$  una subsolución de (B.4.4). Entonces,*

$$v(t) \leq u(t; v(0))$$

*mientras ambas soluciones existan. El resultado para supersoluciones es análogo con la desigualdad inversa.*

**Demostración.** Sabemos que  $u$  es el único punto fijo de la fórmula de variación de las constantes

$$u(t) = \mathcal{F}(u) = S(t)v(0) + \int_s^t S(t-r)f(r, u(r))dr$$

en

$$V = \{z \in C([0, \delta], X^\alpha) : \|u(t) - v(0)\|_{X^\alpha} \leq \alpha\}.$$

Sea ahora

$$\tilde{V} = \{z \in V : v(t) \leq z(t)\}.$$

Ahora bien, se puede comprobar que  $\mathcal{F}(\tilde{V}) \subset \tilde{V}$  y por tanto, el único punto de  $F$  en  $V$  está en realidad en  $\tilde{V}$  y, por tanto,  $v(t) \leq u(t; v(0))$ . ■

Supongamos en adelante que  $f$  no depende de  $t$ , es decir, el problema (B.4.4) es autónomo. Entonces, Para el problema elíptico asociado tenemos que para que  $v$  sea subsolución debe verificar

$$v \leq S(t)v + \int_0^t S(t-s)f(v)ds$$

para todo tiempo  $t \geq 0$ . Haciendo ahora tender  $t$  a infinito, tenemos,

$$v \leq \int_0^\infty S(t)f(v)ds$$

supuesto que  $S(t) \rightarrow 0$  exponencialmente cuando  $t \rightarrow \infty$ , que no es más que la desigualdad para la ecuación de punto fijo que debe verificar un punto de equilibrio del problema elíptico asociado:

$$v = \int_0^\infty S(t)f(v)ds.$$

**Nota B.4.4** *Si la subsolución es suficientemente regular, la definición anterior es equivalente a la definición clásica para problemas elípticos y parabólicos.*

Enunciamos a continuación un lema que son de gran utilidad en esta memoria.

**Lema B.4.5** *Sea  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz. Sea  $\underline{u} \in X$  una subsolución del problema elíptico*

$$Au = f(u) \tag{B.4.5}$$

*Entonces, si el problema parabólico*

$$\begin{cases} u_t + Au &= f(u) \\ u(0) &= \underline{u} \end{cases} \tag{B.4.6}$$

*está bien puesto, la solución que parte de  $\underline{u}$  es monótona creciente.*

*De manera análoga si  $\bar{u}$  es una subsolución del problema elíptico, entonces la solución del problema parabólico que parte de  $\bar{u}$  es monótona decreciente.*

**Nota B.4.6** *Este resultado es una extensión del Teorema 3.3 (para soluciones  $C^{2\alpha}(\Omega)$ ) y del Teorema 3.4 (para soluciones  $L^2(\Omega)$ ) de Sattinger [44] (pag. 986) donde se prueba el resultado en el marco clásico, en el que se supone regularidad de las sub-supersoluciones.*

**Nota B.4.7** *El resultado sigue siendo válido si  $\underline{u}$  es subsolución para tiempos pequeños. En efecto, en tal caso, tenemos que  $u(t, x; \underline{u})$  es no decreciente para todo tiempo  $0 \leq t \leq t_0$ . Por el principio de monotonía, dados  $0 \leq t \leq t_0$  tenemos, para todo  $s \geq 0$*

$$\underline{u} \leq u(t, x; \underline{u}) \leq u(t + s, x; \underline{u}).$$

Luego,  $u(t, x; \underline{u})$  es no decreciente.

**Demostración.** Probamos el resultado para la subsolución. El resultado para la supersolución se obtiene de manera análoga.

Por ser  $\underline{u}$  subsolución del problema elíptico (B.4.5) se tiene que también lo es del problema parabólico B.4.6. Aplicando ahora el Teorema B.4.3 tenemos

$$\underline{u} \leq u(s, x; \underline{u})$$

mientras exista la solución  $u$ . Aplicando la propiedad de monotonía de las soluciones del problema (B.4.6) tenemos

$$u(t, x; \underline{u}) \leq u(t + s, x; \underline{u})$$

para todo  $t, s \geq 0$ , mientras las soluciones existan. En particular,  $s$  tan pequeño como queramos. Por lo tanto,  $u(t, x; \underline{u})$  decrece con el tiempo. ■

**Lema B.4.8** *Supongamos  $u_0 \in D(A) = X^1$  es tal que  $u(t; u_0)$  es decreciente (resp. creciente). Entonces,  $u_0$  es una subsolución (resp. supersolución) del problema elíptico (B.4.5).*

**Demostración.** Sea  $u_0 \in D(A)$  tal que  $u(t; u_0)$  es decreciente (el caso en que  $u(t; u_0)$  sea creciente se obtiene de manera análoga). Como la solución es  $C^1$  en  $t = 0$  tenemos  $\frac{d}{dt}u \geq 0$ . Además, por la ecuación que satisface  $u$  tenemos

$$Au(t) = f(u(t)) - \frac{d}{dt}u(t) \leq f(u(t)).$$

Tomando ahora  $t = 0$ , tenemos

$$Au_0 \leq f(u_0),$$

es decir,  $u_0$  es una subsolución para el problema elíptico (B.4.5). ■



# Bibliografía

- [1] H. Amann. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Review*, 18(4):620–709, 1976.
- [2] H. Amann. Nonlinear operators in ordered Banach spaces and some applications to nonlinear boundary value problems. In *Nonlinear operators and the calculus of variations (Summer School, Univ. Libre Bruxelles, Brussels, 1975)*, pag. 1–55. Lecture Notes in Math., Vol. 543. Springer, Berlin, 1976.
- [3] H. Amann. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems. En *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Friedrichroda, 1992)*, volumen 133 de *Teubner-Texte Math.*, pag. 9–126. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [4] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, volumen 89 de *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995. Abstract linear theory.
- [5] W. Arendt y C. J. K. Batty. Absorption semigroups and Dirichlet boundary conditions. *Math. Ann.*, 295(3):427–448, 1993.
- [6] W. Arendt y C. J. K. Batty. Exponential stability of a diffusion equation with absorption. *Differential Integral Equations*, 6(5):1009–1024, 1993.
- [7] L. Arnold y I. Chueshov. Order-preserving random dynamical systems: equilibria, attractors, applications. *Dynam. Stability Systems*, 13(3):265–280, 1998.
- [8] J. M. Arrieta y A. N. Carvalho. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(1):285–310, 2000.
- [9] J. M. Arrieta y A. N. Carvalho. Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of the domain. *J. Differential Equations*, 199(1):143–178, 2004.
- [10] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, y A. Rodríguez Bernal. Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(1-2):1–37, 2000.
- [11] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, y A. Rodríguez-Bernal. Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities. *J. Differential Equations*, 156(2):376–406, 1999.
- [12] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, y A. Rodríguez-Bernal. Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions. *J. Differential Equations*, 168(1):33–59, 2000. Special issue in celebration of Jack K. Hale’s 70th birthday, Part 1 (Atlanta, GA/Lisbon, 1998).
- [13] J. M. Arrieta, J. W. Cholewa, T. Dlotko, y A. Rodríguez-Bernal. Asymptotic behavior and attractors for reaction diffusion equations in unbounded domains. *Nonlinear Anal.*, 56(4):515–554, 2004.
- [14] H. Berestycki y P.-L. Lions. Some applications of the method of super and subsolutions. In *Bifurcation and nonlinear eigenvalue problems (Proc., Session, Univ. Paris XIII, Villetaneuse, 1978)*, volumen 782 de *Lecture Notes in Math.*, pag. 16–41. Springer, Berlin, 1980.

- [15] H. Berestycki, L. Nirenberg, y S. R. S. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(1):47–92, 1994.
- [16] J. Bergh y J. Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [17] H. Brézis y L. Oswald. Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 10:55–64, 1986.
- [18] T. Cazenave y A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Ellipses, 1990.
- [19] V. V. Chepyzhov y M. I. Vishik. *Attractors for equations of mathematical physics*, volume 49 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [20] H. Crauel, A. Debusche, y F. Flandoli. Random attractors. *J. Dynam. Differential Equations*, 9(2):307–341, 1997.
- [21] D. Daners y P. Koch Medina. *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, volumen 279 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.
- [22] E. B. Davies. *Heat kernels and spectral theory*, volumen 92 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [23] D. G. de Figueiredo. Positive solutions of semilinear elliptic problems. In *Differential equations (São Paulo, 1981)*, volumen 957 de *Lecture Notes in Math.*, pag. 34–87. Springer, Berlin, 1982.
- [24] José M. Fraile, Pablo Koch Medina, Julián López-Gómez, y Sandro Merino. Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation. *J. Differential Equations*, 127(1):295–319, 1996.
- [25] D. Gilbarg y N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [26] J. K. Hale. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Número 25 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1988.
- [27] A. Haraux. Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear partial differential equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 13(11):1383–1414, 1988.
- [28] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Número 840 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981.
- [29] J. Hernández. Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights. En *Reaction diffusion systems (Trieste, 1995)*, volumen 194 de *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pag. 183–197. Dekker, New York, 1998.
- [30] P. Hess. *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*, volumen 247 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1991.
- [31] O. A. Ladyzhenskaya y N. N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New York, 1968.
- [32] J. A. Langa, J. C. Robinson, and A. Suárez. Bifurcation from zero of a complete trajectory for non-autonomous logistic pdes. *Int. J. of Bif. and Chaos*. por aparecer.
- [33] J.A. Langa y A. Suárez. Pullback permanence for non-autonomous partial differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2002(72):1–20, 2002.

- [34] P. L. Lions. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *SIAM Review*, 24(4):441–467, 1982.
- [35] J. López-Gómez. The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems. *J. Differential Equations*, 127(1):263–294, 1996.
- [36] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [37] H. Matano.  $L^\infty$  stability of an exponentially decreasing solution of the problem  $\Delta u + f(x, u) = 0$  in  $R^n$ . *Japan J. Appl. Math.*, 2:85–110, 1985.
- [38] K. Mischaikow, H. Smith, y H. R. Thieme. Asymptotically autonomous semiflows: chain recurrence and Lyapunov functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(5):1669–1685, 1995.
- [39] X. Mora. Semilinear parabolic problems define semiflows on  $C^k$  spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(1):21–55, 1983.
- [40] A Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, Inc., 1983.
- [41] J. C. Robinson, A. Rodríguez Bernal, y A. Vidal-López. Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems.
- [42] A. Rodríguez-Bernal. Localized spatial homogenization and large diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(6):1361–1380 (electrónico), 1998.
- [43] A. Rodríguez-Bernal y R. Willie. Singular large diffusivity and spatial homogenization in a non homogeneous linear parabolic problem. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 5(2):385–410, 2005.
- [44] D. H. Sattinger. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 21:979–1000, 1971/72.
- [45] B. Schmalfuss. Attractors for the non-autonomous dynamical systems. En *International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999)*, pag. 684–689. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [46] B. Schmalfuss. Attractors for nonautonomous and random dynamical systems perturbed by impulses. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(3):727–744, 2003.
- [47] B. Simon. Schrödinger semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(3):447–526, 1982.
- [48] H. L. Smith. *Monotone dynamical systems*, volumen 41 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [49] H. R. Thieme. Convergence results and a Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations. *J. Math. Biol.*, 30(7):755–763, 1992.
- [50] R. Willie. *Ecuaciones de reacci'on difusi'on con difusi'on alta*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2005.