UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

Departamento de Psicología Básica I

DESARROLLO DE LA OPERACIONES DE SUMAR Y RESTAR: COMPRENSIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

Antonia López de los Mozos García Núñez

Bajo la dirección del Doctor:

Vicente Bermejo Fernández

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-2379-9

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE PSICOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA BÁSICA I (PROCESOS BÁSICOS)

DESARROLLO DE LAS OPERACIONES DE SUMAR Y RESTAR: COMPRENSIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Director de la tesis: Dr. Vicente Bermejo Fernández.
Tesis realizada por: Antonia López de los Mozos García-Núñez.
Madrid, Curso 2000/01.

AGRADECIMIENTOS

Es de justicia expresar mi gratitud a diversas personas e instituciones, por los apoyos prestados al presente trabajo. Sin ellos me es difícil suponer que hubiera llegado a su fin esta investigación.

En primer lugar al Catedrático Doctor Vicente Bermejo Fernández, cuya permanente dirección y supervisión -materializada en el valioso tiempo que ha dedicado a la atenta lectura de borradores- ha aportado decisivos criterios de corrección y matización, con una paciencia que no quiero dejar de encomiar.

En cumplimiento de lo establecido en la convocatoria hecha por Resolución de 10-Enero-95 de la Subsecretaría del Ministerio de Educación y Cultura (Boletín Oficial del Estado del día 13), aludo gustosamente a que este trabajo ha tenido lugar como consecuencia de la licencia por estudios que -tras la mentada convocatoria- se tuvo a bien concederme.

Expreso también mi gratitud a mi marido, Lorenzo, -por sus sugerencias en cuanto a composición literaria, estilo, corrección gramatical y ortodoxia sintáctica-, así como también a mi hijo Agustín por las innumerables aportaciones sobre matices lingüísticos, cuando las fuentes utilizadas eran extranjeras.

A mi hijo Eugenio he de agradecerle sus muchas horas dedicadas, sin horario ni pausa en muchos casos, en todo el asesoramiento relativo al tratamiento informático de los textos. Sus profundos conocimientos en este sentido y -muy especialmente- los relativos a las representaciónes de gráficos y tablas y a la disposición de figuras e ilustraciones, así como la disposición equilibrada del texto en general, han supuesto para esta investigación una ayuda valiosísima.

Los niños del Colegio Público “Carlos Eraña”, de Ciudad Real, han tenido conmigo una paciencia muy por encima de lo atribuíble a su poca edad. Como resultado de las pruebas pasadas y de las entrevistas realizadas con ellos ha surgido la fuente fundamental de datos numéricos que ha dado sentido al posterior tratamiento estadístico de tan copiosa como valiosa información.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

En muchos aspectos, el desarrollo matemático de los niños es un reflejo del desarrollo histórico de la matemáticas: el conocimiento matemático impreciso y concreto de los niños se va haciendo cada vez más preciso y abstracto. La matemática informal se desarrolla a partir de necesidades prácticas y experiencias concretas, preparando el terreno para la matemática formal que se imparte en la escuela. La mayoría de los niños llega a la escuela con una gran cantidad de conocimientos matemáticos informales (Russell y Ginsburg, 1984). La matemática informal constituye el paso intermedio crucial entre el conocimiento intuitivo, limitado, impreciso y basado en la percepción directa, y la matemática poderosa y precisa basada en símbolos abstractos que se imparte en la escuela (Baroody, 1988).

Por otra parte, en el campo de la investigación sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, el eje principal -que ha originado un amplio volumen de estudios- es la *resolución de problemas* matemáticos. "Este planteamiento no resulta sorprendente, ya que, en la actualidad, es un hecho comúnmente aceptado que la adquisición y transferencia de las habilidades de resolución de problemas constituyen uno de los objetivos fundamentales de la escolarización en general, y de la educación de las matemáticas en particular". (De Corte, 1993). Y, en esta misma línea, la entrada en vigor de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (*LOGSE*) ha iniciado un proceso de reflexión, de innovación y de cambio fundamentado en principios cognitivos como: el alumno construye su propio conocimiento matemático. No es posible "transmitir" simplemente a los alumnos información, esto no significa que la información dada por los docentes no sea importante, pero a los alumnos se les debe dar la posibilidad de usar activamente la información por sí mismo y experimentar sus efectos. El conocimiento no se adquiere a partir de la información comunicada y memorizada sino a partir de la información que los alumnos cuestionan y analizan. El cambio se ha iniciado en teoría pero de ésta hasta la aplicación *real y general* en el aula hay un largo camino que recorrer.

Los resultados de estudios e investigaciones sobre el niño y el aprendizaje de las matemáticas han llevado a la constatación de dos hechos: los niños llegan a la escuela con gran cantidad de conocimientos matemáticos informales y la resolución de problemas no es la aplicación y el objetivo final de la enseñanza de las operaciones, sino que es principio y núcleo de arranque del aprendizaje matemático. Pero la creencia de los profesores, en general, es que sólo cuando los niños dominan las técnicas del cálculo de las operaciones es la hora de trabajar los problemas. También la observación del aula de educación Infantil nos muestra que los niños son capaces de resolver más problemas verbales de los que cabría esperar

La realidad va por otros caminos: en nuestras escuelas el gran objetivo del Primer curso de Primaria es conseguir que los niños sepan leer y escribir; y a ello se dedica todo el esfuerzo, se utilizan las mejores horas del aprendizaje, se hacen cursos para conocer distintos métodos para su enseñanza, etc. No cuestionamos la necesidad del aprendizaje de la lectoescritura, ya que su conocimiento es imprescindible para otras áreas del curriculum, sino las consecuencias: las matemáticas en este curso ocupan el tiempo que deja libre la lectoescritura, y los padres -diríamos que sin excepción- no están preocupados porque sus hijos no conozcan los números, y mucho menos porque no sepan resolver problemas; después, en cursos más elevados, son las matemáticas la asignatura que genera más problemas de aprendizaje, más fracasos escolares y más actitudes negativas en los alumnos. Es el tópico social/escolar de interesarse por la alfabetización -sólo en el sentido de lecto-escritura- y olvidar que también existe la alfabetización funcional matemática, como lo avalan los datos de “La evaluación internacional de la matemáticas y de las ciencias”, realizada por Lapointe, Mead y Philips (1989), que sitúa a España aproximadamente en el centro de la distribución de medias de los 12 países evaluados. Sin embargo, establece para España los siguientes porcentajes para los alumnos de 13 años: el nivel de sumar y restar es conseguido por un 99%; realizan problemas de un paso el 91%; resuelve problemas de dos pasos el 57% y entienden conceptos el 14%.

Resnick y Klopfer ((1996) señalan que una de las ideas más significativas de las recientes investigaciones es la importancia que se da a desarrollar las habilidades de pensamiento de los alumnos a través de experiencias escolares para conseguir pensadores competentes. El pensamiento debe ocupar todo el currículum escolar, para todos los alumnos y desde los primeros cursos. Saber algo no es haber recibido información sino haberla interpretado y relacionado con otros conocimientos.

La investigación que hemos llevado a cabo es un trabajo sobre los problemas que los niños resuelven en sus primeros años de asistencia a la escuela. Tiene como objetivo final analizar y determinar la evolución que siguen los niños en la comprensión y resolución de los problemas elementales de suma y resta.

Distinguimos dos partes: en la primera, presentamos el marco teórico en el que nos hemos apoyado para realizar la investigación; en la segunda, se expone el estudio empírico llevado a cabo.

En la parte teórica recogemos los aspectos generales sobre las operaciones de sumar y restar. Hemos comenzado señalando las características del currículum de matemáticas, con referencia a la resolución de problemas, y analizando el desarrollo de los conceptos de suma y resta, por medio de la comprensión de los problemas verbales. Para ello, hemos empezado definiendo qué es un problema, para continuar exponiendo los distintos procesos que el niño tiene que realizar para resolverlos. De forma más concreta, abordamos las distintas clasificaciones de tipos de problemas y los diferentes modelos de simulación, que pretenden representar el proceso de resolución. También señalamos las diferentes variables que justifican las dificultades de los mismos. Además hemos recogido los distintos procedimientos de resolución empleados, tanto los tipos de estrategias, su relación con las distintas clases de problemas así como su evolución y desarrollo, los distintos tipos de errores identificados, cuando las operaciones de suma y resta se presentan como algoritmo y como problema verbal. Por último, hemos expuesto algunos programas de instrucción y su incidencia en la enseñanza de los problemas verbales.

La segunda parte corresponde a la investigación empírica. Presentamos, en primer lugar, los objetivos que nos proponemos, así como el método seguido, en el que se especifican las características de los sujetos, el material empleado y el procedimiento experimental seguido. A continuación se analizan los resultados obtenidos, después de los tratamientos estadísticos correspondientes, atendiendo a los diferentes tipos de problemas, a la variación de la ubicación de la incógnita y al tipo de operación. El estudio cuantitativo de los datos se ha llevado a cabo en tres fases, en función de las diferentes maneras en que han sido consideradas las operaciones de adición y sustracción. Desde el punto de vista cualitativo de los datos, hemos examinado las estrategias que los niños ponen en marcha en el proceso de resolución, así como los tipos de errores que cometen. Seguidamente hemos hecho un análisis de segmentación, con el fin de determinar los problemas que marcan las diferencias entre los grupos y tratar de establecer unos niveles evolutivos en la resolución de los problemas verbales. Terminamos esta segunda parte recogiendo las conclusiones generales de esta investigación.

Además, incluimos la recopilación de las referencias bibliográficas correspondiente al tema.

PARTE I: MARCO TEÓRICO

LOS PROBLEMAS DE SUMAR Y RESTA

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética elemental hay un gran abismo entre los teóricos y los que llevan a la práctica este aprendizaje, por eso nuestro propósito, en esta primera parte, es hacer una revisión de las aportaciones teóricas más sobresalientes con la finalidad de analizar la comprensión de los niños en la resolución de los problemas verbales que requieren el uso de una operación -suma o resta- para su solución. Comenzaremos relacionando currículum con algoritmo y resolución de problemas para pasar a presentar una aproximación de cómo los niños resuelven los problemas. Recogeremos diversas definiciones de "¿qué es un problema?", después nos ocuparemos de la teoría del procesamiento de la información, como modelo clásico y arranque de numerosas investigaciones posteriores, para comprender los elementos implicados en los procesos de resolución de problemas. También, analizaremos detenidamente las diversas fases por las que el niño pasa para resolverlo. A continuación nos centraremos en los problemas aritméticos elementales verbales, que requieren una sola operación -suma o resta-. A partir de distintas variables haremos una clasificación de los mismos y recogeremos los diferentes modelos de simulación, que tratan de determinar una jerarquía de niveles de dificultad en la ejecución de los niños cuando resuelven problemas. Señalaremos las variables que contribuyen a determinar la dificultad de los mismos. Terminaremos presentando los procesos de resolución que los niños emplean cuando tienen que resolver un problema; analizando tanto las distintas estrategias que el niño aplica para conseguir una solución correcta como los distintos errores que el niño lleva a cabo cuando realiza las diferentes fases de un problema verbal.

2. CURRÍCULUM: ALGORITMOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El término "curriculum" se define como "plan operativo de enseñanza que explica en detalle lo que deben saber los alumnos de matemáticas, cómo deben alcanzar las metas curriculares identificadas, qué deben hacer los profesores para ayudarles a desarrollar sus conocimientos matemáticos, y el contexto en el que tiene lugar el aprendizaje y la enseñanza" (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 1989, p. 1).

El problema del currículum de cualquier disciplina, incluidas las matemáticas, es que "una enseñanza consciente exige elegir lo que hay que enseñar" (Kliebard, 1977) y no cabe ninguna duda de que hay un acuerdo general sobre el hecho de que todos los niños deben estudiar matemáticas en la escuela. De hecho "junto a la misma invención del lenguaje..., las matemáticas son sin duda el logro más sutil, poderoso y significativo de la mente humana" (Schaaf, 1966). "Casi siempre *damos por sentada* la existencia de las matemáticas como asignatura en la escuela y lo hacemos con la sensación de confianza y seguridad que da el estar tratando con una materia que tiene casi tres milenios de antigüedad y que disfruta de la categoría de ser la única asignatura que se enseña en todas las escuelas del mundo" (Niss, 1996).

Hay unanimidad en que las matemáticas deben enseñarse, pero no hay tal unanimidad a la hora de determinar los aspectos sobre las matemáticas que deben estudiar los niños: qué y cómo debe ser un auténtico currículum de matemáticas. Hasta la década de los sesenta el aprendizaje de las matemáticas consistía en aprender técnicas para realizar operaciones. El objetivo principal era memorizar una serie de técnicas para resolver los problemas. Se suponía que una práctica repetitiva de estas técnicas llevaría a la comprensión del problema. Se trataba de un aprendizaje de "técnicas" estrictamente procedimental, en el que el objetivo fundamental es conductual: enseñar el "cómo", "lo que hay que hacer" (Gagnè, 1965), sin que preocupe el aprendizaje del sentido.

Así, para obtener aritméticamente un resultado es preciso la elaboración del mismo, mediante cálculos numéricos efectuados con los datos cuantitativos del problema en cuestión. Ello supone la realización ordenada y sistemática de diversas operaciones aritméticas. Precisamente esta "realización ordenada" de operaciones constituye el "algoritmo" correspondiente al problema de que se trate.

En cuanto al significado y origen lingüístico del vocablo "algoritmo", el D.R.A.E. lo relaciona con el término árabe al-Jwärizmï, sobrenombre del célebre matemático Mohámed Ben Musa: "Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema".

Para Bouvier y Gerge (1984), "Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza en un número finito de etapas a un cierto resultado, y esto independientemente de los datos. Por tanto, un algoritmo no resuelve solamente un problema único sino toda una clase de problemas que no difieren más que en los datos, pero que están gobernados por las mismas prescripciones".

Rey Pastor y Babini (1984, p. 159) recogen “algoritmo” como latinización del nombre del matemático Al-Khuwarizmi autor de “Algoritmi de numero indorum”, año 830 d. de C., reelaborado como “Liber algorismi de practica arithmetica” por Juan de Sevilla en el siglo XII, considerado como la mayor contribución a la divulgación en occidente de los métodos y numerales, guarismos (perversión de Khwarizmi), del sistema numérico índico, llamado indo-arábigo.

Mayer (1985), de forma breve, define un algoritmo como “un procedimiento exacto para llevar a cabo una tarea, como por ejemplo sumar números”.

El término algoritmo, equivocadamente, suele asociarse con las operaciones aritméticas de forma inmediata. Krinnitski (1978) nos dice que “un algoritmo es una prescripción -una orden o un sistema de órdenes- que determina el encadenamiento de operaciones elementales que permiten obtener, a partir de los datos iniciales, el resultado que se busca”. Un algoritmo posee las siguientes propiedades:

a) Nitidez; gracias a esta propiedad la realización de un algoritmo es un proceso mecánico.

b) Eficacia; conduce a los resultados deseados mediante un número finito de pasos, suficientemente simples.

c) Universalidad; se requiere que cada algoritmo sea aplicable a todos los problemas de una cierta clase.

Mialaret (1967), determina una serie de aspectos en la enseñanza de las operaciones que son válidos, -independientemente que se considere actualmente que no es previamente el aprendizaje y dominio de las operaciones y después su aplicación en la resolución de problemas-.

Este autor parte de la acción misma “la operación manual debe preceder siempre a la operación aritmética”.

La primera etapa consiste en la *acción*, manipulación sobre objetos reales.

En la segunda etapa, la *acción* debe ir *acompañada del lenguaje*, cada acción se asocia con un término específico, fundamentalmente con verbos.

A medida que se crean los lazos de dependencia verbo-acción, el niño debe ser interrogado y describir las causas, etapas y efectos de una determinada acción. El niño puede contar, sin hacerlas, las diferentes acciones que ha ejecutado, -etapa del *relato*-. Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones en la conducta del relato se están dando los primeros pasos hacia la expresión formal de las operaciones.

La cuarta etapa, traducción *gráfica*, que puede ir desde el dibujo más completo hasta la traducción por esquemas simplificados.

Y, la traducción *simbólica*, es el último paso de abstracción en la expresión de cada operación; dada una operación concreta y simple el niño debe ser capaz de traducirla a términos de operación matemática.

En esta misma línea, Castro, Rico y Castro Martínez (1987), señalan etapas en el aprendizaje de cada operación.

En la primera etapa hay que considerar las diferentes acciones y transformaciones que se realizan en los distintos contextos numéricos y diferenciar aquellas que tengan rasgos comunes, que será lo que permita ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. La primera diferencia será entre suma y resta, por un lado, y producto-división por otro. Las acciones que dan lugar a la suma y resta -añadir-quitar/reunir-separar- son elementales y se trabajan en simultaneidad con las ideas que dan lugar al concepto de número.

En la segunda etapa, al abstraer las diferentes acciones y transformaciones que se realizan en los distintos contextos numéricos aparecen distintos esquemas y surgen lo que se denominan modelos. Cada operación tiene sus propios modelos. Una función inicial de los modelos consiste en proporcionar definiciones concretas de las operaciones, y concretar las técnicas y principios de cada operación.

La tercera etapa es la expresión simbólica. Mediante los modelos se da un paso a un nivel más alto de abstracción: el nivel operatorio. En su comienzo la operación es una relación específica entre ternas numéricas, por ejemplo 2, 5 y 7, que tiene una expresión simbólica “2 + 5 = 7” para la suma o dos: “7 - 5 = 2” y “7 - 2 = 5” para la resta. Con la expresión simbólica se establece la relación global entre los números que proporciona la operación, independientemente del modelo de procedencia y de la acción real que le da origen. En la notación simbólica están expresados todos los modelos y todas las situaciones reales, que pueden imaginarse con los números 2, 5 y 7.

La cuarta etapa es el aprendizaje -memorístico o no- de los hechos numéricos esenciales en cada operación. Esto puede hacerse mediante el descubrimiento, invención y empleo de una serie de destrezas básicas y la memorización de algunos datos. Como, por ejemplo, en “2 + 5 = ?” saber que la respuesta es 7 es conocer el dato o hecho numérico.

La quinta etapa es aquella en la que el conocimiento de los hechos numéricos y unas pocas destrezas básicas y reglas permiten calcular el resultado de la operación con dos números cualesquiera, es decir, es la adquisición y dominio del algoritmo correspondiente.

Y la sexta etapa es la resolución de problemas, es decir la aplicación de las operaciones

Durante las últimas décadas se han desarrollado distintas líneas de investigación, después de un análisis de los planes de estudio en diversos países, se puso de manifiesto que los alumnos no sabían aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas de la vida real. Esto dio lugar a que uno de los supuestos de los Standards del NCTM (1989) es que "los alumnos deben experimentar regularmente problemas reales" (p. 10). De hecho, los autores de los Standards llegan a afirmar que "la enseñanza se debe desarrollar a partir de situaciones problemas" (p. 1).

Los psicólogos postulan que el conocimiento sobre los conceptos, las destrezas y los contextos afines se organizan en la memoria del alumno en un "esquema". Estos esquemas se desarrollan durante largos periodos de tiempo y por la continua exposición a hechos contextuales afines. El desarrollo de estos esquemas facilita tanto la destreza para resolver problemas como el recuerdo del material textual. Parece que estos esquemas guían, organizan y dirigen tanto la búsqueda de la solución del problema como la recuperación de los detalles de la exposición. En consecuencia, es importante saber qué conocimientos aportan los alumnos a estas actividades (Romberg 1991, p. 381).

Orton (1990), considera que "la resolución de problemas se concibe ahora normalmente como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del procedimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar soluciones a una situación nueva”.

También el Informe Cockcroft, de amplia difusión, en su apartado 249 señala: “La resolución de problemas es consustancial a las matemáticas. Las matemáticas sólo son “útiles” en la medida que puedan aplicarse a una situación concreta; precisamente la aplicación a las diversas situaciones posibles es lo que se denomina “resolución de problemas”. Y cuando se refiere a las matemáticas en la enseñanza primaria, vuelve a incidir “....al principio de la escolaridad, las matemáticas se aprenden “haciendo cosas”...en ningún caso debe permitirse un método de aprendizaje que se base exclusivamente en la asimilación de conocimientos recibidos y cuyo criterio de verdad sea “así me dijeron que debía hacerse” (Apartado 321).

Schoenfeld uno de los autores que más ha aportado a la enseñanza de la resolución de problemas, señalaba en el ICME-5 (Burkhardt 1988) que este término -resolución de problemas- se ha usado para designar aspectos muy diferentes, como: resolución de ejercicios elementales de aritmética; investigaciones en psicología sobre aspectos cognitivos subyacentes a la resolución de problemas; enseñanza de “trucos” o “recetas” para resolver un tipo particular de problemas; enseñanza de modelos matemáticos para caracterizar situaciones complejas del mundo real; desarrollo de aptitudes y actitudes para resolver problemas complejos, dentro del espíritu de los trabajos de Polya; intentos de comprender el trabajo en grupos sobre el desarrollo de aptitudes individuales para la resolución de problemas. También Schoenfeld (1992) recoge la revisión histórica de resolución de problemas de Stanic y Kilpatrick (1988). Estos autores identifican tres temas importantes en lo que se refiere a su uso.

En el primer tema en lo que llaman *resolución de problemas en el contexto* los problemas se emplean como vehículos de otras metas curriculares. Identifican cinco papeles, según la finalidad que se persiga:

1.- Como justificación para la enseñanza de las Matemáticas. Históricamente la resolución de problemas ha sido incluida en el curriculum de matemáticas porque en parte los problemas son justificación para enseñar matemáticas. Presumiblemente, algunos problemas son relatados como experiencias del mundo real para presentar una enseñanza de las matemáticas integrada significativamente en la historia y en la cultura con la finalidad de que los estudiantes y los profesores puedan descubrir su valor en la vida real.

2.- Para proporcionar motivación específica en temas de la asignatura. Los problemas se usan a menudo para introducir temas con el conocimiento implícito o explícito de que cuando has aprendido la lección que sigue serás capaz de resolver problemas de ese tipo.

3.- Como diversión. Esta finalidad se relaciona con la anterior, usándose no sólo para motivar a los que aprenden, sino que también les permita disfrutar trabajando distintos aspectos. Como consecuencia las matemáticas pueden ser divertidas y hay usos entretenidos para las habilidades que los alumnos han aprendido. Se diferencia de las anteriores en que los problemas pueden no tener que ver con el mundo real

4.- Como medios para desarrollar nuevas habilidades. Los problemas cuidadosamente administrados pueden presentar a los estudiantes nuevas materias y proporcionarles un contexto para discusiones sobre materias técnicas de las asignaturas.

5.- Como práctica. Los ejercicios de Milne y la enorme mayoría de las tareas de matemáticas de la escuela, están en esta categoría. A los estudiantes se les enseña un técnica y se le dan problemas para practicar hasta que han aprendido esa técnica. Aquí el término problema se refiere a ejercicios de aplicación.

El segundo tema identificado por Stacnic y Kilpatrick (1988) es la *resolución de problemas como habilidad*. Este tema tiene sus raíces en la reacción al trabajo de Thorndike (Thorndike y Woodwort, 1901) La investigación sacó la simple noción de "ejercicio mental" en la cual se suponía que aprender las habilidades de razonamiento en campos tales como las matemáticas tenía como consecuencia reforzar el razonamiento en general. Esto conducía a la noción de la resolución de problemas como habilidad, una de las numerosas habilidades que deben enseñarse en el currículum, dentro de la jerarquía de habilidades para ser adquirida por los alumnos. Esta es la perspectiva que bajo el nombre de resolución de problema se implantó en los años 80. Esto lleva a ciertas consecuencias para el papel de la resolución de problemas en el curriculo. Así las distinciones jerárquicas se hacen entre resolver problemas rutinarios y no rutinarios. La resolución de problemas no rutinarios se caracteriza por la necesidad de utilizar altos niveles de destreza y habilidad, que se pueden adquirir después de que los estudiantes aprendan conceptos básicos y habilidades rutinarias.

Es importante mencionar que en esta segunda interpretación de resolución de problemas es vista como una habilidad en su propio derecho. Las suposiciones pedagógicas y espistemológicas son básicamente las mismas que aquellas sugeridas por los ejemplos de Milne. Técnicas de resolución de problemas (tal como dibujar diagramas, buscar patrones cuando N = 1, 2, 3) se enseñan como materia de la asignatura con problemas prácticos asignados para que las técnicas puedan ser aplicadas, a menudo como una parte separada del currículo.

El tercer tema identificado por Stanic y Kilpatrick (1988) es la *resolución de problemas como un arte.* Este punto de vista, en fuerte contraste con los dos anteriores, sostiene que la auténtica resolución de problemas es el corazón de las matemáticas, las matemáticas en sí mismas. Matemáticos como Euclides, Descartes y Poincaré, ya reflexionaron sobre métodos y reglas para descubrir e inventar en matemáticas, pero sus ideas no llegaron al currículum escolar. Pero, más recientemente, Polya las ha reformulado de tal manera que han servido de guía para que los profesores puedan comprenderlas y utilizarlas. La mejor contribución -argumenta Polya- es enseñar a los alumnos a pensar.

Miguel de Guzman (1993, p.110-111) matemático que trabaja con alumnos de edades superiores a la E. Primaria, considera que la enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. Pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces. Se trata de considerar como lo más importante: que el alumno manipule los objetos matemáticos; que active su propia capacidad mental; que ejercite su creatividad; que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente; que, a ser posible, haga transferencia de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental; que adquiera confianza en sí mismo; que se divierta con su propia actividad mental; que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de la vida cotidiana; que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

3. ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES DE SUMAR Y RESTAR

3.1. DEFINICIÓN DE PROBLEMA Y SUS FUNCIONES

Hay un acuerdo general para caracterizar como problema aquellas situaciones que plantean dificultades para las que no se poseen soluciones hechas. Para Krulik y Rudnik (1980) “Un problema es una situación, cuantitativa o no, que pide una solución para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla”.

Desde el punto de vista del lenguaje común no especializado, interesa traer aquí las definiciones “de diccionario general” del concepto “problema”.

“Problema”, según el DRAE, en la acepción 5 Matemáticas, es “Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos”.

María Moliner (“Diccionario de Uso del Español”) define “problema” como “cuestión en que hay algo que averiguar o alguna dificultad”. “Particularmente, en matemáticas u otra ciencia, cuestión de la que se conocen algunos datos, los cuales hay que manejar convenientemente para encontrar otro que se busca”

Ya Newell y Simon en 1972, consideraron que: “una persona se enfrenta a un problema cuando quiere algo y no sabe inmediatamente qué tipo de acciones debe realizar para lograrlo”. Por tanto, problema es “una situación en la que se quiere conseguir una meta y hay algún obstáculo para alcanzarla”.

Lester Jr. (1983, p. 232) considera que un problema es una tarea para la cual:

1. El grupo o el sujeto quieren o necesitan encontrar una solución.

2. No existe un procedimiento accesible que garantice o determine completamente esta solución.

3.- El grupo o el sujeto ha de hacer un intento para encontrar la solución.

Schoenfeld (1996, p. 148) entiende que para cualquier alumno, “un problema matemático es una tarea: a) en la cual el alumno está interesado e involucrado y para la cual desea obtener una resolución; y b) para la cual el alumno no dispone de un medio matemático accesible para lograr esa solución”. Schoenfeld considera que una tarea no es un problema para una persona hasta que no lo ha hecho propio; que las tareas no son “problemas” por sí mismas, dependerá de lo que esa persona sepa; que la mayoría de los “problemas” de los libros de texto son ejercicios (aplicación directa de un procedimiento que previamente se ha explicado), porque la resolución real de un problema enfrenta directamente a las personas con la dificultad, saben dónde están y dónde quieren llegar pero no tienen los medios para llegar hasta allí; que la resolución de problemas sólo cubre parte del “pensar matemáticamente”, también es importante el desarrollo de habilidades metacognitivas y el desarrollo de un punto de vista matemático.

3.2. **TEORÍA DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN**

Los psicólogos de esta escuela cognitiva consideran que “el sistema humano de conocimiento debe considerarse como un sistema de procesamiento de la información”. La forma de trabajar de un ordenador constituye un modelo adecuado para el procesamiento humano de la información. En ambos casos se supone que hay programas elaborados para enfrentarse de forma inteligente y adaptativa a la información que se recibe. Los programas consisten en secuencias de procesos cognitivos, interrelacionados unos con otros, que reciben, transforman y manipulan unidades de información o conocimiento. "El sistema consta de un conjunto de memorias, receptores y efectores, así como de procesos para actuar sobre ellos. Las memorias contienen datos (información) y programas de procesos de información. El estado del sistema en un momento dado de tiempo se determina por los datos y programas contenidos en esas memorias, junto con los estímulos que se presentan a los receptores". (H. Simon, 1978).

Las teorías del Procesamiento de la Información han conseguido analizar los componentes básicos que se dan en la solución de problemas y realizar su simulación mediante ordenador. Para el Procesamiento de la Información, un problema se entiende como una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo. Los medios para alcanzar este objetivo parecen depender de la interacción entre dos elementos: un *sistema de procesamiento de la información*, el sujeto que soluciona problemas, y un *entorno de la tarea (task envitonment)*, representando este último la tarea tal y como es descrita por el experimentador. Al enfocar ésta, el sujeto que resuelve problemas representa la situación en términos de un *espacio del problema (problem space),* que es la manera de considerar el ambiente de la tarea. Estos tres componentes - sistema de procesamiento de la información, entorno de la tarea y espacio del problema- establecen el marco de referencia para la conducta de solución de problemas. (Newell y Simon, 1972; Simon, 1978).

Simon (1978) señala cuatro proposiciones, que considera las *leyes de estructura cualitativa* de la solución de problemas:

1. Unas pocas, y sólo unas pocas, características generales del sistema del procesamiento de la información humana permanecen invariables a lo largo de las tareas y de los sujetos. El sistema de procesamiento de la información es un sistema adaptativo capaz de amoldar su conducta a las exigencias de la tarea y capaz de modificar sustancialmente su conducta a lo largo del tiempo mediante el aprendizaje.

2. Estas características invariables del sistema de procesamiento de la información son suficientes, sin embargo, para determinar que el ambiente de la tarea se representará como un espacio del problema y que la solución de éste se realizará en un espacio del problema.

3. La estructura del entorno de la tarea determina las posibles estructuras del espacio del problema.

4. La estructura del espacio del problema determina los programas posibles (estrategias) que pueden utilizarse para la solución de problemas.

El espacio básico del problema consiste en un conjunto de nudos formado por todos los movimientos lícitos, que el sujeto puede llevar a cabo para encontrar la solución del problema. Cada nudo puede ser considerado como un posible estado de conocimiento que el sujeto puede alcanzar. Un estado de conocimiento es simplemente lo que sabe el sujeto acerca de un problema en un momento concreto, entendiendo por saber el que la información se encuentre disponible para él y pueda ser recuperada en una fracción de segundo. En palabras de Simon (1978, p. 202) "La búsqueda de una solución representa una odisea a través del espacio del problema, desde un estado de conocimiento a otro, hasta que el estado de conocimiento actual incluye la solución del problema".

Los espacios del problema difieren en el tamaño y en los tipos de estructura que poseen . La estructura es simplemente la antítesis del azar, ya que suministra información que puede ser utilizada para predecir las propiedades de las partes del espacio aún no conocidas, a partir de las propiedades de aquellas ya examinadas. La mayoría de los principios de selección que -según se observa- utilizan los sujetos están basados en la idea de “acercarse”. Cada estado de conocimiento es un nudo en el espacio del problema. Una vez alcanzado un nudo concreto, el sujeto puede elegir un *operador,* dentro de un conjunto de operadores que están disponibles, y puede aplicarlo para alcanzar un nuevo nudo. De forma alternativa, el sujeto puede abandonar el nudo que acaba de conseguir, seleccionar otro nudo, entre aquellos que ha visitado previamente, y continuar desde ese nudo. Así, debe realizar dos clases de elecciones: elección de un nudo, desde el que continuar, y elección de un operador para aplicar ese nudo. (Simon, 1978, p. 203-204).

El sistema concreto de búsqueda heurística, que encuentra diferencia entre la situación presente y la deseada, halla luego un operador relevante para cada diferencia y aplica el operador para reducir la diferencia, se denomina normalmente *análisis de medios-fines.*

Simon (1978, p. 205) resume la explicación de la solución humana de problemas en términos de procesamiento de la información: “un sistema serial de procesamiento de la información con una memoria a corto plazo limitada utiliza la información, que obtiene de la estructura del espacio del problema, para evaluar los nudos que alcanza y los operadores que podrían aplicarse a esos nudos. La mayoría de las veces, la evaluación supone encontrar diferencias entre las características del nudo presente y las del nudo deseado (la meta). Las evaluaciones se utilizan para seleccionar un nudo y un operador para el próximo paso de la búsqueda. Normalmente, los operadores se aplican al último nudo, pero si no se realiza ningún progreso, el sujeto puede volver al nudo anterior que se ha retenido en la memoria, estando limitada la elección del nudo anterior, en su mayor parte, por los límites de la memoria a corto plazo”.

3.3. **PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

Polya señala que “Resolver un problema consiste en encontrar un camino allí donde previamente no se conocía tal, encontrar una salida para una situación difícil, para vencer un obstáculo, para alcanzar un objetivo deseado que no puede ser inmediatamente alcanzado por medios adecuados”.

Polya (1965) considera cuatro fases para resolver eficazmente un problema:

1) Comprender el problema.
2) Concebir un plan.
3) Ejecutar el plan.
4) Examinar la solución obtenida.

Siegler (1991/1986), recoge los elementos que hay que considerar para comprender el proceso de resolución de problemas. Son:

Análisis de la tarea: el análisis de los componentes de la situación, ayudará a distinguir tanto las acciones de las personas consideradas como adaptativas como las acciones que reflejan limitaciones en el procesamiento de la información. Esto permitirá identificar las estrategias utilizadas para resolver el problema.

Codificación: para Siegler codificar es “identificar la información crítica en una situación y utilizarla para construir una representación interna”. Los niños pueden fallar en la resolución de la tarea porque no son capaces de codificar importantes rasgos de ella, no los comprenden o no saben cómo codificarlos.

Modelo mental: es una representación lo más adecuada posible de la estructura del problema. Este modelo implica un determinado nivel de abstracción, eliminando las características no esenciales para, de esa manera, facilitar la generalización de problemas relacionados con el actual, pero con caracteres superficiales diferentes.

Dominio general y dominio específico de conocimiento: la distinción se lleva a cabo en muy diversas situaciones a las que podrían aplicarse los procesos de resolución de problemas. Es intentar analizar cómo los niños llegan a integrar diferentes niveles de generalidad de la información en procedimientos eficaces de resolución del problema.

Diferencias en función del desarrollo: las diferencias que existen entre niños y adultos son consideradas por este autor más aparentes que reales y referidas en términos como: cambios graduales unidos a demandas de memoria, aspectos relacionados con la competencia lingüística, etc.

Baroody (1988, p. 237) añade más requisitos para la resolución de problemas no rutinarios:

Comprensión: el primer paso en la comprensión de un problema es definir claramente su naturaleza: ¿cuál es la incógnita o meta del problema? Carpenter y cols., (1984). Esto ayuda a decidir qué información es necesaria para solucionar el problema y qué información es irrelevante, qué métodos son adecuados para llegar a la solución y cuáles no, y qué soluciones son razonables y cuáles suponen la necesidad de un esfuerzo adicional. Los niños que no identifican claramente el objetivo del problema pueden tener dificultades para elegir y aplicar un procedimiento para la solución y comprobar los resultados. Definir la incógnita es especialmente importante.

Comprender un problema implica tener una representación mental adecuada, lo que a su vez implica poseer una cantidad suficiente de datos y conceptos (Riley y cols., 1983). Sin un conocimiento adecuado para comprender (representar mentalmente) el problema, el niño tiene muy poca base para elegir y poner en práctica una estrategia, para encontrar la solución y comprobar el resultado de una manera crítica. Las dificultades con la representación de los problemas aumentan a medida que los niños avanzan en la escuela y se espera de ellos que adquieran una gama amplia y compleja de conocimientos matemáticos (Silvert y Thompson, 1984).

Técnicas para la resolución de problemas. Las técnicas o estrategias que contribuyen al análisis de un problema se denominan heurísticas (Polya, 1965). Una técnica heurística para analizar mejor un problema es hacer un dibujo que represente el problema (Davis y McKillip, 1.980; Le Blanc y cols., 1.980).

Motivación. El factor afectivo de la motivación, que se basa en el interés, la autoconfianza y la perseverancia, es importante para el éxito en la resolución de problemas (Lester, 1980; Silver y Thompson, 1984).

Recientemente Ohlson (1992) señala los siguientes puntos en el proceso de resolución de problemas:

1º. Se refiere así a los elementos implícitos en su representación: “El acto de percibir o captar un problema tiene como resultado una *representación mental* de: a) la situación del problema (lo dado); y b) la solución criterio (aquello que se busca)” (Ohlson, 1992, p. 7).

2º. Señala la competencia del sujeto en términos de operadores: “Un *operador* es una estructura de conocimiento que corresponde a una acción que quien resuelve el problema conoce cómo llevar a cabo.

3º. Los operadores están relacionados con estructuras de memoria. Conocer los operadores en el punto de partida y en el de llegada, es lo que permite al que resuelve el problema anticipar los efectos de su acción.

4º. Resolver un problema es para Ohlson (1992, p. 8) "El proceso por el cual se decide qué operador se ejecuta, está dirigido por una función de evaluación, un plan, una estrategia, un esquema, un "script" o por cualquier otro tipo de conocimiento heurístico".

5º. Recuperar un operador es fundamental en el proceso de resolución. Se recupera a través de una corriente de actividad que se propaga a través de diferentes estructuras. La estructura recuperada es a su vez fuente de activación. Estos procesos no son conscientes. Por otro lado, la representación mental del problema opera como una prueba de memoria para la recuperación de los operadores; los que no tengan relación semántica con la meta de una situación dada no serán activados.

Otros autores señalan dos procesos en la resolución de problemas: la representación del problema y la solución del problema (Carpenter y Moser, 1982; De Corte y Verschaffel, 1987a; Greeno, 1982; Kintsch y Greeno, 1985; Mayer, 1986, 1989; Riley y Greeno, 1988; Schoenfeld, 1985c).

Mayer (1986) considera que para llevar a cabo la solución de un problema se necesitan dos procesos: *1. representación del problema*, que es la conversión de un problema verbal en una representación interna, y *2. solución del problema*, que es la aplicación de los operadores matemáticos a la representación interna para poder llegar a una respuesta final.

También determina los conocimientos que pueden ser relevantes: *lingüístico* -conocimiento del idioma-; *general* -de cultura-; *esquemático* -

tipo de problema-; *estratégico* -relativos al desarrollo y control de un plan de solución-; y *algorítmico* -procedimientos, cálculos-.

Cada proceso lo subdivide en dos subprocesos. Para la representación del problema señala: *1a. Traducción,* por el que cada frase o proposición del problema se traduce en una representación interna, para lo que necesitaría conocimientos lingüísticos y generales. *1b. Integración,* por el que agrupa cada proposición textual del problema en una representación coherente (aquí serían necesarios conocimientos esquemáticos apropiados al tipo de problema). Los subprocesos de la solución del problema también son dos: *2a. Planificación de la solución* implica diseñar el plan de solución, en los que están implicados los conocimientos estratégicos y que llevaría a utilizar distintas estrategias heurísticas, como dividir el problema en varios pasos, el orden de operaciones, etc. *2b. Ejecución de la solución* es la aplicación de la estrategia o algoritmo elegido para la solución.

Hayes y Simon (1977) han utilizado problemas que se describen por medio de palabras. Los protocolos verbales que cubren el intervalo completo desde el momento en que está listo para comenzar a trabajar en la solución del problema ponen de manifiesto las características principales de la conducta del sujeto mientras está elaborando una representación del problema. Este proceso ha sido simulado por un programa de computadora llamado Comprender (Understand). Un apartado que nos interesa es la *construcción de la representación del problema.* En el laboratorio un sujeto no puede comenzar a tratar de resolver el problema hasta que no lo comprende. El proceso de comprensión consta de dos subprocesos: uno para interpretar el lenguaje de las instrucciones, otro para construir el espacio del problema. El proceso de construcción recibe información, frase por frase, del proceso de interpretación lingüística, para construir después una representación del espacio del problema en dos partes: una descripción de la situación y un conjunto de operadores. La primera representa los elementos del problema, las relaciones entre ellos y los estados iniciales y finales de un problema; la segunda constituye un sistema de producción en el que las condiciones se representan como estados de la situación, y las acciones se representan como procesos para realizar cambios en la situación.

4. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Es fácil observar cómo los niños son capaces de resolver unos problemas antes que otros, propuestos éstos incluso con cantidades similares. De aquí, que se pueda deducir que existen otros factores, además de las habilidades de cálculo, que favorezcan el éxito en la resolución de problemas. Desde distintos puntos de vista son numerosas las investigaciones que se han realizado para intentar determinar la dificultad en la resolución de los problemas, tratando de encontrar las variables que mejor puedan explicar y predecir el éxito en las tareas.

Nesher (1982) señala tres tipos de variables: lógicas, sintácticas y semánticas. (1) En las *variables lógicas*, enumera las condiciones lógicas que debe reunir el problema, como que haya acuerdo entre los argumentos utilizados y entre la expresión del problema y la operación a realizar. Si estas condiciones no se cumplen serán factores que influirán en la dificultad del problema. También analiza la información superflua y concluye que interferirá en la realización del problema. (2) Las *variables sintácticas*, corresponden a la estructura superficial del problema. Puig y Cerdán (1988) se refieren a ellas como "cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema". Los principales trabajos con esta variable han sido hechos por Jerman (1974); Jerman y Rees (1972); Jerman y Mirman (1974). A partir de ellos Nesher (1982) analiza: el número de sentencias, el número de palabras, la situación de la pregunta, el orden de las expresiones y sí reflejan o no el orden dinámico del texto, llegando a la conclusión de que los resultados no son significativos (Nesher y Katriel, 1978). Aporta resultados detallados y termina diciendo que estos resultados sobre las variables sintácticas no son sorprendentes y están de acuerdo con el análisis lingüístico general. Dichos autores, agrupan en dos categorías los trabajos correspondientes a estas variables: (a) aquellos que intentan predecir la dificultad del problema en función de todas las variables que tengan influencia significativa sobre dicha dificultad; (b) aquellos que tratan de determinar si una variable concreta influye de forma significativa en la dificultad, controlando las otras variables.

Igualmente señalan estos autores que los resultados cualitativos y globales -a los que ya hemos hecho referencia- más importantes para ellos de los recogidos por Nesher son:

-Cuando los problemas verbales se presentan por medio de grabados, dibujos o materiales concretos, resultan más sencillos, al menos para los primeros niveles.

-La longitud del enunciado, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta son variables que, en los estudios del primer tipo, son útiles para explicar la dificultad del problema.

-El tamaño de los números y la presencia de símbolos en vez de números concretos incrementan la dificultad del problema.

-La relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema es otra fuente de dificultad.

Y, por último, (3) en las *variables semánticas*, Nesher (1982) partiendo del análisis de los resultados de estudios previos (Nesher y Katriel, 1978; Nesher y Teubal, 1974) señala dos elementos diferentes en las variables semánticas: el contextual y el léxico. Entendiendo por *contextual* la naturaleza del texto como un todo y las dependencias semánticas entre todas sus partes implicadas. Esta dependencia entre las partes en el texto del problema verbal se puede establecer con una variedad de mecanismos lingüísticos como son:

Argumentos: dependencia semántica entre los argumentos cuantificados numéricamente que aparecen en las proposiciones del texto del problema.

Adjetivos: dependencia semántica debida a adjetivos que califican los argumentos cuantificados.

Agentes: dependencia semántica debida a los agentes que se hacen referencia en el texto.

Localización: dependencia semántica debida a la relación espacial entre objetos.

Tiempo: dependencia semántica debida a la relación temporal entre los acontecimientos a los que hace referencia el texto.

Verbos: dependencia semántica que se expresa mediante los verbos que aparecen en el texto.

Términos relacionales: dependencia semántica debida a términos relacionales que afectan a dos argumentos cuantificados dados.

Por el *léxico* quiere decir el efecto de los elementos léxicos aislados que aparecen en el texto. Se ha apreciado que ciertas palabras cuando aparecen en un problema verbal facilitan o dificultan la actuación del niño en resolver este problema, algunas de estas palabras son incluso indicativas en la literatura como distractores en los verbos. Lo que es característico de estas palabras es que en muchos casos son opcionales en el texto y pueden ser introducidas, sustituidas o quitadas en sí mismas, excepto en el caso de palabras verbales del tipo de relacionar términos y por tanto no sirven como parte de las dependencias semánticas características del constituyente

Para Puig y Cerdán (1988, p. 98) “el contenido semántico de un problema verbal puede ser analizado a trozos atendiendo a los diversos modos de codificar lingüísticamente las relaciones lógicas entre las tres proposiciones básicas del problema, o bien globalmente atendiendo a la naturaleza y el sentido del texto como un todo”. También afirman que en el enunciado de un problema verbal cabe distinguir dos tipos de palabras: las que desempeñan algún papel en la elección de la operación y las que no lo desempeñan. Estas últimas suelen limitarse a conectar el problema con la realidad o a delimitar el contexto del problema. Hay otras palabras, tales como “ganó”, perdió”, “los dos juntos”..., que determinan, al menos en parte, la elección de la operación. Por ello se les llama *palabras clave.* Las dividen en tres categorías: a) palabras propias de la terminología matemática, b) palabras conectivas, verbos, que no son propias de la terminología matemática y c) palabras que expresan relaciones.

Siguiendo esta línea se encuentran los trabajos de Suppes y cols. (1969) que tienen como finalidad determinar si la variable presencia o ausencia de las palabras clave facilitaba o dificultaba la resolución de los problemas. Los resultados no fueron significativos, la presencia de palabras clave no explicaba suficientemente la varianza observada.

El enfoque de los esquemas mentales fue utilizado, a partir de la segunda mitad de la década de los setenta y primeros años de los ochenta, en las investigaciones sobre problemas aritméticos verbales simples de estructura aditiva y llegaron a clasificaciones de los problemas en categorías semánticas similares. Entre ellos destacan las aportaciones de Carpenter y Moser (1982); Heller y Greeno (1978); Nesher (1982); Vergnaud (1982).

Dentro del enfoque de los esquemas mentales se pueden distinguir dos corrientes:

-La corriente que utiliza el concepto de *cálculo relacional*, cuyo representante es Vergnaud.

-La corriente basada en las *categorías semánticas* de los problemas, (Riley, Greeno y Heller, 1983; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982, entre otros).

a) Cálculo relacional

Vergnaud (1981) parte de la noción de relación, como noción absolutamente general. El conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y organizarlas en sistemas. Las relaciones aditivas las encuadra dentro de las relaciones ternarias.

Las relaciones son a veces simples comprobaciones que se pueden hacer sobre la realidad. A menudo éstas no son directamente verificables y se deben inferir o aceptar. La inteligencia quedaría muy limitada si solo se ocupara de verificar, pero también debe deducir, inferir y construir. Hay, para Vergnaud (1981), dos formas de deducción:

La primera forma consiste en deducir una conducta o una regla de conducta de las relaciones verificadas o aceptadas.

La segunda forma consiste en deducir nuevas relaciones a partir de relaciones verificadas o aceptadas.

El niño rige su conducta de acuerdo con las relaciones que aprende y con el cálculo relacional que practica

Vergnaud define el campo conceptual como "un espacio de problemas o de situaciones problemas cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos pero en estrecha conexión". Distingue entre el campo conceptual de las estructura aditivas y el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

Realiza la clasificación de los problemas teniendo en cuenta tres conceptos: medida, transformación temporal y relación estática.

Vergnaud (1981) distingue seis categorías de relaciones aditivas:

·**Primera categoría**: dos medidas se componen para dar lugar a una medida.

El ejemplo propuesto es: “Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canicas”.

6, 8, 14 son números naturales.

El esquema correspondiente es:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{6}\\[1em]\boxed{8}\end{array}\right\}\ \boxed{14}$$

La ecuación correspondiente es: 6 + 8 = 14

“+” es la ley de composición que corresponde a la adición de dos medidas, es decir, de dos números naturales.

·**Segunda categoría**: una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.

Presenta dos ejemplos.

-El primero es: “Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Ganó 4 canicas. Ahora tiene 11”.

7 y 11 son números naturales; +4 es un número relativo.

El esquema correspondiente es:

$$\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{11}$$

La ecuación correspondiente es: 7 + (+4) = 11

"+" es la ley de composición que corresponde a la aplicación de una transformación sobre una medida, es decir, a la adición de un número natural (7) y de un número relativo (+4).

-El segundo ejemplo es: "Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Perdió 4 canicas. Ahora tiene 3".

El esquema correspondiente es:

$$\boxed{7} \xrightarrow{-4} \boxed{3}$$

La ecuación correspondiente es: 7 + (-4) = 3

·**Tercera categoría**: una relación une dos medidas.

El ejemplo propuesto es: "Pablo tiene 8 canicas. Jaime tiene 5 menos; entonces tiene 3".

El esquema correspondiente es:

$$\begin{array}{c} \boxed{8} \\ \downarrow \; -5 \\ \boxed{3} \end{array}$$

La ecuación correspondiente es: 8 + (-5) = 3

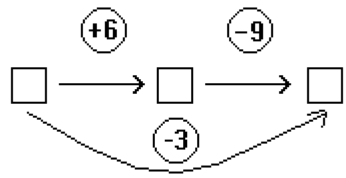
Esta categoría es estática, a diferencia de las anteriores que corresponden a transformaciones.

·**Cuarta categoría**: dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.

Vergnaud presenta el ejemplo siguiente: “Pablo ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 3. En total perdió 3”.

+6, -9 y -3 son números relativos.

El esquema correspondiente es:



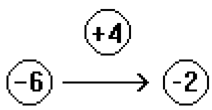
La ecuación correspondiente es: (+6) **+** (-9) = (-3)

“**+**” es la ley de composición que corresponde a la adición de dos transformaciones, es decir, de dos números relativos.

·**Quinta categoría**: una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

El ejemplo señalado es: “Pablo la debía 6 canicas a Enrique. Le devuelve 4. Sólo le debe 2”.

El esquema correspondiente es:



La ecuación correspondiente es: (-6) **+** (+4) = (-2)

“**+**” es aquí la ley de composición que corresponde a la operación de una transformación sobre un estado relativo.

·**Sexta categoría**: dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

Esta categoría es explicada con dos ejemplos.

-El primer ejemplo es así: "Pablo le debe 6 canicas a Enrique, pero Enrique le debe 4. Pablo de debe entonces sólo 2 canicas a Enrique".

-6, +4 y -2 son números relativos

El esquema correspondiente es:

$$\left.\begin{array}{c} -6 \\ +4 \end{array}\right\} \; -2$$

La ecuación correspondiente es: (-6) + (+4) = (-2)

"+" es la ley de composición que corresponde a la adición de dos estados relativos.

Esta categoría es muy similar a la cuarta, la diferencia se encuentra en que se compone de relaciones-estados y no de transformaciones.

-El ejemplo segundo es: "Pablo le debe 6 canicas a Enrique y 4 canicas a Antonio. Debe 10 canicas en total".

El esquema correspondiente es:

$$\left.\begin{array}{c} -6 \\ -4 \end{array}\right\} \; -10$$

La ecuación correspondiente es: (-6) + (-4) = (-10)

En este segundo ejemplo la composición de relaciones se da entre dos personas diferentes y no así en el primero caso que se realizaba entre las mismas personas.

Además, partiendo de estas seis grandes categorías, plantea diferentes clases de problemas en cada categoría, tratando de determinar la dificultad de los problemas aditivos y llegando a la conclusión de que la complejidad de los problemas varía no solo en función de las categorías y de las distintas clases de problemas de cada categoría -aunque sea la fuente principal- sino también en función de otros factores: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario, el orden y la presentación de las informaciones, el tipo de contenido y de relaciones consideradas, etc.

Las categorías de problemas aditivos de este autor han sido menos seguidas que las propuestas para los problemas de estructura multiplicativa.

b) Estructura semántica

Muchos autores clasifican los problemas según la estructura semántica (Bermejo, Lago, Rodríguez y otros, 1997, Carpenter y Moser, 1982, 1983; De Corte y Verschaffel, 1985a; Heller y Greeno, 1987; Kintsch y Greeno, 1985; Morales, Shute y Pellegrino, 1985; Nesher y Greeno, 1981; Riley, Greeno y Heller, 1983; Vergnaud, 1982: Wolters, 1983), por considerar que la variable "estructura semántica del problema" es más relevante para determinar los procesos de resolución de los problemas que las variables sintácticas.

Carpenter y Moser (1982) señalan tres dimensiones básicas en los problemas verbales de suma y resta y que serán las que utilicen en su clasificación:

Primera dimensión: hay una relación dinámica o estática entre los conjuntos implicados en el problema. Hay problemas en los que hay una referencia a la acción que es la causa del cambio de la cantidad dada en el problema. En otros problemas, sin embargo, no existe ninguna acción, por lo que se da una relación estática entre las cantidades dadas en el problema.

Segunda dimensión: hay una relación de inclusión de conjuntos o una relación conjunto-subconjunto, es decir, dos conjuntos pueden ser subconjuntos de otro o uno de los dos conjuntos es disjunto con los otros dos.

Tercera dimensión: está implicada en la relación dinámica. La acción del problema es el resultado de un aumento o disminución de la cantidad inicial dada.

Con estas tres dimensiones o criterios, Carpenter y colaboradores, determinan seis clases de problemas: cambio/unión, cambio/separación, parte-parte-todo, comparación, igualación/suma e igualación/resta (tabla 4.1.).

TABLA 4.1

Dimensiones básicas de los problemas de sumar y restar, según Carpenter y Moser (1982)

	DIMENSIÓN 1		*DIMENSIÓN 2*		*DIMENSIÓN 3*	
	Dinámica	Estática	Dos conjuntos Subconjunto de otro	Un conjunto disjunto	Aumenta	Disminuye
Cambio/Unión	+		+		+	
Cambio/Separación	+		+			+
Parte-parte-todo		+	+			
Comparación		+		+		
Igualación/Suma	+			+	+	
Igualación/Resta	+			+		+

Teniendo en cuenta la **primera dimensión** corresponderían:

Relación dinámica: cambio/unión, cambio/separación, igualación/suma e igualación/resta.

Relación estática: parte-parte-todo y comparación.

En la **segunda dimensión** estarían:

Dos conjuntos, subconjuntos de otro: cambio/unión, cambio/separación y parte-parte-todo.

Un conjunto disjunto: comparación, igualación/suma e igualación/resta.

En la **tercera dimensión** entrarían:

Aumento: cambio/unión, e igualación/suma.

Disminución: cambio/separación e igualación/resta.

Por tanto, con las dimensiones anteriores, Riley, Greeno y Heller (1983) señalan que los esquemas semánticos de los problemas verbales de suma y resta que los niños utilizan para resolverlos, serían cuatro:

Problemas de Cambio

Implica acción. El esquema es:

·Hay una cantidad inicial -Juan tiene 5 canicas-

·Una acción que produce un cambio -Pedro le da 3 canicas-

·Un estado final. -Ahora Juan tiene 8 canicas

El cambio puede ser en dos sentidos, de aumento o de decremento. Si aumenta daría lugar a los problemas de cambio/unión y si disminuye , cambio/separación.

Pero la cantidad desconocida puede estar en el conjunto inicial, en el de cambio o en el conjunto final, lo que hace que pueda haber seis problemas de cambio, y que como ya analizaremos determinan distintos grado de dificultad. Siendo **a**, el conjunto inicial, **b** el conjunto cambio y **c** el conjunto final obtenemos:

Cambio/unión. Se pregunta por el resultado. Se resuelve mediante adición. La sentencia canónica es a + b = ?

Cambio/separación. Se pregunta por el resultado. Se resuelve mediante una resta. La sentencia canónica es a - b = ?

Cambio/unión. Se pregunta por el grupo de cambio. Se resuelve mediante una resta. La sentencia no-canónica es a + ? = c

Cambio/separación. Se pregunta por el grupo de cambio. Se resuelve mediante una resta. La sentencia no-canónica es a - ? = c

Cambio/unión. Se pregunta por el grupo inicial. Se resuelve mediante una resta. La sentencia no-canónica es ? + b = c

Cambio/separación. Se pregunta por el grupo inicial. Se resuelve mediante una suma. La sentencia no-canónica es ? - b = c

Se corresponde con la II categoría de Vergnaud: "una transformación opera sobre una medida para dar lugar a otra medida".

<u>Problemas de Combinación</u>

Implica una relación estática. El esquema es:

·Hay una cantidad **a** -Juan tiene 3 canicas-

·Hay una cantidad **b** -Pedro tiene 5 canicas-

·Hay una cantidad resultante -Ahora tienen 8 canicas entre los dos-

Estos problemas muestran las relaciones de dos cantidades separadas que se combinan y dan lugar a una tercera. Es la relación subgrupos entre si o grupo-subgrupo.

De acuerdo con lo anterior, Riley y cols. (1983) determinan dos tipos de problemas de Combinación

Combinación 1. Cuando se pregunta por el valor de la combinación. Se resuelve mediante una suma.

Combinación 2. Cuando se pregunta por uno de los subgrupos. Se resuelve mediante una resta. Los grupos son intercambiables.

Sin embargo Riley y Greeno (1988) señalan seis tipos de problemas de Combinación, que serán comentados en la clasificación que después presentamos y que es la que hemos utilizado para hacer nuestro trabajo.

Se corresponde con la I categoría de Vergnaud: "dos medidas se componen para dar lugar a otra medida".

Problemas de Comparación

En este tipo de problema se tienen dos cantidades que se han de comparar y la diferencia que existe entre dichas cantidades. El esquema es:

·Hay una cantidad **a** -Juan tiene 5 canicas-

·Hay una cantidad **b** -Pedro tiene 3 canicas-

·Hay una comparación -Juan tiene 2 canicas más que Pedro-

-Pedro tiene 2 canicas menos que Juan-

La operación es definida tanto desde la diferencia, bien incremento bien decremento, como desde la cantidad desconocida. La comparación puede tener como referente al conjunto mayor o al conjunto menor. Se deducen seis tipos de problemas:

Cuando se pregunta por el valor de la *diferencia*. Hay dos problemas, según se tomase como referente el conjunto mayor o el menor. ¿Cuánto más hay en "a" que en "b"? o ¿Cuánto menos hay en "b" que en "a"?

Cuando se pregunta por el valor del *conjunto referente*. También dos problemas, según se trate de qué conjunto es el mayor o el menor. El conjunto "a" puede tener "c" más o menos que "?

Cuando se pregunta por el valor del *conjunto comparado*. Hay dos problemas según sea mayor o no el conjunto referente respecto del comparado.

Se corresponden con la categoría III de Vergnaud: “una relación estática une dos medidas”.

Problemas de Igualación

Unen características de los problemas de Cambio y de los de Comparación. Por un lado es una relación dinámica, como Cambio, pero se realiza sobre la comparación de dos conjuntos disjuntos. El esquema es:

·Hay una cantidad **a** -Juan tiene 5 canicas-

·Hay una cantidad **b** -Pedro tiene 3 canicas-

·Hay una igualación -Juan tiene que perder 2 canicas para tener el mismo número que Pedro-

-Pedro tiene que ganar 2 canicas para tener el mismo número que Juan-

Riley y cols.(1983) solo consideran dos tipos de problemas de Igualación, según se tomase la cantidad mayor o menor para la pregunta, sin embargo Carpenter y Moser (1982) señalan seis tipos diferentes. Aunque la cantidad que iguala “a” con “b” es la misma que la que iguala “b” con “a”, la diferencia se encuentra en la forma de expresarla, en un caso se utiliza la expresión “como ganancia” y en la otra “como pérdida”.

Se pregunta por “b”. Se conoce “a” y la cantidad que iguala “a” con “b”. ”Hay 6 chicos y 8 chicas en un equipo. ¿Cuántos chicos tendrán que unirse al equipo para que haya el mismo número de chicos que de chicas en el equipo?”

Se pregunta por “b”. Se conoce “a” y la cantidad que iguala “b” con “a”. “Hay 7 copas y 11 platitos sobre la mesa. ¿Cuántos platitos habrá que quitar para tener igual número de copas y platitos?”

Se pregunta por “a”. Se conoce “b” y la cantidad que iguala “a” con “b”. “Hay 6 chicos en el equipo de futbol. Se han unido al equipo dos más.

Ahora hay el mismo número de chicos que de chicas. ¿Cuántas chicas hay en el equipo?”

Se pregunta por “a”. Se conoce “b” y la cantidad que iguala “b” con “a”. “Había 11 vasos en la mesa. Quité 4 y así me quedaron sobre la mesa los mismos platos que vasos. ¿Cuántos platos había en la mesa?”

Se pregunta por la cantidad que iguala “a” con “b” y se conoce “a” y “b”. “Juan tiene 7 lápices, Si María gana 3 más tendrá igual número que Juan. ¿Cuántos lápices tiene María?”

Se pregunta por la cantidad que iguala “b” con “a” y se conoce “a” y “b”. “Había algunas chicas en el grupo de danza. 4 de ellas se sentaron con el fin de que cada chico pudiera tener su pareja. Hay 7 chicos en el grupo de danza. ¿Cuántas chicas hay?”

Los trabajos posteriores casi siempre han sido realizados sin los problemas de Igualación, nosotros tampoco los incluimos.

Carpenter y Moser (1982) hacen referencia a que su clasificación se limita a los problemas simples que son apropiados para los niños de grado primario. No es tan completa como la de Vergnaud que se extiende a operaciones con números enteros.

También Heller y Greeno (1978) establecen una clasificación de los problemas verbales de suma y resta que ha sido ampliamente aceptada y seguida en la que consideran sólo tres categorías. Cambio (*Change*), Combinación (*Combine*) y Comparación (*Compare*). Los problemas de Cambio son situaciones en las que algún suceso hace incrementar o decrecer el valor de una cantidad. En los problemas de Combinación hay dos cantidades, consideradas cada una de ellas separadamente o en combinación.

Los problemas de Comparación se refieren a dos cantidades que se comparan y a la diferencia entre ellas. Los problemas de Combinación y Comparación envuelven relaciones estáticas entre cantidades.

Al mismo tiempo, Nesher y Katriel (1978) agrupan los problemas en torno a tres categorías semánticas que denominan: *Estática*, *Dinámica y de Comparación*. Se corresponden con las de Combinación, Cambio y Comparación, respectivamente, de Heller y Greeno (1978).

Ya en 1982, Nesher, Greeno y Riley, utiliza las tres categorías: Combinación (Combine), Cambio (Change) y Comparación (Compare) de las que hace una descripción y presenta unas equivalencias entre las categorías de distintos estudiosos del tema y que reproducimos en la tabla 4.3. Propone 14 tipos de problemas a partir de las tres categorías de la siguiente manera:

La categoría de *Combinación* está constituida por una relación estática entre las cantidades. Pregunta por el todo o por alguna de las partes. Ejemplo: Hay 3 chicos y 4 chicas. ¿Cuántos niños hay en total? Para estos autores los problemas de Combinación son dos: Combinación 1 y Combinación 2, en función de la pregunta por el todo o por una de las partes.

La categoría de *Cambio* describe un incremento o decremento en algún estado inicial para producir un estado final. Ejemplo: Juan tiene 6 canicas. Pierde 2. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan? Tienen en cuenta, además de incremento o decremento, si se pregunta por el conjunto resultado, el conjunto cambio o el conjunto inicial, conjugando estas dos variables consideran 6 problemas de Cambio.

La categoría de *Comparación* está constituida por una relación estática de comparación entre dos cantidades. El dato desconocido puede ser la diferencia o una de las cantidades cuando la diferencia viene dada. Teniendo en cuenta: sí menciona “mas” o “menos” y sí pregunta por la diferencia, por el conjunto comparado o por el conjunto referente, son seis los problemas de Comparación propuestos por dichos autores.

La clasificación propuesta por Riley y Greeno (1988), incluye las tres categorías: Cambio, Combinación y Comparación, de otros autores (Heller y Greeno, 1978; Nesher, Greeno y Riley, 1982), pero con diferencias en los problemas de Combinación. Estas diferencias entre los distintos problemas de Combinación son explicadas por Riley y Greeno (1988, p. 51) así: Combinación 1 y Combinación 2, ambos han dado los subgrupos y una combinación desconocida, pero difieren en que Combinación 2 menciona el grupo combinado desconocido antes de especificar los subgrupos, mientras que Combinación 1 sólo menciona el grupo combinado desconocido en la pregunta. (Estos dos problemas equivalen a Combinación 1 de los demás autores).

Estos autores para el problema de Combinación 2 -se desconoce uno de los subgrupos- consideran 4 problemas en los que también se pregunta por los subgrupos, es decir, Riley y Greeno (1988) aportan los cuatro problemas siguientes: Combinación 3 y Combinación 4, en los que se menciona los subgrupos dado y desconocido -en diferentes órdenes- y entonces especifican la combinación dada. Y Combinación 5 y Combinación 6 en los que se menciona la combinación dada primero, pero en Combinación 5 a continuación se especifica el subgrupo dado y se pregunta por el subgrupo desconocido y en Combinación 6, se menciona el subgrupo desconocido antes de especificar el subgrupo dado.

A continuación reseñamos los distintos ejemplos de problemas de cada tipo que Riley y Greeno (1988) proponen y que son los que hemos seguido en nuestra fase experimental (tabla 4.2.).

TABLA 4.2

Tipos de problemas propuestos por Riley y Greeno (1988, p. 53).

COMBINACIÓN

Combinación 1 *(combinación desconocida)*

José tiene 3 canicas; Tomás tiene 5 canicas. ¿Cuántas tienen en total?

Combinación 2 *(combinación desconocida)*

José y Tomás tienen algunas canicas. José tiene 3 canicas. Tomás tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen en total?

Combinación 3 *(subgrupo desconocido)*

José tiene 3 canicas. Tomás tiene algunas canicas. Tienen 8 canicas en total. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?

Combinación 4 *(subgrupo desconocido)*

José tiene algunas canicas. Tomás tiene 5 canicas. Tienen 8 canicas en total. ¿Cuántas canicas tiene José?

Combinación 5 *(subgrupo desconocido)*

José y Tomás tienen 8 canicas en total. José tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?

Combinación 6 *(subgrupo desconocido)*

José y Tomás tienen 8 canicas en total. José tiene algunas canicas. Tomás tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene José?

CAMBIO

Cambio 1 *(resultado desconocido)*

José tenía 3 canicas. Entonces Tomás le dio 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene José ahora?

Cambio 2 *(resultado desconocido)*

José tenía 8 canicas. Entonces le dio 5 canicas a Tomás. ¿Cuántas canicas tiene José ahora?

Cambio 3 *(cambio desconocido)*

José tenía 3 canicas. Entonces Tomás le dio algunas canicas. Ahora José tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas le dio Tomás?

Cambio 4 *(cambio desconocido)*

José tenía 8 canicas. Entonces le dio algunas canicas a Tomás. Ahora José tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas le dio a Tomás?

Cambio 5 *(cantidad inicial desconocida)*

José tenía algunas canicas. Entonces Tomás le dio 5 canicas. Ahora José tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas tenía José al principio?

Cambio 6 *(cantidad inicial desconocida)*

José tenía algunas canicas. Entonces le dio 5 canicas a Tomás. Ahora José tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tenía José al principio?

COMPARACIÓN

Comparación 1 *(diferencia desconocida)*

José tiene 5 canicas. Tomás tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Tomás más que José?

Comparación 2 *(diferencia desconocida)*

José tiene 8 canicas. Tomás tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Tomás menos que José?

Comparación 3 *(cantidad comparada desconocida)*

José tiene 3 canicas. Tomás tiene 5 canicas más que José. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?

Comparación 4 *(cantidad comparada desconocida)*

José tiene 8 canicas. Tomás tiene 5 canicas menos que José. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?

Comparación 5 *(referente desconocido)*

José tiene 8 canicas. Tiene 5 canicas más que Tomás. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?

Comparación 6 *(referente deconocido)*

José tiene 3 canicas. Tiene 5 canicas menos que Tomás. ¿Cuántas canicas tiene Tomás?

Como resumen, recogemos las equivalencias aportadas por Nesher, Greeno y Riley (1982) entre las distintas categorías propuestas por los diferentes autores que hemos señalado hasta ahora (tabla 4.3.)

TABLA 4.3

Equivalencias entre las categorías semánticas de los problemas de suma y resta.

Categorías de Problemas	Características	Equivalencias entre las categorías de distintos autores
COMBINACIÓN	Relaciones estáticas entre conjuntos	***Combinación**: Greeno (1980); Heller y Greeno (1978); Riley (1979); Riley y cols. (1981). ***Parte-Parte-Todo**: Carpenter y Moser (1981); Carpenter y cols. (1981). ***Estática**: Nesher (1978, 1981). ***Composición de dos medidas**: Vergnaud y Durand (1976); Vergnaud (1981).
CAMBIO	De un estado inicial aumenta o disminuye a un estado final	***Cambio**: Greeno (1980). ***Unión y separación**: Carpenter y Moser (1981); Carpenter y cols. (1981). ***Dinámica**: Nesher y Katriel (1978); Nesher (1981). ***Transformación operando con dos medidas**: Vergnaud y Durand (1976); Vergnaud (1981).
COMPARACIÓN	Relaciones de comparación entre dos conjuntos	***Comparación**: Greeno (1980); Carpenter y Moser (1981); Carpenter y cols. (1981); Nesher y Katriel (1978); Nesher (1981). ***Conexión estática operando sobre dos medidas**: Vergnaud y Durand (1976); Vergnaud (1981).

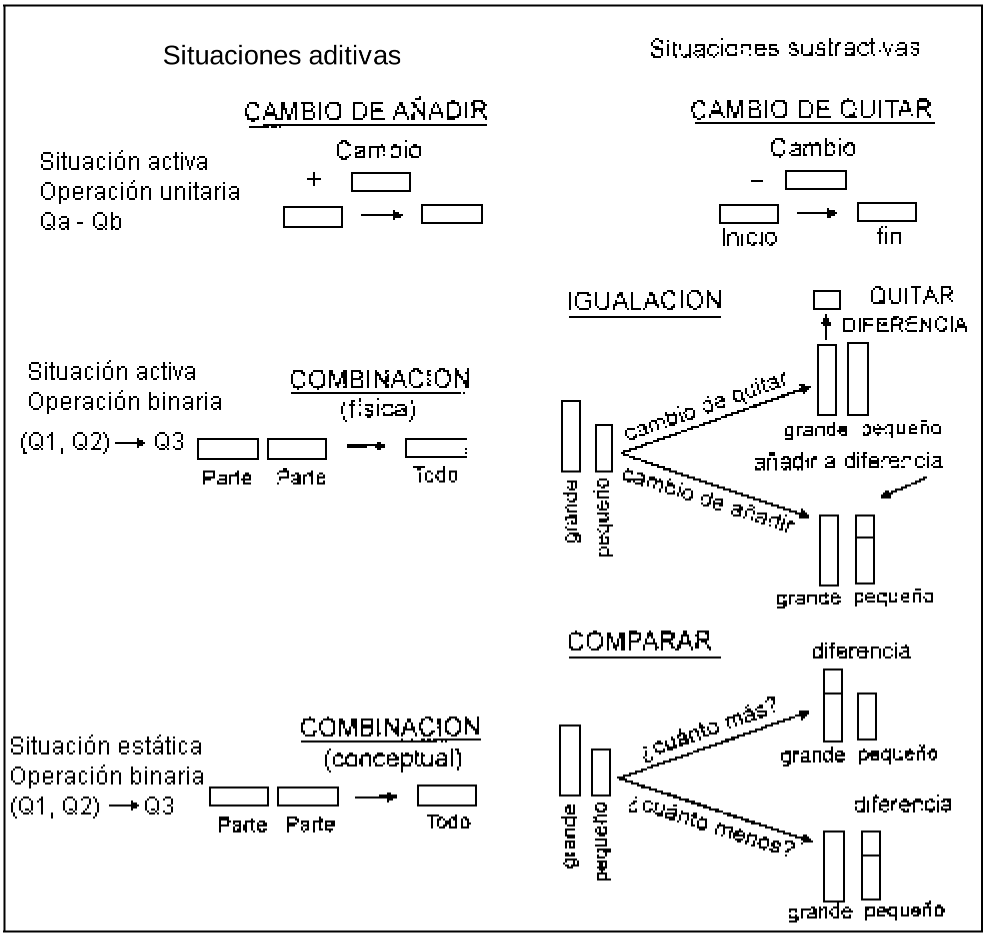
(Nesher, Greeno y Riley, 1982, p.374).

También, Fuson (1992), organiza las categorías semánticas a partir de las cantidades que intervienen (figura 4.1.). Señala las situaciones básicas de adición y sustracción: Cambio, Combinación y Comparación, pero la categoría de Cambio la divide en dos (como Carpenter y cols., 1983): Cambio añadir (Change add to) y Cambio quitar (Change take from). Cuando hay *dos* cantidades se puede comparar o combinar. Comparar y Combinar son operaciones *binarias*. Cuando hay *una* sola cantidad se puede añadir o se puede quitar de la cantidad. Las situaciones de Cambio añadir y Cambio quitar son operaciones *unitarias.*

La distinción entre situaciones *estáticas* -referidas a cantidades que no cambian- y situaciones *activas* -en las cuales las cantidades cambian- han sido hechas en casi todos los sistemas de categorías. La mayor parte de estos sistemas convierten esta distinción estática/activa en distinción binaria/unitaria. Siendo las categorías de Combinación y Comparación estáticas/binarias y las categorías de Cambio de añadir y Cambio de restar unitarias/activas. Sin embargo aunque parte de sólo tres categorías, después introduce la categoría de Igualación, diciendo: los problemas de Comparación binarios/activos llamados problemas de Igualación (Equalize) son combinaciones de problemas de Comparación y Cambio en los cuales las diferencias entre dos cantidades se expresan como acciones unarias de Cambio de restar y Cambio de sumar más que un estado estático como en los problemas de Comparación. La categoría de Combinación también la subdivide en Combinación Física (physically), cuando es una situación activa y Combinación conceptual (conceptually), cuando la situación es estática, aunque esta situación tiene poca importancia excepto para resolutores inexpertos o inmaduros.

FIGURA 4.1

Situaciones aditivas y sustractivas que originan los problemas, según Fuson (1992)



Finalmente, Bermejo y cols. (1997) presentan una clasificación, que si bien se adapta en líneas generales a las categorías clásicas, aporta ciertas matizaciones. Recoge una nueva categoría y considera la distinción entre un solo sujeto implicado en el problema o si la situación afecta a dos sujetos. Analiza cada una por separado.

A -Un sujeto. Hay dos posibilidades, o hay una acción afectando al problema (A1) o no hay acción (A2). En el caso A1 la acción recae sobre la cantidad perteneciente al único sujeto implicado, y responde a la conocida categoría de **Cambio**. En el caso A2 podemos describir situaciones con dos cantidades relativas al sujeto. Estas dos cantidades pueden bien combinarse, originando la categoría de **Combinación**; bien compararlas (por ejemplo: ¿cuántas canicas tiene en un bolsillo más que en el otro?), dando lugar a la categoría de **Comparación**; bien preguntarnos por un cambio implícito que las iguale, ocasionando la categoría de **Igualación**.

B -Dos sujetos. De nuevo aparecen dos opciones, o hay acción afectando a alguna de las cantidades (B1) o no hay acción (B2). El hecho de tener dos sujetos permite una mayor variabilidad en los problemas. En el caso B1 la acción puede venir dada por un cambio interno (B1.1), de manera que alguno de los sujetos altera su cardinal aumentando el del otro, o bien la acción viene determinada por un cambio externo (B1.2), esto es, alguno de los sujetos ve modificado su cardinal por un agente externo (por ejemplo "Juan se encuentra dos canicas en el suelo"), de manera que el cardinal global queda en esta ocasión también modificado.

El primer caso descrito excede el propósito de esta clasificación, ya que si tenemos por ejemplo el problema: "Juan tiene 2 canicas y Pepe tiene 7. Pepe le da 3 a Juan", para la resolución final hay que tener en cuenta que a la vez que Pepe pierde 3 canicas y que Juan aumenta las suyas en esas mismas canicas, lo cual supone controlar dos operaciones distintas a la vez.

En cuanto al segundo caso (B1.2) puede ocurrir que uno de los sujetos no se vea afectado por la acción, lo que nos sitúa ante un problema de cambio con datos irrelevantes, por ejemplo: "Juan tiene 3 canicas y Pepe tiene 5. Juan se encuentra 2". Sin embargo, la situación también puede describirse teniendo en cuenta la relación entre los cardinales correspondientes a los dos sujetos. Esta última situación le lleva a Bermejo y cols. a proponer una nueva categoría que han denominado **Relacional**, en la que hay una relación inicial de los dos sujetos que mediante un cambio externo produce una relación final. Se recogen en la tabla 4.4. ejemplos de estos problemas propuestos por Bermejo y otros (1997).

TABLA 4.4

Problemas verbales de la categoría Relacional, propuestos por Bermejo y cols. (1997)

Problemas verbales de adición	Problemas verbales de sustracción
Relacional 1 *(Comparación inicial desconocida).* Al principio Esther tenía algunos cromos más que su amiga. Esther encuentra 3 cromos. Ahora Esther tiene 9 cromos mas que su amiga. ¿Cuántos cromos tenía al principio Esther más que su amiga?	**Relacional 4** *(Comparación inicial desconocida).* Al principio Fran tenía algunas canicas más que Eduardo. Fran pierde 3 canicas. Ahora Fran tiene 12 canicas más que Eduardo. ¿Cuántas canicas tenía al principio Fran más que Eduardo?
Relacional 2 *(Cambio desconocido).* Camilo tiene 5 reglas más que Rodrigo. Camilo se compra algunas más. Ahora Camilo tiene 13 reglas más que Rodrigo. ¿Cuántas reglas se ha comprado Camilo?	**Relacional 5** *(Cambio desconocido).* Jesús tiene 15 soldados más que Javi. Jesús regala algunos soldados. Ahora Jesús tiene 7 soldados más que Javi. ¿Cuántos soldados ha regalado Jesús?
Relacional 3 *(Comparación inicial desconocida).* Al principio Salomé tenía 10 lápices más que Jaime. Salomé se ha comprado. 4 lápices. ¿Cuántos lápices tiene ahora Salomé más que Jaime?	**Relacional 6** *(Comparación final desconocida).* Al principio César tenía 11 juguetes más que Tamara. César ha roto 3. ¿Cuántos juguetes tiene ahora César más que Tamara ?

En cuanto a la situación B2, no existe acción el único caso que nos interesa es aquel en el que los dos cardinales son distintos, dándose entonces tres posibilidades: a) un cambio hipotético que los iguale, b) la comparación de cardinales, c) la unión de cardinales. Así se obtienen las categorías ya conocidas de B2a) Igualación, B2b) Comparación y B2c) Combinación.

5. MODELOS DE SIMULACIÓN

El objetivo de los modelos de simulación es determinar cómo el niño soluciona el problema, intentar mostrar el camino, los pasos, que el sujeto realiza y los procesos cognitivos implicados en dicha solución. Según Siegler (1983), hay, al menos, tres razones que justifican el interés por los modelos: 1) la comprensión de las matemáticas se puede modelar y los modelos propuestos para ello no sólo aportan el marco comparativo para evaluar el conocimiento de los niños, sino también el proceso evolutivo de los mismos; 2) tiene aplicación en la práctica, porque permite evaluar los conocimientos matemáticos de los alumnos por los profesores; y por último, 3) los modelos permiten modelar tanto los conceptos como los procedimientos, es decir, tanto las representaciones como el proceso que lleva a cabo el niño. Los distintos modelos tratan de encontrar las diferentes etapas por las que pasa el niño para resolver los problemas y determinar los distintos tipos de estructuras cognitivas empleadas en su resolución. También aportan datos sobre la dificultad de los diferentes tipos de problemas. Sin embargo, hay una cuestión común a todos los modelos propuestos: todos coinciden en que el problema de los niños está en construir una representación mental adecuada y coherente con el problema, y no en la elección o ejecución de la operación que resuelve dicho problema (Bermejo y Lago, 1987).

Los modelos que vamos a analizar son los siguientes: Briars y Larkin, 1984; De Corte y Verschaffel, 1985; Kintsch y Greeno, 1985; Riley, Greeno y Heller, 1983. Todos ellos tratan de encontrar los conocimientos y los procesos para la resolución de los problemas elementales de suma y resta. Para terminar el apartado de modelos de simulación nos referiremos a otros, llamados por Resnick (1982) sintácticos, porque son un conjunto de reglas a seguir y que si son seguidas y ejecutadas por el niño, éste puede sumar o restar correctamente sin que ese hallazgo de la respuesta acertada implique que comprende la operación que ha realizado. Entre estos últimos veremos, para la suma, el modelo de Groen y Parkman (1972) y para la resta los modelos de Woods, Resnick y Groen (1975); Resnick (1982); Mayer (1985).

5.1. MODELO DE RILEY, GREENO Y HELLER

Para estos autores es de fundamental importancia la comprensión en la recepción de datos; a dicha comprensión se llega abstrayendo las estructuras cuantitativas que subyacen en los problemas, es decir, abstrayendo los esquemas de los problemas (figura 5.1.1.).

El sistema -para llegar a representar la información que recibe- debe construir una red semántica que le conduce a la solución del problema. Una vez construida esta representación, por medio de la red semántica y desde ella, selecciona las operaciones aritméticas que debe realizar. Así, comprender un problema supone la construcción de una representación coherente y que incluya los diversos elementos del mensaje. Los elementos del problema están conectados unos con otros a través de las redes de relaciones, redes de las que forman parte los elementos del problema y las mismas relaciones planteadas por el problema.

Estos autores señalan tres tipos de conocimientos necesarios para la solución del problema:

El esquema del problema, para poder comprender las diferentes relaciones semánticas y representar la situación de aquel.

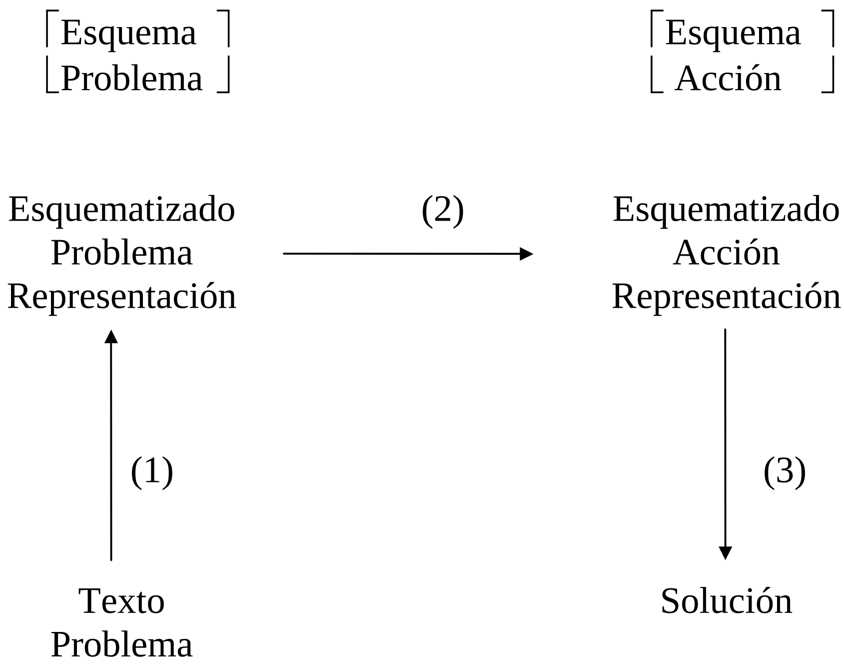
El esquema de acción, para representar el conocimiento de las acciones implicadas en la solución del problema.

El conocimiento de las estrategias, para planificar las soluciones.

El esquema del problema correspondería al conocimiento conceptual y el esquema de acción al conocimiento de procedimiento.

FIGURA 5.1.1

Estructura general de los procesos de solución (adaptado de Riley, Greeno y Heller, 1983, p.166).



El *esquema del problema* es el que permite su comprensión y el conocimiento de las relaciones semánticas. Hay un esquema para cada tipo de problema -cambio, combinación y comparación-, que se ponen en funcionamiento al leer el sujeto el problema; el niño hace corresponder la información con el esquema apropiado, asignando las cantidades específicas.

En el esquema de los problemas de cambio hay tres componentes, que darán lugar a las siguientes representaciones: la del estado inicial, la de la transformación -incremento o decremento- (que dará lugar al cambio) y la del estado resultante, por ejemplo, "Agustín tenía 4 caramelos. Juan le da 3 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene Agustín ahora?" La operación está determinada por el sentido del cambio y por el sumando desconocido. El esquema de los problemas de combinación lleva la existencia de dos cantidades separadas, que combinadas dan lugar a una tercera, es decir, "Eugenio tiene 5 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos? La operación viene determinada de distinto modo según se pregunte por una de las cantidades o por la cantidad total. En el esquema de los problemas de comparación se tienen dos cantidades separadas y una tercera, que es el resultado de comparar las dos anteriores, así en, "Agustín tiene 5 caramelos. Eugenio tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Agustín más que Eugenio? La operación estará en función del sentido de la diferencia y de la cantidad desconocida.

El *esquema de acción* es el que relaciona el esquema del problema con los procedimientos que llevarán a encontrar la solución. Estos esquemas de acción están organizados -estructurados- en niveles diferentes; a saber, los básicos (que son los que realizan la formación de conjuntos, quitar y añadir elementos, etc.) y los superiores o globales, que se constituyen a partir de los básicos.

El *conocimiento estratégico,* que está formado por las reglas que conducen a la solución. Supone la elección de un plan y la realización del mismo. Éste se desarrolla ordenadamente: se plantean objetivos, que -de no ser alcanzados- pueden ser sustituidos por subjetivos; una vez -en su caso- alcanzados estos subojetivos se vuelve a plantear el objetivo del problema.

Este planteamiento de subobjetivos se puede proponer cuantas veces sea necesario hasta alcanzar la solución.

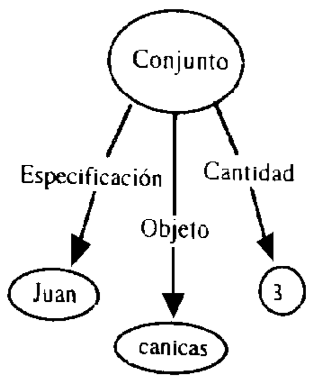
Más tarde Riley y Greeno (1988), en una nueva revisión del modelo, además de las redes semánticas para las representaciones, también distinguen distintos sistemas de producción. Un conjunto de producciones construye redes semánticas para representar la información proposicional del texto del problema: se corresponde con el texto-base del análisis de procesamiento de texto de Van Dijk y Kintsch (1983). Otro conjunto de producciones sería el encargado de construir modelos semánticos de la situación descrita en el texto -en el modelo de Van Dijk y Kintsch sería modelo de la situación y en Kintsch y Greeno (1985) modelo del problema- y, por último, un tercer conjunto de producciones es el que utiliza los modelos semánticos para dar respuesta a las cuestiones del problema aplicando estrategias de conteo.

Identifican tres niveles de conocimiento. En el Nivel I, los niños representan los conjuntos con objetos físicos y los cuentan para encontrar la solución. Solucionan los problemas que pueden secuenciar proposición a proposición, pero no son capaces de resolver problemas con la incógnita en uno de los sumandos, ni usar otra estrategia distinta de la de *contar todo*.

Por ejemplo, en el problema “Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?”, el niño hace lo siguiente: cuando se presenta la frase “Juan tiene 3 canicas” crea una red semántica, y propone una meta para crear, en el modelo del problema, un conjunto con tres elementos, realizándose las acciones necesarias para construir un conjunto con tres bloques (figura 5.1.2.). Cuando se presenta la siguiente frase “Pedro tiene 5 canicas” se construye una red semántica similar a la anterior, excepto que la especificación es “Pedro” y la cantidad “5”. Finalmente, cuando se plantea la pregunta "¿Cuántas canicas tienen entre los dos?" se elabora una meta para encontrar la unión de los dos conjuntos para responder a la pregunta, lo que le lleva a la acción de contar llegando a la respuesta "8".

FIGURA 5.1.2

Red semántica correspondiente al Nivel 1 de conocimiento propuesto en el modelo de Riley y cols., 1983 (adaptado de Riley y Greeno, 1988, p. 63)



En el Nivel 2, el niño puede construir redes semánticas que representan conjuntos que son mencionados en el texto, pero que no tienen definidas las cantidades específicas; estas representaciones hacen referencia a los conjuntos y a las relaciones entre conjuntos, usando un esquema de parte-todo, de transferencia dentro o fuera del conjunto o de comparación de conjuntos

En la figura 5.1.3., se representa la red semántica correspondiente al Nivel 2, con un problema de Comparación: "Pedro tiene 5 cromos. María tiene 9 cromos más que Pedro. ¿Cuántos cromos tiene María?". La proposición "Pedro tiene 5 cromos" le lleva al niño a hacer una representación igual a la del nivel 1, pero la frase “María tiene 9 cromos más que Pedro” no puede ser representada por los niños del nivel 1, porque incluye comprender la relación entre cantidades. Sin embargo, en el Nivel 2 sí la representan usando un esquema de comparación con tres componentes: el conjunto de referencia, el conjunto de comparación y el conjunto diferencia. Pueden solucionar problemas con la incógnita situada en uno de los sumandos y utilizan la estrategia de *contar a partir de uno de los sumandos.*

FIGURA 5.1.3

Red semántica correspondiente al Nivel 2 de conocimiento propuesto en el modelo de Riley y cols., 1983 (adaptado de Riley y Greeno, 1988, p. 64)

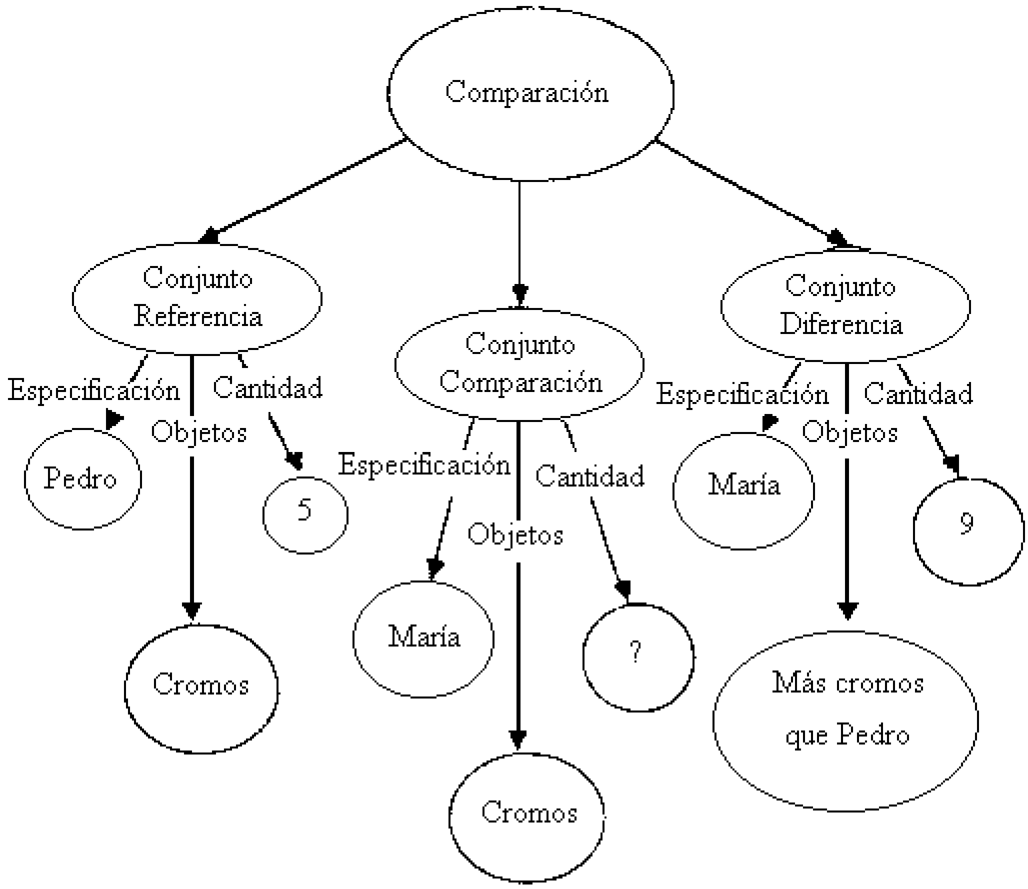
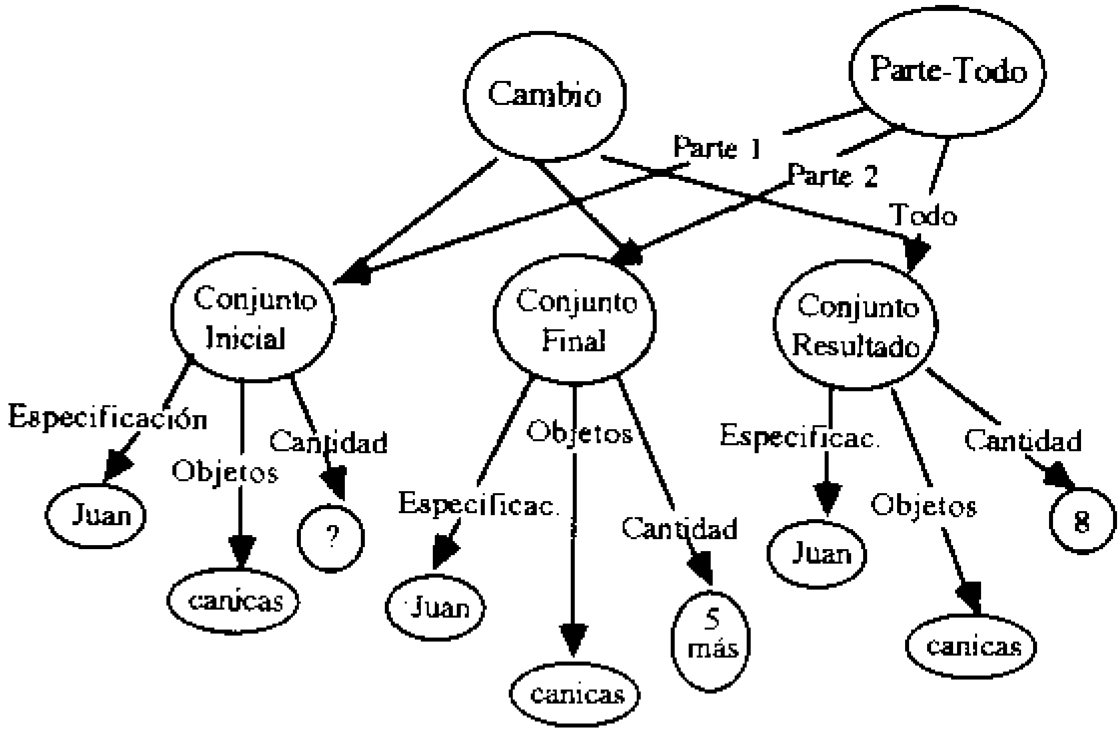


FIGURA 5.1.4.

Red semántica correspondiente al Nivel 3 de conocimiento propuesto en el modelo de Riley y cols., 1983 (adaptado de Riley y Greeno, 1988, p. 66)



En el Nivel 3 se incluyen producciones que transforman las representaciones de la red semántica añadiendo relaciones parte-todo a otras relaciones ya presentes. La incorporación del esquema parte-todo facilita la representación de las relaciones entre todos los elementos del problema. En la figura 5.1.4., se presenta la red semántica del problema de Cambio: Juan tiene algunas canicas. Pedro le da 5 canicas más. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio? La primera frase llevaría a una representación sin ninguna acción que construya un conjunto, como en el Nivel 2. La segunda frase induce a representar un conjunto de transferencia, pero en este nivel sí puede representar las relaciones de un esquema de Cambio sin tener un conjunto con una cantidad, sin embargo, en el Nivel 2, necesitaba que el primer conjunto tuviera una cantidad. La tercera frase le lleva a una representación de conjunto como ya sabía hacerlo y el nuevo conjunto es incorporado al esquema de Cambio como resultado, aquí entra en juego la relación parte-todo, característica de este nivel, y se produce un proceso de conversión que proporciona el conocimiento necesario para que cuando un conjunto es incrementado se represente una relación parte-todo en la que el resultado es el todo y los otros conjuntos las partes. A continuación se realizan las acciones para encontrar el número de objetos en una parte cuando son conocidos la parte y el todo.

5.2. MODELO DE BRIARS Y LARKIN

Briars y Larkin (1984), llaman a su modelo CHIPS (**c**oncrete **h**uman-like **i**nferential **p**roblem **s**olver) y su fundamento es determinar cómo un niño emplea materiales concretos (poker chips) para representar físicamente un problema y encontrar la solución. Cada chips o ficha constituye una estructura de datos organizada. Se formula una lista de estructuras y cada una de ellas es representada por un chips. Los pasos que sigue el modelo de simulación son: en un principio, antes de formularse el problema, hay un *conjunto fuente* con una colección de fichas disponibles. Cuando se formula el problema, toma cada vez una palabra para procesarla y, o no hace nada o ejecuta una acción sobre la colección de fichas. Simultáneamente construye *elementos* en su memoria de trabajo, que son los que van a decir su conocimiento del problema. Cada elemento está representado por una ficha.

Hay distintos elementos: unos elementos están encargados de especificar con un encabezamiento qué es una ficha (con un número de identificación para diferenciarla de otras fichas, y un registro para apuntar si ha sido contada o no). Otros elementos representan conjuntos o indicadores de conjuntos. Hay otro elemento, el temporal, que dice el número de veces que las fichas son movidas de un conjunto a otro. Los elementos especiales representan las relaciones de pertenencia y de descripción.

El CHIPS también construye grandes estructuras de datos llamadas *esquemas,* que tienen como misión registrar los conocimientos de forma organizada. Esta forma de almacenamiento es imprescindible para registrar la información relevante hasta que todos los chips necesarios sean movidos. Los esquemas se manifiestan activos mientras reúnen información o ejecutan acciones. Cuando el problema es solucionado con éxito, el esquema adquiere el status de "hecho".

El modelo tiene tres niveles de conocimiento matemático: contadores de función simple, contadores con doble función y de doble representación.

1er Nivel: Contadores de función simple: en este nivel se pueden resolver problemas sencillos de sumar y restar, ya que sólo intervienen los sistemas de producción, que describen el conocimiento necesario para mover y contar las fichas y también la pertenencia de cada ficha a un solo conjunto (tabla 5.1.).

2º Nivel: Contadores de doble función. Los chips, juegan un doble papel: decir cómo hallar los elementos pertenecientes a dos conjuntos a la vez y hallar la manera de contar esos conjuntos.

3er Nivel: Doble representación. En el último nivel, en el que sí existen diferencias con el tercer nivel propuesto por Riley y cols. (1983), el chips puede reconocer que acciones como combinar y separar pueden ser intercambiadas. Para esto tiene este nivel dos esquemas: uno de transferencia y otro de equivalencia de subconjuntos (que realiza la misma función que los esquemas de mover y contar). El primero, el de transferencia, permite almacenar las fichas del conjunto inicial, el número de fichas transferido fuera de él y el número de fichas que hay en el conjunto final. El otro esquema, el de equivalencia de subconjuntos, es similar al esquema parte-todo de Riley y cols. y es el que permite el intercambio entre subconjuntos, pudiendo transformar un problema con la incógnita en el primer sumando en uno con la incógnita en el segundo sumando y solucionarlo por modelado directo mediante contadores de doble función.

Tres diferencias importantes entre el modelo de Riley y cols y el modelo de Briars y Larkin son señaladas por Bermejo y Rodríguez (1990):

a) El CHIPS representa cada elemento mencionado en el problema (por ejemplo, 5 manzanas son representadas cada una por un contador), mientras que el modelo de Riley y cols. representa sólo las cantidades con números asociados y las identidades (por ejemplo, 5 manzanas es una cantidad con valor 5 e identidad manzanas).

b) En el modelo de Riley y cols. cada categoría de problema requiere un esquema diferente; en el de Briars y Larkin no *c)* El CHIPS considera dos causas posibles de las dificultades de los niños: las matemáticas y las lingüísticas, mientras que el modelo de Riley y cols. no se hace esta distinción.

TABLA 5.1

Sistemas de producción que describen el conocimiento necesario para mover y contar fichas (Brian y Larkin, 1984, p.255)

MOVER

M1. HACER UN CONJUNTO SI la palabra actual sugiere posesión o ganancia (tenía, encontró) y no hay un esquema de movimiento activo. ENTONCES hacer un conjunto nuevo y hacer un esquema para mover fichas al nuevo conjunto a partir del conjunto fuente con la condición de parar cuando un número de fichas (no especificadas actualmente) se hayan movido.

M2. MOVER FICHAS DENTRO O FUERA DE UN CONJUNTO SI la palabra actual sugiere ganancia (o pérdida) (obtuvo) y hay un conjunto actual y no hay un esquema de movimiento activo. ENTONCES hacer un esquema para mover fichas del conjunto actual al conjunto fuente (o desde) con la condición de parar cuando un número de fichas (no específico actualmente) haya sido movido.

M3. AÑADIR UN NUMERO A UN ESQUEMA DE MOVIMIENTO SI la palabra actual es un número y hay un esquema de movimiento y el número asociado con la condición de parar no es específico. ENTONCES añadir el número actual al esquema de movimiento.

M4. INTERPRETAR LA PALABRA “ALGUNOS” SI hay un esquema de movimiento con sus números sin especificar y la palabra actual es “algunos” ENTONCES dar al esquema de movimiento el status de “no se puede hacer”.

M5. INTERPRETAR “AHORA” DESPUÉS “ALGUNOS” SI hay un esquema para mover dentro o fuera de un conjunto y el esquema tiene un status de “o se puede hacer” y la palabra actual es “ahora” ENTONCES dar al esquema de movimiento un status de fijar la condición de parar de modo que las fichas son movidas hasta que el conjunto actual tenga un número de fichas (no específico actualmente).

CONTAR

C1. HACER UN ESOUEMA DE CONTEO SI la frase actual es: “¿cuántos?” y no hay un esquema activo de conteo ENTONCES hacer un esquema para contar.

C2. CONTAR EL CONJUNTO MÁS RECIENTE SI hay un esquema de conteo activo con el conjunto sin especificar y la palabra actual es “ahora”. ENTONCES hacer que el conjunto que va a ser contado sea el creado más recientemente.

C3. IDENTIFICAR UN CONJUNTO A SER CONTADO SI hay un esquema de conteo activo con el conjunto sin especificar y la palabra actual es un descriptor y sólo hay un conjunto con ese descriptor. ENTONCES hacer el conjunto a ser contado el conjunto especificado por el esquema de movimiento.

5.3. MODELO DE KINTSCH Y GREENO

Los dos modelos que hemos comentado no explican cómo se derivan las representaciones conceptuales del texto del problema. Es el modelo de Kintsch y Greeno (1985) el que trata de resolverlo, analizando los procesos de comprensión del texto de los problemas. Se fundamenta en la interacción de los procesos de comprensión de texto -basados en la teoría general sobre comprensión de textos que es expuesta por Kintsch y Van Dijk (1978); Van Dijk y Kintsch (1983) y Kintsch (1988)- y el conocimiento matemático que es necesario para representar los problemas y las estrategias para resolverlos -teoría de Riley y cols. (1983); Riley y Greeno (1988)-. Según estos autores, la concepción de Riley y cols. sobre la estructura semántica y la resolución de problemas de aritmética son compatibles con la concepción general sobre comprensión de textos. De igual forma que la concepción de van Dijk y Kintsch sobre la comprensión de textos, puede ser aplicada al análisis de las tareas de comprensión de problemas, en un campo de características diferentes, ya que ellos los han aplicado en textos narrativos y expositivos.

De acuerdo con Van Dijk y Kintsch (1983), la representación del texto en la memoria tiene dos componentes: una estructura proposicional de la información descrita en el texto -donde se representan sus aspectos superficiales- y un modelo de la situación que se deriva del texto. La estructura proposicional, o texto base, es obtenida mediante la construcción de una representación conceptual coherente del texto, llamada microestructura, desde la que se deriva una macroestructura jerárquica que se corresponde con las ideas esenciales expresadas en el texto. En el modelo de situación estarían las diferentes inferencias que el lector hace utilizando los conocimientos que tiene sobre la información incluida en el texto.

De forma general, para Kintsch y Greeno la comprensión del texto de una tarea verbal supone construir una representación conceptual sobre la que puedan operar los procesos de resolución del problema.

Los componentes del modelo son dos: estructuras de conocimiento y un conjunto de estrategias para utilizar dichas estructuras en la construcción de la representación y cuando se resuelve el problema. La representación se lleva a cabo en un doble nivel: por un lado, el input verbal se transforma en una *representación conceptual* de su significado (una lista de proposiciones). Las proposiciones se organizan en una macroestructura, específica para la actual tarea, que clarifica las relaciones y los conceptos generales que se mencionan en el texto. Este conjunto organizado de proposiciones constituye la base del texto. Por otro lado existe una segunda estructura -el modelo del problema- , que es una *representación abstracta* del mismo y que refleja el conocimiento de la información relevante y necesaria para resolver dicho problema, sacada a partir del texto base, en forma de apropiadas estrategias de cálculo.

El modelo incluye tres conjuntos de estructuras de conocimiento para representar y resolver el problema:

El primero está compuesto por un conjunto de marcos proposicionales que trasladan las frases a las proposiciones. El segundo tiene que ver con los esquemas que representan las relaciones entre conjuntos. Estos esquemas son usados en la construcción de macroestructuras y modelos de problemas. Y finalmente el tercer esquema hace referencia a los procedimientos de contar y operaciones aritméticas, que son utilizados para calcular la solución del problema. Explicaremos con más detalle cada uno de estos tres conjuntos de estructuras de conocimiento.

El primer conjunto de estructuras de conocimiento, como ya hemos señalado, traslada las frases a proposiciones; estas proposiciones se organizan dentro de unos esquemas llamados esquemas de conjunto -*set schema*-, que están compuestos por unos emplazamientos -especificación, objeto y cantidad- donde se incluyen las proposiciones. También, en el modelo del problema se crearía de forma similar un conjunto con los mismos elementos. Además de los emplazamientos creados existe otro en el esquema de conjunto, llamado rol, y que determina qué función hace dicho conjunto en el esquema de alto orden o superesquema.

El segundo conjunto de estructuras de conocimiento está formado por los esquemas de alto orden o superesquemas. Describen tres superesquemas que se corresponden con las tres clases de problemas, -cambio, combinación y comparación- y que son: esquema de "transferencia", esquema de "parte-todo" y esquema de "más que o menos que". En el superesquema *"transferencia"* hay un conjunto inicial de objetos al que se le transfiere un conjunto-cambio, bien añadiendo o quitando, y da lugar a un conjunto resultado. Las especificaciones, objetos y cantidades se derivan desde las proposiciones del texto base creando un esquema de conjunto, al que se le añade un nuevo emplazamiento, por medio del esquema rol, dentro del superesquema, que será inicial, cambio o resultado. En el superesquema *"parte-todo"* también hay tres conjuntos, dos tienen el rol de subconjuntos y el tercero el de conjunto total. Y en el superesquema *"más que o menos que"*, necesario en los problemas de comparación, incluye un conjunto que tiene el papel de conjunto mayor, otro el de conjunto menor y el tercero de conjunto diferencia.

Antes hemos descrito que existían dos representaciones, las representaciones conceptuales y las representaciones abstractas; el paso de unas a otras se hace mediante unas estrategias desencadenadas por las proposiciones que se encuentran en la base del texto y que son las encargadas de activar los superesquemas. Estas estrategias son cuatro: la estrategia de *"hacer conjunto"* es inducida por una proposición cuantitativa ("siete" o "cuantas"); la estrategia de *"transferencia"*, que asigna los roles a los conjuntos de acuerdo con el superesquema de "transferencia" y es inducida por la proposición "da"; la estrategia de*"diferencia"*, que asigna los roles a los conjuntos de acuerdo con el superesquema "mas que y menos que" y es inducida por las proposiciones "tiene más que" o "tiene menos que"; y la cuarta y última estrategia es la de*"conjunto principal":* asigna los roles de acuerdo con el superesquema "parte-todo" y es inducida por la proposición "tiene entre los dos". Es interesante reseñar que en los problemas de Cambio 5 y Cambio 6, al no conocerse el conjunto inicial, no pueden ser resueltos de la manera normal, es decir, la transferencia no puede hacerse sobre una cantidad desconocida y entonces solucionan el problema utilizando la estrategia "conjunto principal" y el superesquema parte-todo y por tanto infieren, desde el modelo del problema, la asignación de roles de subconjuntos y conjunto principal.

El tercero de los conjuntos de estructuras de conocimiento está formado por los procedimientos que se aplican en la resolución de los problemas. Siguen algunas de las estrategias identificadas por Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984) en el estudio longitudinal, (que ya han sido explicadas en el apartado de estrategias); en concreto son cinco las estrategias utilizadas, todas del nivel de modelado directo: una para la suma -contar todo- y cuatro para la resta -separar de, separar a, contar hacia adelante y emparejamiento- y que son aplicadas -una o varias- en cada tipo de problema. Así presenta las siguientes estrategias para los problemas de Cambio: para Cambio 1, el procedimiento es "contar todo"; para Cambio 2, "separar de"; para Cambio 3, "contar hacia adelante"; para Cambio 4, "separar a"; para Cambio 5 y Cambio 6 hay un proceso de conversión, al que ya hemos hecho referencia. Los problemas de Combinación: para Combinación 1, "contar todo"; para Combinación 2, "separar de". Por último, los problemas de Comparación son resueltos así: Comparación 1 y Comparación 2 mediante "emparejamiento" y para los otros 4 problemas restantes de Comparación, utilizan el proceso de conversión.

Como resumen podemos decir que Kintsch y Greeno desarrollaron un modelo para la representación de los problemas verbales utilizando el procesamiento de textos y teniendo en cuenta tanto el conocimiento sobre el procesamiento de texto -Van Dijk y Kintsch, 1983- como el conocimiento sobre estructuras y procedimientos para la resolución de problemas -Riley y cols, 1983- y que fuera aplicable a todos los tipos de problemas; pero hay problemas a los que no se le puede aplicar porque falta el conocimiento necesario para resolverlos.

5.4. MODELO DE DE CORTE Y VERSCHAFFEL

De Corte y Verchaffels, 1985, señalan que una de las dificultades en los primeros grados para resolver problemas de suma y resta es la etapa anterior a la selección de la operación para resolver el problema, es decir, la etapa en la que realizan una construcción apropiada de la representación inicial de la situación del problema, afirmando que un considerable número de niños construyen representaciones mentales del texto del problema que son deficientes y que cometen un considerable número de errores. Sus planteamientos están basados en la investigación que considera el procesamiento semántico como componente crucial en la resolución de problemas (Greeno, 1982; Riley y cols., 1983).

Estos autores proponen cinco etapas en su modelo:

1.- A partir del texto verbal el alumno construye una representación mental, abstracta y global en términos de grupos y de relaciones entre grupos. Esto es, realiza una actividad de procesamiento de textos compleja, transformando los textos verbales en proposiciones que serán la base para construir las representaciones mentales.

2.- En base a esta representación, el que resuelve el problema selecciona una operación aritmética formal apropiada o una estrategia de conteo informal para encontrar el elemento desconocido en la representación del problema.

3.- Se ejecuta la acción seleccionada u operación en la fase anterior.

4.- El que resuelve el problema reactiva su representación inicial y sustituye el elemento desconocido por el resultado de la acción hecha y dice la respuesta.

5.- Verificación de la solución. Se llevan a cabo acciones de comprobación para ver si es correcta la solución a la que se ha llegado en la etapa anterior.

La primera etapa del proceso de solución es una actividad de procesamiento de textos. Más específicamente, la representación mental construida en esta fase se considera el resultado de una interacción compleja en un análisis de arriba-abajo (botton-up) y de abajo-arriba (top-down). Consideran dos tipos de esquemas: *esquema semántico*, formado por los conjuntos o grupos y por las relaciones entre esos grupos y que son tres: causa/cambio, combinación y comparación ; y *esquema del problema verbal* (word problem schema, WPS), entendiendo por esquema del problema verbal uno más general, que implica conocimiento de la estructura interna y externa de los problemas verbales, de su papel y de su intención; esto es lo que permite a los sujetos enfrentarse adecuadamente a la solución.

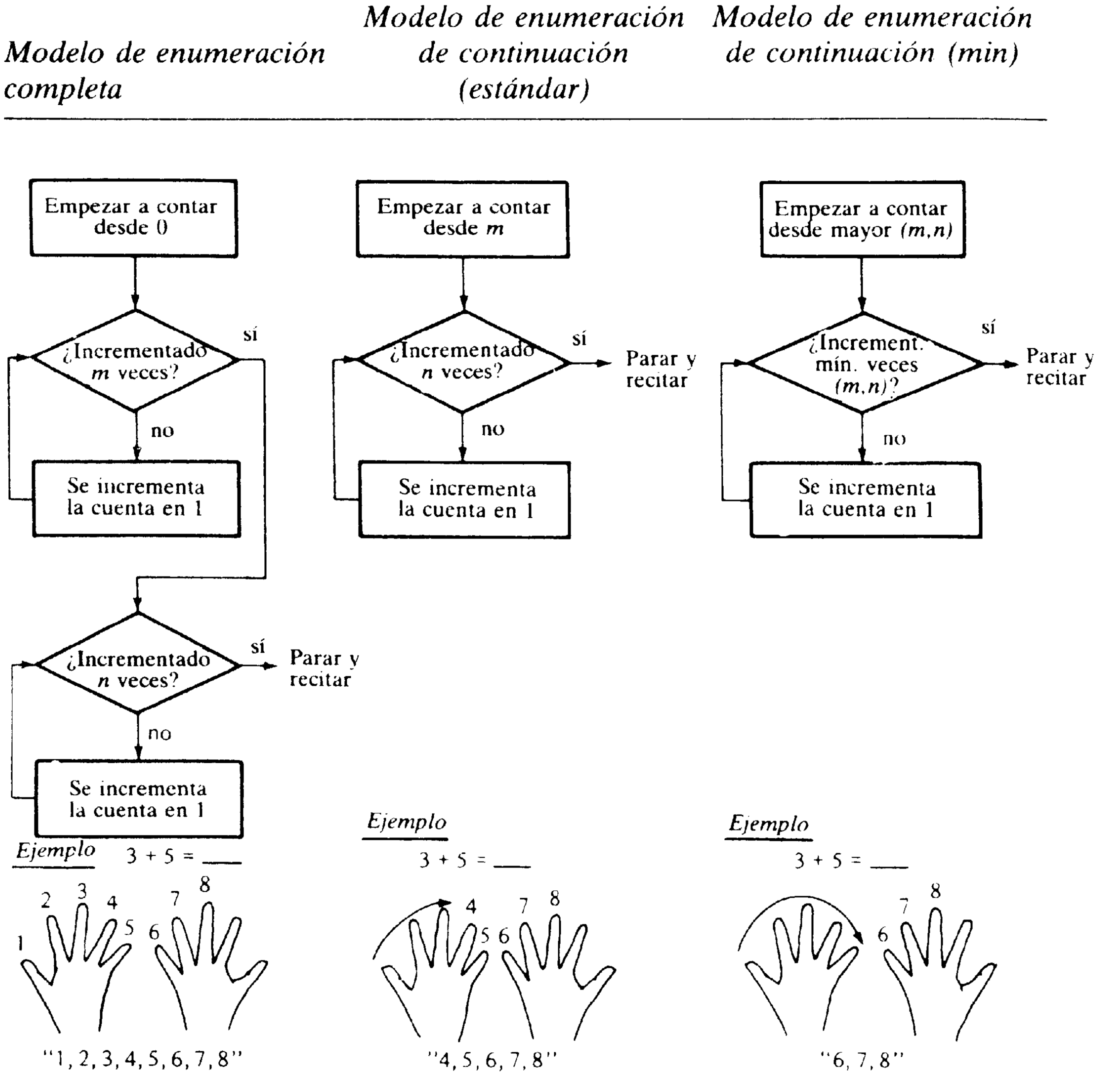
De Corte y Verchaffel señalan, entre otros aspectos, los siguientes, que deben ser conocidos por el sujeto: Primero: conocer la naturaleza de la tarea que tiene que realizar, para emitir respuestas adecuadas (por ejemplo, contestación numérica). Segundo: estar en posesión de conocimientos relacionados con la estructura de las expresiones de los problema para coger la información relevante e ignorar la irrelevante para la solución del problema. Un tercer aspecto es saber una serie de reglas implícitas o suposiciones para interpretar correctamente las ambigüedades e imprecisiones del texto verbal, obteniendo de esa forma una representación apropiada y correcta y, por extensión, encontrar la solución correcta.

5.5. MODELOS SINTÁCTICOS

Groen y Parkman (1972), para resolver tareas de sumar del tipo "$m + n = ?$", -con números enteros positivos y que no supere la suma 9-, consideraron que hay cinco diferentes procedimientos de contar usados para solucionar el problema. Para ello consideraron, un contador que realiza dos operaciones. Una operación se encarga de establecer un valor específico en el contador, la otra de ir aumentando el valor inicial del contador mediante incrementos de uno en uno. Hay un segundo sistema que registra las unidades incrementadas y que se pone en marcha después de cada incremento. Los modelos de conteo son los siguientes (figura 5.5.1.):

1.- Modelo de enumeración completa. El contador se sitúa en 0. Se incrementa con m y a continuación con n , mediante incrementos de uno en uno. En el caso de 3 + 5, el niño cuenta "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8".

FIGURA 5.5.1
Tres modelos de formas de contar para la adición sencilla de m + n
(tomado de Mayer 1985, p. 184)

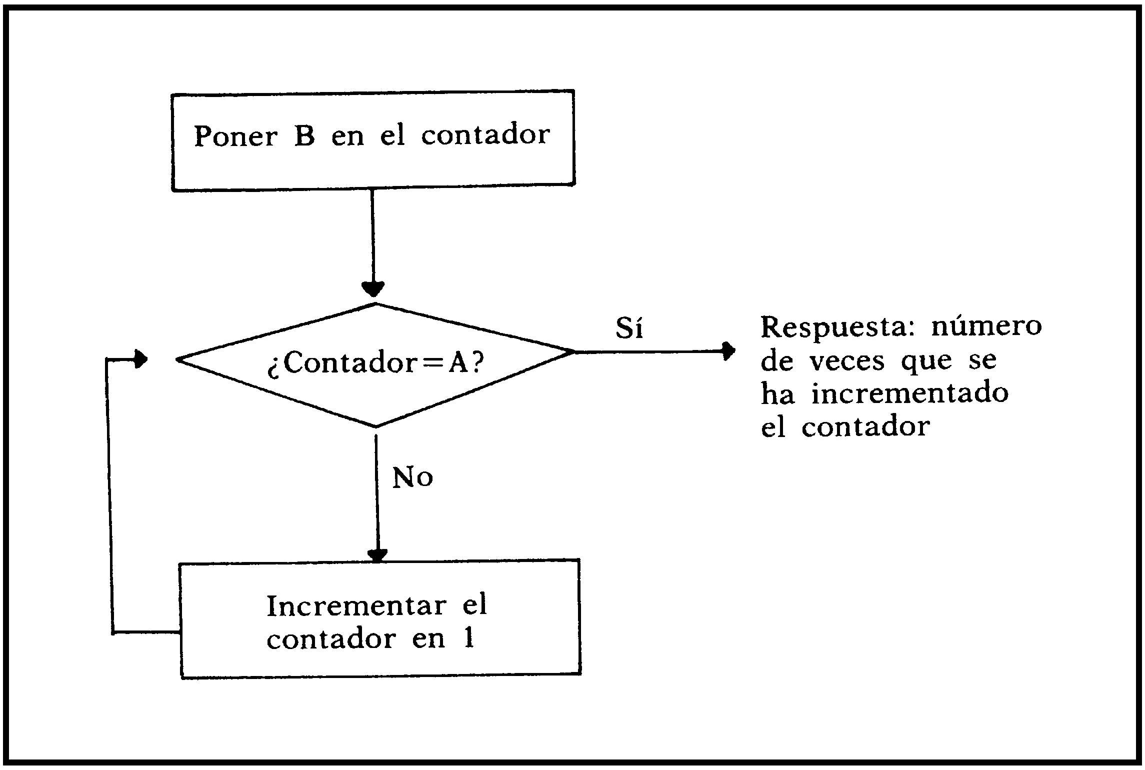


2.- Modelo de enumeración de continuación. El contador se pone al principio en *m* (primer sumando), y se va añadiendo con incrementos de uno en uno *n*. En el caso 3 + 5, el niño cuenta "4, 5, 6, 7, 8".

3.- Modelo de enumeración de continuación El contador se pone al principio en *n* (segundo sumando), y se va añadiendo con incrementos de uno en uno *m*.

FIGURA 5.5.2

Modelo de incrementación (Variante de Mayer, 1985).



4.- Modelo de enumeración de continuación. Se coloca en el contador el menor de los sumandos (*m* o *n*) y se va añadiendo con incrementos de uno en uno el otro sumando.

5.- Modelo Min (de enumeración de continuación). Se coloca en el contador el mayor de los sumandos (*m* o *n*) y se va añadiendo con incrementos de uno en uno el sumando menor.

La aplicación de estos modelos a niños de primer curso por Groen y

Parkman demostraron que las predicciones de los tiempos de reacción se ajustaban más para el último modelo.

Woods, Resnick y Groen (1975), siguiendo criterios similares a los de la suma, proporcionan ejemplos de algoritmos de contar en problemas de sustracciones sencillas. Mayer (1985) recoge tres modelos de algoritmos de sustracción en niños, para problemas de la forma m - n = ?

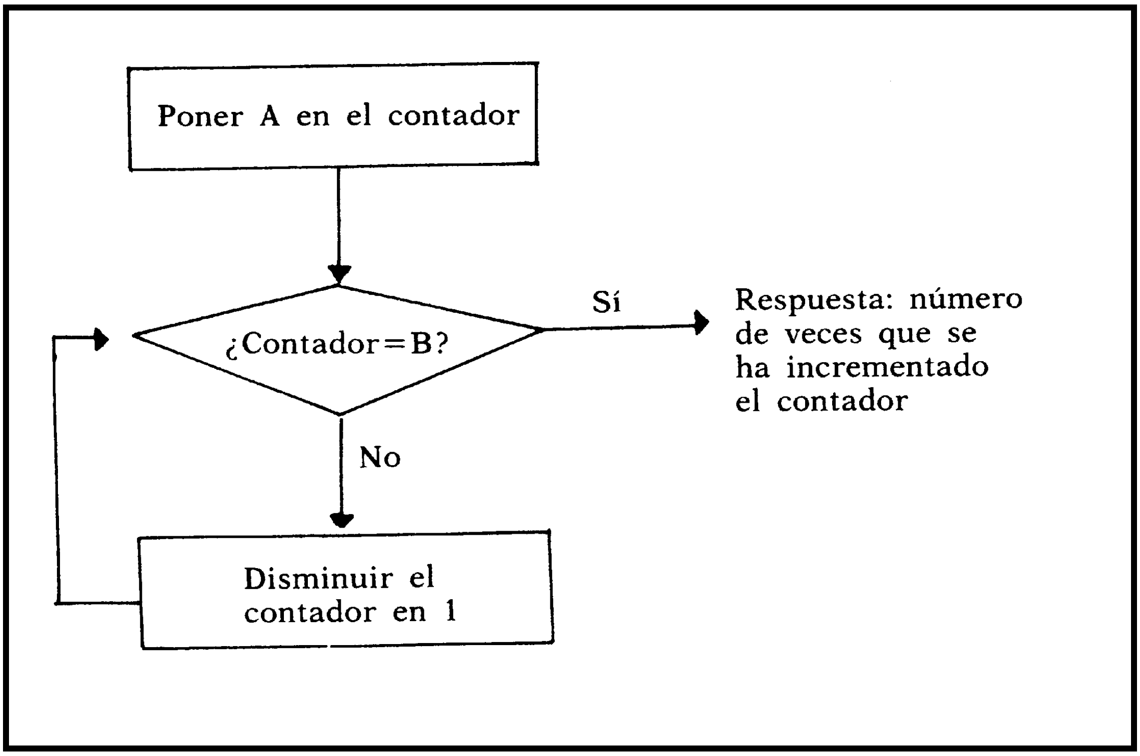
Modelo de incremento. Se empieza a contar desde *n* hasta llegar a *m*. Se pondría la cantidad menor *n* en el contador y se iría incrementando hasta que el contador llegara a *m.* Por ejemplo, 5 - 3, requerirá que se empiece a contar desde 3; al tiempo de decir "4, 5" se extendería primero un dedo y luego dos (figura 5.5.2.).

Modelo de disminución. Se empieza a contar en *m*, y se cuenta hacia atrás *n* veces. Se pondría la cantidad mayor *m* en el contador y se iría disminuyendo hasta que en el contador anparezca *n.* La solución será el número de pasos hasta llegar a *n.* Por ejemplo, 5 - 3, requerirá que se empiece a contar en 5, y al tiempo de decir "4, 3, 2" se extendería uno, dos y, finalmente, tres dedos (figura 5.5.3.).

Modelo de elección. Se utilizaría bien el modelo de incremento, bien el modelo de disminución, dependiendo de cuál de ellos requiera contar menos. Por ejemplo, 5 - 3 requiere tres enumeraciones si se utiliza el modelo de disminución; pero solamente dos si se utiliza el modelo de incremento; por el contrario, 5 - 1 requiere sólo una enumeración con el modelo de disminución, y cuatro con el modelo de incremento.

FIGURA 5.5.3

Modelo de decremento (Variante de Mayer, 1985)



Woods y cols. (1975) hicieron un estudio con niños de segundo y cuarto para ver qué modelo se ajustaba mejor a las predicciones propuestas. Los de cuarto se ajustaban mejor al método de elección, es decir, elegían el método que fuera más eficaz en cada situación; por el contrario, para los niños de segundo el modelo de disminución era el que proporcionaba mejor indicación de su rendimiento, en consecuencia, para estos autores, existe la evidencia de que a medida que los niños van adquiriendo más experiencia, pasan de un procedimiento menos sofisticado de contar a otro más sofisticado, en las restas sencillas.

5.6. CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS DE SIMULACIÓN

Es el punto de vista teórico el que ha llevado a diseñar los modelos de simulación y a establecer niveles de realización de los problemas. Se pueden hacer predicciones sobre la validez de ellos, pero ha de ser la demostración práctica, con datos reales, la que nos diga la efectividad o no de ellos. Hay determinados trabajos que aportar algunas conclusiones, no definitivas, que nos pueden ayudar a esclarecer cuál de estos modelos puede ser el más apropiado. En esta línea, comentaremos algunas investigaciones que se han realizado con esta finalidad. En primer lugar los trabajos de Fletcher (1985) y Dellarosa (1986) llevados a cabo para comprobar el modelo de Kintsch y Greeno (1985). El estudio Riley y Greeno (1988), con niños, con la finalidad de examinar si la realización de problemas de Cambio, Combinación y Comparación se ajustaba a los niveles establecidos por el modelo de Riley, Greeno y Heller (1983).

Fletcher (1985), diseñó un programa de ordenador, escrito en Interlisp-D, llamado WORDPRO, para aplicar la teoría de Kintsch y Greeno (1985) en la comprensión y solución de problemas verbales con niños de tercer curso. Trabaja con textos proposicionales, a partir del texto, construye una representación en dos niveles, la cual usa para encontrar la solución. Los dos niveles de la representación son: el texto base y el modelo del problema. El texto base está organizado en proposiciones. El modelo del problema es no proposicional. Se supone que el conocimiento de los conjuntos subyace a la construcción de los dos: texto base y modelo de problema. Este conocimiento es captado por un esquema con tres ranuras: una corresponde al objeto, otra contiene el cardinal del conjunto y una tercera ranura la especificación, que posee la información para distinguir un conjunto de otro. Utiliza tres esquemas de alto orden, que son los encargados de organizar el conjunto de esquemas dentro de las representaciones coherentes del problema. Un esquema de transferencia recoge las relaciones entre el conjunto de partida, el conjunto de transferencia y el conjunto resultado. El esquema del conjunto principal es el que organiza el conjunto principal y los dos subconjuntos. Otro esquema describe las relaciones entre un conjunto pequeño, un conjunto grande y un conjunto diferencia.

El modo de funcionamiento de este programa es como sigue: una estructura base incluye un conjunto ordenado de producciones, que controlan el flujo de información en la memoria a corto plazo (MCP). Cada regla contiene un conjunto de condiciones y un conjunto de acciones, de modo que cada condición es un test en los contenidos actuales de la MCP y las acciones alteran la MCP añadiendo nueva información, pasando información vieja a la memoria a largo plazo (MLP) o eliminando información.

El programa de simulación de Fletcher, cumple las expectativas para las que fue diseñado por: primero, resuelve con éxito los problemas para los que se construyó; segundo, facilita la comprensión de la teoría de Kintsch y Greeno, al explicar el modo en que trabaja y resuelve los problemas y, tercero, puede compararse la ejecución del programa con la ejecución de los niños.

Dellarosa (1986), hace un programa ARITHPRO, que desarrolla y completa al programa WORDPRO. La estructura de este programa, ARITHPRO incluye todos los componentes del modelo psicológico en el que se basa y que son: 1) los procesos de comprensión lingüística, 2) el conocimiento referente a los conjuntos y sus relaciones lógicas, 3) estrategias numéricas de conteo, 4) estrategias incorrectas de solución, 5) las metas, 6) un almacén de memoria a corto plaza (MCP), y 7) un almacén de memoria a largo plazo (MLP). Los procesos de comprensión lingüística es el primer conjunto de reglas de producción y abarca tres tipos de información lingüística: conocimiento de las palabras y sus significados, conocimiento sobre las proposiciones y sus significados y, por último, conocimiento sobre la estructura del texto. Ante la presencia de ciertas palabras se ponen en marcha las reglas de producción: las que se refieren al significado de las palabras y de las proposiciones. Las otras reglas lingüísticas generan metas que se relacionan con el conjunto de información y con la estructura del problema y son desencadenadas por la presencia de determinadas estructuras de proposición en la MCP.

El funcionamiento del programa ARITHPRO es como sigue: a partir del problema verbal construye marcos proposicionales y forma conjuntos de objetos con la información numérica. Durante la fase de comprensión del problema crea relaciones lógicas entre los conjuntos que se incluyen en superesquemas. Los superesquemas que son construidos dependen de la información presente en la proposición individual y del conjunto de estructuras. El superesquema es el que desencadena un procedimiento de conteo y finalmente, produce una respuesta al problema. Si no es producido un superesquema o éste resulta incompleto, entonces, se producen estrategias inadecuadas para la solución del problema.

Por otro lado, el conocimiento sobre los conjuntos y las relaciones de conjuntos, se relacionan con estructuras de construcción del problema. Y, además, están los procedimientos de conteo y reglas inadecuadas que comprenden los dos grupos restantes de reglas de procedimiento.

Dos cuestiones plantea Dellarosa (1986): en primer lugar, qué tipo de problemas son solucionados y cuales son las limitaciones del ARITHPRO y, en segundo lugar, qué características tiene su ejecución comparándola con las ejecuciones de los niños. Respecto a la primera, puede solucionar los tipos de problemas propuestos por Riley, Greeno y Heller (1983) y, además, puede tolerar bastante variabilidad en la redacción de estos problemas. En cuanto a la segunda cuestión, las reglas del programa son extraídas empíricamente a través de la observación de las características de ejecución de los niños que resuelven con éxito los problemas, sin embargo la ejecución no siempre es eficaz y se centra en los errores y en las diversas modificaciones que se tienen que realizar para simular estos errores. Para explicar estos errores diversos autores sostienen distintas posturas, aquellos que consideran los errores como resultado de una falta de conocimiento matemático (Riley y cols., 1983) y los que defienden que es debido a la carencia de un conocimiento lingüístico apropiado (Kintsch y Greeno, 1985). Aquí tiene valor ARITHPRO, porque a diferencia de los niños, en el modelo puede ser manipulado, cambiado, suprimido o añadido diferentes conocimientos y comprobar los efectos de dichos cambios. Así se puede determinar si posee el conocimiento matemático necesario para solucionar el problema o que el error se produce debido a la falta de información lingüística.

También se utiliza para hacer predicciones sobre la memoria de los aspectos verbales del texto y los resultados obtenidos demuestran que los nombres son particularmente difíciles para los niños cuando tienen que recordar una historia, los niños olvidan los nombres de los personajes de una historia aún cuando su memoria para el resto del problema sea buena (Dellarosa, Weimer y Kintsch, 1985).

El trabajo de Riley y Greeno (1988), se realizó con la finalidad de ver si los resultados de un grupo de alumnos, formado por niños de Infantil ($\overline{x}$ = 6. años), de Primero ($\overline{x}$ = 7 años) y de Segundo y Tercero ($\overline{x}$ = 8.1), en la resolución de problemas verbales de Cambio, Combinación y Comparación se ajustaban a los niveles establecidos por el modelo de Riley, Greeno y Heller (1983). Llevaron a cabo dicha comprobación en dos fases. En la primera se leen los problemas en voz alta y son repetidos si fallan o si el propio niño lo pide. Disponen de bloques de madera y hojas de papel. En la segunda, se leen de nuevo los problemas pero en orden diferente y se pide que los repitan.

Las conclusiones son: en general, los resultados se ajustan al modelo que había sido propuesto por estos autores en cuanto a los problemas de Combinación y de Cambio, pero no en los problemas de Comparación, es decir, aunque los tipos de conocimientos asumidos en los niveles I y II para los problemas de Comparación sean los mismos que en los problemas de Cambio y Combinación, sin embargo, hay más niños de Infantil y Primero en los niveles I y II para los problemas de Cambio y Combinación que para los problemas de Comparación, se puede explicar los fallos en los problemas de Comparación por falta de conocimiento lingüístico y conceptual para comprender el lenguaje utilizado. Por otra parte, los niños de Segundo y Tercero se encuentran en los niveles II y III en los problemas de Combinación y Cambio, pero muy pocos resuelven bien los problemas de

Comparación, aunque algunos niños sí se comportan de acuerdo con alguno de los niveles que se predicen en el modelo.

6. NIVELES DE CONOCIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Los modelos de simulación que acabamos de ver en el apartado anterior, además de describir los conocimientos y los procesos empleados por los niños en la resolución de los problemas elementales de suma y resta, también establecen niveles de conocimiento o de dificultad de su resolución. Briars y Larkin (1984); Fuson (1992); Nesher, Greeno y Riley(1982); Riley y Greeno (1988); Riley, Greeno y Heller (1983); Stern (1993), entre otros autores, establecen distintos niveles, bien a partir de sus propios modelos, bien a partir de los modelos que ya hemos descrito. Los niveles son establecidos o atendiendo sólo a una categoría de problemas -Cambio en los niveles de Riley y cols. (1983), Comparación en los de Stern (1993)- o más categorías -Cambio, Combinación y Comparación, los niveles de Nesher y cols, (1982) y Riley y Greeno (1988). Fuson (1992) además utiliza la categoría de Igualación-.

Nesher y cols. (1982) señalan las implicaciones pedagógicas -que para ellos- pueden obtenerse de la categorización por niveles de los problemas elementales de suma y resta. En primer lugar: conociendo las estructuras para resolver ciertos problemas, se puede programar mejor la secuencia de instrucción y adoptar diferentes estrategias para enseñar los distintos niveles. En segundo lugar: este análisis lleva a una mejor comprensión de las dificultades que los niños encuentran en los diferentes niveles de actuación. Esta misma investigadora Nesher (1999) concluye: “que la capacidad para resolver problemas de matemáticas depende del nivel de los esquemas y de las estructuras de que disponen los niños y que éstos cambian con el transcurso del tiempo y de los aprendizajes. Los alumnos pueden beneficiarse más si los profesores somos conscientes de los esquemas necesarios en cada nivel de aprendizaje y presentamos los problemas en su forma más general".

Sin embargo, Fuson (1992, p. 250) recoge unas reflexiones sobre como se debe considerar la categorización de los diferentes tipos de problemas en niveles y que pueden llevar a que los niveles establecidos sean incompletos o inadecuados: 1) Hay menos datos referidos a los problemas de Comparación e Igualación y estos datos avalan que los problemas de Comparación son de especial dificultad. Sin embargo, esta especial dificultad pudiera deberse más a la falta de entrenamiento que a la dificultad de los mismos Fuson (1988), Fuson y Willis (1986, 1989) apuntan que los niños podrían aprender rápidamente estos problemas si fueran sometidos a un mínimo de instrucción. 2) Los datos ofrecidos sólo recogen una única respuesta de cada niño a un tipo de problema, en vez de recoger varias respuestas que dieran más fiabilidad. 3) Tampoco se suele distinguir en los estudios los problemas resueltos por ensayo y error de los que son resueltos porque comprenden el problema y aplican el procedimiento adecuado. 4) El tiempo requerido en las entrevistas individuales, hace que estas se hagan demasiado esquematizadas.

Pero todavía Fuson (1992, p. 251) redunda más en el tema, añadiendo más razones, esta vez referentes a la actuación de los niños, que complican la diferenciación de los problemas en niveles, destaca que: los niños emplean en una misma sesión procedimientos distintos para resolver un mismo problema; algunos problemas presentan "pistas" -palabras claves- que ayudan a su resolución y que hacen que problemas más difíciles sean resueltos antes que otros más fáciles y que no las aportan, (ya se ha comentado a favor y en contra en otro lugar); los procedimientos de solución de un mismo problema varían en función de si son números grandes o pequeños con los que tienen que resolver el problema; también señala la influencia del sistema de enseñanza de cada país. Analizamos los distintos niveles propuestos por diferentes autores.

6.1. NIVELES DE NESHER, GREENO Y RILEY

Nesher, Greeno y Riley (1982) determinan cuatro niveles de dificultad en los problemas de Cambio Combinación y Comparación, teniendo en cuenta el desarrollo de los aspectos de: conocimiento y habilidades, operación lógica, operación matemática y estrategias.

Nivel 1: Está definido por la habilidad en representar y operar con conjuntos simples. El conocimiento disponible para representar información sobre conjuntos incluye el esquema *LO* (ordinary language) para identificar conjuntos y el esquema *LA* (arithmetic language) para representar la cardinalidad de un conjunto (Riley y cols., 1983). Estos esquemas son suficientes para representar problemas de Cambio 1, Cambio 2 y Combinación 1. La solución se encuentra manipulando directamente los conjuntos representados. La competencia aritmética consiste en contar y encontrar el cardinal de un conjunto.

Nivel 2: Sitúan en este nivel los problemas de Cambio 3 y Cambio 4. Requiere la habilidad de conectar hechos. El niño, puede entender que el cambio es el resultado de una acción que puede ser evaluada cualitativa (la dirección) y cuantitativamente (la cantidad). Hay un incremento, todavía parcial e insuficiente, del lenguaje matemático (*LA*) y de su conexión con el lenguaje ordinario (*LO*) que impide resolver problemas con la incógnita en el primer sumando. El signo "+" significa "tener más" y el signo "-" significa "quitar", lo que se corresponde en el lenguaje matemático con "incremento", "decremento", "más" y "menos". En aritmética, las operaciones "+" y "-" son distintas, no relacionadas y el signo "=" se entiende como una señal para ejecutar un procedimiento.

TABLA 6.1.1

Niveles de Nesher, Greeno y Riley (1982)

Tipo de problema	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Combinación 1	x			
Combinación 2			x	
Cambio 1	x			
Cambio 2	x			
Cambio 3		x		
Cambio 4		x*		
Cambio 5			x	
Cambio 6			x	
Comparación 1			x*	
Comparación 2			x*	
Comparación 3			x	
Comparación 4			x	
Comparación 5				x*
Comparación 6				x*

* En algunas muestras estos problemas estaban en el nivel anterior.

Nivel 3: En este nivel ya se posee el esquema parte-parte-todo y la estructura aditiva entre tres números. Este esquema facilita inferencias reversibles acerca de las conexiones entre conjuntos, incluyendo la diferencia existente entre dos conjuntos especificados. Por tanto, la información parcial puede ser representada faltando la cantidad desconocida. Desde el punto de vista del lenguaje aritmético, hay una estructura aditiva reversible, que es la que permite inferir si $a + b = c$ entonces $c - b = a$ o $c - a = b$. Un conjunto puede también definirse mediante comparaciones relativas. Los esquemas de este nivel están relacionados con la comprensión de la inclusión. En aritmética, en este nivel, la estructura aditiva es reversible e incluye el signo de "=" para denotar una relación de equivalencia. Determinan para este nivel los problemas de Combinación 2, Cambio 5, Cambio 6 y Comparación 1, 2, 3, y 4.

Nivel 4: El esquema de relaciones no simétricas (que comenzó en el nivel 2) está disponible de forma reversible. Las descripciones direccionales y relativas (más/menos) son entendidas de manera flexible según el sentido de la comparación. En el lenguaje aritmético, en este nivel está la habilidad para trabajar y entender con desigualdades e inferir relaciones con la igualdad si $a > b$, entonces $a - c = b$ o $b + c = a$. Así alcanzan la aparente contradicción que les plantea el lenguaje ordinario en este tipo de problemas, restar cuando indica "más" y sumar cuando indica "menos". La aritmética, en este nivel, incluye la capacidad de establecer desigualdades y la capacidad de igualar desigualdades mediante sumas o restas. En este nivel están los problemas de Comparación 5 y Comparación 6.

Nesher y cols. (1982) manifiestan cuando establecen sus niveles "..creemos que nuestra hipótesis que es profunda y detallada suficientemente tiene poder predictivo y puede ser examinada empíricamente, por el momento le viene bien a los datos empíricos que han sido encontrados universalmente". Los distintos niveles de estos autores se recogen en la tabla 6.1.1 y en la tabla 6.1.2. se relacionan los niveles con los aspectos de desarrollo del conocimiento empírico y las operaciones matemáticas.

TABLA 6.1.2

Niveles y aspectos del desarrollo Nesher (1999)

Nivel	Conocimiento empírico	Operaciones matemáticas
1 Recuentos	Se refiere a conjuntos, a añadir y quitar elementos a conjuntos. Comprensión de “poner”, “dar”, “tomar”, etc. que denotan cambio en la localización o posesión.	Capacidad para contar y encontrar el cardinal del conjunto. Ordenación de números $2<5<8$
2 Cambio	Capacidad de encadenar acontecimientos por causa y efecto. Se refiere a la cantidad de cambio. Comprensión de una secuencia de acontecimientos ordenados en el tiempo de forma no reversible.	Comprensión de la suma y resta como procedimientos. “+” y “-” son distintas $a + b \rightarrow c$ $a - b \rightarrow c$
3 Parte-todo-parte	Se dispone de un esquema reversible y puede usarse para encontrar la parte desconocida de una secuencia de acontecimientos. Comprensión de la relación de inclusión.	Comprensión de la relación entre tres números en una ecuación (“=“). Conexión entre suma y resta: si $a + b = c$ entonces $c - b = a$ y $c - a = b$
4 Relaciones direccionales	Reversibilidad de relaciones no simétricas. Habilidad para manejar descripciones direccionales (más/menos) y cuantificar una relación (comparación relativa).	Capacidad para manejar la desigualdad y su relación con la igualdad, igualándola por adición o sustracción: si $a > b$ entonces $a - c = b$ y $b + c = a$.

6.2. NIVELES DE RILEY, GREENO Y HELLER Y DE RILEY Y GREENO

Riley, Greeno, y Heller (1983) determinan niveles sólo con problemas de Cambio (tabla 6.2.1.), señalando también los errores que se producen.

Riley y Greeno (1988), hacen predicciones para los tres tipos de problemas -Cambio, Combinación y Comparación- (son 6 los problemas de Combinación utilizados: Combinación 1 y 2, corresponden a Combinación 1 y Combinación 3, 4, 5 y 6 corresponden a Combinación 2 de los demás autores) (tabla 6.2.2.). Establecen tres niveles para cada tipo de problema. A continuación comentaremos los tres niveles, siguiendo de cerca el trabajo posterior de Riley y Greeno (1988).

TABLA 6.2.1

Niveles de Riley, Greeno y Heller (1983)

Tipo de Problema	Niveles		
	1	2	3
Cambio 1	+	+	+
Cambio 2	+	+	+
Cambio 3	“8”	+	+
Cambio 4	+	+	+
Cambio 5	“5”	“5”	+
Cambio 6	NA	NA	+

“8” y “5” son números dados en el problema; NA = Sin respuesta

En el nivel I las representaciones de los problemas se limitan a representaciones externas, se hacen manipulando objetos. Las producciones de este nivel permiten: entender el número de objetos que tiene un conjunto; construir conjuntos en el modelo del problema, que se corresponden con los conjuntos especificados en las redes semánticas; comprender la pregunta sobre los conjuntos del problema y realizar el conteo para encontrar la respuesta. Pueden resolver problemas en los que la información sobre conjuntos se pueda secuenciar proposición a proposición tal y como se presentan en el texto del problema (Riley y Greeno, 1988, p. 62). Sólo usan la estrategia de "contar todo" y pueden resolver correctamente: Cambio 1, Cambio 2 -se da el conjunto inicial y la transformación y se pregunta por el cambio-; Combinación 1 y 2 -se pregunta por el conjunto total- y Comparación 1 y 2 -se pregunta por la diferencia teniendo como datos el conjunto mayor y el menor-. Riley, Greeno y Heller (1983), incluyen también Cambio 4.

TABLA 6.2.2

Niveles de Riley y Greeno (1988)

Tipo de problema		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Combinación	1	+	+	+
	2	+	+	+
	3	0	+	+
	4	0	+	+
	5	0	0	+
	6	0	0	+
Cambio	1	+	+	+
	2	+	+	+
	3	0	+	+
	4	(+)	+	+
	5	0	0	+
	6	0	0	+
Comparación	1	+	+	+
	2	+	+	+
	3	0	+	+
	4	0	+	+
	5	0	0	+
	6	0	0	+

Nota: + indica que el modelo predice una solución correcta; (+) indica una predicción indeterminada

Nivel II: El conocimiento de este nivel permite representar relaciones entre conjuntos utilizando los esquemas: parte-todo, transferir dentro o fuera de un conjunto o comparar conjuntos. Las producciones de este nivel pueden construir conjuntos especificados por relaciones que se establecen en las redes semánticas, incluyendo subconjuntos de un conjunto existente o un conjunto en el que se especifica un número mayor o menor que un conjunto existente. Además pueden contar para determinar el número de objetos de un conjunto que no está en el modelo, pero que es un subconjunto de un conjunto existente. Puede representar un esquema de comparación con tres componentes: un conjunto referencia, un conjunto comparación y una diferencia entre conjuntos. Utilizan de modo consistente la estrategia de "contar a partir de uno de los sumandos" (*counting-on*). Contestarían correctamente Cambio 3 en Riley, Greeno y Heller (1983) y Cambio 4, Combinación 3 y 4 y Comparación 3 y 4 en el estudio de Riley y Greeno (1988).

En el nivel III están las producciones que transforman las representaciones de la red semántica añadiendo relaciones parte-todo a otras relaciones ya presentes. Estas transformaciones o conversiones permiten el uso de producciones para hacer inferencias que dependen de las representaciones de estas relaciones parte-todo. Usan todo tipo de estrategias, incluidas las memorísticas y las basadas en reglas. Serían contestados todos los problemas correctamente.

6.3. NIVELES DE BRIARS Y LARKIN

El modelo de Briars y Larkin (1984), siguiendo a Morales, Shute y Pellegrino (1985, p. 45), establece los niveles recogidos en la tabla 6.3. y tiene en cuenta dos aspectos:

TABLA 6.3

Niveles de Briars y Larkin (1984)

Tipo de Problema	Características	Grupo
Cambio 1 y Cambio 2 Cambio 3 y Cambio 4 Cambio 5 y Cambio 6	Acción y Contadores de función simple Acción y Contadores de doble función Acción y doble representación	L1 (SR) L1 (DR) L1 (RR)
Igualación 1 y 2	Acción y Contadores de doble función	L1 (DR)
Combinación 1 Combinación 2	Implícita acción y Contadores de función simple No acción y Contadores de función simple	L1 (SR) L2
Comparación 1 y 2 Comparación 3 y 4 Comparación 5 y 6	No acción y Mas-menos No acción y Lenguaje consistente No acción y Lenguaje conflictivo	L3 L4 L5
Predicciones: Con L1 Por Grupos	 L1(SR) > L1 (DR) > L1 (RR) L1 > L2; L1 > L3 > L4 > L5	

Morales, Shute y Pellegrino (1985, p. 45).

Por un lado, tres niveles de conocimiento matemático: contadores de función simple, contadores con doble función y de doble representación, que han sido ampliamente descritos en el apartado de modelos. Y por otro lado: problemas con pautas de acción y sin pautas de acción.

Respecto del segundo aspecto, los primeros, son problemas de acción en que las palabras, especialmente los verbos, sugieren directamente acciones que CHPIS puede imitar con sus colecciones de chpis. Antes de que el proceso de resolución de problemas empiece CHIPS las cataloga como miembros de un conjunto fuente. Así tiene una situación inicial de contadores que puede mover y contar para resolver el problema. Los segundos son problemas sin pautas de acción, y que necesitan el conocimiento necesario para construir resoluciones sin las pautas directas que son utilizadas por los problemas de acción. Estos problemas se refieren a subgrupos indicados por las palabras juntas, en total; o que implican operaciones entre grupos catalogados con las frases “cuantas más”.

Teniendo en cuenta dichos aspectos establece: por un lado, Cambio 1 y 2 y Combinación 1 tendrán menor dificultad que Cambio 3 y 4; a su vez, este segundo grupo -Cambio 3 y 4- tendrá menor dificultad que Cambio 5 y 6. Además, todos los problemas anteriores, como grupo (L1) serán más sencillos que Combinación 2 (L2); por último el grupo L1 es más sencillo que L3 -Comparación 1 y 2-; L3 más sencillo que L4 -Comparación 3 y 4; y L4 con menos dificultad que L5 -Comparación 5 y 6. Como puede apreciarse, juega por un lado con los tres niveles de conocimiento matemático y por otro con problemas de acción y no acción.

6.4. NIVELES DE FUSON

Fuson (1992), también señala tres niveles, pero los hace corresponder con los procedimientos o estrategias de resolución y tiene en cuenta también los problemas de Igualación. Estos niveles son:

Nivel 1: Representan las situaciones de suma y resta con objetos (perceptual unit items). Modelan las situaciones con objetos. En todos los casos los niños moldean directamente los datos del problema, no son capaces de representar sin objetos la situación del problema y una vez modelados deciden un procedimiento de solución -sumar o restar- y finalmente llevan a cabo la solución, los niños resuelven tales problemas sin escribir el procedimiento de solución correcto como frecuentemente se requiere en la escuela. Llevan a cabo modelados con números grandes en sumas, incluso hasta 20 o más. En los problemas verbales sólo hasta 5 porque el patrón perceptivo está disponible para números pequeños pero no se pueden extender a sumandos de más de 5 dedos.

Nivel 2: Secuencia abreviada de procedimientos de conteo. Las tres cantidades pueden ser representadas simultáneamente. La mayoría de los niños espontáneamente inventan eficientes procedimientos de secuencias abreviadas para los sumandos implicados. Los niños no cuentan los sumandos sino que hacen una cuenta final, empezar a contar en el segundo sumando.

Nivel 3: Los procedimientos abreviados de secuencias se convierten a procedimientos derivados de hechos en el cual los números del problema dado se convierten en números cuya suma o diferencia ya es conocida .Fuson (1992) dice que ha habido poca investigación para estudiar las estructuras conceptuales requeridas para hechos derivados y los pasos que el niño lleva a cabo para pasar de las secuencias abreviadas a los hechos derivados.

6.5. NIVELES DE STERN

Stern (1993) se ocupa sólo de los problemas de comparación y señala también como Riley y Greeno (1988) tres niveles para dichos problemas de comparación.

Nivel 1: En este nivel, los niños pueden resolver problemas de comparación con el grupo diferencia desconocido. Estos problemas no requieren transformación al esquema parte-todo, y pueden ser resueltos construyendo una correspondencia uno a uno entre los dos grupos y contando los objetos que quedan. Las estrategias usadas son *emparejar y separar de*. Cada paso en la resolución del problema puede ser representado externamente, usando objetos.

Nivel 2*:* En este nivel, la información cuantitativa del problema no puede ser representada externamente, porque para conocer la relación entre los grupos se requiere hacer algunas inferencias. Los problemas de comparación con un grupo de comparación desconocido pueden ser resueltos en este nivel. Para estos problemas no es necesario transformar la información en una ecuación matemática basada en el esquema parte-todo, más bien hay que representar el grupo diferencia mencionado en la segunda oración con una relación entre el grupo mencionado en la primera oración y el grupo por el que se pregunta en la pregunta .Los problemas pueden ser resueltos por la estrategia *contar todo*, si es el grupo mayor el que tiene que ser buscado y por la estrategia de *separar de*, si es el grupo pequeño el que tiene que ser buscado.

Nivel 3*:* En el nivel 3 el esquema parte-todo es representado y puede ser combinado con un conocimiento sobre operaciones numéricas, tales como las comparaciones entre grupos, esto significa conocer que tres grupos están implicados en los grupos de comparación. El grupo de comparación que tiene que ser comparado con otro, el grupo de referencia y la diferencia entre estos dos grupos, el grupo diferencia. Riley y Greeno (1988), señalan que la razón de la dificultad de los problemas con el grupo referente desconocido, es porque requieren el conocimiento del esquema parte-todo.

La revisión de las distintas clasificaciones que acabamos de ver establecen, en general, tres niveles por los que pasa el niño en la solución de los problemas verbales, no es fácil determinar una jerarquía rígida debido a que existen diferentes factores que pueden condicionar el éxito infantil. Hay unos problemas más difíciles que otros pero, pensamos que, no se debe necesariamente esperar a los niveles escolares superiores para enseñar los mismos, porque los niños pueden resolver la mayoría de estos problemas cuando se les proporcionan ayudas -dibujos, objetos- que hacen más fácil la representación de las relaciones entre las partes del problema, o cuando son reformulados, o se presentan en contextos personalizados, como han puesto de manifiesto las distintas investigaciones. Sin embargo, los libros de texto sólo recogen algunas de las categorías de problemas y no en todas las situaciones posibles de la incógnita, fomentando con esto la especialización en un tipo de problemas.

7. DIFICULTADES DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Los problemas verbales pueden resultar más difíciles que la resolución del algoritmo en determinadas circunstancias (Bermejo, Rodríguez, 1987; Carpenter y Moser, 1983; Carpenter, Moser y Bebout, 1988; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988). Bermejo y Rodríguez (1987) señalan que los problemas aditivos verbales no parecen estar relacionados estadísticamente ni con las conservaciones, ni tampoco con las pruebas aditivas numéricas. Razón que aducen es que para los problemas verbales el niño tiene que construir la representación del problema planteado, antes de ejecutar o emitir su respuesta, requiriendo para ello un conjunto de procesos cognitivos semánticos de mayor complejidad que en las restantes situaciones, tal y como puede constatarse en los modelos propuestos por Kintsch y Greeno (1985) y De Corte y Verschaffel (1985) ello explica que a pesar de tratarse de la misma operación aditiva, las sumas o los problemas numéricos resulten más fáciles para los niños que los problemas aditivos verbales.

Cummins y cols. (1988) presentaron a un grupo de alumnos problemas similares de dificultad en formato numérico y formato verbal, los resultados fueron mejores para los de formato numérico. Lo que sugiere que existen otros factores además de las "habilidades matemáticas" que contribuyen al éxito en la resolución de problemas verbales.

A continuación analizaremos los factores que determinan diferencias sistemáticas entre los niños cuando resuelven problemas verbales. Entre estos factores están, entre otros (Bermejo y Rodríguez, 1990): la estructura semántica, el lugar ocupado por la incógnita (Riley y cols., 1983) y la formulación verbal (De Corte, Verschaffel y De Win, 1985). Además, hay variables generales, tales como la edad, la presencia de ayudas, magnitud de los sumandos, que, sobre todo en los niños pequeños, influyen en los resultados.

7.1. DIFICULTADES GENERALES DE LOS PROBLEMAS VERBALES

La *estructura semántica* del problema determina para muchos autores (Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Bermejo y Rodríguez, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; Ibarra y Lindvall, 1979; Riley y cols., 1983; Vergnaud, 1981, 1982) diferencias en las ejecuciones de los niños. Los problemas de Cambio, que implican una concepción unitaria, resultan más fáciles, siguiéndoles los de Combinación y después los de Comparación. Sin embargo, Briars y Larkin (1984), afirman que las diferencias existentes entre los problemas de Combinación y de Cambio tienden a desaparecer por la similitud de ambas categorías, ya que al existir una acción implícita en los problemas de Combinación, éstos pueden ser resueltos mediante un esquema unitario. En cuanto a la relación entre las estrategias empleadas por los niños y la estructura semántica del problema, Carpenter y Moser (1982); Carpenter y cols. (1981), han mostrado claramente este nexo en un estudio longitudinal. Pero estas estrategias dependen también tanto de la edad de los niños (Riley y cols. 1983) como de la secuencia de los datos conocidos en el problema, tal como afirma De Corte y cols. (1985, p. 461-462): “La estrategia utilizada por los niños para resolver problemas elementales de suma y resta, no sólo depende de la estructura semántica de la tarea, sino también de la secuencia de elementos dados en el texto del problema".

Pero los datos de dificultad anteriores, deben ser analizados teniendo en cuenta el factor *situación de la incógnita*. En general, los niños obtienen mejores resultados cuando la incógnita está situada en el resultado, independientemente del tipo de problema planteado. La dificultad es mayor en los problemas de Cambio cuando la incógnita está en el conjunto inicial que cuando está en el conjunto de cambio o en el resultado. También, en los problemas de Combinación y Comparación, las ejecuciones de los niños son peores cuando la incógnita está en uno de los sumandos (Riley y cols., 1983). Resultados similares fueron encontrados por Bermejo y Rodríguez (1990) en niños de 2º y 3º de Primaria con problemas de Cambio y Comparación. Cuando la incógnita está en el resultado, la resolución de los problemas resulta más sencilla, sin embargo, cuando la incógnita está en uno de los sumandos, las medias descienden sensiblemente tanto en los niños de segundo como en los de tercero.

Otros autores (De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Hudson, 1983; Lindvall e Ibarra, 1980) señalan que la *formulación verbal* del problema también puede influir en los resultados obtenidos por los niños. Además de los dos factores -estructura semántica y situación de la incógnita- el grado con el que se describe en el texto del problema las relaciones entre las cantidades conocidas y las desconocidas y la secuencia de presentación de los datos pueden incidir en los procesos de resolución de los problemas. Cuando se reformula un problema verbal, explicitando las relaciones semánticas, sin afectar a la estructura semántica y matemática, los resultados obtenidos en diversos estudios son mejores. Así, De Corte y cols. (1985) en un trabajo con niños de 6 y 8 años, con problemas de Cambio (incógnita en el sumando inicial), problemas de Combinación (incógnita en un subconjunto) y problemas de Comparación (incógnita en la diferencia), (tabla 7.1.) cuando reformulan los problemas los resultados son mejores (ver tabla 9.3. en el apartado de errores, página 170).

TABLA 7.1
Problemas verbales (Serie A) basados en la clasificación de Riley, Greeno y Heller (1983) y (Serie B) reformulados por De Corte, Verschaffel y Win (1985)

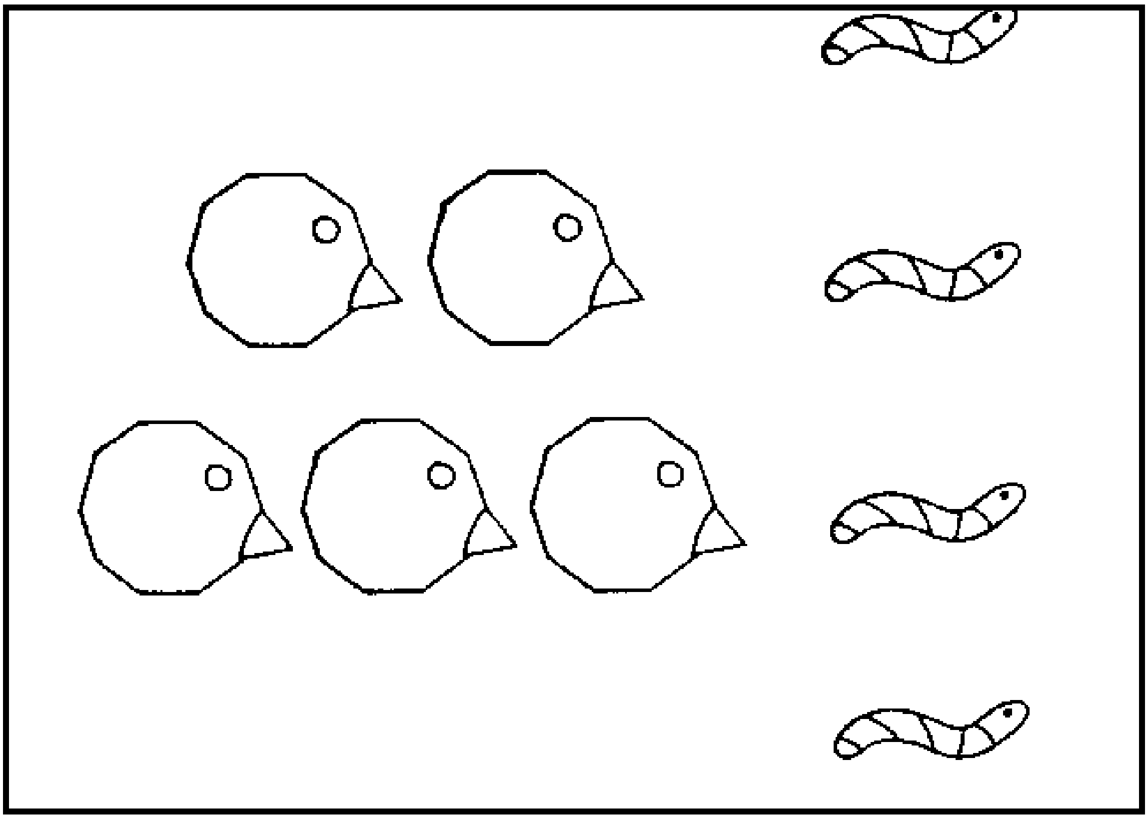
Serie A	Serie B
Problemas de Cambio 5 (Cantidad inicial desconocida)	
Juan ganó 3 canicas. Ahora tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?	Juan tenía algunas canicas. Ganó 3 canicas más. Ahora tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?
Roberto obtuvo 2 bizcochos. Ahora tiene 5 bizcochos. ¿Cuántos bizcochos tenía Roberto al principio?	Roberto tenía algunos bizcochos. Obtuvo 2 bizcochos más. Ahora tiene 5 bizcochos. ¿Cuántos bizcochos tenía Roberto al principio?
Problemas de Combinación 2 (Subconjunto desconocido)	
Tomás y Ana tienen juntos 9 nueces. Tomás tiene 3 nueces. ¿Cuántas nueces tiene Ana?	Tomás y Ana tienen juntos 9 nueces. Tres de estas nueces son de Tomás. El resto son de Ana. ¿Cuántas nueces tiene Ana?
Ana y Tomás tienen juntos 8 libros. Ana tiene 5 libros. ¿Cuántos libros tiene Tomás?	Ana y Tomás tienen juntos 8 libros. Cinco de estos libros son de Ana. ¿Cuántos libros tiene Tomás?
Problemas de Comparación 1 (Diferencia desconocida)	
Pedro tiene 8 manzanas. Ana tiene 3 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Pedro más que Ana?	Hay 8 jinetes, pero sólo 3 caballos. ¿Cuántos jinetes no cogerán caballo?
Ana tiene 6 cachorros. Sofía tiene 3 cachorros. ¿Cuántos cachorros tiene Ana más que Sofía?	Hay 6 niños, pero sólo 3 sillas. ¿Cuántos niños no cogerán silla?

De Corte, Verschaffel y Win (1985, p. 464).

En el primer caso, según De Corte y cols. (1985), hay una representación inadecuada del problema por no poseer un conocimiento adecuado de los esquemas semánticos, pero cuando se reformula y se manifiestan claramente los esquemas semánticos esto ayuda a conseguir una buena representación del problema y, por tanto, a encontrar la solución adecuada.

FIGURA 7.1

Ejemplo de problema usado en el estudio de Hudson



Igualmente, Hudson (1983) en un estudio con niños de Guardería, de Infantil y de Primer curso, con problemas de Comparación, presenta una serie de dibujos a los niños, por ejemplo, 5 pájaros y 4 gusanos (figura 7.1.) y plantea una primera pregunta: ¿Cuántos pájaros hay más que gusanos? y, más tarde, reformula el problema en la siguiente manera: “Imagina que todos los pájaros corrieran y cada uno intentase coger un gusano. ¿Cogerá cada pájaro un gusano? ¿Cuántos pájaros se quedarán sin gusano?” Para los tres grupos son significativamente mejores los resultados con el segundo planteamiento. Una razón facilitadora, según este autor, es el uso de la estrategia de emparejamiento para resolver el problema.

En esta misma línea, un trabajo de Davis-Dorsey, Ross y Morrison (1991) con niños de segundo y quinto estudia la incidencia de la reformulación de los problema verbales y la personalización de los mismos. Para ello, recogen información sobre los niños preguntándoles sobre el nombre de sus amigos, sus películas favoritas, animales que les gustan, etc. con la finalidad de utilizar esta información en la formulación de los problemas que les plantean. Estos autores llegan a la siguiente conclusión: los niños de segundo resuelven mejor los problemas tanto en las situaciones de reformulación como en las situaciones de personalización, señalando las siguientes razones para explicar estos efectos. Primero, la situación de personalización incrementa la motivación de los niños. Segundo, la personalización favorece la representación mental. Tercero, facilita el establecimiento de conexiones entre el texto del problema y los esquemas conceptuales de los niños.

Riley y cols. (1983), diferencian entre factores globales y factores específicos, refiriéndose estos últimos: a las características estructurales de las oraciones de los problemas; a la habilidad de lectura; a la repercusión del método de instrucción seguido y sobre todo a la *presencia de ayudas* en el momento de dar solución a un problema. La presencia de objetos manipulables conduce a una mejora en la ejecución de los niños, siendo incluso necesaria en algunos casos, como se desprende de los Modelos I y II propuestos para explicar los estadios de conocimiento conceptual requerido para la resolución de diversos tipos de problemas.

En este mismo sentido, Carpenter y cols. (1983) destacan que la utilización de bloques simplifica la resolución de los problemas planteados a los niños de primer grado y Carpenter y Moser (1982) especifican la importancia de las ayudas en la resolución de problemas aditivos cuando el tamaño de los sumandos es elevado.

Por otra parte, Steffe, Thompson y Richards (1982) indican que la incidencia de la presencia de objetos en la resolución de problemas aritméticos elementales es aún más notable en torno a la etapa prenumérica, durante la cual se hace patente la necesidad de apoyos externos de representación. También, el trabajo de Riley, citado por Riley y cols. (1983) pone de manifiesto que los niños de preescolar son más eficientes ante 4 de los 6 tipos de problemas de Cambio presentados cuando disponen de ayudas, en los restantes no es así debido a la excesiva facilidad o dificultad de los problemas propuestos.

El estudio longitudinal de Carpenter y cols. (1983), muestra de forma clara que la *edad* es un factor determinante en los niveles de resolución de los problemas verbales en los niños. De igual modo, las estrategias de solución están en función de la edad, así, los niños pequeños utilizan la estrategia contar todo con independencia de las características de los sumandos, mientras que los niños mayores utilizan diversas estrategias, dependiendo del tamaño de los sumandos.

La *magnitud de los sumandos*, es el tema preferido de las primeras investigaciones (Knight y Behrens, 1928). El tamaño de los sumandos no sólo incide sobre la mayor o menor dificultad de un problema, sino fundamentalmente sobre el tipo de estrategia de resolución elegida por los niños (Carpenter y Moser, 1982; Siegler y Robinson, 1982). Los niños utilizan más frecuentemente la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos cuando uno de estos es superior a 10. Igualmente, Siegler y Robinson (1982) señalan que las estrategias empleadas por los niños están en función de la magnitud de los sumandos, y que la dificultad de un problema crece monótonamente cuando los sumandos aumentan de uno a cuatro, tendencia que no se mantiene cuando cualquiera de ellos es cinco. También Carpenter y Moser (1982) encuentran que los niños pueden resolver antes los mismos problemas con valores reducidos que con valores más elevados. Vergnaud (1991) señala que la desigual dificultad de los problemas no se debe sólo a su pertenencia a una u otra de las seis clases de problemas por él definidas, sino que también hay otros factores que intervienen igualmente como es la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario; el orden y la presentación de las informaciones; el tipo de contenido y de relaciones consideradas. En este sentido, Bermejo y Lago (1988) realizaron un estudio, con la finalidad de determinar cómo influyen el modo de representar cada uno de los sumando y la magnitud de los sumandos en el comportamiento de los niños de Infantil y 1º de Primaria. Para ello propusieron tres tareas aditivas (A: 5 + 12; B: 11 + 4; C: 8 + 8) representando de modo diferente cada uno de los sumandos (I: guarismos + círculos; II: círculos + círculos; III: círculos + guarismos; IV: fichas + fichas; V: guarismos + guarismos). El sumando primero es menor, mayor o igual que el segundo, siendo éste a su vez superior a 10, menor y mayor que cinco, respectivamente. En las tres condiciones el sumando menor nunca supera la decena, lo que permite a los niños utilizar los dedos si lo desean. Se utilizaron en todos los casos problemas de Cambio y la incógnita siempre se ubicaba en el resultado. Los niños pequeños encuentran más fácil la prueba B que la prueba C y ésta a su vez que la A. La magnitud de los sumandos afecta sobre todo a los alumnos de Infantil, que llegan a fracasar casi en el 50% de los ensayos cuando el cardinal mayor se sitúa en el segundo sumando. En cambio, los efectos positivos del "doble" apenas o nada se manifiestan en este caso, debido probablemente al uso de un número excesivamente alto. Por último, Aguilar y Martínez (1998) plantean que hay una diferencia notable en los rendimientos que alcanzan los alumnos en resolución de problemas aritméticos elementales verbales de una operación cuando un problema es planteado con números muy pequeños o con números con los que el alumno no tiene más remedio que emplear las operaciones. Estos autores aplican diferentes tipos de problemas (Cambio, Comparación, Igualación, Combinación, Isoformismo de medidas, Escalares grandes, Escalares pequeños y Producto Cartesiano) a alumnos de 3º, 4º y 5º de Primaria con números grandes y números pequeños (sin pasar de la decena). Aguilar y Martínez (1998, p. 78) concluyen con las siguientes reflexiones: "Contrastar los resultados que obtienen los alumnos en los problemas ordinarios que realizan en clase con los mismos o idénticos textos, pero formulados con números muy pequeños, puede ser útil para establecer el recorrido que aún debe efectuar el grupo de alumnos en la aprehensión y el tratamiento aritmético que debe darle a las situaciones que los problemas ejemplifican. En este sentido, la potencia o capacidad de aprendizaje puede establecerse a partir de la distancia que se da entre ambos resultados. Una distancia apreciable entre ambos resultados indica que hay una fisura entre la comprensión de la situación y el sentido que el alumno da a una operación concreta. Establecer estas distancias va a permitir una actuación más centrada en las necesidades específicas de instrucción de los alumnos".

Otro factor más, es el *tipo de representación* empleado en los sumandos. Diversos autores (Bermejo y Lago, 1988; Case, 1982; Fuson, 1982, 1984, 1986; Jones, Thornton y Toohey, 1985; Secada, Fuson y Hall, 1983) estudian situaciones específicas de este factor en sus trabajos. Fuson (1986) manifiesta que la utilización simultánea de materiales concretos y abstractos resulta bastante positiva en la instrucción de la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos. Secada y cols. (1983) igualmente considera que los materiales así como las preguntas, parecen organizar el conocimiento de los niños y facilitar el uso de la estrategia contar a partir de uno de los sumandos. Case (1982) subraya la importancia de graduar el nivel de abstracción para obtener una mayor automatización en las ejecuciones de los niños, antes de introducir elementos más abstractos. Jones y cols. (1985) utilizan una secuencia de cinco niveles en su programa multiopción para el aprendizaje de automatismos numéricos: acción física; gráfica; acción-gráfica; representación unitaria de la adición y formulación standar. La utilización de esta secuencia, cada vez más abstracta y basada en elementos concretos y símbolos, hace que el niño llegue a un método de resolución que se apoya principalmente en la secuencia de numerales. Bermejo y Lago (1988), en el trabajo antes referenciado, plantean un conjunto de condiciones que varían gradualmente su nivel de abstracción, pasando de la representación más concreta, formada por objetos manipulables, a la más abstracta, cuando los dos sumandos se simbolizan mediante guarismos. Para estos autores, el éxito de los niños varía en función del grado de abstracción de los sumandos, de modo que cuando la situación es totalmente concreta, entonces se facilita la resolución de las tareas, sobre todo en Infantil (87.92%). Cuando la situación es mixta, es decir, cuando sólo uno de los sumandos se simboliza con un guarismo, se hace más compleja la solución (47.33%, en los niños pequeños), y alcanza su máxima dificultad al representar ambos sumandos con guarismos (37.33% en Infantil). Bermejo y Lago (1988) resaltan "que este proceso gradual de abstracción resulta extremadamente interesante porque permite introducir más adecuadamente a los niños en el ámbito de lo simbólico, que domina ostensiblemente en nuestro sistema educativo. En consecuencia, el aprendizaje de la adición debería realizarse de manera escalonada, de modo que al principio se representarían ambos sumandos mediante objetos concretos, después se simbolizaría el primero de los sumandos por un guarismo, para en una etapa posterior representar mediante guarismo sólo el segundo sumando, y terminar en una situación completamente simbólica, constituida por números".

Otra de las dificultades a tener en cuenta es la ubicación de la incógnita, según el tipo de *proposición abierta* que subyace al enunciado del problema. Según sea la situación de la cantidad desconocida y la colocación del resultado de la operación a uno u otro lado del signo igual se obtienen seis proposiciones abiertas posibles tanto para la adición como para la resta.

Carpenter y Moser (1983, p. 10) aportan los siguientes datos sobre los niveles de dificultad correspondientes a las distintas proposiciones abiertas. Corresponde a un estudio con niños de 1 a 3 grado.

1º) Las proposiciones *canónicas* de adición y sustracción (a + b = ; a - b =) son menos difíciles que las *no canónicas* (a + = c; a - = c)

2º) Las proposiciones canónicas de sustracción son generalmente más difíciles que las proposiciones canónicas de adición.

3º) No hay diferencias claras de dificultad entre las proposiciones siguientes:

a + = c; + b = c; a - = c.

4º) La proposición de minuendo desconocido (- b = c) es significativamente más difícil que las otras cinco proposiciones de sustracción.

5º) Las proposiciones con la operación en el lado derecho del signo igual (por ejemplo,   = a + b) son significativamente más difíciles que las paralelas con la operación a la izquierda (a + b =   ).

Como hemos visto, de todas las variables que pueden incidir en la dificultad de los problemas es la *estructura semántica* una de las que más determina la dificultad y dentro de ella son los problemas de Comparación los más difíciles para los niños, por lo que vamos a analizar en detalle dichos problemas.

7.2. DIFICULTADES DE LOS PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

"Los problemas verbales de comparación aditiva constituyen un reto para todos aquellos que estamos interesados en el estudio del desarrollo matemático del niño" (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994).

Distintos estudios han puesto de relieve que los problemas verbales que contienen sentencias relacionales son más difíciles que los problemas verbales que no las tienen (por ejemplo, Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990; Briars y Larkin, 1984; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; Hegarty, Mayer y Green, 1992; Lewis y Mayer, 1987; Riley, Greeno y Heller, 1983; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992). Pero además las sentencias relacionales de los problemas de comparación pueden presentar más dificultad: cuando la operación con la que se resuelve el problema entra en conflicto con la sentencia de relación. Es decir, cuando el problema es resuelto mediante una suma y la sentencia relacional esté expresada como “menos que” (“María tiene 9 cromos. Tiene 6 cromos menos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?”) o viceversa, cuando se utiliza la resta para resolver el problema y la sentencia relacional lleve la expresión “más que” (“María tiene 9 cromos. Tiene 5 cromos más que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?”) Sin embargo en otros problemas de comparación no hay conflicto entre la operación que se realiza para obtener la solución del problema y la sentencia relacional (“Agustín tiene 5 caramelos. Eugenio tiene 3 caramelos más que Agustín. ¿Cuántos caramelos tiene Eugenio?”) Por otra parte, también se ha demostrado en numerosas investigaciones que los problemas con lenguaje inconsistente son más difíciles de resolver que los de lenguaje consistente (por ejemplo Briars y Larkin, 1984; Morales, Shute y Pellegrino, 1985; Riley y cols., 1983).

Lewis y Mayer (1987); Mayer (1985), partiendo del supuesto de que la resolución de problemas puede descomponerse para su análisis en dos componentes: el proceso de comprensión y el proceso de solución, consideran que la dificultad del problema tiene su origen en la fase de comprensión y apoyándose en los trabajos de Huttenlocher y Strauss (1968) establecen su hipótesis de consistencia. Lewis y Mayer (1987) distinguen dos formas dentro de los problemas de comparación, los de lenguaje consistente y los de lenguaje inconsistente. En los primeros no hay conflicto y en los segundo sí. Parten de que los alumnos tienen un orden de preferencia en la presentación de la información y que resuelven mejor los problemas que presentan este orden, que son precisamente los problemas de lenguaje consistente. En estos problemas, la cantidad desconocida es el sujeto de la segunda frase; pero, en los problemas de lenguaje inconsistente, la cantidad desconocida es el objeto de la secuencia relacional y cuando se presenta un problema inconsistente, en este caso lo que hace el alumno es reorganizar la frase mentalmente y reconvertir el problema al formato primero, al consistente. Lo que hace la reorganización es invertir el sujeto y objeto de la secuencia relacional, y también la operación sugerida por el término relacional. Esta reorganización es lo que hace más probable el que se cometan errores en los problemas con lenguaje inconsistente que en los de lenguaje consistente.

Para comprobar la hipótesis de consistencia, Lewis y Mayer, realizaron un estudio con 96 alumnos de 18-21 años, a los que propusieron problemas verbales de comparación de dos pasos, unos con lenguaje consistente y otros con lenguaje inconsistente. Los resultados obtenidos confirman la hipótesis de consistencia, era mayor el número de errores de inversión cometidos en los problemas inconsistentes -la cantidad desconocida era el objeto de la secuencia relacional- que en los problemas consistentes -la cantidad desconocida era el sujeto de la secuencia relacional. Lo que es interesante destacar es la relación entre las operaciones a realizar y la consistencia o no del lenguaje. La dificultad del lenguaje inconsistente era mayor cuando había que realizar sumas o multiplicaciones que cuando era con la resta o división.

También tienen en cuenta otra característica: si el término que se emplea en la sentencia relacional es marcado o no marcado, en el mismo sentido que lo emplea Clark (1969). Lewis y Mayer dicen que la probabilidad de que los alumnos cometan un error de comprensión mientras invierten la expresión relacional en los enunciados inconsistentes se aumenta cuando el término comparativo es marcado. Los alumnos están más influenciados por términos marcados (menos que) que por términos no marcados (más que) de tal forma que hay una mayor resistencia a invertir los términos marcados.

Hay otro factor: la cantidad de memoria de trabajo del estudiante que es necesaria para codificar la información del problema. Su hipótesis es que habrá más errores de comprensión en problemas de enunciado inconsistente porque requieren mayor capacidad de memoria.

Los resultados confirman que los errores son cometidos más en la fase de comprensión que en la fase de cálculo de la ejecución de la respuesta. Sugieren que los estudiantes reciban más instrucción en la fase de representación del problema, particularmente en los problemas con sentencias relacionales.

Verschaffel, De Corte y Pauwels (1992) reproducen el experimento de Lewis y Mayer empleando la técnica de los movimientos oculares. Realizan tres experimentos. Uno con alumnos de tercer curso, empleando problemas de comparación de una sola operación -sumar o restar- y sus resultados confirman los de Lewis y Mayer. Los otros dos son con estudiantes universitarios; en uno emplean también problemas de una sola operación -suma, resta- y en el otro problemas de dos operaciones y que pueden resolverse usando las cuatro operaciones. Los resultados del primero no confirman el modelo de Lewis y Mayer y el segundo, sí.

Verschaffel y cols. (1992, p. 93) en las conclusiones de su estudio señalan, por un lado, que el modelo de Lewis y Mayer está en desacuerdo con la teoría de vanDijk y Kintsch en cuanto a la idea de coherencia del texto y con la idea del foco narrativo de un problema verbal. Ambos defienden que la interpretación e integración de una nueva información sobre un agente se ve favorecida cuando la nueva información empieza con el mismo agente. Sin embargo en las dos primeras sentencias de un problema verbal inconsistente comienzan con el mismo protagonista y por tanto debería ser más fácil que los problemas consistentes que empiezan cada sentencia con un protagonista distinto. Por otro lado, comentan dos aspectos que no han sido tenidos en cuenta por el modelo de Lewis y Mayer: el concepto de referencia pronominal y que algunos errores se producen al tener en cuenta la palabra clave para resolver el problema. Respecto al uso de pronombre, tanto en los experimentos de Lewis y Mayer (1987) como en Verschaffel y cols. (1992) son los problemas de lenguaje inconsistente los que llevan pronombres y este hecho puede haber influido en los resultados, ya que son distintos entre problemas de tipo consistente e inconsistente. Y, por último, la tesis de Lewis y Mayer es que los errores se producen en la fase de comprensión. Sin embargo, los errores de inversión que se producen en los problemas de lenguaje inconsistente, pueden ser debidos también al uso de la estrategia basada en la palabra clave, porque esta estrategia -palabra clave- lleva, induce a resolver bien los problemas consistentes y mal los de lenguaje inconsistente.

En este mismo sentido, Stern (1993) lleva a cabo 6 experimentos. Las conclusiones a las que llega son las siguientes:

¿Por qué son los problemas de grupo de referencia desconocido más difíciles que los problemas de grupo de comparación desconocido? Los resultados de los experimentos 1 a 3 sugieren que el uso del pronombre personal no es la fuente de las dificultades de los niños.

En el experimento 4 se contrasta que la mayoría de los chicos de primer grado fue capaz de volver a decir el problema y así ser capaces de entender los problemas de comparación con un grupo de comparación desconocido, pero los alumnos no fueron capaces de volver a decir los problemas de comparación con un grupo de referencia desconocido.

No hay ninguna razón para suponer que el uso de estrategias de palabra clave es el responsable de la mejor actuación en la resolución de problemas de grupo de comparación desconocida que en la resolución de problemas de grupo de referencia desconocido.

Todos los resultados de los chicos de primer curso indican que la mayoría de estos sujetos fueron capaces de entender las expresiones del lenguaje “más “ y “menos” en un contexto cuantitativo de comparación. En los experimentos 2, 3 y 4, sobre el 50 % de los niños fueron capaces de entender y resolver problemas con un grupo de comparación desconocido.

Los resultados del experimento 5 indican más aún, que los chicos pueden discriminar entre afirmaciones verdaderas y falsas, distinguiendo la diferencia cuantitativa entre dos grupos, incluso aunque no parezcan entender que las diferencias cuantitativas entre dos grupos puedan ser expresadas con los términos mas y menos .

Los problemas del grupo de referencia desconocido pueden ser resueltos tanto transformando el texto del problema en relaciones parte-todo como Riley y Greeno (1988) propusieron (transformación matemática), o transformándolos en problemas de grupo de comparación desconocido, como Lewis y Mayer (1987) sugirieron (reestructuración lingüística). En cualquier caso, se requiere flexibilidad en el uso del lenguaje para describir la comparación cuantitativa. Sin embargo, los resultados del experimento 5 indican que la mayoría de los chicos del primer curso no tenían el conocimiento de la simetría del lenguaje sobre comparación cuantitativa, más aún, para la mayoría de los chicos de primer curso, las representaciones lingüísticas de “tantos más que” y “tantos menos que” parecían bastante independientes una de la otra y la activación de un concepto parecía inhibir la activación del otro. Los chicos podrían haber generalizado el significado de contraste de más y menos y podrían haber creado reglas como: “sí en una frase la palabra *más* es usada y en otra frase la palabra *menos* es usada, estas frases no pueden tener el mismo significado”.

Los resultados del experimento 6 indican que hay una relación entre entender la simetría de la comparación y resolver problemas de grupo de referencia desconocido. La dificultad parece ser causada específicamente por déficit comunes conceptuales en entender la simetría de la comparación. La consciencia de varias posibilidades para poner el mismo hecho en diferentes palabras es importante para entender un concepto, no sólo en Matemáticas sino también en otros dominios. (Karmiloff-Smith, 1986). Posiblemente, no saber que se pueden usar expresiones “tantos más x que y” y “tantos menos y que x” intercambiablemente se deja notar en las representaciones restringidamente conceptuales de los niños de la resta y de la suma.

Cuando entran en la escuela los niños son capaces de sumar y restar pequeños números utilizando procedimientos de conteo, pero su conocimiento sobre la suma puede estar restringido a “poner algo” y su conocimiento sobre la resta a “quitar algo”. Fuson (1984, 1988) y Baroody (1987) señalan que los niños interpretan la resta como “algo que quitar” y su estrategia preferida es contar hacia atrás (por ejemplo, 7 - 5 = ? es resuelto contando hacia atrás, desde 7 cinco veces: 6, 5, 4, 3, 2). Los niños que no usan el procedimiento de contar (7 - 5 = ? es resuelto contando desde 5: 6, 7 y notando cuantas veces uno ha contado, como dice Carpenter y Moser, 1983). Esto enseña que los niños pequeños entienden la suma y la resta como procesos independientes, más bien que como operaciones recíprocas, este déficit en el entendimiento intelectual es el responsable de la inflexibilidad de los niños en el uso y entendimiento de las expresiones del lenguaje que tiene que ver con estas operaciones, es por esto que las sumas y las restas son representadas en dos operaciones separadas que se excluyen una de otra y las expresiones del lenguaje asociadas a esta operaciones, “n menos que” y “n mas q” son también representadas separadamente. Si los niños no son conscientes de este hecho, de que la suma y la resta son las caras diferentes de una misma moneda no hay razón para ellos de que expresiones verbales conectadas con las operaciones matemáticas -más con la suma y menos con la resta- sean vistas como recíprocas .

Anteriormente Stern (1989, 1992) encuentra que los chicos de la escuela primaria manifestaron una inflexibilidad increíble en resolver problemas verbales, la mayoría de ellos no sabían que un problema verbal puede ser resuelto de diversas maneras. Por ejemplo, el problema “Juan tiene 5 canicas. Pedro tiene 2 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?” puede ser resuelto como: 5 - 3 = 2; 5 - 2 = 3; 3 + 2 = 5; 2 + 3 = 5, al poner en comparación un grupo de comparación desconocida con un grupo de refente desconocido. Sólo unos pocos niños lo resolvían directamente añadiendo o restando el grupo de diferencia, incluso aquellos niños que actuaron muy bien en otra pruebas matemáticas su resolución se caracterizaba por rellenar el hueco en la ecuación: grupo grande - grupo pequeño = a grupo diferencia. La forma que utilizaban para realizar dicha ecuación, es con estrategias prematemáticas: *emparejar-separar*, que son usadas cuando los grupos tienen que ser comparados (Kintsch y Greeno, 1985). Sólo cuando los números son representados en términos de relaciones de parte-todo pueden las relaciones complementarias de suma y resta ser entendidas (Baroody, 1987). Teniendo esta clase de flexibilidad en el uso del lenguaje formal para describir hechos matemáticos puede también permitir a los niños ser flexibles en describir relaciones cuantitativas con la ayuda del lenguaje corriente de todos los días.

Stern (1993) propone la transformación de los problemas de Comparación 5 y 6 en Comparación 3 y 4, según sugieren Lewis y Mayer (1987) pero tal transformación supone rebajar la dificultad de los problemas, ya que pasarían del nivel 3 al nivel 2 en el esquema de Riley y Greeno (1988), frente a la que sugieren estos últimos autores para aplicar el esquema parte-parte-todo.

Otras investigaciones consideran que el procesamiento verbal tiene influencia en la resolución de los problemas (De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990; Hegarty, Mayer y Green, 1992; Hegarty, Mayer y Monk, 1995). Con alumnos de segundo grado De Corte, Verchaffel y Pauwels (1990) realizaron la siguiente investigación. Las variables utilizadas fueron: Complejidad de la estructura semántica de los problemas (simples -cambio 2, combinación 1- vs complejos -cambio 5, comparación 6) y el nivel de competencia de los alumnos (alta vs baja). Las variables dependientes fueron: 1.-Porcentaje de respuestas correctas. 2.-Respuesta del tiempo, -tiempo transcurrido desde la presentación del problema hasta que da la respuesta- y 3.-Proporción de fijaciones oculares sobre las palabras y sobre los números. Consideran además el problema bien como un todo o bien en dos fases.

Los resultados hallados demuestran la importancia de la estructura semántica del problema, ya que los tiempos empleados fueron menores en los problemas simples que en los complejos (ambos tenían el mismo número de frases y de palabras). Lo que hay que resaltar, dada su importancia, es que cuando se tiene en cuenta las dos partes en que se divide el problema (primera parte es la fase de traslación de las frases del problema a la memoria y la segunda fase es la fase de comprensión) las diferencias se dan en la segunda fase en los problemas complejos y, por el contrario, los tiempos son iguales en la primera fase. Por otro lado, los tiempos de respuesta son mayores para los alumnos menos competentes. Si se analiza por las fases del problema, aunque hay diferencias en ambas fases, estas diferencias son mayores en la segunda fase del problema. La explicación puede ser que los alumnos más competentes tienen una mayor habilidad lectora.

Los resultados de la otra variable: proporción de fijaciones, señalan que es mayor el tiempo sobre las palabras que sobre los números en los problemas complejos y en ambas fases del problema. En cuanto al nivel de competencia de los alumnos, los más competentes dedican menos tiempo de fijación a las palabras. Lo justifican con la razón anterior: tener mayor habilidad lectora. Las diferencias se encuentran cuando se analizan los resultados considerando las dos fases del problema. En la primera fase no se encuentran diferencias. Sin embargo, en la segunda los más competentes tienen más fijaciones en las palabras que en los números.

Hegarty, Mayer y Green (1992) utilizando sólo problemas de comparación y con alumnos de undergraduates obtuvieron parecidos resultados a los ya comentados. La variable complejidad en este estudio es diferenciada -según Lewis y Mayer (1987)- entre problemas con lenguaje consistente y problemas con lenguaje inconsistente. Los tiempos de lectura son mayores para los problemas de lenguaje inconsistente (se consideran más complejos) también para los alumnos más competentes. La explicación: los alumnos menos competentes son menos sensibles al grado de dificultad de los problemas. En cuanto a las fases son los problemas inconsistentes los que necesitan mayor tiempo en la segunda fase.

Para la variable fijaciones oculares emplearon el efecto de *relectura* que consistía en listar cada línea en la que el alumno miraba y las fijaciones de cada palabra en esa línea, si el sujeto movía los ojos a una línea diferente, se añadía esa línea al protocolo junto con las palabras en las que se fijaba. Los resultados obtenidos señalan que el número de relecturas para los números era semejante para las dos clases de problemas, sin embargo las relecturas para las palabras importantes -términos relacionales y nombres- era mayor para los problemas con lenguaje inconsistente. Además las relecturas de los consistentes son en los números y la de los inconsistentes en las palabras.

Hegarty, Mayer y Monk (1995) comparan los procesos de comprensión lectora usados por los resolutores de problemas, que cometen errores en problemas inconsistentes, con aquellos resolutores de problemas que no cometen errores en problemas inconsistentes. Es decir, dos grupos: resolutores no exitosos y exitosos, respectivamente. Hacen la hipótesis siguiente: cuando se enfrentan con un problema aritmético de narración, los resolutores no exitosos comienzan seleccionando números y palabras claves del problema y basan su plan de solución en éstas: un procedimiento que llaman estrategia de traducción directa -*direct-translation strategy*-. En contraste, hacen la hipótesis de que los exitosos empiezan intentando construir un modelo mental de la situación descrita en el problema y planean la solución sobre la base de este modelo. A este procedimiento lo llaman estrategia del problema modelo -*problem model strategy*-. Su objetivo es examinar la hipótesis de que los resolutores no exitosos usan la estrategia de traducción directa y los exitosos la estrategia del problema modelo. Las conclusiones a las que llegan confirman su hipótesis. Encuentran que el uso de la estrategia de *traducción directa* es la usada por los alumnos que no resuelven con éxito los problemas y que la estrategia de *problema modelo* es usada por aquellos que resuelven con éxito el problema.

Finalmente, Bermejo, Lago y Rodríguez (1994) realizan una investigación con la finalidad de establecer si los niños disponen de las habilidades numéricas necesarias para manejar las relaciones de orden y equivalencia, subyacentes a los problemas con sentencias relacionales. El estudio se llevó a cabo con niños de 1º de E.P. (x = 6,6 años), de 2º de E.P. (x = 7,1 años) y de 3º de E.P. (x = 8,6 años). El material consistía en 6 láminas de acetato, en tres de ellas se adhieren una serie de círculos de color rojo (1 cm. de diámetro) y en las tres restantes figuran los dibujos de 3 bolsas correspondientes a cada uno de los "actores" del problema verbal de comparación de magnitudes. Además disponen de un conjunto de 20 fichas (1 cm. de diámetro) para crear sus hileras.

Las tareas a realizar consistían en:

Uno.- Un problema verbal de comparación aditivo (PVCA), con la diferencia desconocida. Al niño se le presentan dos conjuntos y tiene que establecer la diferencia entre ellos "Juan tiene 6 canicas. Pedro tiene 2 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?"

Dos.- Comparación de magnitudes concretas (CMC). Se presenta una lámina con dos hileras de distinto tamaño y en correspondencia uno-a-uno; las instrucciones que recibe el niño son: "Haz una hilera menor que la de arriba y mayor que la de abajo", para lo cual dispone de objetos concretos.

Tres.- Comparación de magnitudes abstractas (CMA). En esta tarea el niño tiene que indicar un número que se encuentra entre los dos indicados verbalmente por el experimentador. Por ejemplo, "Dime un número que sea mayor que 5 y menor que 9.

Cuatro.- Un problema verbal de comparación de magnitudes (PVCM). En esta prueba el experimentador muestra al niño una lámina en la que aparecen dibujadas bolsas correspondientes a tres "actores" distintos; además, en las dos bolsas de los extremos aparecen escritas numéricamente la cantidad de objetos, mientras que en la del centro hay un interrogante. La tarea es averiguar los objetos de la última bolsa, sabiendo que tiene "x" objetos más que la que aparece en primer lugar e "y" menos que la que aparece en segundo lugar.

Bermejo y cols. (1994) utilizando el método de escalograma de Guttman, encuentran la siguiente secuencia de adquisición de las diferentes tareas, ya que la comprensión de la relación comparativa entre conjuntos no se adquiere súbitamente, sino de forma gradual, dependiendo de la complejidad de las situaciones concretas: “CMA $\rightarrow$ CMC $\rightarrow$ PVCA $\rightarrow$ PVCM”, considerando los tres grupos. Sin embargo, cuando tienen en cuenta sólo a los niños de 1º y 2º, el orden es: “CMA $\rightarrow$ CMC $\rightarrow$ PVCM $\rightarrow$ PVCA”, secuencia que sí se ajusta a la hipótesis previa de dichos autores. La tarea –comparación de magnitudes abstractas- parece ser la más sencilla, ya que sólo requiere el conocimiento de una secuencia de “conteo abstracto” (Siegler y Robinson, 1982;) o “memorístico” (Baroody, 1986; Fuson, Richards y Briars, 1982). Siguiendo el orden de dificultad creciente, la tarea –comparación de magnitudes concretas- ocuparía el segundo lugar. La presencia de objetos podría llevar a considerar esta tarea como la más sencilla, ya que facilitaría la ejecución de correspondencias; sin embargo, hay que tener en cuenta que cuando los niños usan este procedimiento lo hacen para determinar fundamentalmente la relación de equivalencia y, en algunos casos, la de orden. En cambio parece menos frecuente su utilización para crear una nueva hilera que guarde la relación “entre” con respecto a las dos hileras propuestas (Bermejo y Lago. 1991). La tarea –problema verbal de comparación de magnitudes- presenta mayor complejidad que las dos anteriores tareas, dado que la sentencia relacional toma valores concretos y su resolución precisa del conocimiento de estrategias aditivas o de sustracción. Ahora bien, esta situación resulta, no obstante, más sencilla que la correspondiente a -problemas verbales de comparación aditivo- con diferencia desconocida para los niños de 1º y 2º, pudiendo ser -para estos autores- varias las razones que lo expliquen: (a) presenta un cierto apoyo perceptivo –los conjuntos aparecen representados mediante dibujos-; (b) se delimita claramente el conjunto desconocido mediante un símbolo de interrogación; (c) aunque son tres los conjuntos presentes –dos conocidos y uno desconocido- y dos las sentencias relacionales –*x* más que A, y menos que B- basta con centrarse en una de ellas para resolver el problema, de modo que la sentencia relacional podría servir de comprobación para evaluar si la respuesta es o no correcta; (d) el hecho de que sean dos las sentencias relacionales y dos las de asignación no induciría tanto a considerar erróneamente las dos primeras como de asignación; (e) los niños pueden aplicar la operación que mejor dominen –sumar o restar- y (f) no presenta el inconveniente de que el enunciado del problema sea inconsistente con la operación que permite resolverlo, como puede suceder en los problemas verbales de comparación. En cambio, en el grupo de 3º, se invierte el orden con respecto a estas dos últimas tareas, siendo más difícil la tarea “problema verbal de comparación de magnitudes” que la tarea “problema verbal de comparación aditivo”. La inferencia con los aprendizajes escolares y la superación de las inconsistencias lingüísticas en los problemas verbales con magnitudes abstractas explicarían, a juicio de estos autores, la inversión mencionada.

8. ESTRATEGIAS

Según Mayer (1985) para resolver un problema, después de la fase de representación sigue la de solución del problema. En esta fase tienen que elegir la estrategia o procedimiento con el que, una vez ejecutado, se encuentra la respuesta. Hay multitud de definiciones y numerosos autores se han ocupado del tema de las estrategias. A continuación trataremos de delimitar y acotar el campo de las estrategias que hemos utilizado para nuestro trabajo. Comenzaremos recogiendo la definición de estrategia:

¿Qué es una estrategia? Según el DRAE, *estrategia*, en su acepción 3, es: "en un proceso regulable, el conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento". María Moliner en el diccionario de uso del español, *estrategia* es: "arte de dirigir un asunto para lograr el objeto deseado".

Siegler (1989, p. 11), autor que se ha ocupado profusamente del tema, define estrategia así: "definimos estrategia como cualquier procedimiento que no es obligatorio y que está orientado a una meta. El rasgo de no obligatoriedad se incluye para distinguir la estrategia de los procedimientos en general. Los procedimientos, a diferencia de las estrategias, deben representar el único camino para lograr una meta". Este mismo autor además de distinguir entre procedimiento y estrategias distingue entre éstas y planes: "parece útil mantener el término, estrategias, que incluya las actividades en las que los procesos de elección pueden ser conscientes o inconscientes y otro término, planes, que se refiere a las estrategias adoptadas conscientemente. Entonces definimos las estrategias en cuanto que difieren de los procedimientos en que las estrategias necesariamente suponen elección y difieren de los planes en que los procesos de elección no son necesariamente conscientes” (Siegler, 1989, p. 13). Igualmente, Ashcraft (1990) define estrategia de forma amplia como “cualquier tarea que se lleva a cabo mentalmente y que sirve para lograr una meta”.

En este estudio nos ocuparemos de las distintas estrategias o procedimientos que los niños utilizan para resolver problemas elementales de suma y resta. Estrategias que han sido propuestas por Carpenter y Moser. Estos autores señalan que “aunque los diversos investigadores han agregado resultados ligeramente diferentes y han usado distintas dimensiones para caracterizar las soluciones de los niños, ha habido una considerable consistencia en los hallazgos obtenidos a lo largo de casi 50 años y ha salido a la luz un grupo bien definido de estrategias” (Carpenter y Moser, 1984, p. 180). Por tanto, no consideraremos las llamadas estrategias heurísticas generales o específicas que tantos estudios han generado a partir de los trabajos de Polya.

Primero señalaremos los niveles de conteo, por la relación entre la habilidad de contar y la de resolver problemas de suma y resta. Segundo, tomando como referencia los estudios de Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984), consideraremos las estrategias utilizadas en la solución de problemas de forma separada para la suma y para la resta. Analizaremos para la suma las estrategias utilizadas en los dos primeros niveles -modelado directo y conteo de secuencias-, después procederemos de igual forma para la resta y a continuación señalaremos las estrategias del tercer nivel -hechos numéricos- conjuntamente, ya que éstas son comunes para la suma y la resta. En tercer lugar presentaremos las posibles relaciones entre la estructura semántica de los problemas y las estrategias utilizadas. Finalmente nos ocuparemos de la evolución de las estrategias.

8.1. CONTEO Y ESTRATEGIAS

Algunos autores analizan la posible relación existente entre los rendimientos en la adición y sustracción y el desarrollo en la habilidad para contar (Gelman y Gallister, 1978; Fuson, 1982; Steffe y cols., 1982).

Steffe, Thompson y Richards (1982) parten de considerar el conteo como una construcción de niveles cada vez más abstractos. Para demostrar esto, presentaron a los niños un tablero en el que habían colocado discos, algunos de los discos estaban ocultos por un paño, a los niños se les decía el número de discos que estaban ocultos y después se preguntaba por el total de discos, ocultos y descubiertos. Identificaron cinco niveles -en niños de seis años en el primer año de escolarización- según el tipo de recuento que efectuaban:

Recuento *perceptivo*. Los niños necesitan manipular elementos concretos, bien objetos, sonidos, acciones, etc., y no pudieron realizar la tarea cuando les fue ocultado un grupo de discos.

Recuento *figural*. Los niños son capaces de “figurarse” objetos mentalmente, pueden contar elementos que no están dentro de su campo de visión, pero necesitan construir una representación concreta de ayudas.

Recuento *motor*. Los niños pueden contar sin necesidad de representaciones, sin embargo realizan algún movimiento físico para así poder contar sus propios actos, movimientos de cabeza, golpes con el lápiz, etc.

Recuento *verbal*. Los niños cuentan la secuencia de los nombres de los números sin apoyo concreto, recitan en su totalidad los nombres de los números de los discos tapados.

Recuento *abstracto*. Los niños eran capaces de seguir la secuencia desde el total de los discos tapados, sin repetición de la secuencia entera, empezaban repitiendo solamente el número de recuento correspondiente a la primera colección.

Steffe y cols. (1982) encontraron que los niveles de soltura y flexibilidad en el recuento guardaban correlación con la capacidad del niño y con las estrategias para la resolución de problemas verbales sencillos, que se resolvían mediante sumas y restas:

- Los niños caracterizados por el recuento *perceptivo* fueron incapaces de desarrollar estrategias adecuadas, parecían carecer de la capacidad de procesamiento de la información necesaria para retener los dos números del problema y realizar la situación con objetos concretos.

- Los niños de recuento *figural* eran capaces de realizar problemas de adición muy sencillos, siempre que los pudieran traducir a modelos con recuento con los dedos, lo que exigía que al menos uno de los números fuera pequeño.

- Los niños de recuento *motor* eran capaces de utilizar una estrategia de recuento total, utilizando objetos o dedos, tanto para sumar como para restar.

- Los niños de recuento *verbal y abstracto*, Steffe y cols. (1983) son capaces de utilizar de forma eficiente los procedimientos de recuento progresivo y regresivo.

8.2. TIPOS DE ESTRATEGIAS Y SU EVOLUCIÓN

Tres son los niveles que según Carpenter y Moser recorre el niño para ejecutar sumas y restas y que pueden ser relacionados con los señalados -y recogidos anteriormente- por Steffe y cols. (1982):

Nivel I: las estrategias básicas utilizadas revelan que el niño tiene necesidad de modelar directamente con objetos físicos o dedos.

Nivel II: las estrategias básicas son contar secuencias. Los niños aprenden que ya no necesitan objetos y actúan con los números.

Nivel III: aquí las estrategias se basan en la utilización de recuerdos de hechos numéricos.

Carpenter y Moser (1984) señalan que en los niños evolucionan las formas -estrategias- de resolución de los problemas a lo largo de los cursos primero a tercero. Pasan de usar procedimientos concretos a recuentos mentales. En el curso tercero predomina la recuperación de hechos numéricos.

La evolución -en general- de los momentos por los que el niño pasa para resolver un problema aritmético puede considerarse así:

En principio, es imprescindible una ayuda externa. Los niños emplean objetos concretos para calcular, representando los números con bloques, fichas, lápices, etc., con los que puede manipular. Este nivel se corresponde con el de contadores de items perceptivos y figurales -objetos- (Steffe y cols., 1983).

Más tarde usan los dedos, por su proximidad y comodidad. El niño representa los términos de la operación -ambos o uno solo- mediante los dedos. Los elementos contados son entonces actos motores más que objetos o representaciones de los mismos. Este nivel se corresponde con el de contadores de items unitarios motores -dedos- (Steffe y cols., 1983) y sigue requiriendo una ayuda externa a la memoria infantil.

Después, con el tiempo, los niños abandonan espontáneamente los procedimientos concretos e inventan procedimientos mentales para calcular sumas (Baroody, 1988). La diferencia fundamental con el nivel anterior es que no necesitan ninguna ayuda externa. Se corresponde con los items unitarios verbales o abstractos, en los que el acto motor anterior es sustituido por la palabra numérica.

Por último, utilizan para la resolución hechos numéricos almacenados en la memoria, bien directamente o por medio de reglas.

Recogemos a continuación distintas estrategias, siguiendo las propuestas en los trabajos de Carpenter y Moser (1982, 1983,1984).

8.2.1. ESTRATEGIAS DE SUMA

A -**Modelado directo**

La estrategia más elemental y primitiva es *contar todo* (counting all) *con modelos,* se cuenta los objetos o dedos uno a uno para representar un sumando, se repite el proceso para el otro sumando y después se vuelve a contar los elementos de ambos sumandos unidos, empezando desde el 1.

Fuson (1982) señala que aproximadamente el 20 % de los niños, entre 6 y 8 años utilizan esta estrategia, al menos, parte del tiempo. Se han detectado dos formas de llevar a cabo esta estrategia. El niño, una vez que ha construido los conjuntos de los dos sumandos, o los junta físicamente y, una vez juntos, los cuenta o los cuenta sin juntarlos. En el primer caso está implicado un tipo de acción que correspondería con los problemas de Cambio y en el segundo caso son relaciones estáticas de los conjuntos, que tiene que ver con los problemas de Combinación.

El niño inventa atajos (Baroody, 1988) con el fin de evitar el laborioso proceso de contar uno a uno los objetos o dedos para representar cada sumando; entre estos atajos están: la estrategia de "pautas digitales" y la de "reconocimiento de pautas" (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984), que es aún más económica. Esta estrategia consiste en crear pautas digitales para cada sumando y, a continuación, reconocer la suma inmediatamente, quizá de manera visual (mediante una captación directa), quizá cinestésica. Para 4 + 5 = ?, por ejemplo, un niño puede emplear pautas digitales para representar cada sumando, *sentir* que ha extendido todos los dedos salvo uno, y responder "9" sin tener que contar.

B.- <u>Conteo de secuencias</u>

Cuando el niño descubre - o sabe ya- que para un tipo de problema, "a + b = ?" no es necesario construir los sumandos para contarlos, la estrategia que sigue es comenzar en "a" y después añadir "b" -*contar todo sin modelos*-, que se diferencia de la estrategia de contar todo con modelos, porque el niño no utiliza objetos o dedos para representar los sumandos. Es la estrategia

SUM identificada por Suppes y Groen (1967) y Groen y Parkman (1972). Es el procedimiento más básico de adición mental. Después, cuando el niño se da cuenta de que no necesita construir la secuencia completa para contar, pasa a emplear un estrategia más sofisticada, eficaz y menos rutinaria que el contar todo:; es la estrategia de *conteo hacia adelante* (counting on), partiendo del primer sumando o del sumando mayor. Es la estrategia MIN de Groen y Parkman (1972). *Contar a partir del primer sumando* abrevia la estrategia de contar todo, pero todavía es un método más económico, ahorra más trabajo, *Contar comenzando por el término mayor.*

Numerosos trabajos se han ocupado de cómo "llevan la cuenta" los niños cuando cuentan mentalmente. (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Fusón, 1982, 1988), entre otros, señalan que en un principio, los niños usan objetos concretos para llevar la cuenta siendo el empleo de los dedos uno de los métodos favoritos: así, un dedo extendido es uno más, dos dedos extendidos dos más, etcétera. Baroody (1988): el reconocer automáticamente pautas digitales, hace que el llevar la cuenta requiera poca atención y se ejecute con gran eficacia. Con el tiempo, los niños pasan a emplear otros medios muy variados: golpes con los dedos, con el lápiz, movimientos de cabeza, llevar una doble cuenta, por ejemplo, 2 + 4 , dicen: "1, 2 ; 3 es uno más, 4 son dos más, 5 son tres más, 6 son 4 más", este proceso puede ser automatizado y realizarse mentalmente. Llevar la cuenta es muy exigente en el plano cognoscitivo y se puede aligerar si se empieza por el término mayor.

Riley, Greeno y Heller (1983); Carpenter y Moser (1984), proponen la evolución de las estrategias como: *contar todo con modelos* → *contar a* *partir del primer sumando* → *contar a partir del sumando mayor*. Las ventajas de la primera a la segunda es que se prescindiría del recuento del primer sumando y de la segunda a la tercera se reduce al mínimo el recuento. Baroody (1984) entiende que después de la estrategia *contar todo con modelos* aparecería *contar todo empezando por el primer sumando* y posterior *contar empezando por el sumando mayor*. Baroody y Gingsburg (1986) defienden esta última evolución. Se basan en:

a) La escasa presencia de la estrategia *contar a partir del primer sumando* detectada con anterioridad (Carpenter y Moser, 1982, 1984).

b) La fuerte presencia de la estrategia *contar todos empezando por el sumando mayor*, mucho mayor por otra parte que la de *contar todos empezando por el primer sumando.* (Baroody, 1987).

8.2.2. ESTRATEGIAS DE RESTA

A- Modelado directo

En este primer nivel, cuando el niño necesita utilizar objetos físicos, las estrategias que se han observado son las siguientes:

Separar de (separating from). Al principio los niños emplean modelos concretos que representan directamente su concepto informal de la resta como "quitar algo" (Carpenter y Moser, 1982). Usando objetos o dedos se construye el conjunto mayor "a". Se quitan de él el conjunto menor "b". La respuesta es el número de los objetos que quedan y que el niño cuenta una vez que ha hecho la separación. Es por tanto una estrategia sustractiva.

Separar a (separating to). De igual manera que en la estrategia anterior, se construye un conjunto que se corresponda con los elementos del número mayor “a”. De este conjunto se quitan elementos hasta queden igual al número menor “b”. La respuesta es el número de elementos quitados del conjunto inicial y que el niño tiene que contar para decir la respuesta. También es una estrategia sustractiva.

Contar hacia adelante (adding on). Se realiza formando el conjunto correspondiente al número pequeño “b”. Después se van añadiendo elementos a este conjunto hasta que hay un total de elementos igual al número mayor “a”. La respuesta se consigue contando el número de objetos añadidos. Implica una acción de añadir y por tanto es una estrategia aditiva.

Emparejar (matching). Un conjunto de “a” objetos y un conjunto de “b” objetos se forman parejas tomando un objeto de cada conjunto, hasta que uno de ellos se acaba. La respuesta es el número de objetos que queda en el conjunto sin emparejar.

B- <u>Conteo de secuencias</u>

Contar hacia atrás desde (counting down from). Se comienza la secuencia de conteo hacia atrás comenzando desde el número mayor “a”. La secuencia contiene tantos elementos como indique el número menor “b”. El último número en la secuencia de conteo es la respuesta. Es una estrategia sustractiva.

Diversos autores, Baroody (1984); Carpenter y Moser (1984); Fuson (1984) han señalado dos formas de llevar a cabo esta estrategia, bien iniciando la cuenta en el número del minuendo bien en el del número siguiente. Si el niño realiza la resta 8 - 5, puede empezar, en el primer caso, en 8, sigue 7, 6, 5, 4, y diría como resultado 3. En el segundo caso comenzaría la cuenta en 7, 6, 5, 4, 3. El resultado sería 3.

Contar hacia atrás hasta (counting down to). Se comienza la secuencia de conteo hacia atrás, comenzando desde número mayor “a”, y se continúa hasta atrás tantos pasos como sean necesarios para llegar al número menor “b”. La respuesta es el número de palabras en la secuencia de conteo. Es también estrategia sustractiva.

Contar hacia adelante a partir de un número dado (counting up from given). Se comienza la secuencia de conteo hacia adelante comenzando con el número menor “b” y se continúa hacia adelante hasta que se llega a “a”. La respuesta es el número de palabras contadas en la secuencia.

Selección (choice). Se utiliza “contar hacia atrás” o bien “contar a partir de un número dado”, dependiendo de cuál de las dos estrategias sea más eficiente. El niño decide cual estrategia requiere el menor número de pasos para contar, y actúa en consecuencia. Cuando el sustraendo es relativamente grande, contar progresivamente reduce las exigencias de la cuenta atrás y también cuando ambos, minuendo y sustraendo, están próximos. Pero si el sustraendo es pequeño y el minuendo y el sustraendo están relativamente separados, contar hacia atrás tiene ventaja.

Se puede establecer un paralelismo entre las estrategias de conteo y las de modelado directo; el proceso cognitivo es semejante, sólo se diferencian en que en estas últimas manipulan objetos cuando realizan las operaciones. La estrategia “separar de”, del nivel de modelado directo, tiene su paralela en el nivel de conteo en “contar hacia atrás desde”; y la estrategia de “separar a”, del nivel de modelado, se corresponde con “contar hacia atrás hasta”, del nivel de conteo.

Las estrategias “contar hacia adelante” -en el nivel de modelado directo- y “contar hacia adelante a partir de un número” -en el nivel de conteo-se corresponden e implican adición. El niño coloca un número de objetos igual al número menor y va añadiendo hasta tener el conjunto mayor; después cuenta los objetos añadidos y ese número es la respuesta. En el nivel de conteo, comienza a contar hacia adelante partiendo del número menor y finaliza cuando llega al mayor. La respuesta es el número de palabras de la secuencia.

La estrategia de igualar o emparejar, es sólo utilizada cuando se dispone de objetos, es decir, en el nivel de modelado directo. La estrategia llamada de elección, del nivel de conteo, supone que el niño elige entre contar hacia adelante o contar hacia atrás, dependiendo del camino que sea más corto.

Las estrategias anteriores -contar desde el sumando conocido hasta el resultado, aditivamente y contar hacia atrás, relacionada con la resta-, requieren una capacidad conceptual importante, ya que implica conocer perfectamente las funciones de cada uno de los términos de la adición, el esquema “parte-todo” -en palabras de Resnick (1983)- y un sistema de doble registro. Así en el problema ¿ + 4 = 7, cuando el niño cuenta hacia atrás no sólo tiene que invertir la secuencia de numerales, sino que también ha de registrar los pasos de conteo que hay desde el 7 hasta el 4. En el procedimiento de contar desde el sumando conocido, tiene que comprender que su conteo finaliza en el 7 y registrar el número de pasos que hay entre el 4 y el 7. Se han encontrado dos modos de llevar el registro, con dedos y mentalmente. Emplean dedos en la estrategia de contar desde el sumando conocido, mientras que contar hacia atrás lo hacen mentalmente.

8.2.3. <u>ESTRATEGIAS DE SUMA Y RESTA</u>

En el tercer nivel los niños abandonan el conteo de secuencias para utilizar otros procedimientos basados en memorizaciones y reglas, son las estrategias de *"Hechos numéricos"*.

Los niños, tanto en la escuela como fuera de ella, aprenden y memorizan respuestas para cada problema simple, por ejemplo que 3 + 3 = 6, es la estrategia de *Hechos conocidos.*

Por otra parte, el niño utiliza la estrategia de *Hechos derivados,* cuando a partir de conocer hechos numéricos encuentra la respuesta a problemas relacionados. Así, si el niño conoce que 5 + 5 = 10 y tiene que resolver 5 + 6 = ?, recupera de forma automática el hecho conocido y lo soluciona: "si 5 + 5 = 10 y 6 es uno más que 5, la respuesta es 11".

8.3. ESTRATEGIAS Y ESTRUCTURA SEMÁNTICA DE LOS PROBLEMAS VERBALES

La tabla 8.3.1., tomada de Carpenter y Moser (1984, p. 1998), relaciona los tipos de estrategias con los niveles de Briars y Larkin (1984) y los de Riley y cols. (1983).

El modelo de simulación de Riley, Greeno y Heller (1983), en la versión desarrollada por Riley y Greeno (1988), predice que los niños de un determinado nivel responden consistentemente con una estrategia específica a un tipo de problema. Establece tres niveles:

TABLA 8.3.1

Tipos de problemas y clases de estrategias utilizadas en cada nivel*

Problema	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Adición			
Join y Combine	Contar todo	Contar todo Contar a partir del 1erSumando Contar a partir del mayor	Contar a partir del mayor
Sustracción			
Join missing addend.	Añadir a	Añadir a Contar a partir de un nº dado	Contar a partir de un nº dado
Separate	Separar de	Separar de	Separar de Contar hacia atrás a partir de Contar a partir de lo dado
Combine		Separar de	Contar a partir de lo dado
Compare	Emparejamiento	Emparejamiento Contar a partir de lo dado	Contar a partir de lo dado

* Fuente: Carpenter y Moser, 1984, p. 198

En el nivel I, las estrategias que pueden utilizar los niños son las de modelado directo, porque sólo pueden representar con objetos manipulables los dos conjuntos del problema y los cuenta juntos. Están limitados a representaciones externas y manipulables; por tanto pueden resolver problemas con la incógnita en el resultado.

En el nivel II, añaden un esquema que hace que el niño pueda darse cuenta de que los objetos tienen un doble papel, están incluidos en el conjunto total y en uno de los subconjuntos. En este nivel puede resolver problemas en los que la incógnita se sitúa en uno de los sumando y pueden emplear las estrategias de conteo, pero sólo a partir de uno de los sumandos y no a partir del sumando mayor.

En el nivel III, añaden el esquema parte-todo, con el que el niño puede construir una representación de las relaciones entre todos los elementos, no necesita representación externa y utiliza cualquier tipo de estrategia -conteo, memorística y reglas-.

Carpenter, Hiebert y Moser (1981); Carpenter y Moser (1982, 1983); Riley y cols. (1983), entre otros autores, han demostrado que la estructura semántica de los problemas verbales influyen tanto en la dificultad relativa de los problemas como en las *estrategias* usadas por los niños en su resolución. Carpenter y Moser (1982, 1,983, 1984) han demostrado la relación que existe entre la estructura semántica y las estrategias, sobre todo es fuerte en la operación de restar y en el primer año de escolaridad. Presentan los resultados siguientes:

Cuando los problemas son de Cambio, con la incógnita en el resultado (Cambio 2), las estrategias más utilizadas son sustractivas: *Separar de,* en el nivel de representación con objetos y su correspondiente en el nivel de recuento mental: *Contar hacia atrás desde.*

En los problemas de Cambio, con la incógnita en el sustraendo (Cambio 3), entonces utilizan estrategias aditivas: *Añadir a* cuando encuentran la solución representando, mediante objetos o dedos, los números y *Contar hacia adelante a partir de un número dado,* es la estrategia paralela en el nivel de conteo.

La estrategia sustrativa del nivel de conteo es más infrecuente que la estrategia del mismo nivel, pero aditiva, en primer curso. Puede ser debido a que supone un recuento regresivo y este recuento es más difícil que el progresivo.

En los problemas de Combinación, señalan que se da una situación más ambigua no existiendo una estrategia determinada desde el punto de vista teórico, utilizando tanto *Separar de* como *Añadir a*. Cuando hay objetos disponibles o los dedos de la mano son suficientes para representar los números dados parece que el niño prefiere un a estrategia sustractiva: *separar de* o *contar hacia atrás desde*. Sin embargo, si no hay disponibles objetos o los dedos no son suficientes se inclinan por estrategias aditivas: *Añadir a* o *contar hacia adelante a partir de un número dado.*

En los problemas de Comparación, cuando la incógnita está en la diferencia (Comparación 1 y 2) y se disponen de objetos, la estrategia elegida es el emparejamiento.

Hemos visto que los niños usan diferentes procedimientos para resolver los distintos problemas de resta, sin embargo los problemas de suma de Unión (Join) y de Combinación son tratados por los niños como si fueran equivalentes. No sólo son los mismos procesos básicos usados en ambos problemas sino que también el mismo patrón de respuestas aparecen en los dos problemas. Los resultados del estudio longitudinal del mes de Septiembre, con sumas entre 11 y 16 y sin disponer de material manipulativo, se recogen en la tabla 8.3.2.

TABLA 8.3.2

Problemas de Combinación y Unión (Join)

			Estrategias				
Curso	Problema	%	Contar todo	Contar a partir del primero	Contar a partir del mayor	Hecho derivado	Hecho numérico
1	Comb.	50	52	3	3	1	1
	Join	47	46	3	8	2	1
2	Comb.	72	39	6	29	4	7
	Join	84	41	14	26	6	6
3	Comb.	91	13	7	33	11	30
	Join	90	11	15	32	9	32

Carpenter y Moser 1983, p. 29.

Sin embargo, el hecho de que no haya diferencias entre las soluciones de los niños en los problemas de suma: Cambio-Unión (Join) y Combinación no significa que no haya diferencia entre los problemas de suma. Los problemas suma de Cambio-Separación (Separate-inicial desconocido) y

Comparación, son significativamente más difíciles, según los datos del estudio longitudinal, que los de Cambio-Unión y Combinación.

TABLA 8.3.3

Clasificación de estrategias de De Corte y Verschaffel

Estrategias de suma:	***Estrategias de resta:***
Materiales: Contar todo con modelos (CAWM). Emparejamiento al contrario (RM).	**Materiales:** Separar de (SF). Separar a (ST). Añadir a (AO). Emparejamiento (MA).
Verbales: Contar todo empezando por el 1º (CAF). Contar todo empezando por el Mayor (CAL). Contar a partir del 1º (COF). Contar a partir del mayor (COL).	**Verbales:** Contar hacia atrás a partir de (CDF). Contar hacia atrás (CDT). Contar a partir de lo dado (CUFG).
Mentales: Hecho conocido empezando por el primero (KF-F). Hecho conocido empezando por el mayor (KF-L). Hecho derivado empezando por el primero (DF-F). Hecho derivado empezando por el mayor (DF-L).	**Mentales:** Hecho conocido directamente Substraído (KF-DS). Hecho conocido indirectamente Substraído (KF-IS). Hecho conocido indirectamente Aditivo (KF-IA). Hecho derivado directamente Aditivo (DF-DS). Hecho derivado indirectamente substraído (DF-IS). Hecho derivado indirectamente aditivo (DF-IA).

La acción y las relaciones descritas en problemas de adición de Cambio-Separación y Comparación no pueden ser resueltos por las estrategias de adición que los niños tienen disponibles. Esta falta de congruencia entre la estructura del problema y las estrategias de solución disponible hacen estos problemas más difíciles que los problemas de Cambio-Unión y Combinación para los cuales las estrategias de *"contar todo"* y *"contar a partir de"* proporcionan un procedimiento razonable.

Así, aunque los chicos parecen usar los mismos procesos básicos para resolver todos los tipos de problemas de suma (Carpenter 1981), sin embargo la estructura del problema también influye en las soluciones de los niños en los problemas de suma. Los problemas que pueden ser modelados por los procesos disponibles son relativamente fáciles mientras que aquellos que no pueden serlo son significativamente más difíciles.

De Corte y Verschaffel (1987) establecen también una clasificación de estrategias que se recoge en la tabla 8.3.3. Parten de los trabajos de Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984), utilizan los problemas siguientes: Cambio 1, Cambio 2, Cambio 3, Cambio 6, Combinación 1, Combinación 2, Comparación 1 y Comparación 3. Tienen en cuenta tres tipos de estrategias: materiales, verbales y mentales (Carpenter y Moser, solo tuvieron en cuenta los efectos sobre la estructura del problema de las estrategias materiales y verbales y no de las mentales).

De Corte y Verchaffel (1987), corroboran en gran medida los datos del estudio de Carpenter y Moser (1984) donde la estructura del problema influye en la estrategia de solución usada por los niños. Las conclusiones están recogidas por estrategias de suma para los problemas: Cambio 1, Combinación 1, Cambio 6 y Comparación 3 y por estrategias de resta, para el resto de los problemas Cambio 2, Cambio 3, Combinación 2 y Comparación 1 (tablas 8.3.4. y 8.3.5.).

TABLA 8.3.4

Resultados de las estrategias de De Corte y Verschaffel (1987)

Entrevista	*Nº Problemas con ayuda*	Material	Verbal	Mental	Sin Clasificar
1	118	76(64%)	19(16%)	20(17%)	3(3%)
2	185	88(48%)	32(17%)	57(31%)	8(4%)
3	207	50(24%)	23(11%)	129(63%)	5(2%)

Número de problemas pasados = 240

<u>Las estrategias de suma</u>

TABLA 8.3.5

Frecuencia de las tres variantes de la estrategia "contar todo con modelos" en los problemas de Cambio 1 y Combinación 1

Problema	Entrevista	Adding	Joining	No move	Inclasificado
Cambio 1	1	13	2	1	3
	2	7	3	1	2
	3	4	1	0	2
Combinación 1	1	2	3	10	1
	2	0	4	6	4
	3	1	0	5	1

De Corte y Verchaffel (1987, p. 372)

Para Carpenter y Moser (1982, 1984) en los problemas de Cambio 1 y Combinación 1, no hay distinción entre las estrategias usadas por los niños en estos problemas. Sin embargo, De Corte y Verschaffel (1987) distinguen tres modos de utilizar la estrategia *"contar todo con modelos"* (CAWM): Adding, cuando el niño construye, con bloques, el conjunto correspondiente al primer número del problema y añade a este conjunto los bloques correspondientes al segundo número y finalmente cuenta el número total de bloques. Joining, cuando el niño construye dos conjuntos distintos correspondientes a los dos números del problema, después forma un sólo conjunto, moviendo los bloques de los dos conjuntos y finalmente cuenta el número total de bloques. No move, cuando el niño construye dos conjuntos correspondientes a los dos números del problema y cuenta el número total de bloques sin físicamente mover los conjuntos. El primer modo (adding) representa mejor la estructura semántica del problema Cambio 1 y el segundo (joining) y el tercer (no move) modo representan mejor al problema Combinación 1 y sus resultados están reflejados en la tabla 8.3.5.

En el problema de Cambio 6 emplean para la solución estrategias materiales 23 niños, de los que en 18 casos utilizan bloques y en 5 casos dedos para representar ambos conjuntos. Los que utilizan bloques, emplean los modos: adding, joining y no move, de la estrategia *"contar todo con modelos"*, 5, 3 y 5 niños respectivamente, los otros 5 restantes utilizan un diferente procedimiento, construyen un conjunto con un número arbitrario de bloques, quita los bloques correspondientes al primer número, aumentado o decreciendo el conjunto originariamente construido hasta que contiene tantos bloques como el segundo numero, después cuentan el total de los dos conjuntos y este total fue el resultado. Esta estrategia que es una variante de *"contar todos con modelos"* puede ser considerada como la mejor representación material de la estructura semántica implícita en el problema Cambio 6.

Para el problema Comparación 3, también son 23 los que utilizan estrategias materiales para encontrar la solución. Trece de ellas eligen uno de los tres modos de la estrategia de *"contar todo con modelos"*, el resto utiliza la estrategia de *"emparejar al contrario"* (RM), es el complemento de la estrategia sustractiva de los problemas de comparación y también concuerda con el programa de simulación de Briars y Larkin (1984, p. 266).

Respecto a las estrategias verbales y mentales aditivas, señala la diferencia encontrada entre los problemas de Cambio 1 y de Combinación 1. De las 43 soluciones encontradas para Cambio 1, entre estrategias verbales y mentales, 30 usan la estrategia de *"comenzar por el primer número"* y 11 *"empezar por el número mayor"*. Por el contrario, en el problema Combinación 1, 11 usan la estrategia de *"comenzar por el primero"* y 34 *"comenzar por el número mayor"*. Si bien esta diferencia, según Riley y cols. (1983, p.185), sea debida a la diferente función de los dos conjuntos -inicial y cambio-, en Cambio 1 y -subconjuntos los dos- en Combinación 1, en el estudio que nos ocupa puede concurrir otra variable, el haber utilizado números mayores a los del estudio de Carpenter y Moser.

Las estrategias de resta

Las conclusiones están, en general, de acuerdo con Carpenter y Moser, así para el problema Cambio 2, las estrategias más empleadas son *"Separar* *de"* y *"Contar hacia atrás a partir de"*. Para Cambio 3 son *"Añadir a"* y *"Contar a partir de lo dado"*. En el problema Comparar 1, la estrategia usada es *"emparejar"*. Respecto del problema Combinación 2, hay una importante diferencia entre las dos investigaciones. Carpenter y Moser 1982, 1984) encontraron que la mayoría de los niños que operaban a nivel material tendían a resolverlo con *"separar de"* y en el nivel verbal con *"contando hacia atrás desde el dado"*, en contraste, en el estudio de De Corte y Verschaffel (1987), usaban indistintamente *"añadir a"* o *"contar hacia adelante desde el dado"* para resolverlo. La diferencia puede ser debida a: el problema propuesto por estos últimos autores, -Combinación 2-, es: "Pedro tiene 5 manzanas; Ana tiene algunas manzanas; Pedro y Ana tienen 14 manzanas entre los dos; ¿Cuántas manzanas tiene Ana? el subgrupo conocido es mencionado antes de que sea dado el supergrupo (grupo total). En Carpenter y Moser el problema Combinación 2 es: "Hay 6 niños en el recreo, 4 son chicos y el restos son chicas. ¿Cuántas chicas hay en el recreo?" la secuencia está dada la vuelta. Estos resultados, confirmados por otra investigación, que recoge este artículo, (De Corte y Verschaffel, 1987, p. 377), confirman la hipótesis de que el orden de presentación de los elementos del problema también influyen en la elección de estrategias de los problemas.

Por otra parte, Siegler (1987) identifica 4 tipos de estrategias de sustracción en niños de 5 y 6 años.

Contar con dedos, el niño representa el minuendo y el sustraendo con dedos, después cuenta la diferencia de dedos entre los dos.

Usar dedos, el niño enseña los dedos que corresponden al minuendo, después hace lo mismo con respecto al sustraendo, y encuentra la diferencia sin contar.

Contar, cuenta en voz alta sin emplear modelos o dedos.

Recuperar(retrieval), el niño ni cuenta ni usa modelos, sólo responde cuando se le presenta el problema (recuerdo).

De los estudios anteriores puede concluirse de forma general que los procedimientos de resolución -estrategias- que los niños utilizan en los problemas sustractivos dependen de la estructura semántica de los problemas.

Para terminar veremos, como resumen, la evolución y desarrollo de las estrategias que presentan Carpenter y Moser (1984). Estos autores identifican 5 niveles en la evolución de las estrategias en su estudio longitudinal con niños de primer a tercer grado. Las observaciones de las estrategias se hicieron cuando los niños resolvían problemas, lo que les permiten presentar, junto con las estrategias, qué tipo de problemas pueden ser resueltos en cada nivel:

Nivel 0: los niños son incapaces de resolver cualquier problema de suma o resta.

Nivel 1: utilizan la estrategias de modelado directo -contar todo, separar, añadir a y emparejamiento-, coincide con el nivel 1 de Riley y cols., (1983). Pueden realizar los problemas de cambio con la incógnita en el resultado, pero manipulando con objetos. Los problemas de comparación son resueltos exclusivamente con la estrategia de “emparejamiento”. Los niños no son capaces de resolver problemas de Combinación en los que tienen que encontrar un subconjunto.

Nivel 2: es un periodo transitorio en el que utilizan tanto las estrategias de modelado directo como las de conteo. Para los problemas resueltos por sumas, utilizan estrategias verbales, aunque todavía muchos niños sigue resolviéndolos utilizando las concretas. Para los problemas que se resuelven por resta comienzan a utilizar la estrategia “contar a partir de un número dado”. La estrategia de “contar hacia atrás”, todavía no aparece en casi ningún caso. Sí resuelven los problemas de combinación en los que tienen que encontrar el subconjunto, pero con la estrategia de emparejamiento.

Nivel 3: son utilizadas casi exclusivamente las estrategias de conteo y de forma esporádica aparecen las de hechos numéricos o mentales. La estrategia más utilizada era la de “contar a partir del mayor”. En los problemas de Cambio resueltos por resta aparece la estrategia de “contar hacia atrás”, pero la estrategia substractiva que más usan es la de “contar hacia adelante”. La única estrategia de modelado directo o material que se utiliza, pero sólo en determinados problemas, es la de “separación”. Los problemas de Combinación son resueltos con “contar hacia adelante” igual que los de Comparación, pero todavía son un 10 % los que resuelven estos últimos mediante el emparejamiento.

Nivel 4: utilizan, además de las estrategias de conteo, las estrategias memorísticas y las reglas.

9. ERRORES

Numerosas investigaciones se han ocupado de determinar las dificultades de los niños en la resolución de problemas y algoritmos, ya que el análisis de los errores permite saber con qué dificultades se ha encontrado el niño y determinar los medios para remediar la situación. Conocer los procesos incorrectos que llevan a cabo los alumnos cuando resuelven los diferentes tipos de problemas es útil, tanto para diagnosticar las habilidades como para planificar y programar el aprendizaje.

En este apartado presentaremos los errores de los niños tanto en la resolución de sumas y restas como en los problemas, y el por qué de estas dificultades. Comenzaremos analizando los errores cometidos en las sentencias abiertas, por lo que tienen de semejanza con los problemas verbales. Pasaremos después a analizar los errores en la aplicación de los algoritmos de suma y resta. Y, finalizaremos relacionando los errores con los distintos tipos de problemas, según su estructura semántica.

La primera conclusión a la que llega Siegler (1983b) analizando las investigaciones centradas en la interacción entre el conocimiento que ya tienen los niños y su aprendizaje es que los niños actúan según reglas: “Las reglas constituyen una unidad básica útil para caracterizar los conocimientos que tienen los niños. Las reglas que los niños usan pueden evaluarse mediante el diseño de problemas que producen distintas pautas de actuación para reglas diferentes”(p. 395, trad. cast.). Tratar de conocer las reglas que producen los errores nos llevaría a conocer previamente los errores de los niños. En esta misma línea, Rivière (1990) afirma que el enfoque cognitivo nos ayuda a entender un principio fundamental: que *frecuentemente los errores no son ilógicos, sino que responden a la aplicación de ciertas reglas* *que, aunque no sean "correctas", implican en sí mismas la posesión de una determinada competencia lógico-matemática.* El examen de muchos procesos cognitivos subyacentes a errores demuestra que, muchas veces, los errores son síntomas o puntas de iceberg de un determinado sistema: responden también a la *aplicación de algoritmos (procedimientos) que producen errores*.

9.1. ERRORES EN SENTENCIAS ABIERTAS

Ya nos ocupamos de las sentencias abiertas por tener elementos comunes con los problemas verbales. Ahora las analizaremos en este apartado desde el punto de vista de los errores que los niños cometen, cuando ejecutan las operaciones necesarias para encontrar la solución.

Lindvall e Ibarra (1980) señalan que muchos alumnos tienen dificultades para resolver las sentencias abiertas y proponen como esencial que los profesores tengan un conocimiento detallado de los factores que influyen en la realización de las sentencias, conozcan los errores y las dificultades que los niños pueden encontrar, para que puedan corregirlos.

Su estudio analiza las sentencias bajo cuatro condiciones. Los niños resolvían la sentencia con lápiz y papel. Una segunda variable estudiada era la habilidad para leer sentencias abiertas. Otra, resolver problemas en los que estaban implicadas sentencias y, finalmente demostraban que la sentencia se cumplía con material manipulable. Estos autores recogieron los siguientes métodos incorrectos usados en resolver las sentencias abiertas y que se pueden resumir en:

1.- Sentencias de suma, cuando hay un sumando desconocido, operación a la izquierda (a + □ = c; □ + b = c).

El procedimiento incorrecto más usado fue sumar los dos números. El niño se deja llevar por el signo y hace una suma, sin tener en cuenta que a la suma le falta un sumando. Sin embargo, las sentencias de este tipo fueron resueltas correctamente por la mayoría de los niños en esta prueba.

2.- Sentencias de resta, cuando falta el sustraendo, operación a la izquierda (a - □ = c).

La operación señalada en la sentencia es la misma que debe realizar para obtener la respuesta correcta. Además, el sujeto sabe que para restar debe quitar del número mayor el menor, por lo que las indicaciones de la sentencia le inducen a llevar a cabo la operación correcta. Ningún procedimiento incorrecto suficientemente importante fue encontrado.

3.- Sentencias de resta en las que falta el minuendo y la operación a la izquierda (□ - b = c).

Aquí la resta de los números dados fue el error más común al resolver las sentencias por escrito. Al leer la oración y al demostrar su significado los errores que cometieron eran: restar los números dados y utilizar el procedimiento de restar hacia atrás, éste en mayor porcentaje que el anterior. En los problemas con historias, repetir uno de los números dados en la historia como respuesta fue el error más común.

4.- Sentencias de suma en las que falta un sumando, operación a la derecha (c = a + □, c = □ + b).

La suma de lo dado fue el error más común en las sentencias escritas y también cuando demostraban con bloques el significado de la sentencia. Al leer esta sentencia, una práctica común fue leerla de la derecha a la izquierda.

5.- Sentencias de resta, tercer término desconocido, operación a la derecha (c = a - □).

Otra vez, el leer de derecha a izquierda fue el error más común al resolver las sentencias escritas, tanto al leer como al demostrar lo que las oraciones significan con material manipulable.

Los resultados demuestran que los procedimientos utilizados por los niños dependen de la forma en que está expresada la sentencia numérica. También llegan a la conclusión de que la capacidad de leer bien la sentencia lleva a encontrar la solución correcta, pero la capacidad de leer bien no demuestra que explique bien la sentencia. Los errores típicos de la demostración implicaron que la resolución del estudiante era una versión incorrecta de la sentencia. A menudo el estudiante podía haber leído la sentencias correctamente y haberla resuelto correctamente y expresar la solución incorrectamente. Esto es, uno puede anticipar que cuando llegan a una solución incorrecta descubrían el error cuando expresaban la oración. Lo que ocurre en vez de eso es que expresan el procedimiento seguido para obtener la respuesta incorrecta. Esto puede ser interpretado como indicador de que los estudiantes no ven una sentencia número como que su significado depende de la estructura y orden de los componentes de la oración, ven la sentencia como que consiste en unos símbolos que pueden ser reordenados para hacerlos resolubles.

El estudio de Lindvall e Ibarra, termina con unas implicaciones para la práctica docente que reseñamos a continuación:

Como este estudio ha indicado, el análisis de los procedimientos incorrectos que los niños han usado al resolver sentencias abiertas demostraron que los errores en tales categorías eran, añadir cosas dadas, restar cosas dadas y leer de derecha a izquierda. Estas estrategias incorrectas podrían ser interpretadas como que derivaran de una lectura incorrecta de las oraciones. Por ejemplo, personas que leen la sentencia "□ - 3 = 2", como "3 - 2 = a algo" o que interpretan "3 = 5 - □" como "algo - 5 = 3". Muestran una incapacidad para leer las sentencias correctamente. También, reflejó que la capacidad de lectura era un requisito esencial para llegar a la respuesta correcta. Una derivación más importante de esto es que la habilidad para leer una sentencia numérica correcta y consistentemente, es una habilidad para ser aprendida y por tanto que debe darse un gran énfasis en cualquier enseñanza de las sentencias numéricas. Una estrategia docente es incluir actividades en las cuales a través de la lectura y el estudio se le enseñe al estudiante a identificar soluciones correctas e incorrectas a los diferentes tipo de sentencias abiertas.

Es importante, dicen los autores, hacer hincapié en la inferencia que se puede deducirse de este estudio. Si la investigación ha sido hecha con alumnos de primer curso y de segundo curso, no significa que sugerimos que todos estos tipos de sentencias deben ser enseñados en estos primeros cursos. Ciertamente, algunos de ellos deben ser estudiados aquí, otros probablemente no deban serlo. La finalidad de utilizar todos los tipos de sentencias, fue poder posteriormente sugerir que debía ser aplicado a alumnos mayores y también poder comparar con los resultados de investigaciones precedentes (p. ej. Weaver, 1971). Sugerimos que el trabajo de clase con sentencias abiertas de suma y resta pudiera ser extendido a varios cursos, de manera que las formas más difíciles no se presentaran quizás hasta el tercero o cuarto curso. Más base para esto fue indicada en un estudio reciente por Riley (1979) que sugirió que la mayor parte de los alumnos sólo adquieren habilidad para comprender los tipos más difíciles de narración cuando alcanzan el tercer curso. Si, como se sugería anteriormente, suponemos que la habilidad para comprender historias es un requisito previo a enseñar las sentencias abiertas, el estudio de Riley pudiera implicar que el retraso en la instrucción de ciertos tipos de oraciones hasta cursos superiores pudiera resultar que estas sentencias entonces se enseñarían con más facilidad.

Empleando también sentencias abiertas, Hiebert (1982), realiza un estudio con problemas de Cambio, tres de unión y tres de separación, donde además de recoger las distintas estrategias -que han sido resumidas en el apartado correspondiente- también señala los errores que cometen los niños en la resolución de sentencias y que los agrupa en tres clases:

·Responder con uno de los números dados en el problema.

·Operación equivocada. Emplean adición cuando lo correcto es sustracción o viceversa.

·Indeterminado. Una estrategia no identificada genera una respuesta incorrecta, una suposición incorrecta o no se produce respuesta.

9.2. ERRORES EN LOS ALGORITMOS

Entre los trabajos que se ocupan de la ejecución de los algoritmos de suma y resta, destacan los que utilizan modelos de simulación para obtener un diagnóstico adecuado de los errores y poder así contribuir a su corrección (Brown y Burton, 1987; Brown y VanLehn, 1980, 1982, Young y O’Shea, 1981). Trataremos primero los errores de la operación de sumar y después los de la operación de restar.

9.2.1. ERRORES DE LA OPERACIÓN DE SUMAR

Bermejo (1990) señala que cuando el niño resuelve un algoritmo de suma debe tener en cuenta dos series de factores: *sintácticos* y *semánticos*. (Brown y Burton, 1978; Brown y Vanlehn, 1980, 1982; Resnick, 1.982, 1.983).

Los factores sintácticos se refieren a las reglas que dirigen la actuación del niño: iniciar la suma por la primera columna de la derecha, proceder columna por columna, etc.

Los factores semánticos hacen referencia a conceptos básicos implicados en la ejecución del algoritmo: notación posicional, sistema de base, etc.

En principio se trató de registrar únicamente los errores existentes y la forma de corregir cada error. Después se intentó clasificar los errores de acuerdo con criterios, fundándose en que varios errores podrían tener orígenes comunes. Sin embargo Backman (1978) recoge una serie de errores que pueden ser considerados tanto desde el punto de vista conceptual como procedimental y que muestran las deficiencias de las clasificaciones propuestas. Maza (1989) recoge los siguientes errores señalados por Backman:

1- Errores relacionados con el aprendizaje conceptual referentes a un mal entendimiento de un concepto:

·Errores consistentes en recuperar mal un hecho numérico básico. Decir que 3 + 4 = 8.

·Errores provenientes de una mala conceptualización de los sistemas de numeración. Así en 23 + 12 = 8, porque se ha hecho 2 + 3+ 1+ 2 = 8, ignorando el valor posicional de las cifras.

·Errores relacionados con una deficiencia en el reagrupamiento de unidades de orden superior. En 38 + 25 = 53, porque al sumar 8 + 5, se olvida de sumar la decena obtenida con las demás.

2- Errores relativos a la secuencialización de etapas dentro de un procedimiento:

Orden incorrecto de las etapas. Por ejemplo, restar la cifra mayor de la menor independientemente de estar en el minuendo o sustraendo.

Procedimientos incompletos como en 358 - 32 = 26.

9.2.2. ERRORES DE LA OPERACIÓN DE RESTAR

Para los alumnos la resta es una operación difícil y se llega a su dominio pasando por un camino en el que los errores son más normas que excepciones. Un niño puede conocer el procedimiento para la resta de tres dígitos, pero con un pequeño "agujero", un pequeño paso operativo que es incorrecto. Un alumno que utiliza un algoritmo con uno o más fallos puede llegar a veces a la respuesta correcta y otras veces puede cometer errores. Por eso es útil describir qué conocimiento operativo tiene, con fallos y todo.

Algunos investigadores han estudiado los algoritmos (procedimientos) que emplean los niños cuando cometen errores sistemáticos (bugs) en las operaciones de sustracción. Esta línea fue iniciada por Brown y Burton (1978) que no sólo definieron algunos de estos "procedimientos sistemáticos de sustracción errónea" y que se recogen en la tabla 9.2.2., sino que desarrollaron un programa de ordenador llamado Buggy (fallado), capaz de diagnosticar y analizar el conocimiento operativo de los alumnos en operaciones de resta de tres dígitos.

El avance del enfoque de Brown y Burton (1978) respecto a los métodos clásicos de evaluación del rendimiento en matemáticas, es que no se limita a señalar los errores sino que detecta, al menos en parte, los procesos responsables de los errores. Otros autores que han realizado investigaciones en esta misma línea (Brown y VanLehn, 1980, 1982; Resnick, 1982; Resnick y Omanson, 1987; VanLehn, 1983).

Brown y Burton hicieron resolver a 1.325 alumnos de la escuela primaria 15 problemas de resta. El programa Buggy actuaba de la forma siguiente: si las respuestas eran todas correctas le asignaba la categoría de “utilizar el algoritmo de resta correcto”. Si había muchos fallos, Buggy intentaba hallar un fallo que diera cuenta de la mayor parte o de todos los errores. Si no había un único fallo que diera cuenta de todos los errores, entonces se intentaban todas las combinaciones posibles, hasta que descubría la combinación que mejor respondía por los errores cometidos.

El programa fue capaz de descubrir algoritmos (correctos o no) que producían completa o parcialmente las respuestas del 43 por ciento de los alumnos. Los otros alumnos parecían estar cometiendo errores al azar o bien eran inconsistentes en sus errores de procedimiento, en algunos casos no “conocidos” por Buggy.

TABLA 9.2.2
Procedimientos que producen errores frecuentes en la substracción (adaptado de Mayer, 1983, p. 426 en la edición castellana)

1. *Menor de mayor:* sustraer el dígito menor del mayor, en cada columna, con independencia de que estén en minuendo o sustraendo (253 – 118 = 145).
2. *Pedir al cero:* si hay que “llevarse” de una columna cuyo número superior es 0, se realiza correctamente la sustracción en esa columna, pero se añade uno al sustraendo de la de su izquierda (103 - 45 = 158).

3. *Cero menos un número igual a ese número:* cuando el dígito superior de una columna es 0, el alumno responde con el dígito inferior (140 - 21= 121).
4. *Saltar sobre cero y pedir prestado:* si hay que llevarse hasta una columna cuyo dígito superior es 0, el alumno "se salta" esa columna de modo que no añade 1 a su sustraendo, y "conserva el 1" para la columna siguiente (304 - 75 = 139).
5. *Cero menos un número igual al número:* cuando el dígito superior de una columna es 0, se responde con el dígito inferior, que no se modifica aunque haya que "llevarse" de la columna anterior, en cuyo caso se añade 1 al sustraendo de la siguiente (304 - 75 = 179).

¿Por qué se cometen estos errores sistemáticos? Muchos errores son resultados de procedimientos o algoritmos incorrectos que los niños inventan. La cuestión es cómo llegan a esa invención y qué significado y coherencia tiene esta función de las estructuras del conocimiento y los recursos cognitivos que los niños poseen. Los alumnos no suelen quedarse parados o bloqueados (como haría un ordenador) cuando llegan a una situación de "impasse" en la resolución de un problema o en la realización de otras tareas matemáticas. Lo que hacen, frecuentemente, es tratar de aplicar ciertas operaciones ("reparaciones" o "remiendos"), basadas en su conocimiento que se ponen en juego en tales procesos. Brown y Van Lehn (1982) señalan que los sujetos poseen un proceso central de actuación que contiene el conocimiento para llevar a cabo una actividad. Este procedimiento central cuando hay error no está completo. Llega un momento en el que sus conocimientos son insuficientes para aplicar el procedimiento exacto, no tiene la respuesta adecuada y como trata de seguir, aplica una "reparación" que le permite seguir pero que le conduce a un resultado erróneo. La "reparación" aplicada tiene parte que respeta las reglas del proceso bueno y otras que no. Por tanto, el proceso tiene apariencia de estar bien realizado, pero conduce a errores sistemáticos al no tener en cuenta algunas reglas o imposiciones. La reparación no viene determinada por ningún factor, cualquier reparación puede ser aplicada en cualquier punto en el que el sujeto no pueda seguir, lo que hace que se produzcan una gran variedad de errores, sin embargo no todos los errores tienen la misma frecuencia. Antes hemos señalado los más significativos (tabla 9.2.2.).

La explicación desde una perspectiva cognitiva, se ha centrado en dos factores:

1. Los requisitos de la resta podrían ser excesivos en cuanto a la carga de memoria de trabajo que exigen. Muchas estrategias inductoras de errores serían intentos de emplear algoritmos gravosos (como “menor de mayor”).

2. Los algoritmos correctos de resta presuponen una base de conocimientos: no se montan en el vacío. Quizá los algoritmos incorrectos sean una indicación de que el alumno no posee tales conocimientos, por lo que en realidad no “comprende” la resta.

El último tipo de explicación (base de conocimientos inadecuada) es el que han propuesto para los errores en la sustracción algunos investigadores, como Nesher (1986) o Resnick y Omanson (1987): para ellos, el empleo de procedimientos incorrectos se debería, en muchos casos, a una comprensión deficiente de principios básicos que definen la operación de restar.

Finalmente, Baroody (1988) identifica una serie de dificultades con las que se pueden encontrar los niños y que les inducen a cometer errores:

·Dificultades de alineación: consiste en la colocación incorrecta o inconstante de las cifras.

·Dificultades debidas a la puesta en marcha de procedimientos incorrectos, parcialmente correctos o inventados.

·Dificultades referentes a la aplicación inconsistente de un procedimiento correcto. Esta clase de errores se presenta frecuentemente cuando los procedimientos carecen de significado y, en consecuencia, no están seguros de cuando deben emplearlos.

·Dificultades derivadas de la aplicación mecánica de reglas a procedimientos aprendidos de memoria. Por ejemplo, aplican los procedimientos correctamente cuando los problemas se presentan de un modo familiar, mientras que si la forma del problema se modifica ligeramente (por ejemplo, de la presentación vertical a la horizontal) no hallan ninguna conexión con el procedimiento conocido. Es frecuente que los niños realicen cálculos correctos cuando se trata de números familiares para ellos e incorrectas cuando no lo son, porque no son capaces de aplicar las mismas reglas que para las familiares.

·Dificultades surgidas por la incapacidad para aprender procedimientos nuevos. Aplican de manera mecánica procedimientos aprendidos previamente a problemas nuevos y así, por ejemplo, algunos niños se basan en procedimientos informales en los algoritmos con dos cifras. Si el niño no dispone de una base conceptual para aprender el procedimiento nuevo, puede regresar a un procedimiento aprendido previamente y más costoso o bien puede inventar uno propio.

` ·Dificultades derivadas de la memorización incompleta o incorrecta de reglas. Cuando no se comprenden las reglas sólo se recuerdan en parte o de manera incorrecta, lo que da lugar a muchos errores. Por ejemplo, cuando aprenden incorrectamente las reglas para sumar con llevadas, pueden cometer errores consistentes en colocar la cantidad que se llevan en la parte superior de la columna más a la izquierda en vez de la siguiente columna por la izquierda.

9.3. ERRORES EN LOS PROBLEMAS VERBALES

Las investigaciones actuales se interesan preferentemente por los procesos cognitivos que conducen a la resolución de un problema, analizando a veces las categorías de errores producidos por los niños (De Corte y cols., 1985); otras estudiando detalladamente cómo se llega a construir la representación mental del problema a partir del texto verbal del mismo.

Bermejo (1990) respecto a los problemas verbales señala dos tipos de errores:

Errores de *ejecución*, cuando resuelve la operación aritmética correspondiente y son los mismos errores que los señalados para resolver el algoritmo.

Errores de *representación*, cuando el niño construye una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal (De Corte y Verschaffel, 1.985). Los tipos de errores más relevantes son: 1) repetir una de las cantidades propuestas en el problema; 2) inventar la respuesta; 3) seleccionar una operación inadecuada. Para Bermejo y Rodríguez (1987) el tipo de error cometido por los niños depende tanto de la edad de los sujetos como de la estructura semántica de los problemas planteados (De Corte y cols., 1985).

TABLA 9.3
Distribución (en %) de respuestas y de categorías de errores. De Corte, Verschaffel y Win de Problemas Verbales: Serie A y Serie B

	Curso Primero		*Curso Segundo*	
Respuestas	***Serie A***	***Serie B***	***Serie A***	***Serie B***

Cambio 5				
Correcto	13	33	61	79
Otra operación	30	17	14	8
Dice el nº primero	46	36	14	5
Dice el nº segundo	2	5	5	3
Fallo ejecución	4	8	3	5
No responde	5	2	3	0
Combinación 2				
Correcto	43	57	71	83
Otra operación	23	14	11	3
Dice el primero	15	14	9	4
Dice el segundo	5	2	4	3
Fallo ejecución	11	10	4	7
No responde	3	3	1	0
Comparación 1				
Correcto	47	70	76	90
Otra operación	34	14	16	4
Dice el primero	11	6	3	1
Dice el segundo	2	2	1	1
Fallo ejecución	5	7	4	4
No responde	1	1	0	0

De Corte, Verchaffel y Win (1985, p.467)

De Corte, Verschaffel y Win (1985) trabajan con los problemas Cambio 5, Combinación 2 y Comparación 1 y dividen las respuestas en cinco categorías:

1) Respuesta correcta (CA).

2) Elige otra operación (suma, todos los problemas se resuelven por resta) (AE).

3) Contesta con un número de los dados en el problema, cualquiera de los dos (GNE): dice el primero (FGNE) o el segundo (SGNE).

4) Elige la operación correcta, pero falla en la ejecución (MC).

5) No responde (NA).

Emplean dos series de problemas, que se recogen en la tabla 7.1. página 108. Serie A, con problemas de la clasificación de Riley y cols. (1983)

y Serie B, con problemas reformulados por De Corte y cols. (1985). Los errores cometidos en los problemas de Cambio, como puede observarse en la tabla 9.3., son fundamentalmente dos: elegir otra operación (AE) y contestar con el primer sumando (FGNE). Hay más respuestas de error (FGNE) contestar con el primer sumando que del error elegir otra operación (AE) en el primer curso pero no en el segundo curso. De Corte y cols. sostienen la hipótesis de que los niños cuando cometen estos dos tipos de errores es porque no construyen una representación mental apropiada del problema. Por ejemplo, en el problema "Juan tenía algunas canicas. Ganó 3 canicas más. Ahora tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?" algunos niños cuando oyen la frase "Juan tenía algunas canicas" se da cuenta que no sabe con exactitud las canicas que tiene, pero no crea un conjunto de partida desconocido para Juan. Después ante la segunda proposición "Ganó 3 canicas más", crea un conjunto con 3 canicas para Juan, pero al no estar representado el conjunto de partida inicial, no se concibe este conjunto como un cambio en el conjunto inicial. La tercera proposición "Ahora tiene 5 canicas" se interpreta como un aumento en el conjunto anterior y por tanto, ante la pregunta "¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?" responden con 3, que es el número que representa el conjunto inicial para el niño. Otros niños asocian las palabras claves "ganar" y "conseguir" con la operación de sumar y en consecuencia realizan una suma.

En cuanto a la influencia de la reformulación de los problemas de Cambio respecto de los errores, es más efectiva para el error AE que para el error FGNE, en primer curso y al contrario en segundo. De Corte y cols. comentan, que esto no es muy sorprendente dado que las reformulaciones consisten en añadir una frase en la cual, la referencia más explícita está hecha a la parte desconocida, esto facilita un proceso apropiado del texto verbal y, en consecuencia, asocian el primer número con el primer sumando.

En los problemas de Combinación, por ejemplo, "Tomás y Ana tienen juntos 9 nueces. Tomás tiene 3 nueces. ¿Cuántas nueces tiene Ana?" también AE y FGNE son los errores más frecuentes en estos problemas y la frecuencia en general era significativamente más baja en la Serie B que en la Serie A. Sin embargo el número total de errores en los problemas de Combinación era considerablemente menor que en los problemas de Cambio, especialmente para el primer curso. Otra diferencia de estos problemas, respecto a los de Cambio y Comparación, es el mayor porcentaje de errores de ejecución (MC). También resaltan estos autores que la reformulación de los problemas no influye positivamente. De Corte y Verschaffel (1987) consideran que los errores se originan porque los niños interpretan la proposición que contiene la palabra "juntos" como "Tomás y Ana tienen 9 nueces" de manera que Tomás tiene 9 nueces y Ana tiene 9 nueces, es decir, se concibe erróneamente como una información relativa a la cantidad de cada persona. También puede explicarse los errores de los problemas de Combinación desde los modelos de Riley y cols. (1983) y de Brians y Larkin (1984), sugiriendo que los errores se producen por una falta de comprensión de la relación parte-todo; como los niños no disponen de este esquema interpretan cada frase separadamente, sin llegar a establecer las relaciones existentes entre los conjuntos.

En cuanto a los problemas de Comparación el tipo de error que supera al resto es (AE) elegir otra operación, representando aproximadamente la mitad del número de errores. La reformulación de los problemas tuvo un fuerte y favorable efecto, confirmando las conclusiones obtenidas en el estudio de Hudson (1983). Estos autores consideran que en los niños de los cursos primero y segundo están poco familiarizados con los problemas de Comparación en su formulación tradicional y es posible que no tengan un esquema bien desarrollado de la comparación, es decir, no tienen una representación adecuada del problema y lo interpretan en el esquema más familiar de Cambio o, pueden adoptar la estrategia de la palabra clave “más que” y asociarla con la suma o, también es posible que el conocimiento de algunos niños sea sólo la operación aritmética más usada: la suma de dos números.

Mayer (1986) presenta un trabajo respecto de los problemas de Comparación. Aparentemente, los errores en la traducción de proposiciones relacionales en ecuaciones pueden darse cuando los estudiantes las consideran como imágenes estáticas de las relaciones entre dos variables, en lugar de considerarlas como una instrucción procesal respecto a cómo convertir un número en otro (Soloway y otros, 1982). Para probar esta idea propusieron una serie de problemas, los resultados mostraron que la notación algebraica puede ser más ambigua y parece ser que el lenguaje procesal de la programación de ordenadores permite una traducción más acertada de los enunciados relacionales.

Los problemas presentados por Mayer contenían tres tipos de proposiciones: *asignaciones*, las cuales asignaban un valor a una variable; *relaciones*, que expresaban una relación cuantitativa entre dos variables y *preguntas*, que solicitaban el valor numérico de una variable. Los resultados indicaron que los estudiantes cometían más errores en el recuerdo de proposiciones relacionales (29%) que en el recuerdo de proposiciones de asignación (9%).

Se cometían tres clases de errores en el recuerdo de proposiciones *errores de omisión*, en los que no se recuerda ninguna parte de la proposición; *errores de especificación*, en los que se cambia una variable de la proposición original por otra diferente en el recuerdo; y *errores de* *inversión*, en los que la forma de la proposición se cambia de una relación a una asignación, o viceversa. Los resultados pusieron de relieve que muchas de las proposiciones relacionales se convierten equivocadamente en proposiciones de asignaciones, pero esto no sucede en casi ninguna de las asignaciones: de 21 casos de conversión, 20 implicaban un cambio de una relación en asignación, y solamente uno de ellos implicaba un cambio de una asignación en una relación. Estos resultados refuerzan la idea de que a algunos estudiantes les falta el conocimiento lingüístico apropiado para poder representar las relaciones, y el uso de una representación de asignación es un sustituto para algunas proposiciones relacionales.

Bermejo, Lago y Rodríguez (1994) en la investigación ya comentada sobre problemas de Comparación, con niños de 1º, 2º y 3º de E. Primaria, realizan el siguiente análisis de errores. Para la tarea de Problemas verbales de Comparación aditivo (PVCA) y la de Problemas verbales de Comparación de magnitudes (PVCM) agrupan en cinco categorías los errores: (1) repetir cantidades, (2) respuesta al azar, (3) sumar las cantidades del enunciado, (4) de ejecución y (5) otros.

Los resultados que obtienen para los PVCM son: la mayoría de los niños de 1º de E.P. (33.3%) tienden a repetir uno de los términos del problema y en menor medida, a sumar las cantidades del enunciado (26.4%). En el grupo de 2º de E.P., el error de sumar las cantidades del enunciado es el error que con más frecuencia comete este grupo (36.1%). El grupo de 3º de E.P., además del error anterior, comete otros propios como es la ejecución de operaciones múltiples en las que se encuentran implicados simultáneamente los conjuntos referentes y relacionales. A juicio de estos autores, la explicación de este error podría ser debido a la interferencia con los aprendizajes aritméticos que se realizan este curso (adición-sustracción combinadas, operaciones asociadas), dando lugar a una representación inapropiada del texto verbal, semejante a la que otros autores (Briars y Larkin, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983) mencionan en relación con los problemas verbales, por ejemplo, de Cambio. Sin embargo, estos problemas suponen un cierto nivel de compresión, cosa que no sucede cuando el error es repetir una de las cantidades, por esto, Bermejo y cols. (1994) sugieren que la formulación de PVCM podría resultar beneficiosa para generar comportamientos adecuados para resolver problemas aritméticos por dos razones: inducen a operar y también a seleccionar la información que será utilizada para resolver el problema. En cuanto a la tarea de Problemas verbales de comparación aditivos (PVCA), en los grupos de 1º y 3º de E.P. los errores consisten sobre todo en repetir cantidades, el 70.8% en Primero, pero en Segundo es sumar cantidades (44.4%) el error más encontrado. La inconsistencia del lenguaje es probablemente -para estos investigadores- la explicación del comportamiento de los niños. Así, la sentencia "¿cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?" conduce a los niños a sumar las canicas de Juan y de Pedro, en vez de aplicar la estrategia "del vendedor", consistente en contar desde el número correspondiente a las canicas de Pedro hasta alcanzar el número correspondiente a las canicas de Juan. Es la presencia del término "más" lo que lleva a los niños a sumar, tal como se ha puesto de manifiesto en otros estudios (De Corte y Verschaffel, 1985; Sophian, 1992).

Cummins y cols. (1988) utilizando la técnica de recordar problemas verbales, antes o después de resolverlos, aporta los siguientes tipos de comprensiones erróneas para problemas simples de estructura aditiva correspondientes a las categorías de cambio, combinación y comparación.

1 *Transformaciones que conservan la estructura (SP).*

Esta categoría supone el 12% del total de los hechos recordados. El problema recordado tiene la misma estructura pero es expresado con otras palabras. Un problema de Comparación 5, de aumento de referente desconocido (sustracción) como, María tiene 9 canicas. Ella tiene 4 más que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?, es transformado en un problema de Comparación 4, de disminución de referido desconocido (sustracción) como el siguiente: María tiene 9 canicas, Juan tiene 4 menos que María. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

2. *Transformaciones que alteran la estructura (SV).*

Esta categoría supone el 12% del total de los hechos recordados. Los problemas son transformados en otros problemas válidos, pero las transformaciones violan las relaciones matemáticas en el problema original. El mismo problema anterior, Comparación 5 (sustracción), es transformado en María tiene 9 canicas, Juan tiene 4 más que María. ¿Cuántas canicas tiene Juan? que es Comparación 3 (adición)

3. *Recordar un problema sin sentido (NP).*

Comprende el 8% de los hechos recordados. Se recuerdan problemas sin sentido porque no requieren cálculo alguno y solo se pregunta por uno de los números dados en el problema. Así: María tiene 5 canicas, Juan tiene 4 canicas. ¿Cuántas tiene (Juan o María)? O también: María tiene algunas canicas, Juan le da tres canicas más, ahora María tiene 7 canicas, ¿Cuántas canicas tiene María ahora?

4. *Transformaciones que contiene doble referencia al conjunto total (2S).*

Es similar al anterior pero se pregunta por el conjunto total, además de estar éste expresado en el cuerpo del problema: María y Juan tienen 5 canicas en total. María tiene 3 canicas, ¿Cuántas canicas tienen en total? Supone el 4% de todos los hechos recordados.

5. *No se especifica el conjunto total (OS).*

Se ha observado en un 6% de todos los hechos. Ejemplo: María tiene algunas canicas. Juan le da 3 más. ¿Cuántas tenía María al principio? Es más una falta de memoria o de recuerdo que una transformación, habría olvidado “Ahora María tiene 7 canicas”

6. *Otros fallos (OTH)*

Comprende el 13% de todos los hechos. Estarían los errores que no corresponden a las categorías anteriores, por ejemplo, cuando no recuerda el problema o el recuerdo es confuso.

Cummins y cols. (1988, p. 416), señala como interesante la asociación de las categorías descritas de errores con la estructura de los problemas. Así, cuando se produce un fallo de comprensión clasificable en los problemas de Comparación tiende a estar comprendido con más frecuencia en dos categorías, la categoría de transformaciones cambiando la estructura (SV-

38%), y la categoría de problemas sin sentido (NP-31%). En los problemas de Cambio tienden a las mismas categorías, con los porcentajes (SV-40%) y (NP-20%). Los problemas de Combinación, por otra parte, tienden a la categoría de transformaciones de doble referencia al conjunto total (2S-33%).

También refleja los posibles errores que los niños cometen cuando solucionan los problemas:

·Solución correcta (55%)

·Errores de operación (8%), el niño selecciona inadecuadamente la operación con la que resuelve el problema, sumar en los casos que tiene que restar y al contrario.

·Errores de contestar con un número de los dados en el problema (18%).

·Errores aritméticos (11%).

·Errores inclasificables (8%).

También predicen que hay una relación sistemática entre la falta de comprensión de la historia del problema y los errores de solución, manteniendo la predicción de que los errores son respuestas correctas a historias mal comprendidas. Las transformaciones que conservan la estructura (SP) se asocian con frecuencia con respuestas correctas (64%) y con errores aritméticos (25%). Las transformaciones que alteran la estructura (VS) están relacionadas con errores de operación (42%). Las transformaciones que tiene tienen que ver con problemas sin sentido (NP) se unen a errores de repetir una cantidad dada en el problema (69%). Las transformaciones que repiten dos veces el conjunto total (2S) originan errores de repetición de cantidades (43%) y errores de operación (16%) y las transformaciones de no recordar el conjunto total (OS) se asocian con soluciones correctas (61%).

En esta clasificación de errores podemos considerar algunas puntualizaciones como son:

1. En ella no se tiene en cuenta la fase en la que se produce el error. El error de comprensión se puede producir en la fase de traducción, en la de integración, o producto de ambas, según la terminología de Mayer.

2. Algunos de los tipos de errores considerados son propios de la estructura semántica de los problemas, pero otros lo son del tipo de técnica empleada, en este caso una tarea de recuerdo. Con otro tipo de técnicas es posible que no aparezcan.

10. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

En términos generales el vocablo *instrucción* se emplea como sinónimo de *enseñanza* aunque con un matiz importante: se trata de la enseñanza de algo específico y en situaciones o contextos igualmente específicos y definidos con claridad. Algunos autores opinan que la instrucción está constituida por actividades mediante las cuales se induce al conocimiento, oponiendo este concepto al de entrenamiento, que consiste en el desarrollo de actividades que modelan destrezas (Smith, 1987). Para Genovard y Gotzens (1990, p. 21) la idea de instrucción tiene que ver con el éxito del aprendizaje y consideran la instrucción como *"enseñanza impartida por unos sujetos determinados (profesores), de unos contenidos específicos (curriculum), que deben ser aprendidos por sujetos también concretos (alumnos) y en un determinado contexto"* Hay también en el concepto de instrucción un proceso interactivo, proceso que se desarrolla en un complejo entramado de variables (profesor, alumno, contenido, método de aprendizaje, tiempo dedicado, entorno físico, etc.) cuyas interacciones definen las características del propio proceso y marcan sus posibilidades de éxito.

En este mismo sentido, Bermejo (1996) señala que la intervención sobre el aprendiz en el ámbito de las matemáticas se puede focalizar en torno a tres polos, estrechamente relacionados y no excluyentes: 1) el sujeto que aprende; 2) los contenidos que aprende; y 3) el sujeto aprendiendo unos contenidos específicos. En el primer caso la intervención se orienta a mejorar el funcionamiento de las habilidades cognitivas y metacognitivas. Es una forma demasiado general y, por tanto, menos eficaz; pero tal vez sea la más usada. El segundo eje se ocuparía de los contenidos, limitándose a seleccionar y ordenar convenientemente los contenidos curriculares. El tercer foco se centraría en torno al sujeto que aprende unos determinados contenidos; es decir, intervendría en el proceso de un aprendizaje específico, enfocado directamente a las dificultades que pueda plantear un aprendizaje de un contenido concreto que, en nuestro caso, serían los problemas verbales y los algoritmos correspondientes. Bermejo (1996) considera que esta tercera opción resulta más laboriosa y exigente, pero también más eficaz, y apuesta por su implantación progresiva en un futuro próximo en nuestra enseñanza de las matemáticas.

Para De Corte (1993) existe un elevado consenso, con respecto a las principales categorías de aptitudes que subyacen a la resolución competente de problemas matemáticos; estas categorías son:

1) Conocimiento de ámbito específico: los sujetos expertos en la resolución de problemas poseen un conocimiento base amplio, bien organizado y de acceso flexible (Chi, Glaser y Farr, 1988). Sin embargo, De Corte y Verschaffel (1987) han observado que el conocimiento conceptual en el ámbito específico afecta seriamente a los procesos de solución, incluso de los niños pequeños, de los problemas aritméticos verbales que implican una única operación. En un estudio llevado a cabo con 30 niños de primer curso con problemas verbales de diferente estructura semántica (cambio, combinación y comparación), que pueden ser solucionados con la misma operación aritmética, estos autores concluyen, a partir de los resultados obtenidos, que en la resolución de problemas verbales sencillos se requiere algo más que dominar las operaciones aritméticas básicas de suma y resta. Además, los niños deben disponer del conocimiento conceptual necesario

para comprender y representar el problema adecuadamente. Más específicamente, tendrían que haber adquirido los esquemas de los problemas de cambio, combinación y comparación, siendo estos esquemas constructos teóricos que describen el contenido y formato de un cuerpo organizado de conocimientos almacenados en la memoria. En este caso concreto, habrán de hacer referencia al conocimiento de la estructura semántica de los problemas verbales sencillos.

2) Métodos heurísticos: han sido puestos de relieve por Polya (1965) y son estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y transformación del problema. Algunos ejemplos de métodos heurísticos son: analizar cuidadosamente un problema, especificando los elementos conocidos y desconocidos, descomponerlo en submetas, encontrar otro problema semejante más fácil o análogo, visualizarlo empleando un gráfico o diagrama, trabajar hacia atrás partiendo de la meta o solución perseguida, excluir provisionalmente una de las imposiciones de la solución, para incluirla posteriormente. Una importante cualidad de los heurísticos es su carácter general, el poder ser aplicados en múltiples problemas dentro del mismo ámbito e incluso entre diversos ámbitos. No obstante, la evidencia disponible revela que dicha transferencia no ocurre, ni espontánea, ni fácilmente (Nickerson, Perkins y Smith, 1985).

3) Conocimiento y habilidades metacognitivas: autores del ámbito del aprendizaje y de la instrucción, en general, y de la educación de las matemáticas en particular (p.e. Garofalo y Lester, 1985), se muestran de acuerdo con la creencia de que la metacognición comporta dos grandes aspectos: a) el conocimiento relativo al propio funcionamiento cognitivo (esto implica el conocimiento que tienen los sujetos acerca de la fortaleza, la

debilidad y los límites de sus capacidades cognitivas) y b) las actividades vinculadas al autocontrol de los procesos cognitivos, que pueden ser definidas como una estructura de control ejecutivo, encargada de organizar y dirigir los procesos de aprendizaje y pensamiento; por tanto, abarcan habilidades tales como la planificación del proceso de solución, la monitorización del proceso de solución una vez puesto en marcha, su evaluación, la detección/sustitución de las partes erróneas de una solución y la reflexión de las propias actividades.

4) Componentes afectivos: McLeod (1989) afirma que los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas son particularmente susceptibles al influjo del ámbito afectivo. Considera igualmente que las creencias, actitudes y emociones reflejan el rango total de reacciones afectivas implicadas en el aprendizaje de las matemáticas. Hay dos categorías de creencias: a) creencias sobre las mismas matemáticas, en las que intervienen poco los afectos; en este sentido los alumnos creen, en general, que las matemáticas son importantes, difíciles y basadas en reglas; y b) creencias sobre los alumnos en relación con las matemáticas, que dependerán más de los afectos, relacionadas con la confianza o el autoconcepto, por ejemplo. En cuanto a las actitudes, McLeod (1989) las define como respuestas afectivas que implican sentimientos positivos o negativos de intensidad moderada y cierta estabilidad.

A continuación analizaremos algunos modelos de instrucción. En primer lugar, se expondrán programas generales para el desarrollo de entornos de aprendizaje consistente, que implanten en los alumnos los procesos necesarios para adquirir aptitudes de resolución de problemas, como son intervenciones orientadas a los procesos metacognitivos o sobre rasgos generales del aprendizaje. En segundo lugar, los modelos de intervención serán sobre contenidos específicos de matemáticas, dirigidos a la comprensión de los problemas verbales y al significado de los algoritmos de sumar y restar.

10.1. PROGRAMAS GENERALES DE INTERVENCIÓN

10.1.1. LA ENSEÑANZA DE HEURÍSTICOS Y DE PROCESOS METACOGNITIVOS

Los trabajos de Schoenfeld (1985, 1987, 1992) tiene como punto de partida el hallazgo, bien constatado, de que la utilización de un conjunto de heurísticos, así como una estrategia de control para su aplicación, constituye una característica esencial en la resolución de problemas por los expertos. También observó que, en el 60% de alumnos que resolvía problemas no familiares, estaban ausentes las actividades de autorregulación (características de los comportamientos de los expertos); por el contrario, la conducta típica en estos casos consistía en leer el problema, decidir hacer algo y mantener esa decisión sin considerar posibles alternativas. Schoenfeld desarrolló un método de enseñanza centrándose en los aspectos estratégicos de la resolución de problemas, que comprende cinco estadios: 1) análisis orientado a la comprensión del problema, mediante la construcción de un representación adecuada; 2) diseño de un plan global de solución; 3) exploración encaminada a transformar el problema en una tarea rutinaria; este estadio constituye el núcleo heurístico de la estrategia; 4) ejecución o puesta en marcha del plan de solución; y 5) verificación de la solución. Schoenfeld

(1987), a este respecto, señala cuatro tipos de intervención que pueden ayudar a desarrollar los diferentes aspectos metacognitivos:

1) Parte de que es más fácil analizar un comportamiento en otra persona que en uno mismo, así como constatar después que ese análisis puede aplicarse a uno mismo. Para ello, se presenta en vídeo el proceso que siguen otros alumnos para solucionar un problema determinado. Tras la discusión de lo que han visto en el vídeo, los alumnos son más conscientes de los aspectos metacognitivos; es decir, este sencillo procedimiento ha facilitado un cierto avance en el desarrollo metacognitivo de los alumnos.

2) El modelado es ampliamente utilizado para demostrar cómo un experto selecciona y aplica los métodos heurísticos. Para ello, el profesor presenta todo el proceso de resolución de un problema: tentativas para identificar el problema, propuestas razonables que podrían llevar a la solución del problema, pertinencia del progreso realizado, etc., para, una vez conseguida una solución, preguntarse si la misma es o no correcta. Esta técnica puede ser válida en tanto en cuanto el profesor no se limite a demostrar taxativamente la rectitud del procedimiento que conduce a la respuesta verdadera, sino que, más bien, se encamine a resaltar los aspectos metacognitivos mencionados: definición del problema, planificación, autorregulación a lo largo de la resolución de la tarea, etc.

3) Un tercer modo de intervenir consiste en debatir toda la clase un problema, desempeñando el profesor el rol de "control". Los propios alumnos tienen la oportunidad de aplicar estos métodos bajo la ayuda, sin dirigir, del maestro que les anima a utilizar ciertos heurísticos, les ofrece indicios, les proporciona retroalimentación inmediata, para que hagan el máximo que ellos solos puedan y les incita a que reflexionen sobre lo que hacen. Se trata de que

los alumnos propongan sugerencias sobre cómo solucionar un problema, empezando por la comprensión del mismo. Los alumnos analizan estas sugerencias, desechando aquellas que no son acertadas. Después de cinco minutos aproximadamente, el profesor pregunta si el procedimiento que llevan es el adecuado: si la respuesta es positiva, continúan trabajando en el mismo sentido; de lo contrario, se propone el replantearse el procedimiento, pidiendo sugerencias alternativas. Este tipo de intervención es apta sobre todo para mejorar la auto-regulación, aunque el contexto es adecuado también para debatir en torno a creencias erróneas sobre las matemáticas.

4) Finalmente, la cuarta técnica consiste en trabajar con grupos pequeños. El tutor plantea regularmente tres preguntas: 1ª) ¿Qué estas haciendo exactamente? (¿Puedes describirlo con precisión?) 2ª) ¿Por qué estás haciendo esto? (¿Cómo encaja en la solución?) y 3ª) ¿Cómo te ayuda? (¿Qué harás con el resultado cuando lo obtengas?) Se hacen estas preguntas a los alumnos al poco tiempo de iniciado el curso. Generalmente, no saben qué responder (suele encontrarse mucha hostilidad y resistencia por parte de los alumnos). Cuando éstos comprenden que las preguntas seguirán, empiezan a defenderse comentando las respuestas por anticipado. Al terminar el curso, el análisis de las preguntas ya se ha convertido en algo habitual para ellos. La formulación de estas preguntas cumple un doble propósito: anima a los alumnos a articular sus estrategias de resolución de problemas y también a reflexionar sobre tales actividades. El último de los objetivos de Schoenfeld consiste en que los alumnos se planteen a sí mismos espontáneamente las tres cuestiones y, al hacerlo, regulen y monitoricen sus propios procesos de pensamiento. Concluyendo, Schoenfeld encuentra resultados positivos en el aprendizaje de las matemáticas con estas intervenciones especialmente en el ámbito metacognitivo. Teóricamente explica este proceso basándose en las

“zona de desarrollo próximo” de Vygotsky y en la necesidad de la asistencia del adulto.

10.1.2. <u>INTERVENCIÓN EN EL ENTORNO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE</u>

De Corte (1993) señala que el análisis de los estudios sobre intervención permite destacar algunos rasgos generales, que pueden considerarse como factores que facilitan el aprendizaje.

En primer lugar, se insiste en la conveniencia de centrar la instrucción en la comprensión y construcción del significado de los contenidos, contrarrestando el énfasis puesto frecuentemente hasta ahora en la enseñanza de la sintaxis y de los algoritmos. Así, por ejemplo, los problemas verbales han sido considerados en el pasado como simple ejercicio o práctica de los algoritmos, mientras que actualmente se hace hincapié en que los problemas verbales deben ser el centro de la enseñanza, relegando el algoritmo a un segundo plano, como un modo de representar la operación ejecutada para resolver los problemas verbales.

En segundo lugar, las estrategias metacognitivas y los métodos heurístico son enseñados y aprendidos dentro de un contexto de ámbito específico.

En tercer lugar, el punto de partida está marcado por la naturaleza activa y constructiva de los procesos de aprendizaje. Sin embargo, se debe tener en cuenta la intervención y dirección de los maestros, de los iguales y de los medios educativos en la construcción del conocimiento y en la adquisición de habilidades del alumno. Este principio básico, por tanto, tiene en cuenta en el diseño de la instrucción el conocimiento y las habilidades informales de los alumnos.

En cuarto lugar, el aprendizaje se asienta mejor en contextos y tareas que sean significativas para los alumnos y que faciliten la interacción social, en general, y la resolución de problemas en pequeños grupos, en particular.

Desde una perspectiva similar, Collins, Brown y Newman (1989) presentan un modelo cognitivo de instrucción, que puede servir de marco para diseñar entornos de aprendizaje. En este modelo podemos diferenciar cuatro dimensiones: contenido, métodos de enseñanza, secuenciación de las tareas de aprendizaje y contexto social.

1. En cuanto al contenido, se hace especial hincapié en la adquisición de todas las estrategias de conocimiento dominadas y aplicadas por los expertos, es decir: el conocimiento de ámbito especifico, los métodos heurísticos, las estrategias de control y las estrategias de aprendizaje.

2. Métodos de enseñanza. Para ayudar al alumno a adquirir e integrar las diferentes categorías de conocimientos y habilidades cognitivas y metacognitivas el maestro puede aplicar distintos métodos, como son: el modelado, éste conlleva la observación, por parte del alumno, de un experto que está realizando una determinada tarea; esto le permite construir un modelo mental apropiado de las actividades que se requieren para una determinada ejecución. El adiestramiento es la observación que el maestro realiza del alumno durante la realización de una tarea, para proporcionarle indicios y retroalimentación a fin de mejorar su ejecución. El andamiaje consiste en proporcionar apoyo directo al alumno mientras está llevando a cabo su tarea. Otros métodos se orientan especialmente a la toma de

conciencia de las propias actividades cognitivas y metacognitivas, bien especificando o explicitando el conocimiento y procedimientos de resolución (articulación), bien comparando sus propias estrategias con las empleadas por otros alumnos o los expertos (reflexión). Por último, la exploración pretende incrementar sobre todo el descubrimiento de nuevos problemas y la autonomía del propio alumno.

3. La secuenciación de las áreas de aprendizaje supone la extensión progresiva de los conocimientos de ámbito específico, así como una mayor diversidad de habilidades cognitivas y metacognitivas (complejidad y diversidad progresivas). Igualmente, se insiste en la prioridad de las habilidades globales con respecto a las habilidades locales o parciales.

4. Finalmente, el modelo contextual de Collins y otros (1989) resalta la importancia de los factores sociales en el aprendizaje. De aquí que recojan algunas directrices que favorezcan la formación de un entorno social apropiado para el aprendizaje. Así, se habla de un aprendizaje "situado" que refleje los distintos usos que podemos dar a un conocimiento determinado en el futuro. De organizar situaciones para que entren en contacto y puedan observar el comportamiento de los expertos. Igualmente, el aprendizaje cooperativo mediante el trabajo en grupos pequeños y el incremento de la motivación intrínseca pueden mejorar el rendimiento de los procesos adquisitivos del alumno.

10.2. PROGRAMAS DE INTERVENCIÓN SOBRE CONTENIDOS ESPECÍFICOS.

A continuación analizaremos los programas de intervención sobre contenidos específicos, concretándolos, por un lado, en los métodos para una mejor comprensión de los problemas verbales y, por otro, en los que se ocupan de los algoritmos de sumar y restar. En cuanto a los primeros, se presentan los métodos que intentan enseñar a los niños la estructura semántica y representación gráfica de los distintos problemas -cambio, combinación y comparación- y aquellos que, partiendo también del aprendizaje de los problemas verbales, centran el proceso de intervención en el profesor desde una perspectiva constructivista. Respecto a los algoritmos de sumar y restar, los trabajos sobre el uso de materiales concretos para la enseñanza de la suma y la resta de Resnick y Omanson (1987) y los de Fuson (1992); Fuson y Briard (1990) completan este apartado.

10.2.1. COMPRESIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES

10.2.1.1. Estructura semántica y representación gráfica

Ya hemos constatado que los diferentes modelos de simulación (Briars y Larkin, 1984; Kintsch y Greeno, 1985; Riley, Greeno y Heller, 1983) señalan la gran importancia que la fase de representación del problema tiene para encontrar la estrategia adecuada y aplicarla para llegar a la solución del mismo. Es, por tanto, consecuencia lógica que diversos autores hayan diseñado procesos de instrucción para enseñar y facilitar a los niños la representación correspondiente a la estructura semántica de los distintos problemas. Algunos autores consideran sólo la instrucción encaminada a la enseñanza de un único tipo de estructura, bien basándose en una estructura como la de parte-todo para todos los tipos de problemas o bien, enseñando la estructura de un sólo tipo de problemas, los que tienen mayor dificultad: los de Comparación. Otros fundamentan su instrucción enseñando a representar un dibujo esquemático para cada uno de los tres tipos de problemas (Cambio, Combinación y Comparación). Entre los primeros se encuentran:

Rathmell (1986) centra la instrucción en la discusión de la estructura parte-todo para todos los tipos de problemas. El trabajo es con niños de 1º y 2º Curso. Los resultados ponen de manifiesto que después de la instrucción los niños eran capaces de resolver los problemas, incluidos los más difíciles de Cambio y Comparación.

Lewis (1989) utiliza la instrucción fundamentada en un sólo tipo de problemas. Lleva a cabo un programa de instrucción para resolver los problemas de Comparación, con lenguaje inconsistente, de acuerdo con su tesis de inconsistencia del lenguaje. Se enseña en primer lugar a distinguir los distintos tipos de sentencias que aparecen en los problemas de comparación y a las que ya hemos hecho referencia. Los problemas presentados por Mayer contenían tres tipos de proposiciones: *asignaciones*, las cuales asignaban un valor a una variable; *relaciones*, que expresaban una relación cuantitativa entre dos variables y *preguntas*, que solicitaban el valor numérico de una variable. Cuando los alumnos eran capaces de identificar las sentencias relacionales, se les enseñaba a dibujar un diagrama lineal-numérico en el que integraban las distintas frases del problema. La finalidad es que con el apoyo externo del diagrama representara la relación que existe entre los elementos del problema para después encontrar la solución.

Pasos del diagrama:

1- Dibuja una línea numérica y coloca la variable y el valor de la frase de asignación en el medio de la línea.

2- Coloca la variable no conocida a un lado del centro.

3- Compara tu representación con la información de la sentencia relacional; si coincide continúa, y si no inténtalo de nuevo al otro lado.

4- Traslada tu representación a una operación. Si la variable no conocida está a la derecha del centro, entonces la operación es de incremento, como la suma. Si la variable no conocida está a la izquierda la operación es de decremento, como la resta.

La finalidad de la instrucción es que los alumnos no cometan los errores de inversión, que hemos visto que se producían en los problemas de lenguaje inconsistente

El entrenamiento fue como sigue:

Noventa y seis alumnos de un curso previo a estudiantes de Psicología fueron elegidos de una muestra de trescientos en la que todos cometían errores de inversión. Se hicieron tres grupos:

Grupo *diagrama* que recibió entrenamiento en traslación, donde se definían los tres tipos de sentencias de los problemas de comparación (asignación, relación y preguntas) y en integración, con el método de diagrama lineal que hemos descrito antes en el que integraban la información de las sentencias de asignación y de relación.

Grupo *frases* que fue entrenado solamente en traslación.

Grupo *control* que no recibió ningún tipo de entrenamiento.

Los tres grupos realizaron los mismos problemas y los resultados indicaron que el grupo diagrama cometió menos errores de inversión de forma significativa que los otros dos grupos. Además, este grupo tuvo más éxito cuando realizó posteriormente otros problemas más complejos, por lo que las conclusiones fueron que los que recibían instrucción completa no solo reconocen la estructura de las sentencias relacionales, sino que también han aprendido una técnica para comprender esta estructura. El grupo que fue entrenado sólo para diferenciar las distintas sentencias sus mejoras de comprensión conceptual de los problemas de comparación fueron similares a las del grupo control.

Otros autores enseñan a representar los tres tipos de problemas. De Corte (1993) recoge una investigación propia (De Corte y Verschaffel 1985) llevada a cabo con alumnos de primer grado para la enseñanza de problemas elementales de suma y resta, partiendo, por un lado, de un análisis crítico de la práctica educativa actual y, por otro, del conocimiento disponible en esto momentos acerca de los procesos de solución empleados por los niños en dichos problemas.

Las principales características del programa de instrucción seguido son:

1- Los problemas verbales se presentan antes de introducir los correspondientes algoritmos, para promover su comprensión y para proporcionar un significado más profundo de estos algoritmos. Esto contrasta con la práctica actual en la que los niños tienen que aprender primero los algoritmos formales y aplicarlos después para manejar diferentes clases de situaciones de los problemas.

2- El aprendizaje de resolución de los problemas verbales que constituyen el objetivo se explica y practica utilizando todo el rango de estructuras semánticas básicas diferentes (Cambio, Combinación y Comparación). Este planteamiento contrasta también con la falta de variedad de los mismos en los actuales libros de texto.

3- Cuando los niños aprenden a representar y a resolver problemas verbales con elementos manipulativos, están siendo estimulados a construir representaciones materiales equiparables a la estructura semántica. Este principio deriva del hallazgo de que las estrategias de solución informales de los niños tienden a modelar la estructura subyacente del problema.

4- Cuando los niños aprenden a representar y a resolver problemas verbales empleando diagramas, se les está enseñando diferentes modelos para representar las categorías principales de problemas verbales: un diagrama de flechas dinámico para los problemas de Cambio, un diagrama de parte-todo para los problemas de Combinación y un diagrama con dos barras equivalentes para los problemas de Comparación. La idea que subyace en este principio es la misma que en el anterior y deriva nuevamente de la práctica actual, en la que se enseña a los niños a resolver todos los tipos de problemas verbales principalmente con una, siempre la misma, clase de representación visual.

Los resultados del programa llevado a cabo durante un año escolar y evaluado empleando el diseño pretest-postest con grupo de control fue:

Resultados cuantitativos. Hay efecto significativo y positivo del programa experimental sobre la capacidad de los niños para representar y resolver problemas verbales sencillos: el grupo experimental mostró casi el doble de progreso entre el pretest y el postest que el grupo control.

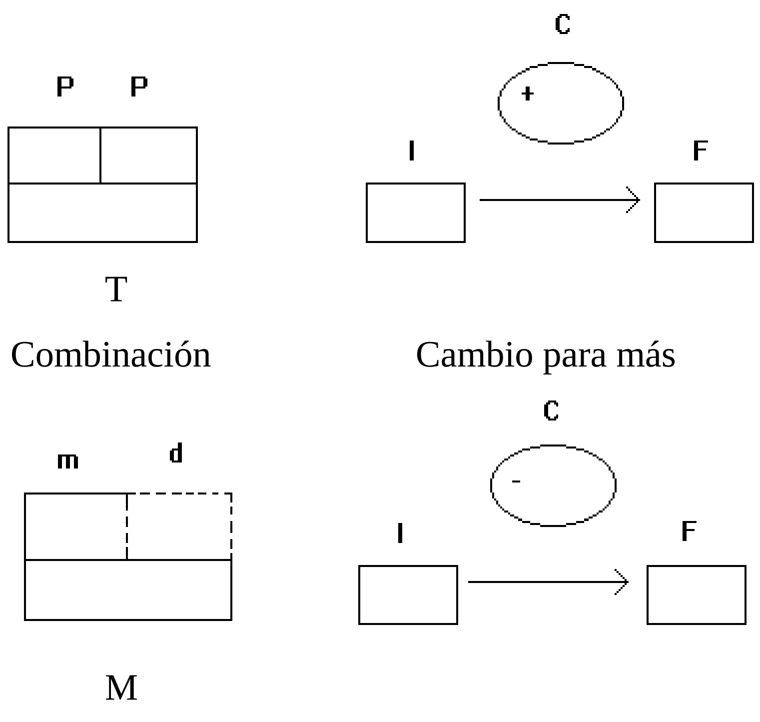
El análisis cualitativo de los procesos de solución de los niños que respondieron correctamente puso de manifiesto que, al aplicar el postest, ambos grupos abordaron los problemas de modo diferente. La mayoría de los niños del grupo control sólo emplearon un diagrama para representar todos los tipos de problemas, concretamente un diagrama de Venn. Por el contrario, los niños del grupo experimental aplicaron espontáneamente diferentes diagramas para representar los distintos tipos de problemas.

El trabajo de Willis y Fuson (1988) se fundamenta en enseñar a representar los tres tipos de problemas: Cambio, Combinación y Comparación mediante el uso de dibujos esquemáticos. Presenta un esquema para cada tipo de problema (figura 10.2.1):

Problemas de Combinación (Put-Together). Es el esquema parte-parte-todo, usado por Romberg, Harvey, Moser y Montgomery (1974).

FIGURA 10.2.1

Esquema de los problemas de Cambio, Combinación y Comparación usados en el estudio de Willis y Fuson (1988)



Comparación   Cambio para menos

Problemas de Cambio, distingue entre Cambio para tener más y Cambio para tener menos. El dibujo esquemático es el mismo, con la diferencia del signo + / -, según sea para más o para menos en el cambio. Incluye un estado inicial, un cambio y un estado final.

Problemas de Comparación. El esquema contiene una cantidad mayor y una menor colocadas una al lado de otra para facilitar la comparación. La diferencia se representa por una línea discontinua porque no es una entidad físicamente separada de la estructura de comparación.

La instrucción se realiza de la forma siguiente:

A los niños se le enseña una categoría de problema y la representación esquemática de esa categoría. (El orden seguido fue: problemas de Combinación, de Cambio, de Comparación y mixtos), después, rellenan con los datos del problema el esquema correspondiente. Practican entre dos y cuatro días sobre la categoría correspondiente a la sesión de aprendizaje. Los pasos a seguir son:

El niño identifica el problema como correspondiente a una categoría, por ejemplo, en el problema:

Juan tiene 814 juguetes. Le da algunos juguetes a Bill. Ahora Juan tiene 342 juguetes. ¿Cuantos juguetes le dio Jon a Bill?

I   C   F

y escribe las correspondientes señales verbales (*inicial (I), cambio (C) y final(F)*) del problema en su lugar correspondiente. A continuación realiza el esquema que identifica la categoría semántica de Cambio y lo rellena con los números/datos del problema. Por último analiza las relaciones entre los números puestos en el esquema y decide la operación que tiene que realizar para hallar el término desconocido (vacío) del dibujo.

Dos son los fines que se plantean los autores:

Uno. Determinar el tipo de dificultades que los niños presentan al resolver los problemas. Si la dificultad está en la fase de representación, los errores se darían en el uso inapropiado de los dibujos esquemáticos. Si está en la comprensión de las relaciones específicas entre las tres cantidades, los errores se reflejarían en la incorrecta ubicación de los números en el esquema. Si se debe a la elección de la estrategia de solución, los niños eligirían sumar o restar de manera equivocada, y si, finalmente, los problemas se dan en la puesta en marcha de las estrategias cometerían errores de ejecución al resolver el algoritmo de suma o resta.

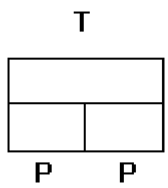
Dos. Verificar si los niños utilizan el esquema parte-parte-todo para representar cualquier tipo de problema como propone Resnick (1983) o si sólo utilizan esta estructura para los problemas más difíciles de Cambio, como mantienen Kintsch y Greeno (1985); Riley y cols.(1983); Wolters (1983).

Los resultados obtenidos confirman que los niños aprenden a utilizar todos los dibujos esquemáticos, de manera que pueden distinguir los diferentes tipos de problemas eligiendo el dibujo correspondiente para cada categoría semántica. Se registra una alta correlación entre colocar correctamente los números/datos en el esquema y seleccionar adecuadamente la estrategia de solución. Sin embargo, más del 50% de los niños usan el esquema de Comparación cuando tienen que resolver problemas de Combinación con la incógnita en una de las partes.

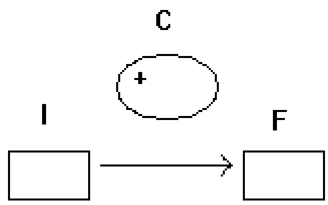
Willis y Fuson, proponen dos mejoras en los dibujos: en el esquema que representa a los problemas de Combinación invierten la posición de los recuadros del total y de las partes (figura 10.2.2.), de esta forma hacen que el dibujo tenga la misma relación espacial que el algoritmo de la resta. Para el dibujo esquemático de los problemas de Comparación, sugieren colocar en la parte de arriba el conjunto mayor y también la separación de las partes del elemento menor y de la diferencia del recuadro que representa al conjunto mayor, con la finalidad de que la discriminación respecto del dibujo de los problemas de Combinación sea mayor.

FIGURA 10.2.2

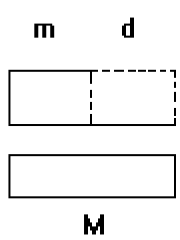
Esquemas modificados para los problemas de Cambio, Combinación y Comparación, usados en el estudio de Willis y Fuson (1988)



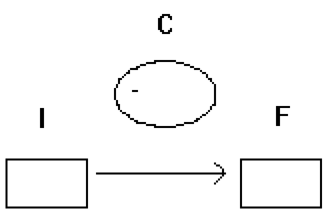
Combinación



Cambio para más



Comparación



Cambio para menos

Los datos no apoyan la tesis de Resnick de utilizar el esquema parte-parte-todo para todos los tipos de problemas. Cuando los alumnos seleccionaban un dibujo con la estructura de Combinación para poner un problema de Cambio o Comparación elegían con menos frecuencia una estrategia de solución correcta. Por tanto parece ser más efectivo utilizar tres diferentes tipos de esquemas que utilizar una sola estructura. Por tanto, podemos concluir que el uso de esquemas facilitan la comprensión de los problemas verbales porque ayudan a establecer las relaciones entre los términos del problema y a seleccionar la estrategia de solución adecuada.

Otro programa de instrucción es el llevado a cabo por Orrantía, Morán y Gracia (1997), utilizan la instrucción como un medio para evaluar la ejecución en un contenido de tipo procedimental. Su programa de instrucción consta de diversas ayudas que relacionan con los componentes del problema, los pasos que siguen son: uno, ayudas textuales (reescritura), no se da directamente al alumno sino que se reescribe el problema, con la finalidad de hacer explícita la relación entre conjuntos; dos, representación lingüística del problema, consiste en articular el problema en función de lo que se conoce y lo que no se conoce, con la finalidad de enfrentar al alumno a una representación del problema; tres, representación figurativa del problema, enseñan al alumno los distintos esquemas de cada uno de los tipos de problemas: cambio. combinación y comparación, apoyándose en los trabajos de Willis y Fuson (1988); cuatro, razonamiento, se relaciona con la decisión que hay que tomar sobre la operación que se debe ejecutar; y cinco, revisión/evaluación/supervisión, ayudas de carácter metacognitivo, con la función de que el alumno se autorregule en la aplicación de todo el proceso de resolución de problemas.

La ventaja de este tipo de programas es que se puede determinar en que fase un alumno presenta dificultades para resolver problemas y así poder diseñar la ayuda concreta que un alumno en particular necesita.

Más recientemente Aguilar y Navarro (2000), han elaborado y aplicado un Programa instruccional de Resolución de Problemas Aritméticos Verbales de una sola operación, de estructura aditiva y estructura multiplicativa, con la finalidad de ofrecer al alumno las estrategias necesarias para la resolución adecuada y comprobar en qué medida la aplicación de este programa a un grupo, tiene efectos positivos y diferencias significativas respecto de otro grupo que sigue la práctica habitual. Los sujetos del grupo experimental recibieron un total de 25 sesiones de entrenamiento, los procesos llevados acabo en dichas sesiones fueron:

Fase manipulativa: 1. Pensando en el problema sin números.
2. Representando la situación con fichas.
3. Resolviendo el problema.

Fase de diagramas: 1. Elección del diagrama adecuado.
2. Situación de la incógnita en el diagrama del problema.

Fase simbólica: 1. Elegir la operación adecuada y su representación simbólica.
2. Comprobar que la solución es adecuada.

El esquema general de trabajo que emplearon en cada sesión es el siguiente:

a) Introducción por parte del instructor de los componentes manipulativos.

b) Explicación de los componentes gráficos y simbólicos.

c) Realización por parte de los sujetos de los problemas.

d) Corrección de la tarea.

García y Navarro (2000) llegan a las conclusiones siguientes:

En los problemas de Combinación, encuentran sólo diferencias significativas en Combinación 2, diferencias que explican estos autores por “teniendo en cuenta que los problemas de Combinación 1 son problemas muy fáciles, es lógico que las diferencias sólo se presenten en Combinación 2 (encontrar una parte en un problema que presenta el todo y otra parte)”.

En los problemas de Cambio, los resultados obtenidos dan a entender que a medida que aumenta la dificultad de los problemas, el entrenamiento es más útil para los alumnos.

En los problemas de Comparación, son los tipos de problemas en los que existe alguna inconsistencia en el lenguaje de su enunciado donde hay diferencias significativas entre los dos grupos. Los otros problemas de Comparación (CM2, CM3 y CM4) que se resuelven con las operaciones que se indican en sus palabras-claves no presentan diferencias significativas. García y Navarro (2000) concluyen que “el enunciado del problema parece incidir en la resolución del mismo. Así, las palabras claves orientan las respuestas del niño, haciendo una resolución más intuitiva. El entrenamiento, en cambio, parece que interviene en elementos más abstractos del proceso de resolución. Influiría sobre los procesos representativos que hacen falta para solucionar el problema de forma correcta”.

10.2.1.2. <u>Modelos de intervención centrados en el Profesor</u>

El proyecto de "Instrucción guiada cognitivamente"

Carpenter y colaboradores (Carpenter y Fennema, 1992; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef, 1989; Carpenter y Peterson, 1988; Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson, 1996; Fennema, Carpenter y Lamon, 1991; Peterson, Carpenter y Fennema, 1989) están llevando a cabo un proyecto de instrucción-intervención centrado en el profesor. Parten de la idea de que la enseñanza es como un proceso de resolución de problemas y que el rendimiento de los alumnos depende del apoyo del profesor a lo largo de este proceso. Consecuencia de esta idea es la función y el papel importante asignado al profesor y la necesidad de una formación de acuerdo con los avances de la investigación cognitiva. Se supone que el conocimiento del pensamiento matemático infantil es útil para los profesores, y que éstos deberían conocer y compartir los conocimientos adquiridos en la investigación.

El proyecto consta de tres fases:

1 Se estudia el conocimiento y creencias de los profesores sobre el pensamiento y solución de problemas de sus alumnos y cómo este conocimiento se relaciona con el rendimiento del niño.

2. En una segunda fase se realiza un estudio experimental con el fin de proporcionar formación a los profesores sobre el pensamiento matemático infantil y ver cómo afecta al modo de enseñar y al rendimiento de los alumnos.

3 En la tercera fase llevan a cabo un estudio de casos sobre el profesorado del grupo experimental con la finalidad de estudiar cómo los profesores usan el conocimiento sobre el pensamiento de sus alumnos para construir nuevos conocimientos sobre los anteriores, y cómo ello incide en el aprendizaje de los niños.

Los objetivos para la primera fase son entre otros: conocer las creencias pedagógicas de los profesores sobre la adición y la resta, determinar cómo el contenido de estas creencias influye en la toma de decisiones, señalar las metas de la instrucción, el comportamiento del profesor con relación a su propio papel y el de sus alumnos y, por último, cómo influye todo en el aprendizaje de los alumnos. A los profesores les fue pasado un cuestionario de creencias sobre: el aprendizaje de las matemáticas, relación entre habilidades matemáticas y solución de problemas, bases para secuenciar los temas de instrucción y la enseñanza de la adición y sustracción. También se determinó el conocimiento de los profesores en cuanto a: la dificultad de una serie de problemas verbales, el conocimiento general de estrategias y de las estrategias individuales de cada niño. En cuanto a los niños, éstos tuvieron que resolver unas tareas en las que se incluían cuentas con hechos numéricos y problemas verbales de adición y sustracción. En general, encuentran una correlación positiva entre el rendimiento de los niños y el conocimiento de los profesores sobre las habilidades matemáticas de sus alumnos. Los profesores cuyos alumnos tenía éxito al resolver los problemas verbales tendían a mostrar una perspectiva constructivista de la educación según la cual la instrucción debería construirse a partir del conocimiento existente de los niños, siendo su papel ayudar a los niños a construir el conocimiento matemático más que limitarse a transmitirlo.

En la segunda fase parten de que los procesos enseñanza-aprendizaje resultan muy complejos y que la instrucción se encuentra mediatizada por el pensamiento y decisiones del profesor, de tal manera que es posible introducir cambios significativos ayudando a los profesores a tomar decisiones informadas más que intentar entrenarlos en actuar de un modo determinado.

Carpenter, Fennema, Peterson, Chiag y Loef (1989) sostienen la hipótesis de que el conocimiento sobre los diferentes tipos de problemas, las estrategias para resolverlos, la evolución del conocimiento matemático de los niños incidiría en la instrucción. Para verificar dicha hipótesis trabajaron con 40 profesores, divididos en dos grupos: experimental y de control. El grupo experimental realizó seminarios cuya finalidad era familiarizarlos con las investigaciones sobre cómo solucionan los niños los problemas de sumar y restar; aprender a clasificar los problemas verbales y a identificar los procesos usados por los niños para resolver los problemas. Más tarde, discutían entre ellos los principios de instrucción en los que se apoyaban en un primer momento y después diseñaban sus propios programas de instrucción teniendo en cuenta el conocimiento adquirido y los siguientes principios básicos: uno, la instrucción debe desarrollar la comprensión; dos, la instrucción ha de facilitar la construcción activa por parte del alumno de su propio conocimiento; tres, el alumno se encontrará en disposición de relacionar los conceptos o habilidades que está aprendiendo con el conocimiento que ya posee; y, cuatro, la instrucción debería estar basada en lo que cada niño individualmente conoce. El grupo control realizaban seminarios sobre problemas matemáticos, pero ni participaban en discusiones acerca del cómo resolvían los niños los problemas, ni eran instruidos en el marco teórico para comprender en pensamiento infantil.

Los resultados muestran que los grupos con mejores rendimientos eran aquellos en los que los profesores no se consideraban la única fuente de conocimiento. Pasan más tiempo preguntando y escuchando a sus alumnos, tienen en cuenta más el proceso de solución que la respuesta correcta, ayudan a usar diversos tipos de estrategias y, al conocer el proceso del conocimiento del alumno, pueden partir de la situación concreta de cada alumno. Los profesores del grupo control prestan menos atención a las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de problemas, les animan menos a usar estrategias diferentes y les proponían menos problemas verbales.

En la tercera parte, el estudio de casos (Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson, 1996) tratan de profundizar y comprender mejor la naturaleza de los datos encontrados en la fase experimental. También para analizar los vínculos entre el comportamiento de los profesores y el rendimiento de los alumnos, tanto a corto como a largo plazo. El trabajo de Fennema y cols. (1996) es un estudio longitudinal de cuatro años con la finalidad de investigar los cambios producidos en la instrucción y en las creencias de 21 profesores a medida que adquirían nuevos conocimientos sobre el pensamiento de los niños y también en el aprendizaje de los alumnos. El primer año se recogieron datos sobre los profesores y sus alumnos y en los tres años siguientes se desarrolló un programa evolutivo centrado en el profesor. Con el fin de situar a los profesores que participaban en el programa, establecieron cuatro niveles de instrucción y cuatro niveles de creencias.

En el primer nivel de instrucción, el sistema que seguían los profesores consistía en demostrar los pasos de un procedimiento y a continuación proporcionar a los alumnos práctica repetida para que pudieran aprender los diferentes pasos.

En el segundo nivel, aunque el aprendizaje de procedimientos continuaba siendo central, los profesores pedían a los niños que explicasen sus procedimientos de resolución, al menos una vez al a semana. El profesor parecía escuchar el pensamiento del niño y aceptarlo, pero no intentaba comprender la estrategia empleada y cuando era incorrecta le ofrecía una solución diferente, sin preguntarle.

El tercer nivel, donde se situaban 12 profesores, éstos estructuraban el curriculum de matemáticas en torno a los problemas verbales. Los niños solucionaban problemas verbales de todos los tipos y con la incógnita en los diferentes lugares. Los problemas eran presentados en contextos distintos y en diversas ocasiones se pedía a los alumnos que escribiesen sus propios problemas. Los profesores escuchaban la explicación de los niños sobre las estrategias de solución que empleaban y disminuía notablemente el interés del aprendizaje de procedimientos concretos.

El cuarto nivel de instrucción, en el que se integraban 7 profesores, se caracterizaba porque los maestros eran conscientes de la influencia de la instrucción en cada niño, de manera que tenían en cuenta las diferencias individuales cuando planificaban y enseñaban en sus clases. Cuando los niños resolvían el mismo problema, esperaban que presentasen más de una estrategias para la solución.

También, en cuanto a las creencias se diferenciaron cuatro niveles.

En el nivel primero, los profesores pensaban que los niños aprendían mejor cuando les informaban acerca de cómo resolver las tareas de matemáticas.

En el nivel segundo empezaban a cuestionarse si el aprendizaje de las matemáticas se facilitaba con la información de cómo se resuelven las tareas.

En el tercer nivel los maestros consideraban que los niños aprendían en la medida que solucionaban los problemas y discutían sus soluciones.

En el cuarto nivel los profesores se mostraban partidarios de que los alumnos pudieran resolver los problemas sin instrucción directa y que el curriculum debería estar realizado a partir de las habilidades de los niños, siendo la tarea de ellos conocer lo que saben los niños para poder estructurar el ambiente de aprendizaje. Al final del estudio las creencias de los profesores están más guiadas cognitivamente que al principio, situándose 11 profesores en este nivel cuarto.

Respecto al aprendizaje de los niños, las ganancias son acumulativas y están relacionadas directamente con las cambios que el profesor realiza en su instrucción. Los profesores manifestaban que los niños podían resolver más problemas verbales, les gustaban más las matemáticas y estaban más predispuestos a comunicar su sistema de razonamiento.

Los resultados de este programa parecen confirmar que es positivo para los profesores porque les ayuda a comprender los procesos que ponen en marcha los alumnos cuando resuelven problemas, aprenden a escuchar a los alumnos y a darles oportunidad de construir sus propias soluciones más que enseñarles el modo correcto de resolverlos y como consecuencia mejorar la instrucción y aprendizaje de las matemáticas. Diversos autores se manifiestan en este sentido. Zeichner (1995) considera que la gran difusión que está consiguiendo el CGI puede deberse al respeto mostrado a los profesores y su conocimiento. Igualmente, Bermejo y otros (1997) piensan que los profesores sienten que lo que conocen y hacen en sus clases es reconocido y respetado, que los investigadores universitarios están interesados en aprender de ellos y que pueden hacer uso de las investigaciones y llevar a cabo las suyas propias, ensayando y adaptando el conocimiento nuevo que se les propone. En esta misma línea, Simon (1995a, 1995b) afirma que el éxito del CGI se encuentra en que los profesores aprendían a investigar sobre el pensamiento de los niños, lo que incrementaba claramente su habilidad para anticipar los procesos de aprendizaje de los mismos.

El programa de intervención centrado en el profesor de Simon y Schifter

El objetivo central de estos autores (Schifter y Simon, 1992; Simon y Schifter, 1991) es tratar de formar profesores que sean capaces de reconocer y analizar de modo crítico el tipo de aprendizaje que promueven en sus clases. Parten de una dimensión constructivista, las matemáticas han de ser consideradas como una actividad de construcción, de exploración y de debate, más que un conjunto de conocimientos que son acumulados, aceptados o reproducidos.

Este proyecto conocido como formación de líderes en matemáticas (ELM) consta de cuatro fases:

La primera parte se desarrolla de la siguiente forma. Los profesores asisten a clases en las que se valoran positivamente los procesos de construcción. El contenido de dichas clases está compuesto por comprensión de conceptos, solución de problemas, computadoras, lenguaje Logo y clases de educación física, con la finalidad ésta últimas de que experimentaran ansiedad (al no ser expertos) y pudieran relacionarla con la ansiedad que sienten los alumnos cuando se enfrentan a situaciones matemáticas. Después de las clases, en grupo se discutían las experiencias de aprendizaje, estructura de la lección, papeles del profesor y del alumno. Finalmente realizaban actividades encaminadas a desarrollar en los profesores la habilidad para planificar la secuencia de los contenidos, proponer actividades, evaluar la comprensión, identificar los conceptos claves y los prerrequisitos.

En la segunda fase, con el fin de supervisar al profesor en su aula, le era asignada una persona del ELM, encargada de hacer reflexionar y sugerir ideas sobre las metas y situaciones concretas de la clase. Los profesores seguían asistiendo a Seminarios en los que se analizaban las falsas concepciones sobre el aprendizaje y se planificaban lecciones en pequeños grupos.

En la fase tercera los profesores se preparaban para su papel de formadores. Se trabajaba en grupos pequeños, planificando la instrucción, secuenciando las lecciones, elaborando materiales, adaptando los materiales existentes en el mercado, etc.

En la cuarta fase se forman equipos mixtos, profesores y miembros del ELM, para impartir seminarios a otros profesores.

Las conclusiones de los profesores que habían realizado este proyecto señalan que es positivo, unos porque han aprendido nuevas técnicas, otros porque habían conocido cómo aprenden los niños, la naturaleza de las matemáticas, así como las metas de la instrucción. En cualquier caso, la mayoría adoptaron nuevas estrategias en sus clases de matemáticas y a la hora de tomar decisiones para la instrucción asumieron el aprendizaje como adaptación.

El Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas de Simon

Este modelo tiene su origen y fundamento en un proyecto sobre la construcción de la Matemáticas Elementales (CEM), que dura tres años. Con una metodología constructivista, a partir del diseño de un programa experimental, estudia el pensamiento del profesor con la finalidad de incrementar su conocimiento matemático.

Simon (1995) parte de que cuando se diseña una lección hay que tener en cuenta dos factores relacionados, que son: el conocimiento matemático del profesor y la hipótesis del profesor sobre el conocimiento de sus alumnos. Este último ha de ser inferido por el profesor, ya que no tiene acceso directo, a partir de las conductas de los niños y de su propia compresión de las matemáticas, que a su vez se ve influida por su percepción del pensamiento matemático de los alumnos. La meta del aprendizaje es la que señalará la senda, llamada por Simon trayectoria hipotética del aprendizaje, por la que tiene que realizarse dicho aprendizaje. La trayectoria incluye tres componentes: la meta del aprendizaje que define la dirección del mismo, las actividades del aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético.

La trayectoria hipotética del aprendizaje constituye el proceso por el cual el profesor diseña un plan de las actividades a realizar en clase. El punto esencial de este modelo es que dicha trayectoria debe estar en continua revisión, así, durante el curso y a partir de la evaluación del pensamiento de los alumnos y la consiguiente adaptación del conocimiento del profesor se puede modificar la trayectoria y que puede afectar a cualquiera de sus tres componentes: meta, actividades u procesos de aprendizaje.

Este modelo se centra en el análisis del proceso mediante el cual el profesor toma las decisiones de enseñanza referidas al contenido, diseño y secuencia de las tareas matemáticas. Simon afirma que existen varios aspectos implicados en la toma de decisiones. Uno, la comprensión sobre el pensamiento de los alumnos, que da lugar a un proceso continuo de generación de nuevas hipótesis. Dos, a medida que los alumnos aprenden matemáticas, los profesores aprenden sobre el aprendizaje, enseñanza y pensamiento matemático de los alumnos. Tercero, la instrucción es como una trayectoria hipotética de aprendizaje. Cuarto el cambio en el conocimiento del profesor crea cambios continuos en la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Simon señala que la finalidad del modelo de Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas es desarrollar en el profesor habilidades que le permitan generar hipótesis sobre la comprensión de los alumnos, trayectorias hipotéticas de aprendizaje y la habilidad para abordar el análisis conceptual de las matemáticas que enseñan.

El proyecto de intervención en las matemáticas de primer ciclo de Cobb

Este proyecto de enseñanza de las matemáticas dirigido por Cobb (Cobb y Wheatley, 1988; Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti y Perlwitz, 1991; Yackel y Cobb, 1996) parte de considerar que las matemáticas constituyen un proceso de construcción individual y un proceso de enculturación dentro de la práctica de las matemáticas en el conjunto de la sociedad (Yackel y Cobb, 1996).

Hay dos procesos esenciales: la negociación y la interacción. La negociación resalta el papel activo del alumno en el aprendizaje y conlleva toda una serie toda una serie de acomodaciones durante la interacción. Para estos investigadores, la teoría constructivista se aplica tanto a los alumnos como a los profesores y a los propios investigadores y también creen en la existencia de una relación dialéctica entre el conocimiento de los profesores, sus creencias y su práctica en el aula. Consideran que las intervenciones diseñadas para modificar las creencias y conocimientos de los profesores fuera del contexto del aula son inútiles, porque será durante el curso de las actividades de instrucción cuando surjan las situaciones en las que el profesor tendrá razones y motivaciones para intentar reorganizar su práctica en el aula y el momento adecuado para observar y discutir el comportamiento de los niños resolviendo problemas matemáticos. Cobb y colaboradores explican cómo los maestros descubren con incredulidad que niños que resuelven correctamente las tareas de los libros de texto no son capaces de resolver tareas fuera de los libros de texto que suponen los mismos conceptos; estos descubrimientos lleva a los profesores a cuestionar las actividades de instrucción propuestas en los libros y a diferenciar entre ejecución correcta y comprensión conceptual. El objetivo final de este proyecto no es formar profesores para que actúen de un modo específico, sino para que actúen de manera intelectualmente autónoma.

El proyecto se realizó en tres años, correspondiendo un año a cada fase y con niños de 7 y 8 años.

Durante la primera fase se recogió información acerca del conocimiento matemático, memoria espacial y habilidades de visualización de niños que comenzaban el segundo curso, estos datos sirvieron de referencia para las fases segunda y tercera, que corresponden al programa de intervención propiamente dicho.

La segunda fase se llevó a cabo en un aula de segundo curso de un colegio público, con el compromiso por parte de los investigadores de cumplir los objetivos del curso pero, con una metodología constructivista: que los niños construyeran los conocimientos matemáticos. Las actividades de la instrucción se ajustó a las siguientes características:

·Primera. Basándose en el objetivo de autonomía intelectual, las actividades deben tener sentido para los niños y poder ser resueltas por alumnos con niveles conceptuales distintos.

·Segunda. Para Cobb y colaboradores la relación entre el conocimiento conceptual y el conocimiento de procedimiento es una relación dialéctica y por tanto no pueden ser programados ni diseñados ambos conocimientos por separado. De aquí que sea conveniente desarrollar materiales, que permitan avanzar a los alumnos.

·Tercera. Como las actividades tenían que conseguir los objetivos establecidos para segundo curso, fueron secuenciadas de forma global, cuando en los libros de texto se contemplaban de modo separado.

·Cuarta. Las actividades debían conseguir discusiones sobre conceptos matemáticos en los que participaba toda la clase. El interés de estas discusiones aumentaba cuando los alumnos utilizaban distintos métodos para resolver un problema o realizaban un descubrimiento.

En la tercera fase el proyecto de instrucción se realizó en 18 aulas, 10 experimentales y 8 de control. Al final del curso escolar, se administraron dos pruebas de competencia aritmética y un cuestionario sobre metas personales y creencias sobre el éxito en matemáticas. Las conclusiones de los resultados son: no existían diferencias entre los grupos experimentales y de control en cuanto a los niveles de ejecución, pero los experimentales mostraron niveles más altos en comprensión conceptual. En cuanto al cuestionario, no existían diferencias significativas en cuanto a metas personales, pero sí en lo que respecta a las creencias sobre las razones para tener éxito en matemáticas. En términos generales, los datos sobre las creencias son consistentes con los patrones de ejecución de las pruebas aritméticas. Así, una de las diferencias reflejadas entre los grupos en cuanto a las creencias sobre la procedencia del éxito es: los del grupo control, consideran que el éxito dependía de utilizar los mismos métodos de solución propuestos por el profesor, y no de la creación de sus propios medios de solución.

Programa instruccional que integra al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares

En esta misma línea, Bermejo, Lago, Rodríguez, Pérez, Bejerano y Moriche (1997) han realizado un programa con niños de 1º, 2º y 3º de Educación Primaria, en colegios públicos de los alrededores de Madrid, con la finalidad de mostrar que es posible mejorar la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción, mediante un programa instruccional que integra al profesor, al alumno y a los contenidos curriculares. Consta dicho programa de dos fases. En la Fase I estudian el efecto de las variables tipo de problema, tipo de operación, lugar de la incógnita y nivel escolar, sobre el nivel de ejecución de los niños para trazar la línea evolutiva que siguen los niños en la adquisición de los conceptos matemáticos de la suma y la resta. En la Fase II: 1) dotan al profesor de conocimientos sobre el desarrollo del pensamiento matemático de los niños; 2) ayudan a crear un clima en el aula que propicie no sólo la construcción de conocimientos, sino también centrar la evaluación en los procesos y no en el producto; y 3) medir el posible efecto del programa de intervención diseñado sobre el nivel de comprensión y consiguiente ejecución de los sujetos bajo estudio de los conceptos de adición y sustracción.

En la Fase I a los niños se le propusieron 6 tipos de tareas, cinco de ellas eran problemas -de Cambio, Combinación, Comparación, Igualación y Relacional- y la otra eran expresiones numéricas, formuladas tanto en términos de adición como de sustracción. Las consideraciones resaltadas por los autores en esta fase, en cuanto a las estrategias son: que el tipo de estrategia empleada por los niños parece estar relacionada, más que con el tipo de problema, con el lugar de la incógnita y el tipo de operación, resultados que están de acuerdo con Carpenter (1996, manuscrito enviado por el autor). También afirman que las estrategias usadas por los niños cambian en función de su nivel escolar, aunque los datos obtenidos por Bermejo y cols. (1995) confirman en cierto sentido los de Carpenter y Moser (1984) en cuanto que existen niveles en la evolución de las estrategias; ahora bien, especifican que los niños no presentan un comportamiento lineal con respecto a estos niveles, ya que observan que en un mismo grupo de edad coexisten estrategias de distintos grados de complejidad. En cuanto a los errores, dichos autores concluyen que las distintas categorías de problemas no se asocian con ningún tipo de error en particular, sino que los errores varían únicamente en función del nivel de escolaridad. También, observando la propia evolución de los errores con la edad, unos tienden a desaparecer y otros aumentan su presencia. Igualmente, la evolución de los errores se relaciona con la mayor o menor competencia conceptual de los niños.

La Fase II de intervención se centró en torno al profesor. Llevaron a cabo en el mes de noviembre una evaluación individual de todos los alumnos, para diagnosticar los conocimientos previos tanto de los grupos de control como experimentales y elaborar su perfil matemático, el contenido de las pruebas era exclusivamente problemas verbales y expresiones numéricas de adición y sustracción. Estas mismas pruebas se aplicaron a los grupos experimentales en el mes de marzo. Finalmente, se repitió la evaluación a todos los grupos, a fin de establecer las posibles diferencias entre grupos por la influencia de la fase de intervención.

Una vez concluida la primera evaluación de los alumnos, se pasó un cuestionario a los profesores de los grupos experimentales a fin de determinar los conocimientos y creencias sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Constaba tres partes: En primer lugar, se presentaba una serie de expresiones numéricas que los profesores debían formular como problemas verbales de todas las maneras que se les ocurriesen. A continuación se pidió que leyesen un conjunto de problemas verbales y que correspondiesen a cuestiones relativas: a su grado de dificultad, al hecho de si los niños plantearían un algoritmo antes de resolverlo o no, a los procedimientos de resolución empleados y al tipo de errores que podrían cometer los niños. En último lugar, el cuestionario (cumplimentada esta parte por los grupos de control y experimentales) se refería a creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, planteado en torno a tres dimensiones: conocimiento general sobre los principios constructivistas, evaluación y aplicación concreta de los principios constructivistas a la enseñanza de la suma y de la resta.

Después, los profesores de los grupos experimentales, realizaron un seminario de 10 horas en el que se les ofreció información sobre el desarrollo de los conceptos de sumar y restar, se les entregó el perfil matemático de cada uno de sus alumnos y se les proporcionó un listado de problemas verbales que podrían incluir entre sus objetivos a lo largo del curso escolar. Se mantuvieron, cada mes, reuniones de seguimiento y se confeccionó una guía de observación del profesor y de los alumnos. Por último, en el mes de mayo, los profesores de los grupos experimentales cumplimentaron de nuevo el cuestionario de creencias, a fin de comparar los datos actuales con los obtenidos antes de la intervención.

Los resultados obtenidos por Bermejo y colaboradores confirman en general la eficacia positiva del programa de instrucción. Destacan los siguientes cambios importantes respecto de los profesores:

1) El primero de ellos afectó a la enseñanza de los problemas verbales. Los profesores enseñaron más problemas verbales de lo que habían venido haciéndolo.

2) También cambiaron sus concepciones en torno a enseñanza de las matemáticas, pues aunque los profesores estaban de acuerdo con las ideas

constructivistas sin embargo la mayoría no las aplicaban en su labor diaria. A partir del programa de intervención serían puestas en práctica.

3) Otro cambio significativo se produjo en el proceso de evaluación, ya que pasaron de evaluar -o querer intentar evaluar- únicamente el resultado a analizar y evaluar también los procesos.

El programa de intervención afectó igualmente a los niños que participaron en el programa. Estos cambios se manifestaron sobre todo en que los alumnos de los grupos experimentales mostraron niveles de comprensión conceptual más altos que los alumnos de los grupos de control. A saber:

1) Los grupos experimentales obtuvieron rendimientos más altos que los niños pertenecientes a los grupos de control, a pesar de que al inicio del programa sus competencias eran similares.

2) Igualmente las diferencias fueron significativas entre los grupos experimentales y de control con respecto tipo de estrategia o procedimiento de resolución utilizado en el sentido de que las estrategias concretas empleadas por los grupos experimentales fueron más complejas de lo que incluso cabría esperar para su edad.

3) Finalmente, los cambios positivos en los grupos experimentales también afectaron a los errores, en cuanto que disminuyeron los errores relacionados con la competencia conceptual, que tienen mayor alcance, y aumentaron los relativos a la ejecución.

En resumen, los resultados de la fase de intervención no dejan dudas sobre el efecto positivo del programa, tanto en los profesores como en los alumnos. Pero, los mismos investigadores consideran que, al otorgar un papel relevante a la figura del profesor (como ocurre en otros programas, CGI de Carpenter o en el de Cobb) y centrarse en la labor instruccional del profesor, se ha dejado poco espacio a la construcción de conocimientos por parte del alumno a partir de los intercambios con sus compañeros de aula y este aspecto debe ser tenido en cuenta en investigaciones futuras. Igualmente, consideran objetivo de trabajo otro aspecto, no menos interesante, los efectos, positivos o negativos, que pudiesen tener las creencias y actitudes de los alumnos hacia las matemáticas en el aprendizaje de estos contenidos.

10.2.2. INSTRUCCIÓN EN LOS ALGORITMOS DE SUMAR Y RESTAR

Se insiste frecuentemente en la conveniencia de usar materiales concretos en la resolución de problemas numéricos, apelando bien al nivel excesivamente abstracto de los símbolos o algoritmos utilizados, bien a la naturaleza concreta del pensamiento infantil en estas edades, como se desprende de la teoría piagetiana (las operaciones concretas se extenderían hasta los once-doce años aproximadamente). Desde esta perspectiva se han llevado a cabo diferentes trabajos que intentan favorecer la comprensión de situaciones numéricas usando materiales concretos. Entre estos estudios están: el de Resnick y Omanson (1987), los de Fuson (1992); Fuson y Briard (1990) y los de Boulton-Lewis (1993a, 1993b); Boulton-Lewis y Tait (1994), que exponemos a continuación.

Resnick y Omanson (1987) parten de que muchos de los errores cometidos por los niños provienen, no sólo del desconocimiento de los principios básicos que fundamentan el concepto u operación que se desea enseñar, sino frecuentemente de la desvinculación entre estos principios y los símbolos o la sintaxis de los símbolos escritos. Para robustecer y explicar estos nexos, los autores diseñan un método de instrucción denominado " Instrucción de emparejamiento" ("mapping instruction”), cuyas características más relevantes pasamos a describir aplicado en concreto a la enseñanza de la sustracción. En general consiste en realizar tareas de sustracción mediante bloques y por escrito simultáneamente, de tal modo que se mantiene un estrecho emparejamiento, paso por paso, entre la manipulación de los bloques y los símbolos escritos a lo largo de la resolución del problema. Se supone que el niño interpretará los pasos y las anotaciones en el procedimiento escrito como si fueran pasos y representaciones del procedimiento con los bloques, de modo que la comprensión que el niño manifiesta en su operar con los bloques (material concreto) se transferiría a los procedimientos escritos.

El procedimiento instruccional consiste en presentar una cuenta de restar en su forma clásica, colocados ambos términos el uno debajo del otro. Se presenta igualmente un conjunto de bloques variados y se pide al niño que represente el minuendo mediante los bloques. Después el niño lee el número que hace de substraendo y se le pide que quite esta cantidad de los bloques que constituyen el minuendo. Si el niño necesita descomponer centenas en decenas o decenas en unidades, debe traducir estos cambios con los bloques en la notación por escrito. Para probar la eficiencia de este procedimiento instruccional, se aplicó a 9 niños de cuarto, quinto y sexto curso de EP, que según sus profesores necesitaban ayuda en la sustracción, y que habían cometido algunos errores en una prueba previa de restar por escrito. Primeramente los niños se familiarizaron con los bloques y se observaron sus habilidades numéricas básicas, como contar y los valores de los números según su posición. Después se les pasó un pretest-entrevista para evaluar su comprensión y rendimiento en la sustracción con llevadas. Posteriormente, los niños recibieron la instrucción propiamente dicha, seguida de dos postests: uno inmediato entre dos y siete días mas tarde, y otro cuatro semanas después del primer postests. Las entrevistas fueron individuales.

En el pretest y en los postests se verificaba, primero, el conocimiento de los principios de sustracción tal como se expresan en los bloques de Dienes: 1) si conocían el valor decimal con los bloques y su correspondiente transcripción por escrito. 2) si conocían el principio de recomposición en el uso de los bloques; y finalmente 3) si conocían cómo usar los bloques en las llevadas. Todos los niños respondieron correctamente en esta primera parte. En la segunda parte, se evaluaba la comprensión de los niños con respecto a los principios de la sustracción escrita y los valores posicionales. Se evaluaba la compensación entre columnas, pero no la conservación total del minuendo en las llevadas.

La instrucción propiamente dicha constaba de tres partes:

En la primera el niño aprendía la representación con bloques del procedimiento de restar. Para ello, el niño da el primer paso con los bloques para realizar la sustracción, pidiéndole el investigador que lo escriba sobre el algoritmo; después se da el segundo paso con los bloques, escribiendo después este paso, y así sucesivamente. En esta parte existían cuatro tipos de problemas: una llevada de las decenas a unidades, una de las centenas a decenas, dos llevadas de las centenas y de las decenas, y una doble llevada: de las centenas a las decenas, para llevarse una decena.

En la segunda parte, el niño indicaba al experimentador cómo mover los bloques, escribiendo el niño los resultados sobre el algoritmo; o bien, el niño verbalizaba el movimiento de los bloques, escribía lo realizado, mientras el experimentador se limitaba a observar.

En la tercera parte el niño resolvía operaciones de restar escritas, pidiéndole que pensara los bloques durante la resolución de las tareas.

Los resultados muestran que la mayoría de los niños seguía cometiendo errores en las llevadas (7/9). No obstante, con respecto a la recomposición del minuendo en las llevadas (valor posicional), la diferencia entre el pretest y el segundo postest fue significativa. En cuanto al principio de compensación, hay de nuevo una mejora, pero esta vez no es significativa (sólo cuatro niños usaron la regla de la compensación). Los autores suponen que só1o cuando los niños han comprendido totalmente los principios de la sustracción desaparecen entonces los errores. Igualmente, suponen que la verbalización de los niños durante la resolución o instrucción era importante para transferir la comprensión de los bloques al procedimiento escrito.

El segundo diseño instruccional (Fuson, 1992; Fuson y Briard, 1990) se distancia del anterior desde el punto de vista procedimental, pero pretende igualmente facilitar la comprensión de los símbolos y algoritmos aritméticos mediante el uso de objetos concretos. Para ello, emplea tarjetas para escribir cada uno de los dígitos de la adición, así como bloques de base diez. Los niños eran escolares de primero y segundo de EP.

La primera fase de la instrucción se centró en torno al uso de los bloques (pequeños cubos, barras, cuadrados y grandes cubos) y su relación con los numerales (unidades, decenas, centenas y millares). Igualmente se practicó el uso de llevadas, insistiendo en la compensación, y se verbalizaba la traducción de los bloques en números y viceversa.

En la segunda fase, se presentaron tareas aditivas y sustractivas, usando los bloques, tal como aparece en la figura. Primero se practicó la adición, de modo que se presentaba una operación escrita y el niño debía representar los dos términos de la adición con los bloques, empezando por el de arriba. Posteriormente se llevaba a cabo la adición, empezando columna por columna por la derecha. En cada columna se juntaban todos los bloques en la parte inferior, de modo que si el número era nueve o menos se anotaba el guarismo correspondiente; si era mayor de nueve, entonces se cambiaban diez de las piezas pequeñas por una de las piezas mayores siguientes, anotando el resultado de este cambio. Se insiste en que sólo puede haber un dígito en cada columna.

El método seguido con la sustracción fue similar, teniendo en cuenta las diferencias inherentes a esta operación. Se iba incrementando poco a poco el número de dígitos de las cuentas, de modo que los niños de segundo llegaron a operar hasta con siete dígitos. Todos los niños pasaron dos pretests de adición: a) 12 problemas: 2 con dos dígitos, 2 con tres, 3 con cuatro, 1 con cinco, 3 con seis y 1 con siete dígitos. El tiempo máximo fue de dos minutos y había llevadas hasta cinco veces. El segundo pretest consistía en una suma de diez dígitos, estando situados los dos términos verticalmente. tests se pasaron después como postests. Los niños fueron entrevistados para evaluar la comprensión de la adición, substracción y valor posicional, preguntándoles por qué algunas tareas anotadas en el papel eran correctas o no.

Los resultados en la adición mostraron una mejora claramente significativa y los errores disminuyeron ostensiblemente. Lo mismo se puede decir con respecto a las tareas de resta y del valor posicional de los dígitos. Los niños de segundo mostraron un conocimiento superior a la media de los niños de tercer curso que seguían la enseñanza tradicional. Por otra parte, algunos errores eran autocorregidos con sólo decir a los niños que pensaran en los bloques, de modo que estos bloques eran un útil soporte para el pensamiento de los niños. No obstante, no todos los niños usaban espontáneamente su conocimiento sobre los bloques para resolver las tareas aditivas o sustractivas. Finalmente, se encuentra que las tareas empleadas en la instrucción son especialmente apropiadas para el nivel de los niños de segundo curso, de modo que pueden aprenderlas fácilmente si se emplea un material concreto de apoyo como los bloques descritos.

Otros estudios (Boulton-Lewis, 1993a, 1993b; Boulton-Lewis y Tait, 1994) tratan las estrategias de los niños en función de la instrucción recibida de los profesores. Estos autores realizaron un estudio longitudinal durante tres años en tres aulas de distinto nivel socioeconómico, utilizando material multibase arithmetic blocks (MAB) en base 10, (unidades , decenas y centenas). Los niños manejaban y discutían el material con el profesor. Trabajaban en primer lugar con la sustracción en situación horizontal. Cuando no conocían la respuesta intervenía el maestro. Eran animados a usar los dedos, el material o el papel para representar la operación y la respuesta.

Las respuestas de los niños fueron clasificadas en las estrategias siguientes: AN Análogos sin conteo obvio. RF Hechos memorizados sin análogos y sin conteo abierto. FCA Conteo hacia adelante con análogos. FCWA Conteo hacia adelante sin análogos. BCA Conteo hacia atrás con análogos. BCWA Conteo hacia atrás sin análogos. IMCA Conteo de todo incluyendo minuendo y sustraendo sin efecto aditivo. UNK Estrategia desconocida respuesta correcta pero sin explicar. Métodos inapropiados. IMDS Mostrando el sustraendo con análogos y entonces restándolo. IMG Adivinando. IMA Tratar dos menos cero como dos mas cero. WAA Algoritmo escrito con análogos. WAWA Algoritmo escrito sin análogos. PV Uso de explicaciones del valor del lugar. DE Explicación de descomposiciones sin y con análogos.

Los resultados de las tres escuelas muestran que intentaban, siempre que fuera posible, recordar las normas de restar y no usar analogías. Cuando usan analogías la estrategia fue contar hacia adelante, en los pocos casos que usaron algoritmos escritos no usaron analogías y recurrieron a procedimientos erróneos (buggy). El uso de estrategias mentales fue más exitosa y aparentemente no estaba relacionada al uso de algoritmos escritos

En general la secuencia de desarrollo reproduce las descritas por Carpenter y Moser (1982, 1984) y De Corte y Verschaffel (1987), material (usando objetos), verbal (conteo) y mental (hechos numéricos), aunque los chicos intentaron usar el recuerdo de hechos numéricos lo más pronto posible. En el tercer 3 año los alumnos usaban las explicaciones mentales basadas en la descomposición de decenas y centenas antes que los algoritmos escritos.

Boulton-Lewis (1993) dentro de la discusión de su trabajo manifiesta que cada vez es más claro que muchos niños, que son expertos en procedimientos para resolver algoritmos, no demuestran el conocimiento conceptual correspondiente (Cauley, 1988; Hiebert, 1988). Cauley describió la actuación de niños de 7 a 10 años con algoritmos de restas. Encontró fallos en su conocimiento del valor del lugar y sugirió que el conocimiento de la estructura parte/todo de un número puede ser necesario para entender el valor del lugar y por tanto la resta. Los resultados encontrados por Boulton-Lewis sugieren que los niños que eligieron, usar estrategias orales mentales para la resta de dos dígitos, en vez de utilizar algoritmos escritos entendieron mejor el valor del lugar de las cifras. Varios procedimientos han sido sugeridos e intentados para ayudar a los niños a usar análogos entre los algoritmos.

Un método es intentar reducir la carga de procesamiento con el uso de mapas (gráficos) para representarlos, y practicar con ellos con la finalidad de convertirlos en automatismos. Fuson y Briars (1990), en el estudio más arriba expuesto obtuvieron éxito con niños de primer y segundo grado con la suma y la resta usando un aprendizaje/enseñanza que empleó bloques de base 10 y que probablemente dependían de su práctica.

Otro método pudiera ser cambiar la secuencia del curriculo para la enseñanza de la suma y de la resta. Fuson (1990) recomendó un cambio de la secuencia de la enseñanza de la resta seguida en la mayoría de los libros de texto. Los niños eran primeramente enseñados a restar hasta números de tres cifras o mayores, sin ninguna descomposición. Esto reduce la carga de procesamiento inicialmente pero parece que lleva a los niños a actuar en los algoritmos con procedimientos mecánicos, y a no utilizar estrategias mentales y verbales. Fuson afirmó que el entendimiento del valor del lugar debe acompañar las restas de varias cifras y que los problemas con y sin descomposiciones deben ser representados a la misma vez, esto podría incrementar la carga de procesamiento temporalmente pero sin embargo los niños podrían considerar el efecto del valor del lugar y el proceso algorítmico desde el principio.

Una tercera alternativa es adoptar un procedimiento similar al que describió Resnick, Bill y Lesgold (1995). Decían que el funcionamiento mental humano debe ser entendido fundamentalmente dependiendo de la situación y del contexto. Afirmaron que los niños llevan a la escuela un conocimiento matemático grande y, por tanto, diseñar un programa que se fundase en tal conocimiento para usar correctamente la notación formal desde el principio. Para relacionar este conocimiento con el lenguaje formal de las matemáticas introdujo conocimientos claves en matemáticas lo más pronto, incluyendo sustracción multidígita en el primer grado, mientras permitía a los niños usar material manipulable o notación, según eligieran. Los profesores animaban todos los días a la resolución de problemas y hacían que los niños hablaran de matemáticas más que suele hacerse y no se limitaban los niños de primer grado a utilizar números inferiores a 10. Estos niños actuaron mucho mejor en textos estándar que un grupo similar de niños que fueron enseñados de una manera más convencional. La enseñanza implicó una gran cantidad de discusión guiada por el profesor lo que se describió como una especie de acercamiento cognitivo de aprendizaje.

Sin embargo algunas de las representaciones y procedimientos que los profesores introdujeron, con la intención de facilitar el aprendizaje, en realidad hizo la tarea más difícil. Los procedimientos dependían del significado y de los intereses de los niños. Parece que cuando los niños eligen sus propias estrategias sin representaciones usan aquellas que son de mayor significado para ellos incluso cuando imponen una carga de procesamiento extra o llegan a resultados incorrectos a menos que se les ayude de una manera sistemática. Los niños no conectan las estrategias con aquellas que la profesora les está dando y en particular con los algoritmos escritos. Esto sugiere la necesidad de reexaminar las representaciones y estrategias introducidas por los profesores y ayudar a los niños a hacer su propio conocimiento de los números de manera que pueda ser usado como base de los aprendizajes en cada niño.

PARTE II: ESTUDIO EXPERIMENTAL

11. PLANTEAMIENTO DE OBJETIVOS

La finalidad general de esta investigación es estudiar las diferencias evolutivas de los niños en problemas verbales elementales que requieren una sola operación -la adición o la sustracción-, en los cursos de Educación Infantil (5 años), Primero, Segundo y Tercero de Educación Primaria.

Nos planteamos los siguientes objetivos:

El primer objetivo es averiguar si los distintos tipos de problemas verbales elementales tienen la misma dificultad para los niños de los diferentes cursos. Para ello formulamos la pregunta siguiente:

> **1: ¿Los rendimientos de los niños en los problemas dependerán de la edad, del tipo de problema y del lugar dónde se encuentre ubicada la incógnita?**

La variable "operación" ha sido considerada, en la mayoría de los estudios, como asociada a la estructura semántica del problema; pero la operación también puede ser analizada como el procedimiento -suma o resta- que el niño realiza para encontrar la solución. Partiendo de estos dos puntos de vista, hemos querido investigar la diferencias entre la adición y la sustracción, según coincidan o no estructura semántica y procedimiento. Las preguntas a este respecto son:

2: Cuando la operación es considerada desde el punto de vista de la estructura semántica, ¿existirán diferencias significativas entre la operación de sumar y la de restar?

3: Cuando la operación se contempla como el procedimiento -suma o resta- con el que se resuelve el problema, ¿existirán diferencias significativas entre la operación suma y la operación resta?

4: Si se tiene en cuenta, tanto la estructura semántica como la operación con la que se resuelven los problemas, ¿encontraremos diferencias significativas entre los grupos en función de que haya o no correspondencia entre estructura y procedimiento?

El segundo objetivo es estudiar los diferentes procedimientos de resolución empleados por los niños cuando solucionan los problemas y hacer una descripción de las distintas estrategias que utilizan. Algunos de esos procedimientos darán lugar a respuestas erróneas, por lo que también reseñaremos los distintos tipos de errores y cómo se asocian los tipos de errores con las distintas variables de los problemas. En este caso nos planteamos las siguientes preguntas:

5: ¿Las estrategias utilizadas por los niños variarán según el curso escolar, el tipo de problema y el lugar ocupado por la incógnita?

6: ¿Las respuestas erróneas serán función del tipo de problema, del lugar de la incógnita y del curso escolar?

El tercer objetivo consiste en determinar los tipos de problemas que por su dificultad suelen resolver los distintos grupos experimentales. O en otras palabras:

7: ¿Cuáles son los problemas que serían característicos, por su dificultad, de los diferentes cursos escolares aquí estudiados?

12. MÉTODO

12.1. PARTICIPANTES

La muestra utilizada está formada por noventa y seis niños elegidos al azar, del colegio público "Carlos Eraña" de Ciudad Real. Este Centro se encuentra situado en el centro de la población con un nivel socioeconómico medio. Se distribuyeron en cuatro grupos de veinticuatro niños cada uno. El primero de ellos lo constituían niños de Educación Infantil: el rango de edad era de cinco años y cuatro meses a seis años y tres meses ($\bar{x}$ = 5.9). El segundo grupo lo formaban niños de Primero de Educación Primaria: el rango de edad va desde seis años y tres meses hasta siete años y dos meses ($\bar{x}$ = 6.9). El tercero estaba integrado por niños de Segundo de Educación Primaria: el rango oscila de siete años y dos meses a ocho años y un mes ($\bar{x}$ = 7.9). Por último, el cuarto lo componían alumnos de Tercero de Educación Primaria: el rango de edad va de ocho años a ocho años y once meses ($\bar{x}$ = 8.6). En los grupos de Educación Infantil y Primero de E.P. hay igual número de niños que de niñas. En Segundo y Tercero de E.P. la relación entre niños y niñas es de 11/13.

12.2. MATERIAL Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTALES

El material utilizado era lápiz normal, borrador y octavillas con cada uno de los problemas. Además de los dedos de la mano también disponían de lápices de colores -podían elegir entre usarlos y no usarlos-, con la finalidad de proporcionar ayudas para el recuento, especialmente en aquellos problemas en los que las cantidades eran superiores a la decena.

Los problemas tipo que se utilizaron en el estudio corresponden a los propuestos en el trabajo de Riley y Greeno, (1988, p. 53-54); estos autores proponen seis problemas de Cambio (Ca), seis problemas de Combinación (Co) y seis problemas de Comparación (Cp); dieciocho en total.

Para cada problema se formularon dos versiones:

1) Aquella en la que sólo figuran dígitos de una cifra, bien en los datos, bien en el resultado (una vez realizada la operación correspondiente).

2) Aquella en la que los dígitos manejados no superan el 15 en el resultado.

Por tanto, cada niño ha realizado 12 problemas de Cambio, 12 de Combinación y 12 de Comparación, siendo 36 el total de problemas resueltos. Estas pruebas se presentaron en cuatro sesiones experimentales, constando cada una de ellas de 9 problemas.

Cada problema se nombra por el tipo general de estructura semántica (Cambio, Combinación y Comparación) y lleva a continuación dos números: el primero indica donde está situada la cantidad desconocida (1-2 en el resultado, 3-4 en el segundo sumando y 5-6 en el primer sumando); y el segundo número determina las dos versiones que de cada problema se han utilizado en el presente estudio. En las tablas 12.2.1., 12.2.2. y 12.2.3. se reproducen los problemas empleados en esta investigación.

El orden de presentación de los problemas se determinó de la forma siguiente:

Con los doce problemas de Cambio, se han formado al azar cuatro grupos de tres problemas cada uno. A saber:

- Cambio 3.2., Cambio 5.1. y Cambio 1.2.
- Cambio 1.1., Cambio 4.2. y Cambio 3.1.
- Cambio 2.2., Cambio 6.1. y Cambio 4.1.
- Cambio 5.2., Cambio 6.2. y Cambio 2.1.

TABLA 12.2.1
PROBLEMAS DE CAMBIO
Cantidad inicial - Cambio - Resultado

Cambio 1.1. *(Resultado desconocido)*
Agustín tenía 4 caramelos. Juan le da 3 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene Agustín ahora?
Cambio 1.2. *(Resultado desconocido)*
María tenía 7 cromos. Luis le da 5 cromos más. ¿Cuántos cromos tiene María ahora?

Cambio 2.1. *(Resultado desconocido)*
Agustín tenía 6 caramelos. Le da 2 caramelos a Juan. ¿Cuántos caramelos tiene Agustín ahora?
Cambio 2.2. *(Resultado desconocido)*
María tenía 12 cromos. Le da 5 cromos a Luis. ¿Cuántos cromos tiene María ahora?

Cambio 3.1. *(Cambio desconocido)*
Agustín tenía 4 caramelos. Juan le da algunos caramelos. Ahora Agustín tiene 7 caramelos. ¿Cuántos caramelos le da Juan?
Cambio 3.2. *(Cambio desconocido)*
María tenía 7 cromos. Luis le da algunos cromos. Ahora María tiene 13 cromos. ¿Cuántos cromos le da Luis?

Cambio 4.1. *(Cambio desconocido)*
Agustín tenía 7 caramelos. Le da algunos caramelos a Juan. Ahora Agustín tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos le da a Juan?
Cambio 4.2. *(Cambio desconocido)*
María tenía 12 cromos. Le da algunos cromos a Luis. Ahora María tiene 7 cromos. ¿Cuántos cromos le da a Luis?

Cambio 5.1. *(Cantidad inicial desconocida)*
Agustín tenía algunos caramelos. Juan le da 4 caramelos. Ahora Agustín tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Agustín al principio?
Cambio 5.2. *(Cantidad inicial desconocida)*
María tenía algunos cromos. Luis le da 7 cromos. Ahora María tiene 11 cromos. ¿Cuántos cromos tenía María al principio?

Cambio 6.1. *(Cantidad inicial desconocida)*
Agustín tenía algunos caramelos. Le da 3 caramelos a Juan. Ahora Agustín tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Agustín al principio?
Cambio 6.2. *(Cantidad inicial desconocida)*
María tenía algunos cromos. Le da 4 cromos a Luis. Ahora María tiene 7 cromos. ¿Cuántos cromos tenía María al principio?

TABLA 12.2.2

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN
Subgrupo - Subgrupo - Combinación

Combinación 1.1. *(Combinación desconocida)*
Eugenio tiene 5 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?
Combinación 1.2. *(Combinación desconocida)*
Luis tiene 6 cromos. Miguel tiene 7 cromos. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?

Combinación 2.1. *(Combinación desconocida)*
Hay algunos alumnos en la clase. 3 son niños y 5 son niñas. ¿Cuántos alumnos hay en total?
Combinación 2.2. *(Combinación desconocida)*
Hay algunos balones en el patio. 8 balones son rojos y 7 balones son verdes. ¿Cuántos balones hay en total?

Combinación 3.1. *(Subgrupo desconocido)*
Eugenio tiene 4 caramelos. Ana tiene algunos caramelos. Entre los dos tienen 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?
Combinación 3.2. *(Subgrupo desconocido)*
Luis tiene 6 cromos. Miguel tiene algunos cromos. Entre los dos tienen 11 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Miguel?

Combinación 4.1. *(Subgrupo desconocido)*
Ana tiene algunos caramelos. Eugenio tiene 3 caramelos. Tienen 8 caramelos entre los dos. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?
Combinación 4.2. *(Subgrupo desconocido)*
Luis tiene algunos cromos. Miguel tiene 9 cromos. Tienen 14 cromos entre los dos. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

Combinación 5.1. *(Subgrupo desconocido)*
En una clase hay 7 alumnos. 4 son niños y los demás son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?
Combinación 5.2. *(Subgrupo desconocido)*
En el patio hay 14 balones. 8 balones son rojos y los demás son verdes. ¿Cuántos balones verdes hay?

Combinación 6.1. *(Subgrupo desconocido)*
En una clase hay 8 alumnos. Algunos son niños y 3 son niñas. ¿Cuántos niños hay?
Combinación 6.2. *(Subgrupo desconocido)*
En el patio hay 15 balones. Algunos balones son rojos y 7 son verdes. ¿Cuántos balones rojos hay?

TABLA 12.2.3

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN
Grupo referencia - Grupo comparado - Diferencia

Comparación 1.1. *(Diferencia desconocida)*
Agustín tiene 5 caramelos. Eugenio tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Agustín más que Eugenio?
Comparación 1.2. *(Diferencia desconocida)*
María tiene 13 cromos. Luis tiene 5 cromos. ¿Cuántos cromos tiene María más que Luis?

Comparación 2.1. *(Diferencia desconocida)*
Agustín tiene 6 caramelos. Eugenio tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Eugenio menos que Agustín?
Comparación 2.2. *(Diferencia desconocida)*
María tiene 14 cromos. Luis cromos tiene 6 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Luis menos que María?

Comparación 3.1. *(Grupo comparado desconocido)*
Agustín tiene 5 caramelos. Eugenio tiene 3 caramelos más que Agustín. ¿Cuántos caramelos tiene Eugenio?
Comparación 3.2. *(Grupo comparado desconocido)*
María tiene 9 cromos. Luis tiene 5 cromos más que María. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

Comparación 4.1. *(Grupo comparado desconocido)*
Agustín tiene 7 caramelos. Eugenio tiene 2 caramelos menos que Agustín. ¿Cuántos caramelos tiene Eugenio?
Comparación 4.2. *(Grupo comparado desconocido)*
María tiene 13 cromos. Luis tiene 6 cromos menos que María. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

Comparación 5.1. *(Grupo referente desconocido)*
Agustín tiene 5 caramelos. Tiene 3 caramelos más que Eugenio. ¿Cuántos caramelos tiene Eugenio?
Comparación 5.2. *(Grupo referente desconocido)*
María tiene 9 cromos. Tiene 5 cromos más que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

Comparación 6.1. *(Grupo referente desconocido)*
Agustín tiene 5 caramelos. Tiene 3 caramelos menos que Eugenio. ¿Cuántos caramelos tiene Eugenio?
Comparación 6.2. *(Grupo referente desconocido)*
María tiene 9 cromos. Tiene 6 cromos menos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

Este mismo orden establecido para los problemas de Cambio se ha utilizado para los otros dos tipos de problemas -Combinación y Comparación-.

Después, con los problemas del primer grupo de cada uno de los tipos (*Cambio* -Cambio 3.2., Cambio 5.1. y Cambio 1.2.-, *Combinación* -Combinación 3.2., Combinación 5.1. y Combinación 1.2.- y *Comparación* -Comparación 3.2., Comparación 5.1. y Comparación 1.2.-), se determinó al azar el orden de realización de los problemas para la primera sesión; se procedió de la misma manera con los otros tres grupos para obtener el orden de los problemas en las otras tres sesiones experimentales. El orden de presentación de los problemas de cada sesión se recogen en la tabla 12.2.4.

Las pruebas se pasaron de forma individual por el mismo experimentador, en la misma clase para todos los alumnos y dentro del horario escolar. Cada niño pasó cuatro sesiones experimentales, con las siguientes duraciones medias por sesión: veinticuatro minutos en Educación Infantil; veinte minutos en Primero de E.P.; dieciocho minutos en Segundo de E.P.; y catorce minutos en Tercero de E.P.

Las pruebas fueron pasadas durante el curso 1.993-94. Cada problema era leído dos veces por el entrevistador, pudiendo leerlo también el niño, si lo deseaba. De este modo se pretendía que el nivel de lectura de los niños no influyera en la comprensión del mismo. Las respuestas eran orales, se anotaban en cada protocolo (Ver Anexo nº 1) y se reflejaban tanto las respuestas verbales como las manipulativas que realizaban los niños. Como disponían de lápiz, borrador y de la octavilla donde estaba escrito el problema, algunos preferían realizar la operación, en especial los grupo de 2º y 3º de Educación Primaria. En la mayoría de los casos en los que querían intentarlo y era necesaria la resta “llevándose”, recurrían después a estrategias menos evolucionadas pero más seguras, como usar objetos o contar ayudándose con los dedos. Las respuestas de los niños se clasificaron como correctas o incorrectas, en función únicamente de si la solución del problema era o no exacta.

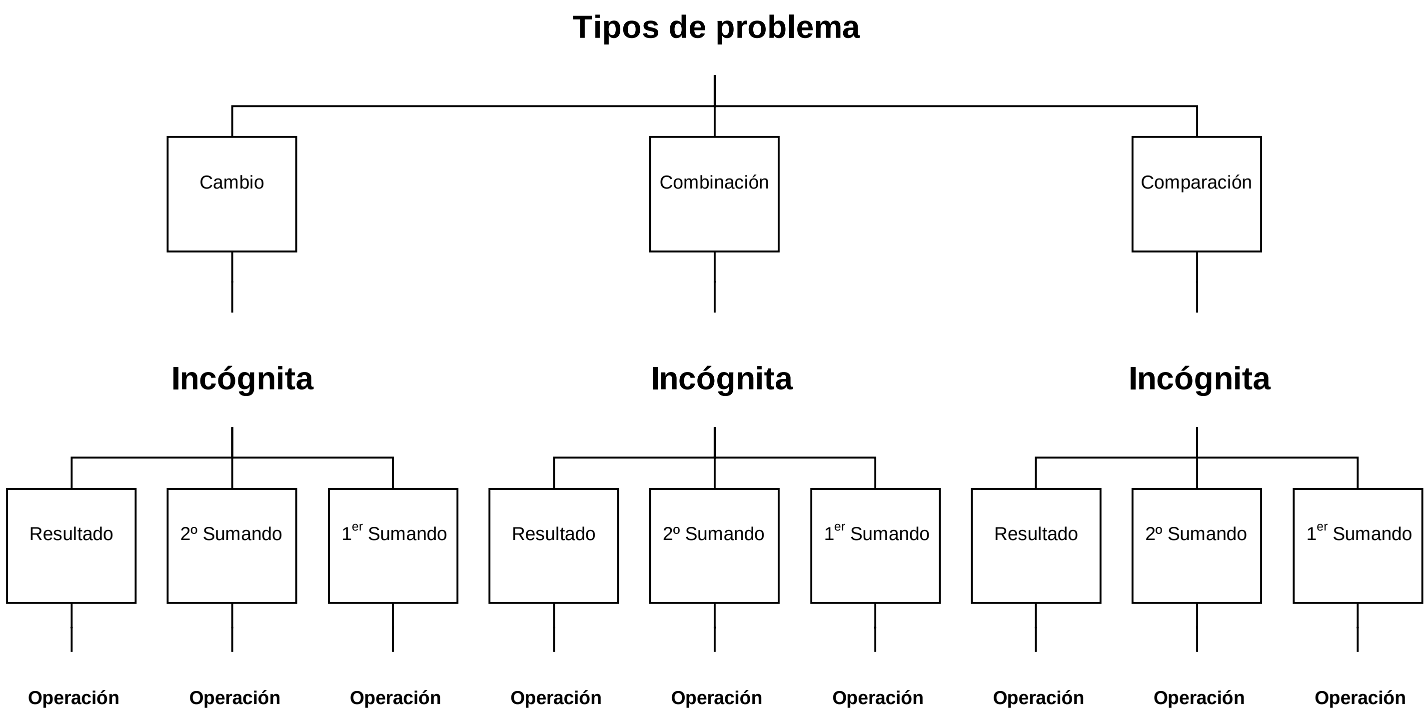
TABLA 12.2.4

1ª Sesión	3ª Sesión
Cambio 3.2.	Combinación 4.1.
Comparación 5.1.	Cambio 2.2.
Cambio 5.1.	Comparación 6.1.
Comparación 1.2.	Combinación 6.1.
Combinación 1.2.	Comparación 2.2.
Cambio 1.2.	Cambio 4.1.
Comparación 3.2.	Cambio 6.1.
Combinación 3.2.	Comparación 4.1.
Combinación 5.1.	Combinación 2.2.

2ª Sesión	4ª Sesión
Combinación 4.2.	Combinación 2.1.
Comparación 3.1.	Combinación 5.2.
Cambio 3.1.	Cambio 2.1.
Comparación 1.1.	Comparación 2.1.
Combinación 1.1.	Combinación 6.2.
Comparación 4.2.	Cambio 6.2.
Cambio 4.2.	Comparación 6.2.
Cambio 1.1.	Cambio 5.2.
Combinación 3.1.	Comparación 5.2.

FIGURA 12.1

DISEÑO EXPERIMENTAL GENERAL



Variable **Sujeto**: Infantil, 1º E.P., 2º E.P., 3º E.P.

El diseño experimental general realizado se puede ver en la figura 12.1. El tratamiento estadístico se ha llevado a cabo en tres fases en función de la variable operación, según consideremos la suma o la resta, bien desde el punto de vista de la estructura semántica del problema, -si es aumento será suma y si es diminución será resta-, bien desde el punto de vista del procedimiento -operación realizada, suma o resta, para resolver el problema-; o bien de considerar si coinciden estructura y procedimiento.

FASE 1ª. Se tiene en cuenta la variable *Tipo de problema* (Cambio, Combinación y Comparación), la variable *Incógnita* en cada una de las tres situaciones en las que puede estar situada (Resultado, 2º Sumando y 1er Sumando) y la variable *Operación* es considerada desde la estructura semántica de los problemas, de tal manera que los problemas de suma corresponden a aquellos problemas a los que hemos asignado un número impar en primer lugar (ver tablas 12.2.1., 12.2.2. y 12.2.3.) y los problemas de resta los que tienen número par. El diseño experimental de esta fase se puede ver en la figura 13.1.

FASE 2ª. Sólo se tienen en cuenta los *problemas de Cambio y de Comparación*. En cuanto a la situación de la *Incógnita* se considera solamente cuando se ubica en el Resultado y en el 1er Sumando en los problemas de Cambio y en el 2º Sumando y 1er Sumando en los de Comparación. La razón para hacerlo es que en las respectivas situaciones utilizadas de la incógnita, tanto en los problemas de Cambio como en los de Comparación, un problema se resuelve mediante suma y el otro mediante resta. Aquí la *Operación* es considerada como el procedimiento que es necesario realizar para resolver el problema. No analizamos los problemas de Combinación porque no cumplen la condición referida antes (que un problema se resuelva sumando y el otro restando) en ninguna de las tres situaciones de la incógnita. Lo mismo acontece en la situación de la incógnita en el 2º Sumando, en los problemas de Cambio y en el Resultado en los de Comparación. En la figura 13.2. se representa el diseño experimental correspondiente a esta Fase 2ª.

FASE 3ª. En este caso no se considera la variable situación de la incógnita. Se utilizan todos los *Tipos de problemas* y la *Operación* está en función de la estructura semántica y del procedimiento, siendo aquélla como en la Fase 1ª (aumento será suma y disminución será resta) y éste como en la Fase 2ª (por la operación que se realiza). Si hay o no coincidencia de ambos, o si son sumas o restas, darán lugar a cuatro grupos: Suma-Suma, Resta-Resta, Suma-Resta y Resta-Suma. La figura 13.3. recoge el diseño experimental de esta fase.

13. ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS DATOS

13.1. FASE PRIMERA

13.1.1. EFECTOS PRINCIPALES ENTRE LOS FACTORES

TABLA 13.1.1.1
Resultados del Anova. Fase 1ª

Fuentes de variación	*F*	*Significación*
Efectos principales	F = 112.676	P < .00
CURSO	F = 180.246	P < .00
OPERACIÓN	F = 0.116	P < .733
INCÓGNITA	F = 62.159	P < .00
TIPO	F = 167.238	P < .00
SEXO	F = 9.412	P < .002
Interacciones de dos factores	F = 6.924	P < .000
CURSO x INCÓGNITA	F = 4.017	P < .001
CURSO x TIPO	F = 14.593	P < .00
CURSO x SEXO	F = 3.749	P < .011
INCÓGNITA x TIPO	F = 21.781	P < .00
Interacciones de tres factores	F = 2.372	P < .000
CURSO x OPERACIÓN x INCÓGNITA	F = 3.330	P < .003
CURSO x INCÓGNITA x TIPO	F = 5.390	P < .000
OPERACIÓN x INCÓGNITA x TIPO	F = 5.006	P < .001
Interacciones de cuatro factores	F = 1.108	P < .298
CURSO x OPERACIÓN x INCÓGNITA x TIPO	F = 1.777	P < .047

Se recogen en esta tabla sólo las interacciones significativas. Los resultados completos figuran en el Anexo 2.

Utilizando el Programa SPSS, hemos aplicado el análisis de varianza mixto 4 Curso (EI. vs 1ºEP vs 2º EP vs 3º EP) x 2 Operación (Suma vs Resta) x 3 Incógnita (Resultado vs Segundo sumando vs Primer sumando) x 3 Tipo de problema (Cambio vs Combinación vs Comparación) x 2 Sexo (Niño vs Niña), encontrando los resultados siguientes: son significativos los efectos principales de los factores: Curso ($F=180.246$, $p < .00$), Incógnita ($F= 62.159$, $p < .00$), Tipo de problema ($F= 167.238$, $p < .00$) y Sexo ($F= 9.412$, $p < .002$). No es significativo el efecto principal del factor Operación ($F= 0.116$, $p < .733$). De forma general, podemos decir que las diferencias de las respuestas dadas por los niños son significativas en función de la edad, de la ubicación de la incógnita, del tipo de problema y si es niño o niña. Sin embargo no hay diferencias significativas en función del tipo de operación (Ver tabla 13.1.1.1.).

Las comparaciones múltiples realizadas con el método de Scheffé muestran los resultados siguientes:

La tabla 13.1.1.2. y la figura 13.1.1.1. nos muestran los resultados referidos al *factor Curso*. En ellas podemos apreciar el aumento progresivo de las medias desde Educación Infantil a 3º de E.P. Sin embargo las diferencias entre los cursos sólo resultan significativas entre los siguientes grupos: Infantil vs 1ºE.P., Infantil vs 2º E.P., Infantil vs 3ºE.P., 1º E.P. vs 3ºE.P. y 2ºE.P. vs 3ºE.P.. Los cursos de Primero y Segundo se comportan de un modo parecido al no existir diferencias significativas entre ellos, como a simple vista podemos observar en la figura 13.1.1.1.

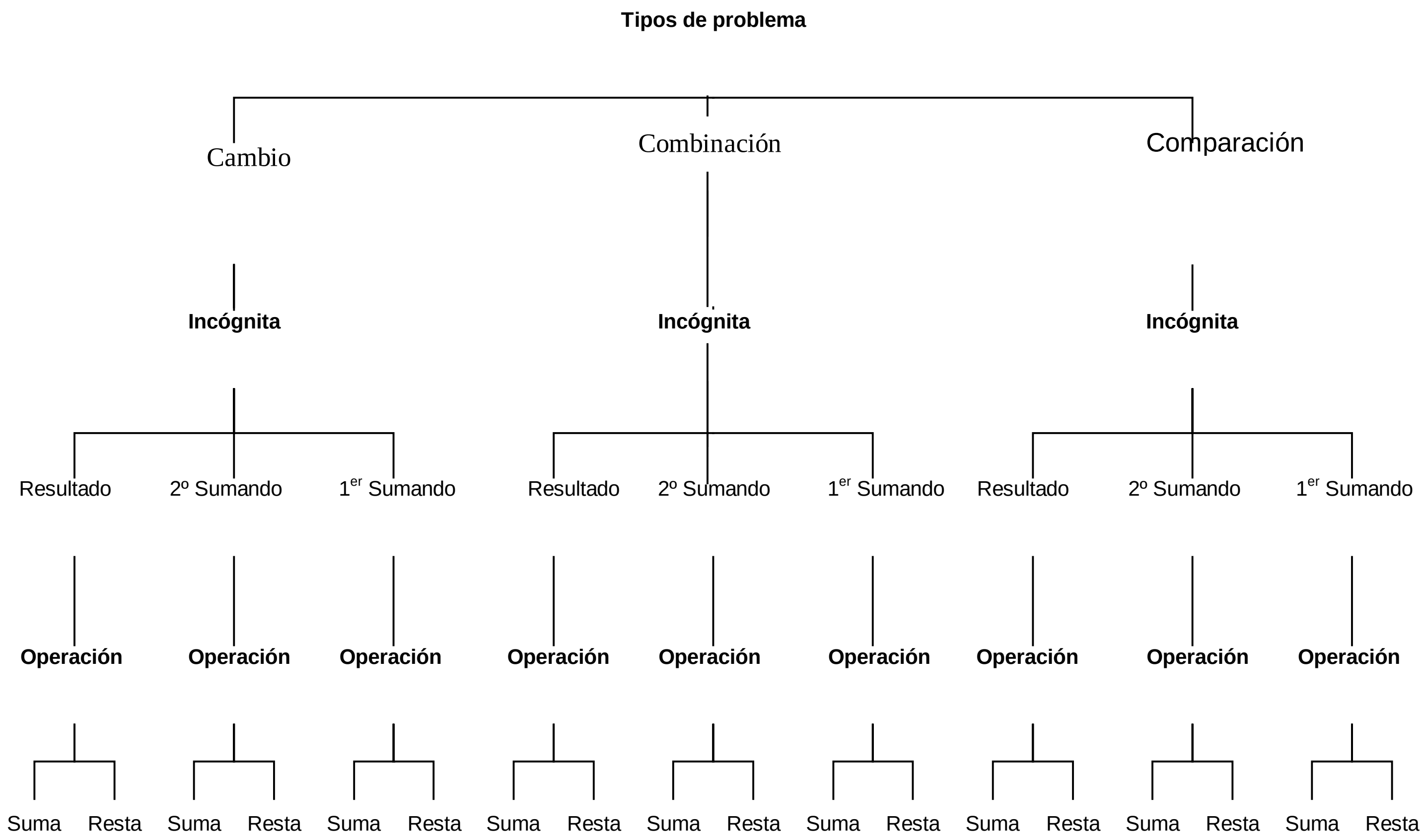
TABLA 13.1.1.2

Medias y Desviaciones típicas por cursos

CURSO	*Educ. Infantil*	*1º E.P.*	*2º E.P.*	*3º E.P.*
Nº de respuestas	348	580	612	781
Medias	0.81	1.34	1.42	1.81
Desviaciones Típicas	(.86)	(.85)	(.76)	(.50)

FIGURA 13.1

FASE 1ª



Tres han sido los subgrupos homogéneos que estadísticamente han sido encontrados y que de menor a mayor número de respuestas efectuadas son: a) Educación Infantil, b) 1ºEP y 2ºEP y c) 3ºEP.

FIGURA 13.1.1.1

Puntuaciones medias por cursos

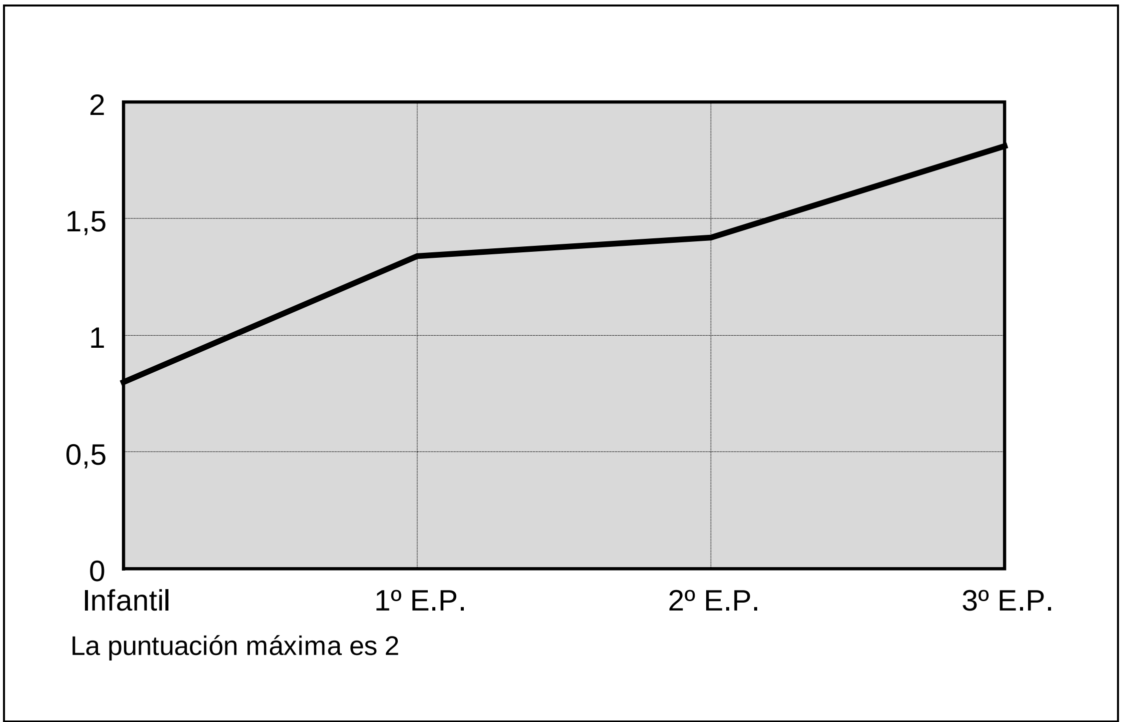


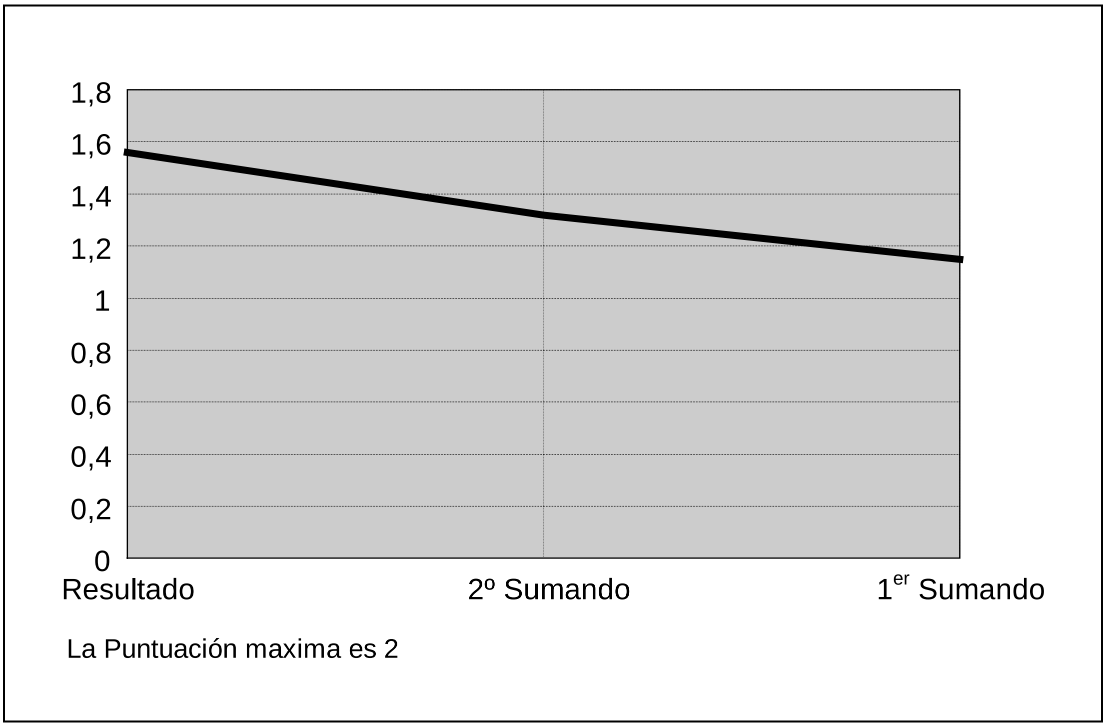
TABLA 13.1.1.3

Medias y Desviaciones típicas según la ubicación de la incógnita

INCÓGNITA	*Resultado*	*2º Sumando*	*1º Sumando*
Nº de respuestas	901	758	662
Medias	1.56	1.32	1.15
Desviaciones Típicas	(.74)	(.84)	(.88)

FIGURA 13.1.1.2

Puntuaciones medias según el lugar de la incógnita



Los resultados del *factor Incógnita* están recogidos en la tabla 13.1.1.3. y en la figura 13.1.1.2. y observamos que hay diferencias entre los distintos lugares en los que puede situarse la incógnita. Es decir, con independencia del grupo de edad, lo más difícil para los niños es resolver los problemas cuando la incógnita está en el 1^er^ Sumando; de una dificultad intermedia resultan aquellos problemas con la incógnita en el 2º Sumando; la mayor facilidad corresponde a cuando dicha incógnita está en el Resultado. Estos datos confirman los hallados en otras investigaciones (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1990; Carpenter, 1986; Riley y cols., 1983).

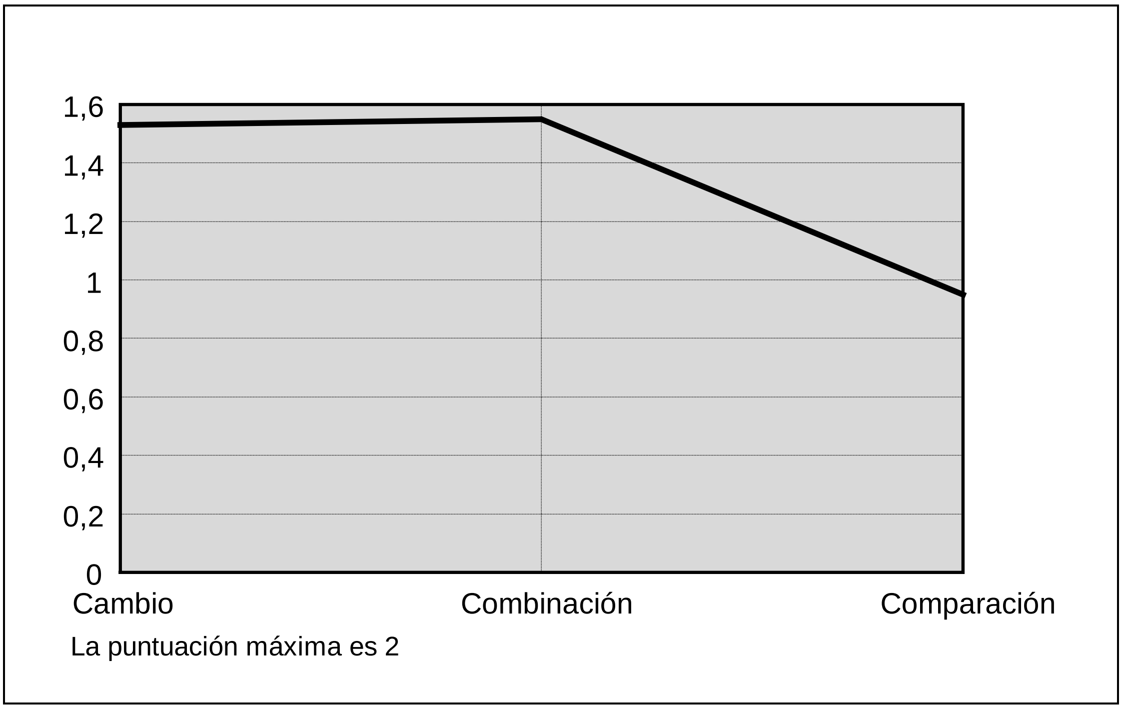
TABLA 13.1.1.4

Medias y Desviaciones típicas según el tipo de problema

TIPO	*Cambio*	*Combinación*	*Comparación*
Nº de respuestas	881	894	546
Medias	1.53	1.55	0.95
Desviaciones Típicas	(.74)	(.72)	(.90)

FIGURA 13.1.1.3

Puntuaciones medias de los tres tipos de problemas



En cuanto al *factor Tipo de problema*, los resultados muestran que no hay diferencias significativas entre problemas de Combinación ($\overline{x}$ = 1.55) y problemas de Cambio ($\overline{x}$ = 1.53) (ver tabla 13.1.1.4. y figura 13.1.1.3.). Sin embargo, sí hay diferencias significativas entre éstos y los problemas de

Comparación ($\overline{x}$ = .95). Es decir, globalmente, presentan similar dificultad para los niños los problemas de Combinación y los de Cambio; siendo los problemas de Comparación los que resultan más difíciles a todos los sujetos.

Estos resultados no están en la línea de las afirmaciones de Weawer (1982) ya que para este autor cabe esperar mejores resultados en los problemas de Cambio que en los de Combinación, porque en los problemas verbales de Cambio subyace una concepción unitaria de la adición (Fuson, 1988) y los problemas verbales de Combinación reflejan una concepción binaria. Por el contrario, otros autores (Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Lindvall e Ibarra, 1980, etc.) no encuentran diferencias entre unos y otros tipos de problemas.

FIGURA 13.1.1.4

Puntuaciones medias por sexo

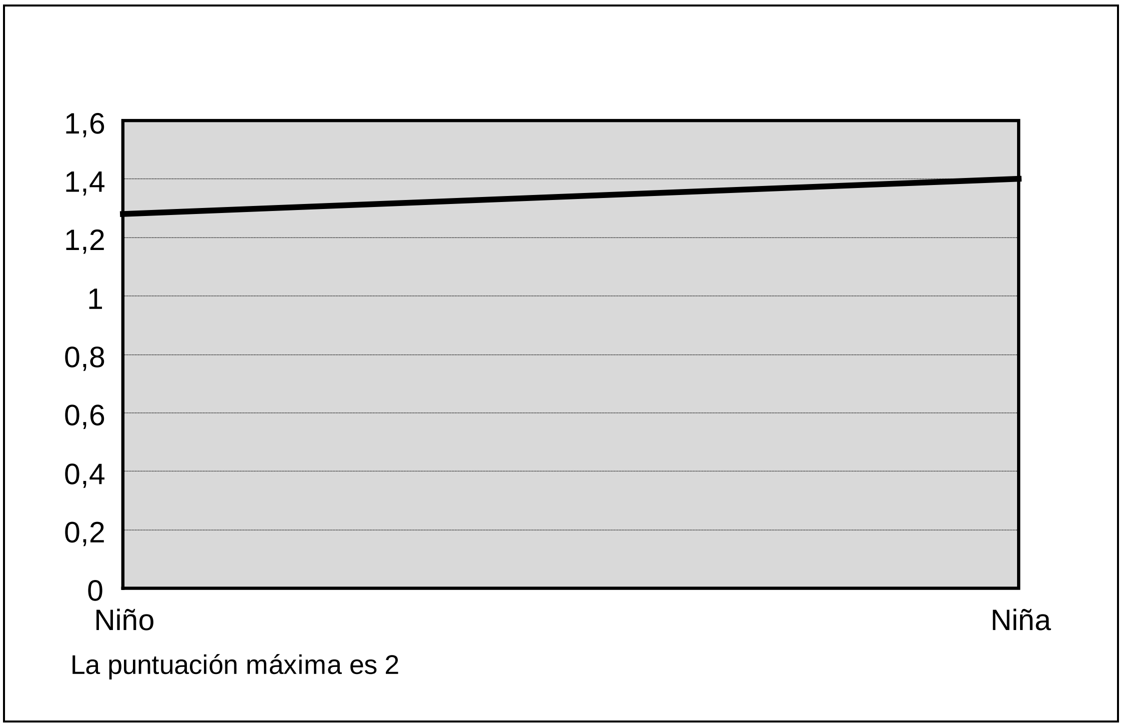


TABLA 13.1.1.5

Medias y Desviaciones típicas de los niños y de las niñas

SEXO	*Niño (46)*	*Niña (50)*
Nº de respuestas	1062	1259
Medias	1.28	1.40
Desviaciones Típicas	(.86)	(.81)

Los datos del *factor Sexo* confirman las diferencias significativas encontradas en los efectos principales de dicho factor. Las niñas ($\overline{x}$ = 1.40) superan a los niños ($\overline{x}$ = 1.28) como podemos apreciar en la tabla 13.1.1.5. y en la figura 13.1.1.4.

Por último, en cuanto al *factor Operación*, los resultados indican que, aunque la media de la operación suma ($\overline{x}$ = 1.49) es superior a la media de la operación resta ($\overline{x}$ = 1.27), esta diferencia no es significativa. (Ver tabla 13.1.1.6. y figura 13.1.1.5.

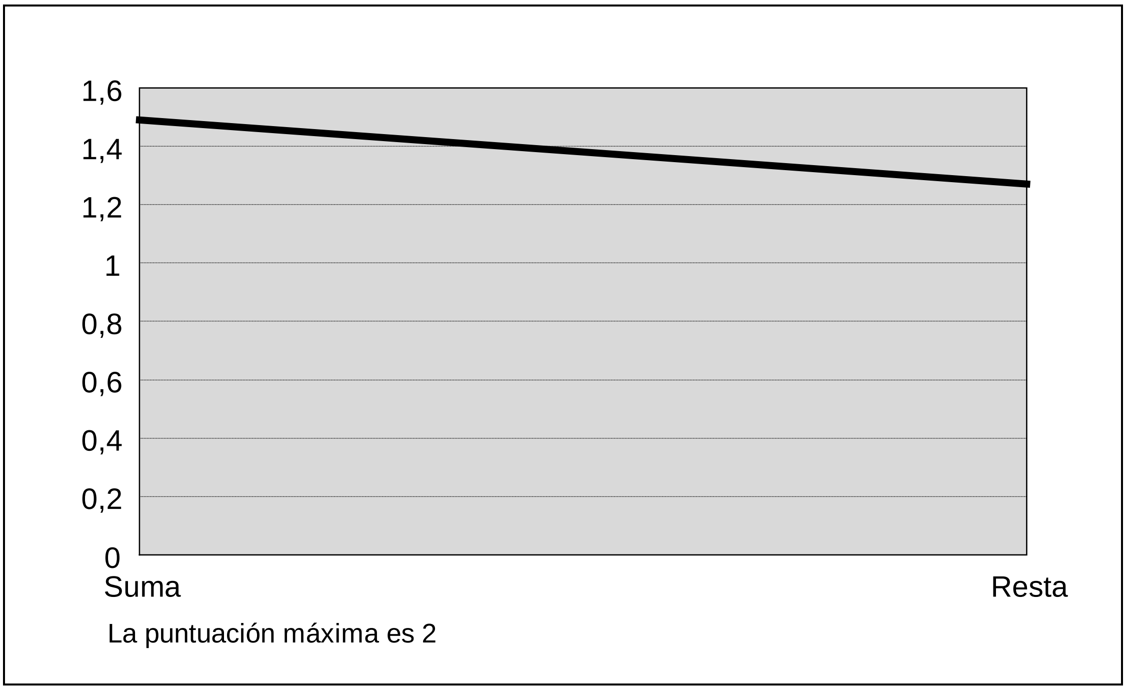
TABLA 13.1.1.6

Medias y Desviaciones típicas del factor operación

OPERACIÓN	*Suma*	*Resta*
Nº de Respuestas	1165	1156
Medias	1.49	1.27
Desviaciones Típicas	(.78)	(.85)

FIGURA 13.1.1.5

Medias y Desviaciones Típicas según la operación



En la tabla 13.1.1.1. recogemos las distintas interacciones significativas entre dos, tres y cuatro factores. Analizaremos sólo las interacciones de tres factores para evitar repeticiones. Dichas interacciones de tres factores son:

Curso x Operación x Incógnita (F = .3330, p < .003)

Curso x Incógnita x Tipo (F = .5390, p < .000)

Operación x Incógnita x Tipo (5.006, p < .001)

El análisis de las interacciones lo llevaremos a cabo mediante la prueba de Scheffé: primero hallaremos los efectos simples de cada factor para cada uno de los niveles de los otros factores y después las comparaciones de interacción.

13.1.2. ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LOS FACTORES CURSO, OPERACIÓN Y UBICACIÓN DE LA INCÓGNITA

TABLA 13.1.2.1

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción Curso (A) x Operación (B) x Incógnita (C)

	$B_1 C_1$	$B_1 C_2$	$B_1 C_3$	$B_2 C_1$	$B_2 C_2$	$B_2 C_3$
A_0	1.25	1.10	.42	1.10	.76	.54
Σ	90	55	30	79	55	39
A_1	1.50	1.53	1.14	1.53	1.18	1.28
Σ	108	103	82	110	85	92
A_2	1.57	1.71	1.24	1.71	1.25	1.32
Σ	113	102	89	123	90	95
A_3	1.92	1.94	1.75	1.94	1.93	1.51
Σ	138	129	126	140	139	109

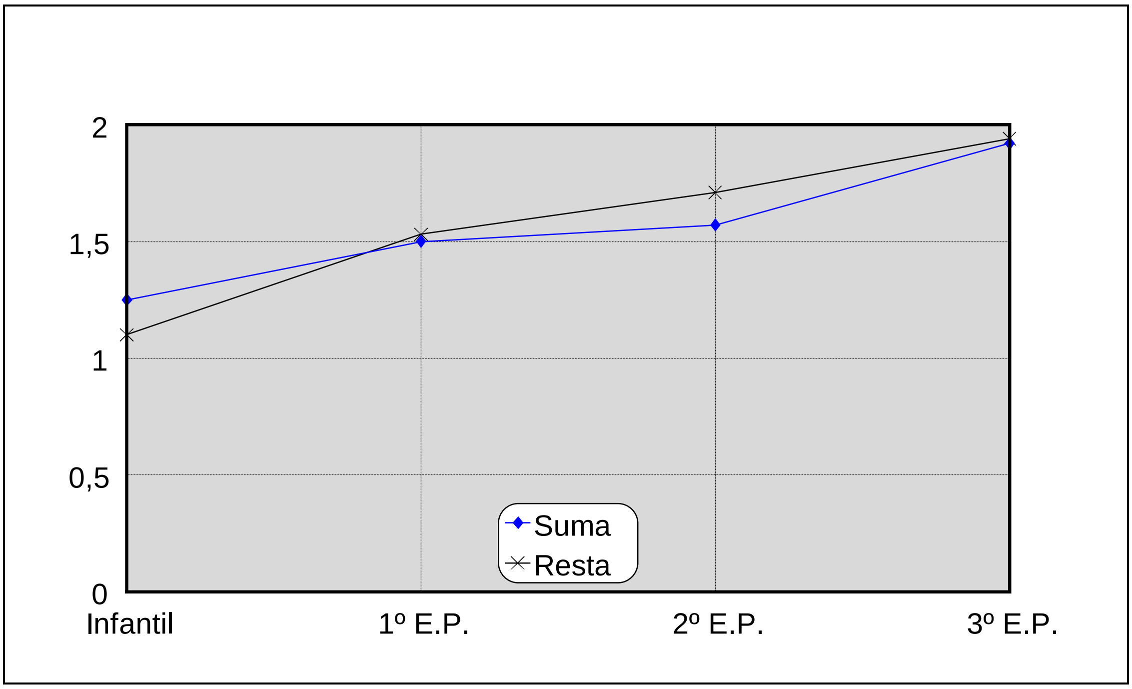
A_0 = Infantil; A_1 = 1º E.P.; A_2 = 2º E.P.; $A_{3=}$ 3º E.P.
B_1 = Suma; B_2 = Resta.
C_1 = Incógnita en el Resultado.
C_2 = Incógnita en el 2º Sumando.
C_3 = Incógnita en el 1er Sumando.

La tabla 13.1.2.1. recoge las medias y sumatorios de la interacción Curso x Operación x Ubicación de la incógnita y que ha sido representada en las figuras 13.1.2.1., 13.1.2.2. y 13.1.2.3.

El análisis de los *efectos simples*, para dicha interacción, muestra que no hay diferencias significativas entre la suma y la resta -tratadas desde la estructura semántica- en ningún grupo de edad: Infantil ($F = .0125$, $p < .9112$), 1º de E.P. ($F = .1159$, $p < .7337$), 2º de E.P. ($F = .0635$, $p < .8012$) y 3º de E.P. ($F = .2326$, $p < .6299$) (Anexo 2, tabla 13.1.2.1.). Por el contrario hay diferencias entre los cursos tanto cuando realizan la operación de sumar como cuando restan: Suma ($F = 63.9345$, $p < .0000$), Resta ($F= 64.2483$, $p < .0000$).

FIGURA 13.1.2.1

Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta por los distintos cursos cuando la incógnita está en el resultado



Igualmente el análisis de los efectos simples del factor Operación revela que no hay diferencias significativas entre la suma y la resta para los distintos lugares que ocupa la incógnita: Resultado ($F = .0286$, $p < .8658$), 2º

Sumando (F = .9921, p < .3197), 1^{er} Sumando (F = .1446, p < .7039); sin embargo, muestra efectos significativos el factor Situación de la Incógnita para cada operación: Suma (F = 19.0404, p < .0000) y Resta (F = 18.9270, p < .0000). Además, el factor Situación de la Incógnita es significativo en todos los Cursos: Infantil (F = 26.4552, p < .0000), 1º de E.P. (F = 4.98, p < .0073), 2º de E.P. (F = 9.7274, p < .0001) y 3º de E.P. (F = 15.0814, p < .0000), como también lo es el factor Curso en todos los niveles del factor Incógnita: Resultado (F = 29.8585, p < .0000), 2º Sumando (F = 52.3801, p = .0000) y 1^{er} Sumando (F = 56.6783, p < .0000). En resumen, para los niños el utilizar la suma o la resta (entendidas desde la estructura semántica) no es significativo dentro de cada curso y tampoco dentro de cada una de las tres situaciones en que puede estar situada la incógnita. Sin embargo, el comportamiento de los niños es significativamente distinto tanto para la suma como para la resta según en el curso que estén y según dónde esté situada la incógnita. Además es significativa la diferencia de las medias de la situación de la incógnita dentro de cada curso y también en cada situación de la incógnita hay diferencias significativas entre los cursos.

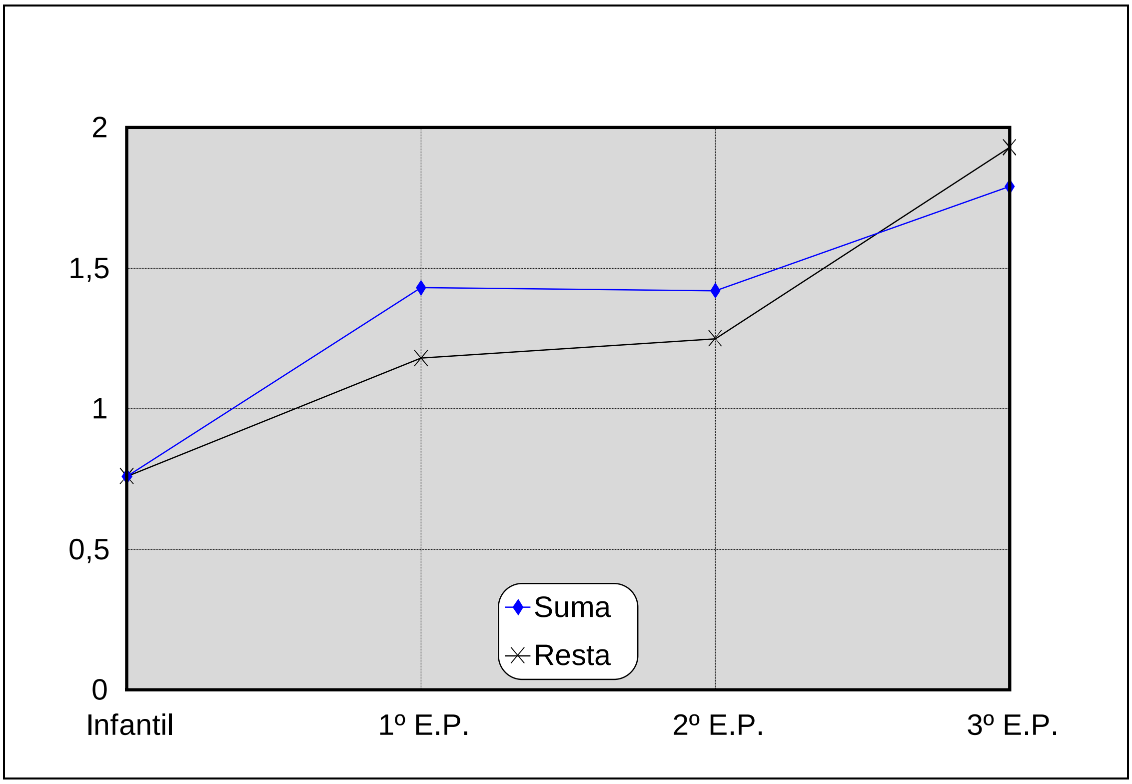
Para completar el análisis de la interacción: Curso x Operación x Incógnita y como nos interesa saber qué ocurre con respecto al factor Operación, realizamos dos tipos de comparaciones:

1º) Entre los distintos niveles del factor Operación en los factores Curso e Incógnita (con el mismo peso las distintas situaciones de la incógnita). Esta comparación revela (Anexo 2, tabla 13.1.2.2.) que no hay diferencias significativas en cuanto a la Operación suma/Operación resta entre ninguno de los cursos tomados dos a dos.

2º) Entre los distintos niveles de los factores Curso e Incógnita (igual peso para todas las situaciones) en el factor Operación (Anexo 2, tabla 13.1.2.3.) encontramos diferencias significativas entre todos los cursos, excepto entre 1º y 2º de E.P., tanto con el factor Operación globalmente ($F = 1.8234$, $p < .1773$), como en el nivel de suma ($F = .4306$, $p < .5120$) y en el nivel de resta ($F = 1.5650$, $p < .2116$). Estos resultados no hacen más que confirmar los obtenidos en las comparaciones múltiples, donde los cursos de 1º y 2º de E.P. no muestran diferencias significativas.

FIGURA 13.1.2.2

Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta por los distintos cursos cuando la incógnita está en el segundo sumando



Igualmente nos interesa saber si existen diferencias entre los niveles del factor Operación, en el factor Curso y en cada Situación de la Incógnita, para lo cual realizamos los contrastes siguientes:

1) Entre los niveles del factor Operación, tomando los Cursos dos a dos y las Situaciones de la Incógnita dos a dos. Esta comparación (ver en Anexo

2, tabla 13.1.2.4.) revela que no hay diferencias significativas entre los dos niveles del factor Operación en ninguna pareja de Cursos y de situaciones de la Incógnita.

2) Entre los niveles del factor Operación, tomando los Cursos dos a dos y las Situaciones de la Incógnita de una en una. En este caso (ver Anexo 2, tabla 13.1.2.5.), encontramos únicamente diferencias significativas, al 5%, ($F = 4.7670$, $p < .0298$) entre la suma y la resta para los cursos Primero y Segundo de E.P., cuando la Incógnita está situada en el 2º Sumando (ver figura 13.1.2.2.).

Finalmente, conviene ver si hay diferencias entre los Cursos en el factor Operación suma/resta en cada una de las Situaciones de la Incógnita. Para ello realizamos las dos comparaciones siguientes:

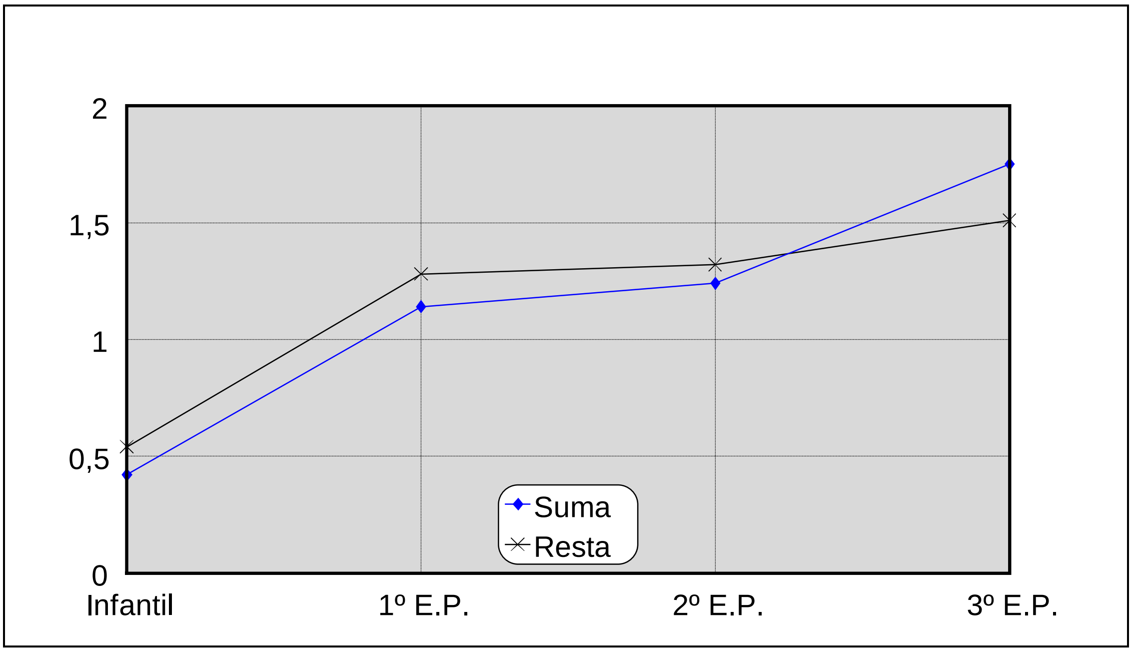
1) Entre los distintos niveles del factor Curso, en el factor Operación suma/resta y en cada una de las Situaciones de la Incógnita. Los resultados ponen de relieve que únicamente entre los Cursos 1º y 2º de E:P. no hay diferencias significativas en cada una de las Situaciones de la Incógnita: en el Resultado ($F = 2.2469$, $p < .1350$), en el 2º Sumando ($F = .0834$, $p < .7730$) y en el 1er Sumando ($F = .4760$, $p < .4908$) (ver Anexo 2, tabla 13.1.2.6.) y sí entre los demás cursos.

2) Entre los distintos niveles del factor Curso, en cada uno de los niveles del factor Operación y en cada una de las Situaciones de la Incógnita. Estas comparaciones (figuras 13.1.2.1., 13.1.2.2. y 13.1.2.3. y en Anexo 2, tabla 13.1.2.7.), manifiestan, con respecto a la Suma, que cuando la incógnita está en el Resultado, son significativas las diferencias de medias entre los cursos: Infantil vs Segundo ($F = 5.7228$, $p < .0181$); Infantil vs Tercero ($F = 34.9538$, $p < .0000$); Primero vs Tercero ($F = 16.5888$, $p < .0001$); y Segundo vs Tercero ($F = 14.9764$, $p < .0002$). En las otras dos situaciones de la Incógnita todos los Cursos son significativos entre sí, menos 1º y 2º de E.P.

En cuanto a la Resta, se mantienen las diferencias no significativas de 1º y 2º de E.P. en la situación Resultado vs 2º Sumando, pero cambia cuando la Incógnita está en el 1er Sumando, siendo significativas las diferencias entre Infantil vs Primero ($F = 30.0044$, $p < .0000$); Infantil vs Segundo ($F = 37.9312$, $p < .0000$); e Infantil vs Tercero ($F = 65.4193$, $p < .0000$).

FIGURA 13.1.2.3

Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta por los distintos cursos cuando la incógnita está en el 1er sumando



Para concluir este apartado, resaltamos los resultados siguientes:

1) Cuando la Incógnita se ubica en el Resultado, que es la posición más fácil para los niños y la tarea es de sumar, las ejecuciones de los alumnos de Infantil ($\bar{x} = 1.25$) (tabla 13.1.2.1.) alcanzan niveles no diferentes significativamente de los de 1º de E.P. ($\bar{x} = 1.50$). (Anexo 2, tabla 13.1.2.7bis).

2) Cuando la Incógnita está en el 1er Sumando, que es la posición más

difícil para los alumnos y la operación es de restar, las respuestas de los niños de Infantil ($\bar{x}$ = .54) son significativamente diferentes de los otros tres grupos de Primaria: 1º de E.P. ($\bar{x}$ = 1.28), 2º de E.P. ($\bar{x}$ = 1.32) y 3º de E.P. ($\bar{x}$ = 1.51). Sin embargo, no hay diferencias significativas entre los cursos de Primaria. (Anexo 2, tabla 13.1.2.7bis).

13.1.3. ANÁLISIS DE LAS RELACIONES DE LOS FACTORES CURSO, UBICACIÓN DE LA INCÓGNITA y TIPO DE PROBLEMA

Las medias y sumatorios de la interacción Curso x Situación de la incógnita x Tipo de problema se recogen en la tabla 13.1.3.1. y la representación gráfica de los tres tipos de problemas -Cambio, Combinación y Comparación- se puede ver en las figuras 13.1.3.1., 13.1.3.2. y 13.1.3.3., respectivamente.

Respecto a esta interacción Curso x Lugar de la Incógnita x Tipo de Problema, el análisis de los *efectos simples* del factor Curso en todos los niveles del factor Tipo de Problema como los del factor Tipo de Problema en los niveles del factor Curso son significativos (Anexo 2, tabla 13.1.3.1.).

Igualmente el análisis de los efectos simples revela que hay diferencias significativas tanto del factor Lugar de la Incógnita en todos los niveles del factor Tipo de Problema: Cambio ($F = 44.6539$, $p < .0000$), Combinación ($F = 36.6107$, $p < .0000$) y Comparación ($F = 5.9547$, $p < .0028$) (Anexo, tabla 13.1.3.1.) como del factor Tipo de Problema en todos los niveles del factor Lugar de la Incógnita: en el Resultado ($F = 153.6079$, $p < .0000$), en el 2º Sumando ($F = 13.0338$, $p < .0000$) y en el 1er ($F = 31.2182$, $p < .0000$).

TABLA 13.1.3.1

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción Curso (A) x Situación de la Incógnita (C) x Tipo de Problema(D)

	C_1D_1	C_2D_1	C_3D_1	C_1D_2	C_2D_2	C_3D_2	C_1D_3	C_2D_3	C_3D_3
A_0	1.73	1.21	0.35	1.71	0.73	1.00	0.08	0.35	0.08
Σ	83	58	17	82	35	48	4	17	4
A_1	1.92	1.50	1.38	1.96	1.42	1.52	0.67	1.00	0.73
Σ	92	72	66	94	68	73	32	48	35
A_2	1.83	1.54	1.40	1.90	1.19	1.40	1.19	1.27	1.04
Σ	88	74	67	91	57	67	57	61	50
A_3	1.96	1.88	1.67	1.98	1.92	1.92	1.85	1.79	1.31
Σ	94	90	80	95	92	92	89	86	63

A_0= Infantil; A_1 = 1º E.P.; A_2 = 2º E.P.; A_3 = 3º E.P.
C_1 = Incógnita en el Resultado.
C_2 = Incógnita en el 2º Sumando.
C_3= Incógnita en el 1^er^ Sumando.
D_1 = Cambio, D_2 = Combinación, D_3 = Comparación.

Además, también son significativos los efectos simples del factor Tipo de Problema en todos los niveles de factor Curso: Infantil ($F = 79.4875$, $p < .0000$), 1º de E.P. ($F = 55.9701$, $p < .0000$), 2º de E.P. ($F = 12.8441$, $p < .0000$) y 3º de E.P. ($F = 12.6838$, $p < .0000$). E igualmente son significativos los efectos simples del factor Curso en todos los niveles del factor Tipo de Problemas: Cambio ($F = 29.2201$, $p < .0000$), Combinación ($F = 34.982$, $p < .0000$) y Comparación ($F = 109.5131$, $p < .0000$). En consecuencia, en todos los cursos el rendimiento de los niños está determinado por el Lugar de la Incógnita y por el Tipo de Problema.

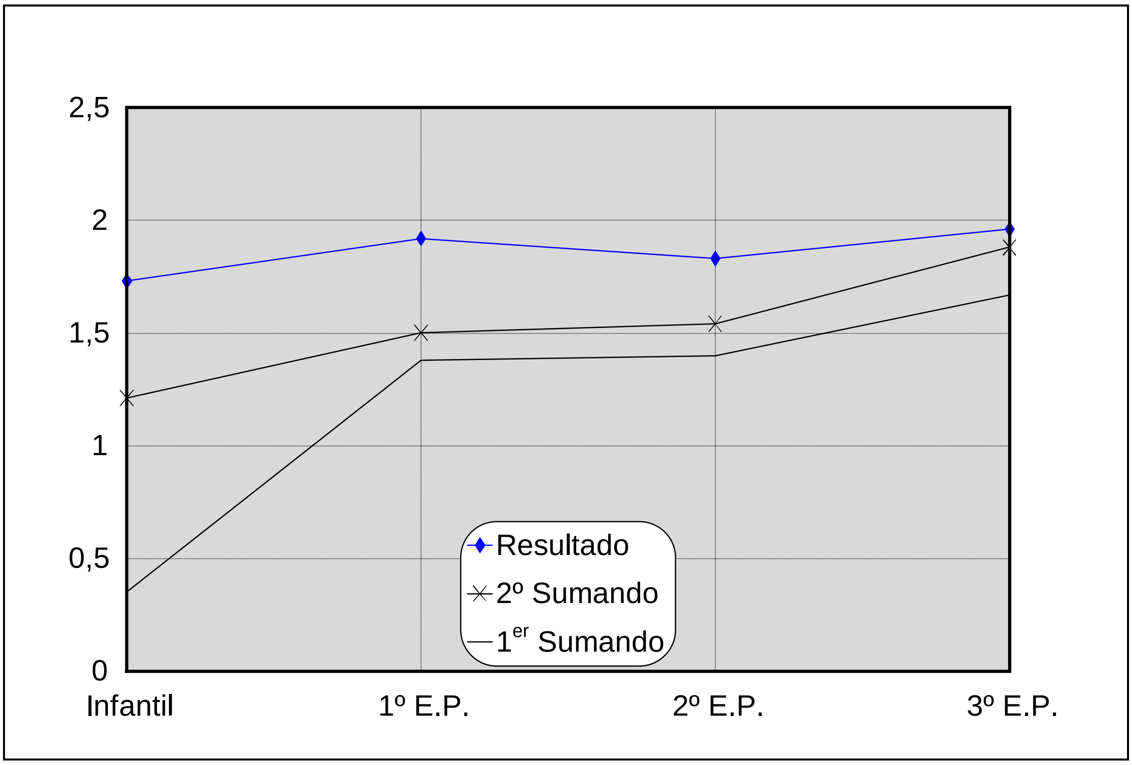
Por otra parte, las comparaciones de interacción, realizadas con la prueba de Scheffé, entre los distintos niveles del factor Curso en los factores Lugar de la Incógnita y Tipo de Problemas, muestran (Anexo 2, tabla 13.1.3.2.) diferencias significativas entre todos los cursos, excepto entre los cursos 1º y 2º de E.P.: Infantil vs 1º de E.P. ($F = 85.3777$, $p < .0000$), Infantil vs 2º de E.P. ($F = 121.8481$, $p < .0000$), Infantil vs 3º E.P. ($F = 438.3555$, $p <.0000$), 1º E.P. vs 3º E.P. ($F = 96.8116$, $p < .0000$) y 2º E.P. vs 3º E.P. ($F = 79.5828$, $p < .0000$). En cuanto a las comparaciones entre los distintos niveles de los factores Lugar de la Incógnita y Tipo de Problemas en el factor Curso (Anexo 2, tabla 13.1.3.3.), seguimos encontrando diferencias significativas entre la Incógnita en el Resultado vs 2º Sumando ($F = 28.5058$, $p < .0000$), Incógnita en el Resultado vs 1er Sumando ($F = 10.9050$, $p < .0010$) e Incógnita en el 2º Sumando vs 1er Sumando ($F = 75.5473$, $p < .0000$).

Para precisar en qué lugares de la Incógnita y en qué tipo de problemas se encuentran las diferencias entre los cursos, realizamos comparaciones de interacciones con la prueba Scheffé.

a) Entre los distintos niveles del factor Curso en el factor Lugar de la Incógnita, dando el mismo peso a todos los Tipos de Problemas. Siguen siendo significativas las diferencias entre los distintos lugares de la Incógnita para los distintos Cursos entre sí, excepto entre 1º y 2º de E.P. (Anexo 2, tabla 13.1.3.4).

FIGURA 13.1.3.1

Puntuaciones obtenidas según la ubicación de la incógnita en los problemas de Cambio por los distintos cursos

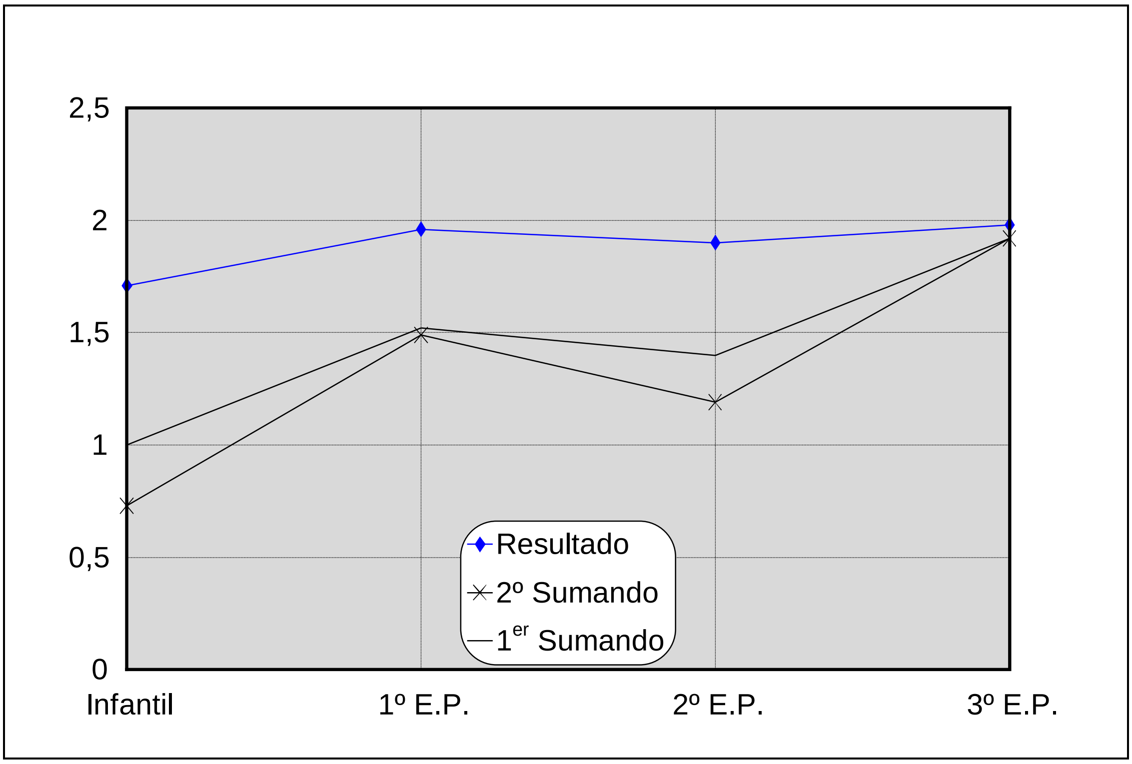


b) Entre los distintos niveles del factor Curso en el factor Lugar de la Incógnita, pero en cada uno de los diferentes Tipos de Problemas. Este segundo análisis nos matiza más las significaciones, aunque con pequeñas diferencias respecto a las comparaciones comentadas. Efectivamente, las diferencias siguen siendo significativas para los diferentes cursos entre sí, en los lugares de la Incógnita, Resultado vs 2º Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.5.) en los tipos de problemas de Combinación y de Comparación, con la excepción que venimos encontrando, entre los cursos de 1º y 2º de E.P. (figuras 13.1.3.2 y 13.1.3.3.). Sin embargo en los problemas de Cambio, (figura 13.1.3.1.) las diferencias entre los Cursos, Infantil vs 1º de E.P. ($F = 5.9664$, $p < .0155$) e Infantil vs 2º de E.P. ($F = 5.2878$, $p < 0.0226$), son significativas sólo al 5%.

Para las situaciones de la incógnita Resultado vs 1er Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.6.), sólo los problemas de Combinación siguen manifestando diferencias significativas de todos los Cursos entre sí, menos entre 1º y 2º de E.P. En los problemas de Cambio, además de no existir diferencia significativa entre 1º y 2º de E.P., tampoco la hay entre 1º y 3º de E.P. Y, en cuanto a los problemas de Comparación, todas las diferencias entre los cursos son significativas a un nivel de significación de 1%.

FIGURA 13.1.3.2

Puntuaciones obtenidas según la ubicación de la incógnita en los problemas de Combinación por los distintos cursos



Por último, el análisis en las situaciones de la Incógnita 2º Sumando vs 1er Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.7.,) en cada uno de los Tipos de

Problemas refleja lo siguiente: los problemas de Cambio y Combinación , mantienen las diferencias no significativas entre los cursos 1º de E.P y 2º de E.P. y las significativas entre sí, para el resto de los cursos. En cambio, con los problemas de Comparación todos los grupos obtienen diferencias significativas entre sí, incluso 1º de E.P. vs 2º de E.P, aunque estos dos últimos cursos a un nivel de significación del 5%.

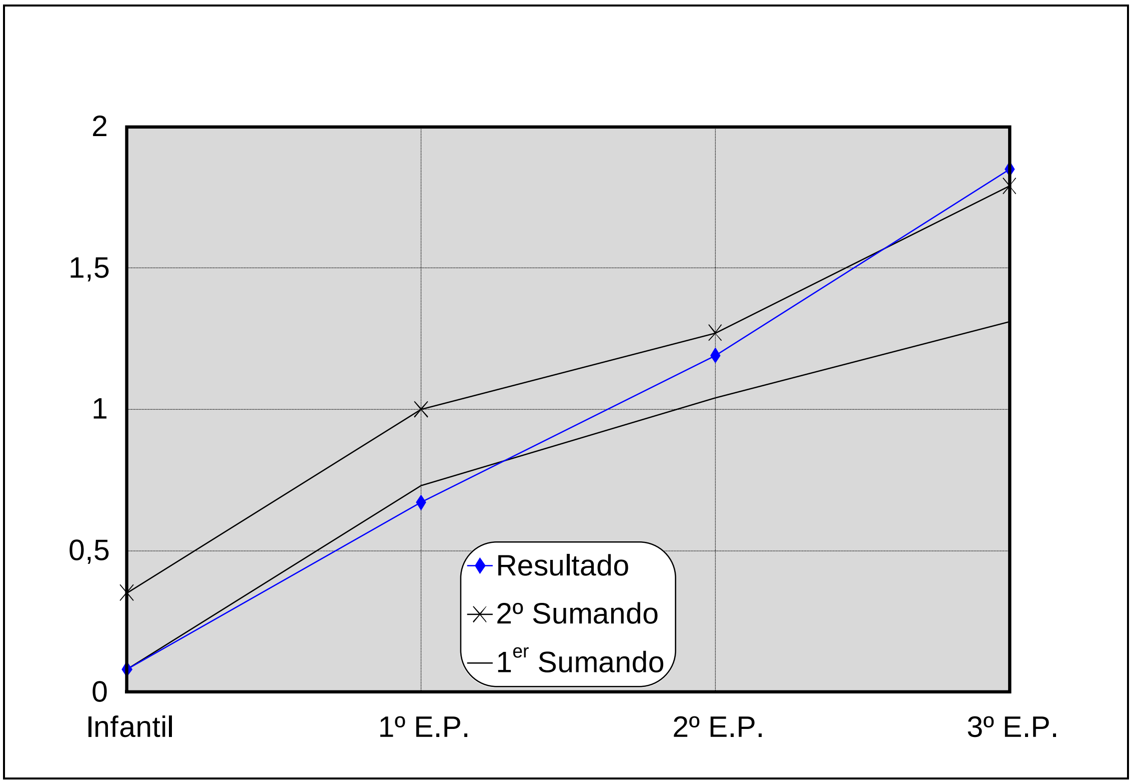
Por otro lado, para analizar las diferencias entre el factor Lugar de la Incógnita en el factor Grupo y en cada Tipo de Problema, realizamos dos tipos de comparaciones:

a) Entre los distintos niveles del factor Lugar de la Incógnita en el factor Curso, dando el mismo peso a todos los Tipos de Problemas (Anexo 2, tabla 13.1.3.8.). Los resultados revelan que hay diferencias significativas entre las situaciones de la incógnita Resultado vs 2º Sumando en todos los Cursos entre sí, todos al nivel de significación de 1% , menos para 1º y 3º de E.P. que es significativa al 5%. Cuando se analizan las diferencias de medias entre la incógnita en el Resultado vs 1er Sumando, siguen existiendo diferencias significativas en todos los Cursos entre sí. Y por último, para la incógnita en el 2º Sumando vs 1er Sumando, entonces, son 1º y 2º de E.P. los únicos cursos que son no significativos.

b) Entre los distintos niveles del factor Lugar de la Incógnita en el factor Curso, pero en cada uno de los diferentes Tipos de Problemas. Estos contrastes de interacción ponen de relieve lo siguiente:

FIGURA 13.1.3.3

Puntuaciones obtenidas según la ubicación de la incógnita en los problemas de Comparación por los distintos cursos



Encontramos diferencias significativas entre la incógnita en el Resultado vs 2º Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.9.) para todos los cursos entre sí en los problemas de Cambio y Combinación, estas diferencias se reducen sólo a los cursos Infantil vs 1º de E.P. ($F = 7.8893$, $p < .0055$) en los problemas de Comparación.

Los contrastes entre la incógnita en el Resultado vs 1er Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.10.) para los problemas de Cambio y los de Combinación siguen siendo significativos entre todos los grupos; sin embargo en los problemas de Comparación, sólo encontramos diferencias significativas entre los cursos: Infantil vs 3º de E.P. ($F = 4.1513$, $p < .0430$) y 2º de E.P. vs 3º de E.P. ($F = 9.1367$, $p < .0029$).

Las diferencias halladas entre las Situaciones de la Incógnita en el 2ºSumando vs 1er Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.11.) ponen de manifiesto que cada uno de los diferentes Tipos de Problemas se comportan de forma distinta. En los problemas de Cambio, se encuentran diferencias significativas entre los cursos: Infantil vs 1º de E.P. ($F = 15.9331$, $p < .0001$), Infantil vs 2º de E.P. ($F = 18.2400$, $p < .0000$) e Infantil vs 3º de E.P. ($F = 21.3031$, $p < .0000$). Con relación a los problemas de Combinación, las diferencias son significativas sólo entre los cursos Infantil vs 2º de E.P. ($F = 3.9939$, $p < .0471$). Por último, en los problemas de Comparación existen diferencias significativas entre todos los cursos.

Para concluir, podemos decir de manera genérica que el Lugar de la Incógnita y el Tipo de Problema influyen de forma significativa en los resultados obtenidos por los niños de todos los Cursos; de forma más detallada, podemos resaltar especialmente las siguientes conclusiones:

Primera: no hay diferencias entre los Cursos 1º y 2º de E.P. referidas a los rendimientos entre las distintas Situaciones de la Incógnita.

Segunda: en una información más matizada, encontramos diferencias en cada Tipo de Problema:

En los problemas de Cambio (figura 13.1.3.1.), hay diferencias significativas en las comparaciones entre las distintas Situaciones de la Incógnita, menos para el contraste 2º Sumando vs 1er Sumando, entre Infantil y todos los Cursos de E. Primaria (Anexo 2, tabla 13.1.3.9.bis).

En los problemas de Combinación (figura 13.1.3.2.), las diferencias no son significativas entre ningún Curso, en los contrastes 2º Sumando vs 1er Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.10.bis).

Por último, en los problemas de Comparación (figura 13.1.3.3.), los resultados son opuestos, en general, a los de los Problemas de Cambio y

Combinación; hay diferencias significativas precisamente entre 2ºSumando vs 1er Sumando (Anexo 2, tabla 13.1.3.11.bis).

13.1.4. ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LOS FACTORES OPERACIÓN, UBICACIÓN DE LA INCÓGNITA Y TIPO DE PROBLEMA

La tabla 13.1.4.1. recoge las medias y sumatorios de la interacción Operación x Situación de la Incógnita x Tipo de Problema y las figuras 13.1.4.1., 13.1.4.2. y 13.1.4.3. muestran la representación gráfica de la interacción según los tres tipos de problemas: Cambio, Combinación y Comparación.

TABLA. 13.1.4.1

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción Operación (B) x Situación de la Incógnita (C) x Tipo de Problema(D)

	C_1D_1	C_2D_1	C_3D_1	C_1D_2	C_2D_2	C_3D_2	C_1D_3	C_2D_3	C_3D_3
B_1	1.95	1.51	1.18	1.91	1.29	1.43	0.82	1.25	0.80
Σ	187	145	113	183	124	137	79	120	77
B_2	1.77	1.55	1.22	1.86	1.33	1.49	1.07	0.96	0.78
Σ	170	149	117	179	128	143	103	92	75

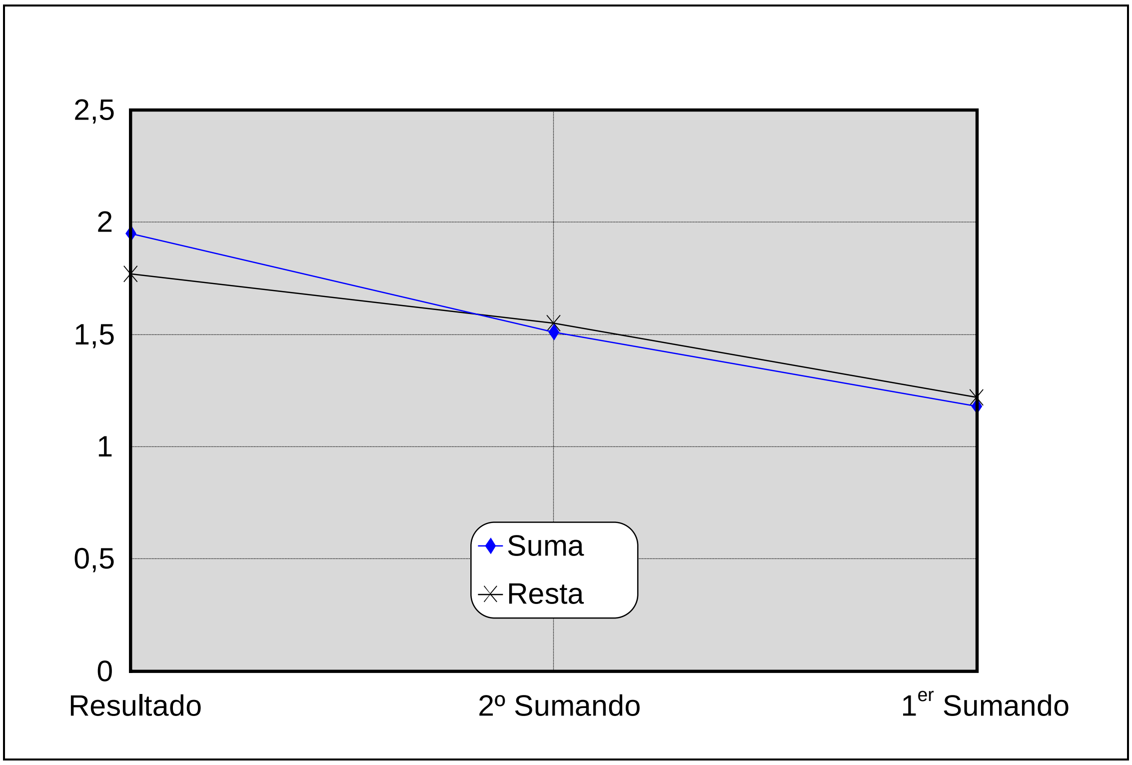
B_1= Suma; B_2 = Resta.
C_1 = En el Resultado; C_2 = En el 2º Sumando; C_3 = En el 1er Sumando.
D_1 = Cambio; D_2 = Combinación; D_3 = Comparación.

El análisis de los efectos simples para esta interacción revela la existencia de efectos no significativos del factor Operación en todos los niveles del factor Lugar de la Incógnita. En cambio sí es significativa la diferencia entre las distintas Situaciones de la Incógnita para cada operación (ver interacción Curso x Operación x Lugar de la Incógnita). También son significativos los efectos simples del factor Incógnita para todos los niveles del factor Tipo de Problema y viceversa. El factor Tipo de Problema es significativo en todos los niveles del factor Lugar de la Incógnita, tal como indicamos en el análisis de la interacción anterior (Curso x Lugar de la Incógnita x Tipo de Problema). Y, además, son significativos los efectos simples del factor Tipo de Problema en todos los niveles de factor Operación: Suma ($F = 134.2918$, $p = .0000$) y Resta ($F = 43.8703$, $p < .0000$). Pero en cuanto a los efectos simples del factor Operación en los distintos niveles del factor Tipo de problema, encontramos que sólo existen diferencias significativas en los problemas de Cambio ($F = 10.3253$, $p < .0015$) (Anexo 2, tabla 13.1.4.1). Es decir, la resolución correcta de un problema depende del Lugar de la Incógnita y del Tipo de Problema, excepto en los problemas de Cambio, más que de la operación, entendida desde el punto de vista de la estructura semántica (ya vimos, en el análisis de los efectos principales, que el factor Clase de Operación no era significativo).

Por otra parte comparando los niveles del factor Operación, en cada nivel del factor Lugar de la Incógnita y en cada nivel del factor Tipo de Problema, encontramos diferencias significativas entre la operación suma y resta en la Situación de la Incógnita en el Resultado, cuando se trata de problemas de Cambio ($F = 10.3253$, $p < .0015$). De igual modo también resulta significativo el contraste en la Situación de la Incógnita en el 2º Sumando, en los problemas de Comparación ($F = 5.2480$, $p < .0231$) (Anexo 2, tabla 13.1.4.3.). Las demás comparaciones fueron no significativas.

FIGURA 13.1.4.1

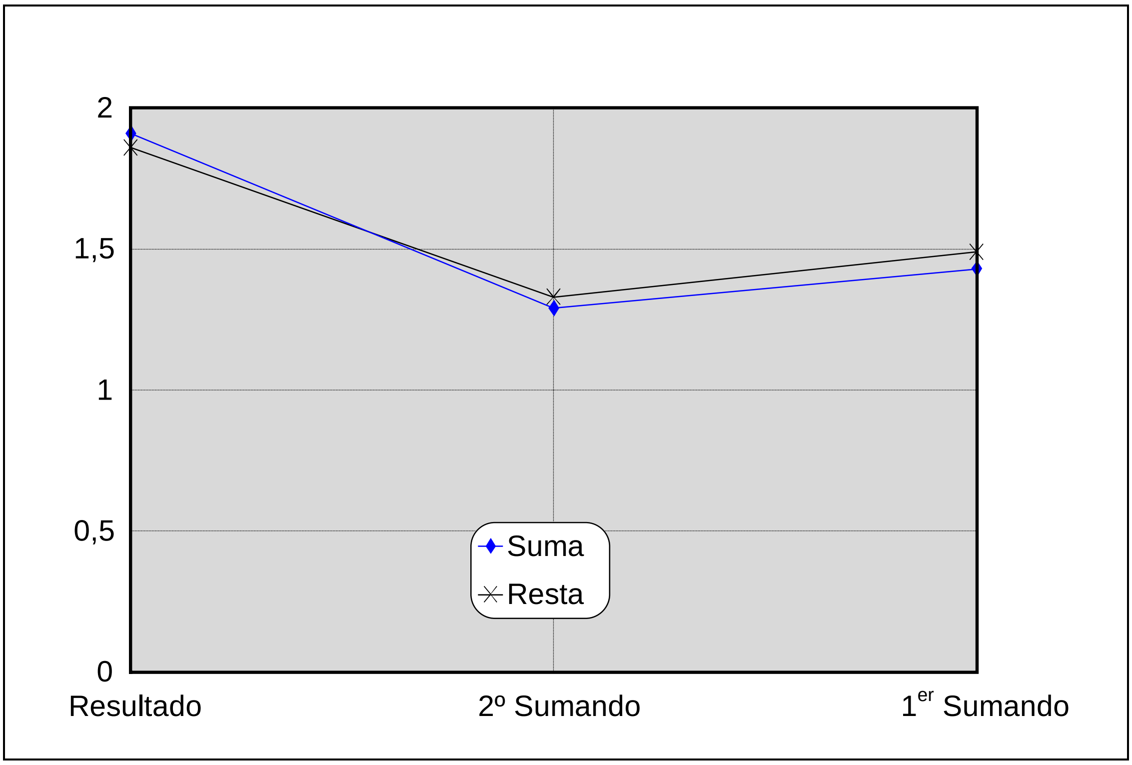
Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta, según la ubicación de la incógnita en los problemas de Cambio



Igualmente, contrastando los distintos niveles del factor Incógnita, en el factor Operación y para cada nivel del factor Tipo de Problemas, encontramos diferencias significativas entre la Incógnita en el Resultado vs 2º Sumando en los problemas de Cambio ($F = 30.1363$, $p < .0000$) y en los problemas de Combinación ($F = 77.7939$, $p < .0000$). También existen diferencias significativas entre el Resultado vs 1er Sumando, en los problemas de Cambio ($F = 95.6869$, $p < .0000$) y en los de Combinación ($F = 49.4945$, $p < .0000$). Las diferencias entre 2º Sumando vs 1er Sumando son significativas en los problemas de Cambio ($F = 16.9572$, $p < .0000$) y en los problemas de Comparación ($F = 11.9541$, $p < .0006$) (Anexo 2, tabla 13.1.4.10).

FIGURA 13.1.4.2

Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta, según la ubicación de la incógnita en los problemas de Combinación



Aún más detalladamente, las comparaciones en cada uno de los niveles del factor Operación, (suma y resta), entre los distintos niveles del factor Incógnita y Tipo de problemas, encontramos, con respecto a la Operación de suma, diferencias significativas entre todos los lugares de la incógnita entre sí: Resultado vs 2º Sumando ($F = 10.0048$, $p < .0016$), Resultado vs 1er Sumando ($F = 38.3546$, $p < .0000$) y 2º Sumando vs 1er Sumando ($F = 9.0495$, $p < .0027$). En el nivel de resta sólo son significativas las diferencias entre el Resultado vs 2º Sumando ($F = 19.2391$, $p < .0000$) y el Resultado vs 1er Sumando ($F = 37.0752$, $p < .0000$) (Anexo 2, tabla 13.1.4.7.).

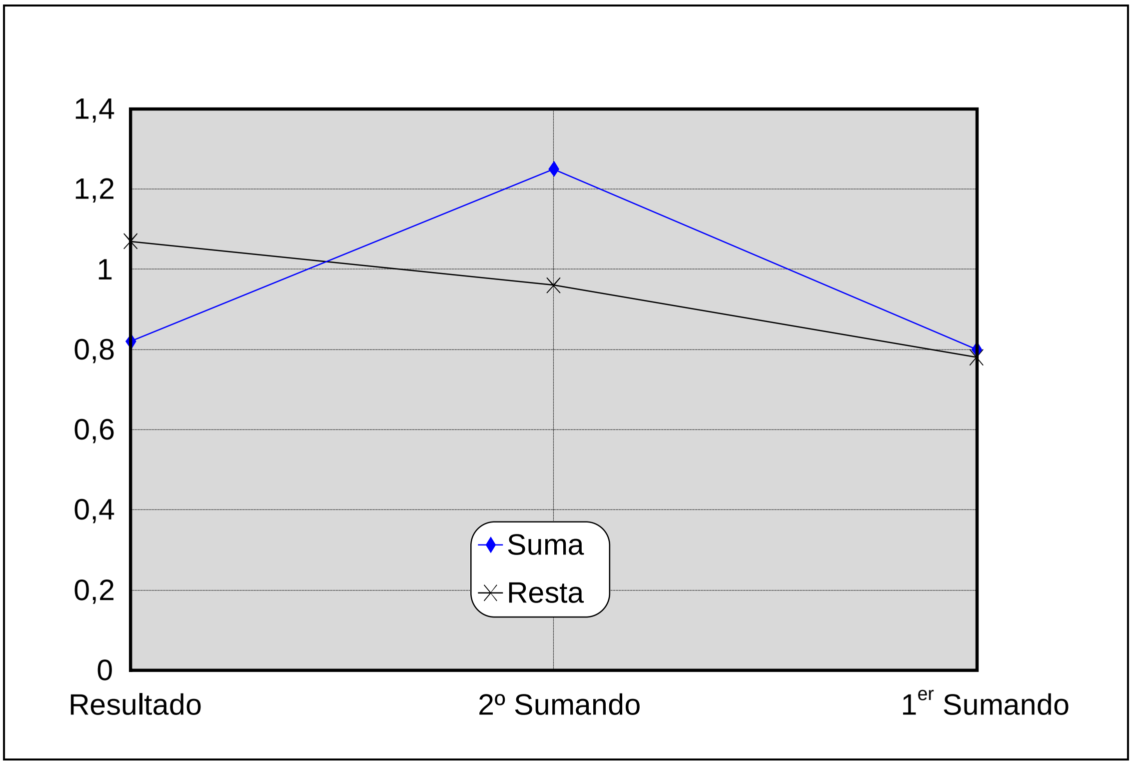
Y si además tenemos en cuenta el tipo de problema, encontramos, en cuanto a las tareas de Suma, que en los problemas de Cambio son significativos todos los contrastes de medias entre las distintas Situaciones de la Incógnita (figura 13.1.4.1.). En los problemas de Combinación resultan sólo no significativas las diferencias de medias entre 2º Sumando vs 1er Sumando (figura 13.1.4.2.). Y, sólo muestran diferencias no significativas entre Resultado vs 1er Sumando los problemas de Comparación (figura 13.1.4.3.). Por otra parte, respecto a la operación Resta, la significatividad en los problemas de Cambio y Combinación es similar a la de la operación suma. Sin embargo en los problemas de Comparación todas las diferencias de medias entre las distintas situaciones de la incógnita son no significativas al 1% (Anexo 2, tabla 13.1.4.8.).

Como conclusión final de la interacción Operación x Lugar de la Incógnita x Tipo de Problema, podemos señalar, de forma global, que cuando un niño hace un problema, es el Lugar de la Incógnita el que va a influir en su rendimiento y no el Tipo de Operación que tenga que realizar. Además, también influye el Tipo de Problema, cuando es de Combinación o de Comparación, pero no con los problemas de Cambio.

Concretando más, sólo hay diferencias significativas entre la Operación de Sumar y Restar en los Problemas de Cambio para la Situación de la Incógnita en el Resultado (figura 13.1.4.1.) y en los problemas de Comparación para la Incógnita en el 2º Sumando (figura 13.1.4.3.).

FIGURA 13.1.4.3

Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta, según la ubicación de la incógnita en los problemas de Comparación



Y finalmente, respecto de la Operación Suma, podemos decir que en los problemas de Cambio hay diferencias entre las distintas Situaciones de la Incógnita. En los problemas de Combinación no existen diferencias entre el 2º Sumando y 1er Sumando y en los de Comparación las diferencias son entre el Resultado y 1er Sumando. En cuanto a la Operación Resta, la diferencia está en los problemas de Comparación, en los cuales no existen diferencias entre las distintas Situaciones de la Incógnita.

13.2. FASE SEGUNDA

En este apartado se presentan los resultados obtenidos con *problemas de Cambio* por un lado *y problemas de Comparación* por otro. En los dos Tipos de Problemas, el factor *Operación* es tenido en cuenta desde el punto de vista del procedimiento -la operación que se utiliza para resolver el problema- y no desde la estructura semántica como se hizo en la Fase Primera. Con respecto al *Lugar de la Incógnita*, se tiene en cuenta sólo las situaciones de ésta en las que los dos problemas, uno se *resuelve* mediante una suma y el otro mediante una resta. Los problemas Cambio 3 y Cambio 4 -con la incógnita en el 2º Sumando-, no se tienen en cuenta, porque ambos se resuelven por resta. Tampoco son tenidos en cuenta todos los problemas de Combinación, porque en las tres situaciones en las que puede estar la Incógnita sólo se usa una operación en cada una de ellas. Idéntica razón afecta a los problemas de Comparación 1 y Comparación 2, -Incógnita en el Resultado- ya que ambos se resuelven por resta. El esquema de la Fase Segunda está representado en la figura 13.2.

13.2.1. PROBLEMAS DE CAMBIO

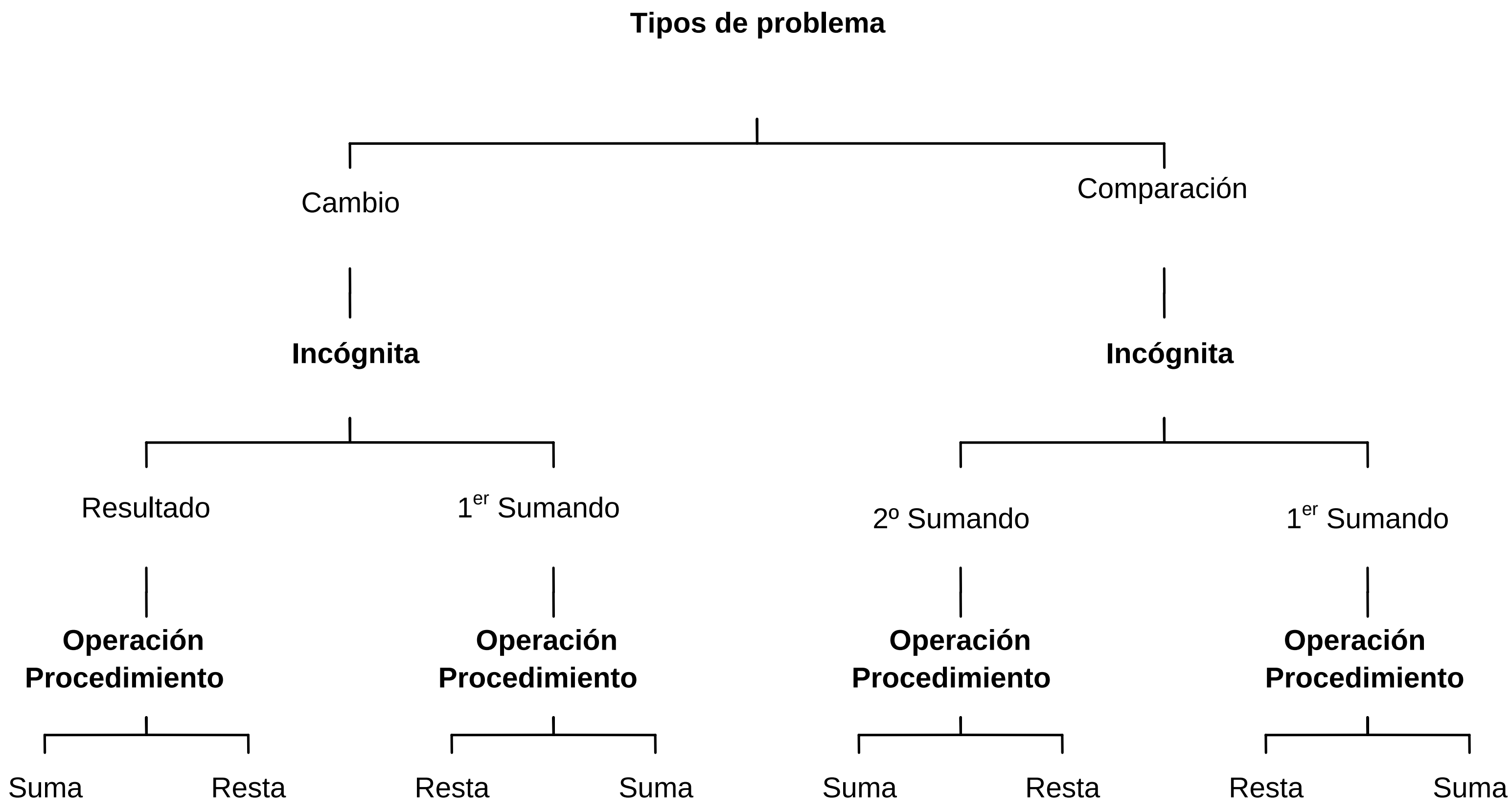
Los problemas que se utilizan son:

Cambio 1: *Incógnita en el resultado*. La cantidad inicial *aumenta*. Se resuelve por *suma.*

Cambio 2: *Incógnita en el resultado*. La cantidad inicial *disminuye.* Se resuelve por *resta.*

FIGURA 13.2

FASE 2ª



Cambio 6: *Incógnita en el primer sumando*. La cantidad inicial *disminuye*. Se resuelve por *suma*.

Cambio 5: *Incógnita en el primer sumando.* La cantidad inicial *aumenta*. Se resuelve por *resta.*

En los problemas de Cambio 1 y Cambio 2 -incógnita en el Resultado - coinciden procedimiento y estructura, pero en Cambio 5 y Cambio 6 -incógnita en el 1er Sumando-, no. Así, el problema Cambio 5 tiene estructura de adición y el procedimiento es una resta y el problema Cambio 6 tiene estructura de sustracción y se resuelve con una suma. Sobre estos problemas Willis y Fuson (1.988, p. 193) señalan la existencia de un conflicto entre la categoría general aditiva o substractiva y la operación requerida para resolver el problema subtipo particular. Por tanto, como en este apartado se tiene en cuenta en el factor Operación sólo el procedimiento -suma o resta- para resolver los problemas, Cambio 1 y Cambio 2 son considerados como en la Fase Primera y Cambio 5 y Cambio 6, al contrario de como han sido usados en la Fase anterior, Cambio 5 como resta y Cambio 6 como suma.

El análisis de varianza 4 Cursos (Infantil vs 1º E.P. vs 2º E.P. vs 3ºE.P.) x 2 Operación (suma vs resta) x 2 Lugar de la Incógnita (resultado vs 1er sumando) muestra, que sí son significativos tanto los efectos del factor Curso ($F = 34.836$, $p < .00$) como los del factor Lugar de la Incógnita ($F = 134.946$, $p < .000$) y que no es significativo el efecto principal del factor Operación ($F = 3.690$, $p < .056$). (tabla 13.2.1.1.). Por tanto, podemos decir globalmente que la diferencia de edad entre los grupos es significativa, que las dos situaciones de la incógnita determinan resultados estadísticamente diferentes y que la operación, como procedimiento, no comporta diferencias significativas.

TABLA 13.2.1.1

Resultados del Anova. Problemas de Cambio. Fase Segunda.

Fuentes de variación	*F*	*Significación*
Efectos principales	F = 48.629	P < .00
CURSO	F = 34.836	P < .000
OPERACIÓN	F = 3.690	P < .056
INCÓGNITA	F = 134.946	P < .000
Interacciones de dos factores	F = 8.729	P < .000
CURSO x INCÓGNITA	F = 18.259	P < .000

Se recoge en esta tabla sólo la interacción significativa. Los resultados completos figuran en el Anexo 2

Las "comparaciones múltiples" entre las medias de los distintos factores, realizadas con el método de Scheffé y a un nivel de significación del 5% dan los siguientes resultados:

TABLA 13.2.1.2

Medias y desviaciones típicas en los problemas de Cambio por cursos. Fase Segunda.

CURSO	*Infantil*	*1º E.P.*	*2º E.P.*	*3º E.P.*
Nº de respuestas	100	158	155	174
Medias	1.04	1.65	1.61	1.81
Desviaciones Típicas	(.87)	(.71)	(.62)	(.47)

La tabla 13.2.1.2. recoge los resultados del *factor Curso.* Y vemos que hay bastante diferencia entre la media de Infantil ($\bar{x}$ = 1.04) y la de los demás cursos de Primaria. Estadísticamente son sólo dos los grupos: a) Infantil y b) 2º E.P., 1º E.P. y 3º E.P. Recordemos que cuando se consideraban todos los tipos de problemas y todas las situaciones de la incógnita los cursos de 1º y 2º de E.P. eran significativamente diferentes del curso de 3º de E.P. y ahora las diferencias son únicamente entre Infantil y los tres cursos de Primaria. También se puede apreciar que 1º de E.P. alcanza resultados ligeramente superiores a los de 2º de E.P.

TABLA 13.2.1.3

Medias y desviaciones típicas de los problemas de Cambio en las operaciones de suma y resta. Fase Segunda.

OPERACIÓN	*Suma*	*Resta*
Nº de Respuestas	304	283
Medias	1.58	1.47
Desviaciones Típicas	(.72)	(.76)

En cuanto al *factor Operación,* los datos de la tabla 13.2.1.3. indican que aunque la media de la operación suma ($\bar{x}$ = 1.58) es superior a la media de la operación resta ($\bar{x}$ = 1.47), esta diferencia no es significativa ($F = 2.104$, $p < .148$). Recordemos que en esta fase es considerada la operación como procedimiento.

Y por último, los resultados del *factor Incógnita* están recogidos en la tabla 13.2.1.4., y observamos que las ejecuciones de los niños, cuando la Incógnita está en el Resultado ($\bar{x}$ = 1.86) son significativamente mejores que cuando se sitúa en el 1^er^ Sumando ($\bar{x}$ = 1.20), la Incógnita aquí se comporta igual que en la Fase Primera. Es decir, con independencia del grupo de edad, la dificultad de las tareas es menor cuando se desconoce el tercer término y es mayor cuando lo desconocido es el primer término; estos resultados han sido hallados por distintos autores (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1990; Carpenter, 1986; Riley y cols., 1983).

TABLA 13.2.1.4

Medias y desviaciones típicas de los problemas de Cambio, según la ubicación de la incógnita. Fase Segunda.

INCÓGNITA	*Resultado*	*1er Sumando*
Nº de respuestas	357	230
Medias	1.86	1.20
Desviaciones Típicas	(.39)	(.85)

TABLA 13.2.1.5

Medias y desviaciones típicas según las variables: cursos, ubicación de la incógnita y operación de los problemas de Cambio. Fase Segunda.

	Resultado		***Primer Sumando***	
	Suma	*Resta*	*Suma*	*Resta*
Infantil	**1.83** (.37)	**1.63** (.56)	**.38** (.56)	**.33** (.55)
1º E.P.	**2.00** (.00)	**1.83** (.47)	**1.42** (.81)	**1.33** (.90)
2º E.P.	**1.96** (.20)	**1.71** (.45)	**1.54** (.71)	**1.25** (.72)
3º E.P.	**2.00** (.00)	**1.92** (.40)	**1.54** (.64)	**1.79** (.41)

En negrita las medias
Entre paréntesis las desviaciones típicas

La tabla 13.2.1.5., muestra las medias y desviaciones típicas del Anova de los problemas de Cambio, con los tres factores considerados: Curso, Operación y Situación de la Incógnita.

El análisis de varianza también señala que sólo es significativa la interacción: Curso por Lugar de la Incógnita (F= 18.259, p < .000) y que analizamos a continuación:

13.2.1.1. **Análisis de las relaciones de los factores Curso x Situación de la Incógnita**

La tabla 13.2.1.1.1. recoge las medias y sumatorios de la interacción Curso (A) x Situación de la Incógnita (C) y que está representada en la figura 13.2.1.1.

El análisis de los efectos simples (Anexo 2, tabla 13.2.1.1.) para la interacción Curso (A) x Situación de la Incógnita (C) muestra que existen diferencias significativas entre la situación en el Resultado vs 1^er^ Sumando para el Curso de Infantil (F = 161.206, p < .000), para 1º de E.P. (F = 16.177, p < .0001), para 2º de E.P. (F = 13.432, p < .0004) y también para 3º de E.P. (F = 10.327, p < .0018). También las comparaciones simples indican que hay diferencias significativas de todos los Cursos entre sí (Anexo 2, tabla 13.2.1.2.).

Por otra parte, el análisis de los efectos simples del factor Curso dentro de cada una de las Situaciones de la Incógnita muestra la existencia de efectos significativos del factor Curso cuando la Incógnita está en el Resultado (F = 3.331, p < .0207) y también cuando está en el 1^er^ Sumando (F = 33.356, p < .0000).

TABLA. 13.2.1.1.1

Medias y sumatorios de la interacción Curso (A) x Situación de la Incógnita (C) x problemas de Cambio.

	Infantil	*1º E.P.*	*2º E.P.*	*3º E.P.*
Resultado	**1.73**	**1.92**	**1.83**	**1.96**
Σ	83	92	88	94
1erSumando	**.35**	**1.38**	**1.40**	**1.67**
Σ	17	66	67	80

En negrita las medias

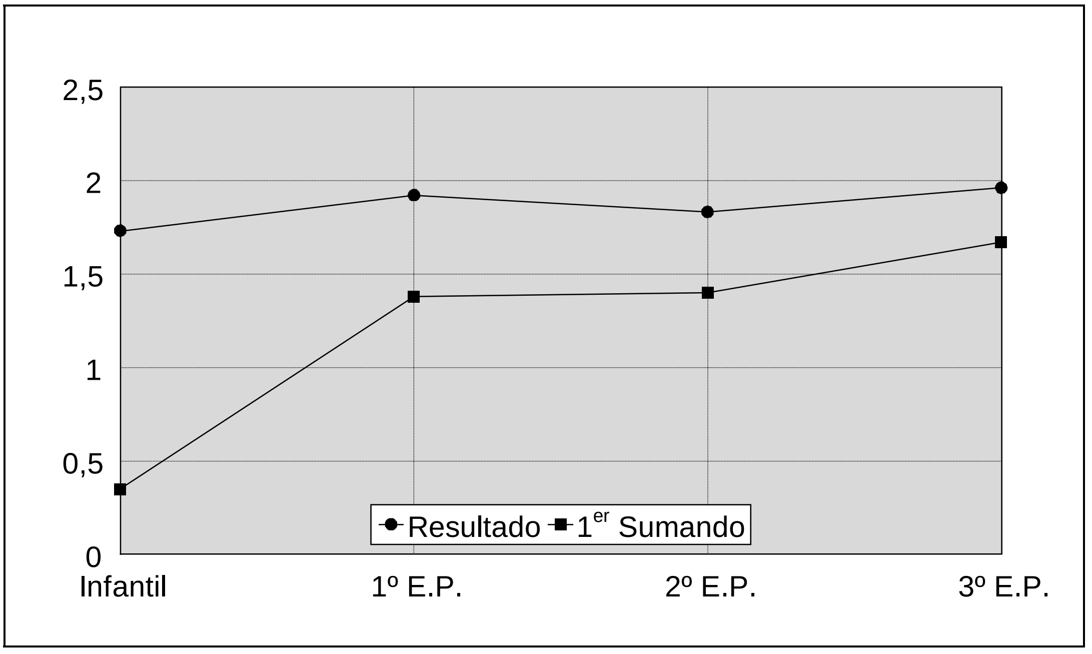
Si concretamos más, dentro de la situación de la *Incógnita en el Resultado*, las comparaciones simples realizadas con la prueba Scheffé, (Anexo 2, tabla 13.2.1.2.) muestran que es significativo el contraste de medias entre los grupos de Infantil y Tercero de E. P. (F =7.6955, p < .0067), así como entre Infantil y Primero de E.P. (F = 4.6258, p < .0341).

Igualmente dentro de la situación de la *Incógnita en el 1er Sumando,* las comparaciones simples (Anexo 2, tabla 13.2.1.2.) indican que son significativas las diferencias de las medias entre los Cursos de Infantil y Primero de E.P. (F = 46.8051, p < .0000), Infantil y Segundo de E.P. (F = 60.5046, p < .0000) e Infantil y Tercero de E.P. (F = 131.0914, p < .0000). También son significativas las diferencias entre Segundo y Tercero de E.P. (F = 4.1220, p < .0452).

En resumen, dentro de los distintos cursos el factor Situación de la Incógnita afecta significativamente a todos los grupos, pero matizando y observando la figura 13.2.1.1., apenas se ven diferencias entre los grupos cuando la Incógnita está en el Resultado, de tal manera que sólo es significativa la diferencia de medias entre los grupos extremos -Infantil y 3º de E.P.-, sin embargo podemos apreciar que la diferencia entre Infantil y el resto de los Cursos es bastante acusada cuando la incógnita está en el 1er Sumando.

FIGURA 13.2.1.1

Puntuaciones obtenidas cuando la incógnita se encuentra en el Resultado y en el 1er Sumando por cada uno de los cursos.



13.2.2. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

Los problemas que se utilizan son:

Comparación 3: *Incógnita en la cantidad comparada*. Sentido de la comparación *más que*. Se resuelve con una *suma.*

Comparación 4: *Incógnita en la cantidad comparada.* Sentido de la comparación *menos que.* Se resuelve con una resta.

Comparación 5: *Incógnita en la cantidad referente.* Sentido de la comparación *más que* Se resuelve con una *resta.*

Comparación 6: *Incógnita en la cantidad referente.* Sentido de la comparación *menos que.* Se resuelve con una *suma*

En los problemas de Comparación ocurre igual que con los de Cambio, cuando la Incógnita está en el 2º Sumando -Comparación 3 y Comparación 4-, coinciden estructura semántica y procedimiento y cuando la Incógnita se ubica en el 1er Sumando -Comparación 5 y Comparación 6-, no. El problema Comparación 5 tiene como estructura semántica la expresión "más que" y se resuelve mediante una resta. El problema Comparación 6 tiene como estructura semántica la expresión "menos que" y se resuelve con una suma. Por tanto, como en esta Fase se tiene en cuenta en el factor Operación sólo el procedimiento -suma o resta- para resolver los problemas, Comparación 3 y Comparación 4 son considerados como en la Fase Primera y Comparación 5 y Comparación 6, al contrario de como han sido usados en la Fase anterior, Comparación 5 como resta y Comparación 6 como suma.

TABLA 13.2.2.1

Resultados del Anova. Problemas de Comparación. Fase Segunda.

Fuentes de variación	*F*	*Significación*
Efectos principales	F = 38.934	P < .00
CURSO	F = 57.810	P < .00
OPERACIÓN	F = 3.358	P < .068
INCÓGNITA	F = 17.883	P < .000
Interacciones de dos factores	F = 3.645	P < .001
CURSO x OPERACIÓN	F = 6.431	P < .000
OPERACIÓN x INCÓGNITA	F = 4.471	P < .035

Se recogen en esta tabla sólo las interacciones significativas. Los resultados completos figuran en el Anexo 2

El análisis de varianza 4 Curso (Infantil vs 1ª E.P. vs 2º E.P. vs 3ºE.P.) x 2 Operación (suma vs resta) x 2 Lugar de la Incógnita (segundo sumando vs primer sumando) muestra, por un lado, que son significativos los efectos principales de los factores Curso (F = 57.810, p < .00) y Lugar de la Incógnita (F = 17.883, p < .000).y por otro, que no son significativos los efectos principales del factor Operación ($F = 3.358$, $p < .068$) (tabla 13.2.2.1.).

Las comparaciones múltiples entre las medias de los distintos factores, realizadas con el método de Scheffé, dan los siguientes resultados:

TABLA 13.2.2.2

Medias y desviaciones típicas por Cursos en los problemas de Comparación. Fase Segunda.

CURSO	*Infantil*	*1º E.P.*	*2º E.P.*	*3º E.P.*
Nº de respuestas	21	83	111	149
Medias	.22	.86	1.16	1.55
Desviaciones Típicas	(.51)	(.88)	(.85)	(.74)

En cuanto al *factor Curso*, los resultados se recogen en la tabla 13.2.2.2. y en ella vemos que el número de respuestas y la media aumenta de curso en curso. Siendo significativa la diferencia ($F = 52.816$, $p < .0000$) entre los distintos cursos, menos entre 1º y 2º de E.P., tal como ocurría en la Fase Primera.

En cuanto al *factor Operación* confirman que no existen diferencias significativas entre suma vs resta ($F = 2.189$, $p < .140$), considerada la operación como el procedimiento para resolver el problema (tabla 13.2.2.3.).

TABLA 13.2.2.3

Medias y desviaciones típicas en las operaciones de suma y resta en los problemas de Comparación. Fase Segunda.

OPERACIÓN	*Suma*	*Resta*

Nº de Respuestas	195	169
Medias	1.02	.88
Desviaciones Típicas	(.89)	(.90)

TABLA 13.2.2.4

Medias y desviaciones típicas según la ubicación de la incógnita en los problemas de Comparación. Fase Segunda.

INCÓGNITA	*2º Sumando*	*1er Sumando*
Nº de respuestas	212	152
Medias	1.10	.79
Desviaciones Típicas	(.89)	(.88)

TABLA 13.2.2.5

Medias y desviaciones típicas según las variables: cursos, ubicación de la incógnita y operación de los problemas de Comparación. Fase Segunda.

	Segundo Sumando		***Primer Sumando***	
	Suma	*Resta*	*Suma*	*Resta*
Infantil	**.54** (.71)	**.17** (.47)	**.08** (.28)	**.08** (.28)
1º EP	**1.29** (.84)	**.71** (.79)	**.92** (.91)	**.54** (.76)
2º EP	**1.54** (.71)	**1.00** (.82)	**1.04** (.84)	**1.04** (.89)
3º EP	**1.63** (.70)	**1.96** (.20)	**1.08** (.86)	**1.54** (.71)

En negrita las medias.
Entre paréntesis las desviaciones típicas.

Finalmente, en el *factor Incógnita* hay diferencias significativas entre 2º Sumando vs 1er Sumando ($F = 11.95$, $p < .0000$) (tabla 13.2.2.4.). La tabla 13.2.2.5., muestra detalladamente las puntuaciones de los diferentes Cursos en los factores Situación de la Incógnita y Operación.

El análisis de varianza también indica que son significativas las siguientes interacciones: Curso x Operación ($F = 6.431$, $p < .000$) y Operación x Lugar de la Incógnita ($F = 4.471$, $p < .035$). Pasamos a analizar a continuación dichas interacciones.

13.2.2.1. Análisis de las relaciones de los factores Curso (A) x Operación (B)

TABLA 13.2.2.1.1

Medias y sumatorios de la interacción Curso (A) x Operación (B)

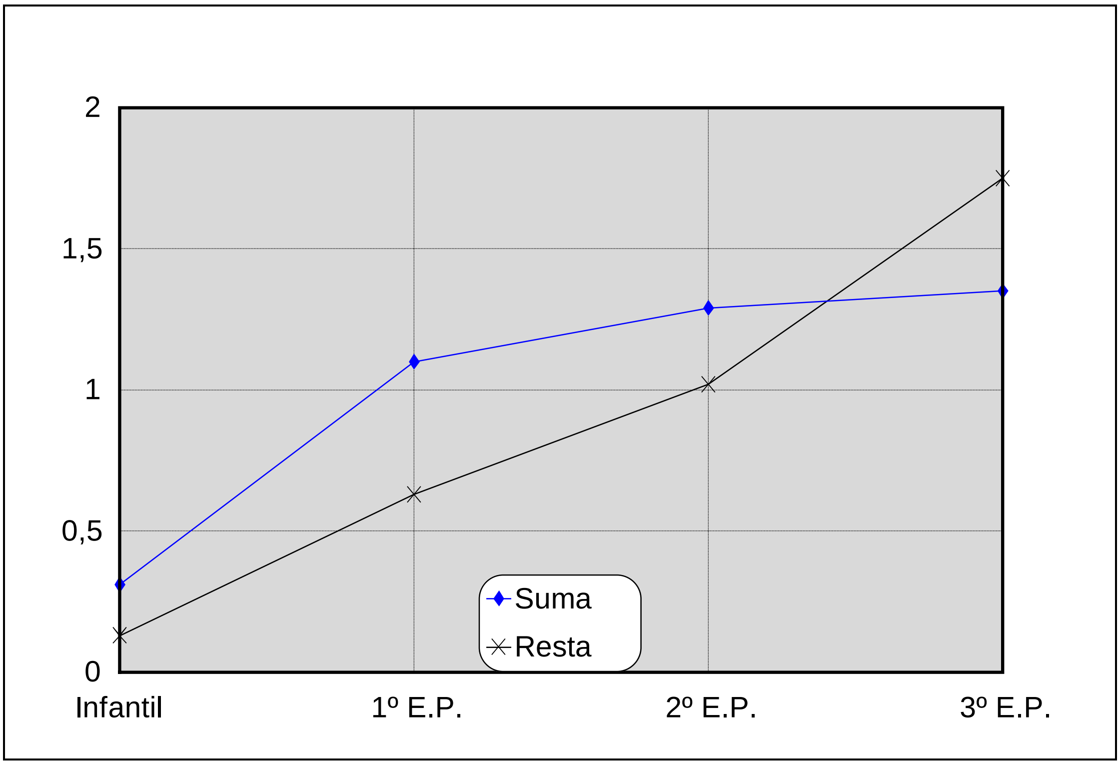
	Infantil	*1º E.P.*	*2º E.P.*	*3º E.P*
Suma *Σ*	**.31** 15	**1.10** 53	**1.29** 62	**1.35** 65
Resta *Σ*	**.13** 6	**.62** 30	**1.02** 49	**1.75** 84

En negrita las medias

El análisis de los efectos simples para la interacción Curso (A) x Operación (B) muestra la existencia de efectos significativos del factor Curso para la Operación de suma ($F = 17.417$, $p < .0000$) y también para la Operación de resta ($F = 49.106$, $p < .0000$) (Anexo 2, tabla 13.2.2.2.). Más concretamente, dentro de la Operación suma las comparaciones simples realizadas con la prueba Scheffé revela que es significativo el contraste de medias entre el grupo de Infantil y los de Educación Primaria, pero no resulta significativo entre los grupos de Primaria entre sí (Anexo 2, tabla 13.2.2.3.).

FIGURA 13.2.2.1.1

Puntuaciones obtenidas en las operaciones de suma y resta por cada uno de los cursos



Por lo que respecta a la Operación resta las comparaciones simples indican que son significativas todas las diferencias de las medias, es decir, la media de cada curso difiere significativamente con el resto de las medias de los cursos superiores e inferiores a él (Anexo 2, tabla 13.2.2.4.). Los rendimientos de la Operación resta siempre son inferiores a los de la Operación suma, en todos los cursos, excepto en el curso de 3º E.P., donde la media de la resta supera a la de la suma (tabla 13.2.2.1.1. y figura 13.2.2.1.1.)

Por otra parte, el análisis de los efectos simples del factor Operación dentro de cada uno de los grupos muestra la existencia de efectos significativos entre la Operación suma y la Operación resta para el grupo de 1º E.P. ($F = 7.648$, $p < .0068$) y también para el grupo de 3º E.P. ($F = 7.367$, $p < .0079$), pero la diferencia entre los rendimientos de las Operaciones de sumar y restar en los Cursos: Infantil ($F = 3.366$, $p < .0697$) y 2º de E. P. ($F = 7.367$, $p < .119$), no es significativa (Anexo 2, tabla 13.2.2.5.).

13.2.2.2. <u>Análisis de las relaciones de los factores Operación (B) x Situación de la Incógnita (C)</u>

TABLA 13.2.2.2.1

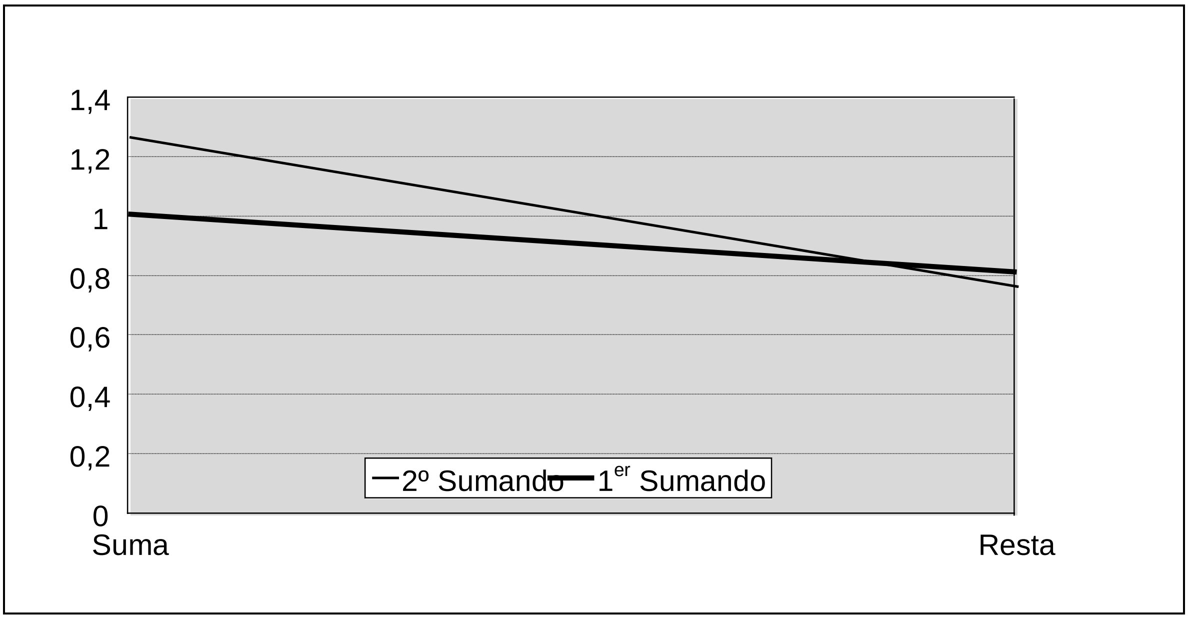
Medias y sumatorios de la interacción Operación (B) x Situación de la Incógnita.(C)

	2º Sumando	*1er Sumando*
Suma *Σ*	**1.25** 120	**.78** 75
Resta *Σ*	**.96** 92	**.80** 77

En negrita las medias

FIGURA 13.2.2.2.1

Puntuaciones obtenidas en las operaciones suma y resta para el 2ºSumando y 1er Sumando



La tabla 13.2.2.2.1. y la figura 13.2.2.2.1. recoge y representa respectivamente los datos de la interacción Operación x Situación de la Incógnita. El análisis de dicha interacción muestra, por un lado, la existencia de efectos significativos del factor Operación cuando la Incógnita está en el 2º Sumando ($F = 5.248$, $p < .0231$) y por otro, que los efectos del factor Operación no son significativos cuando la Incógnita se sitúa en el 1er Sumando ($F = 0.0268$, $p < .8701$). Las medias de los resultados obtenidos por los niños cuando realizan los problemas con la Incógnita en el 2º Sumando difieren significativamente cuando utilizan la suma a cuando lo hacen con la resta, no ocurre lo mismo cuando la Incógnita está en el 1er Sumando: las medias de ambas operaciones no son significativamente diferentes (Anexo 2, tabla 13.2.2.1.). Son mejores los rendimientos de la suma que de la resta, en la situación de la Incógnita en el 2º Sumando y sucede al contrario cuando la Incógnita está en el 1er Sumando (tabla 13.2.2.2.1.).

Por otra parte, el análisis de los efectos simples del factor Situación de la Incógnita dentro de cada Operación revelan que hay diferencias significativas entre la situación en el 2º Sumando y en el 1er Sumando ($F = 14.0718$, $p < .000$) en la Operación suma y no hay diferencias significativas en la Operación resta ($F = 1.4546$, $p < .2293$) para las mismas situaciones de la Incógnita.

Para concluir, en esta Fase Segunda podemos resaltar las siguientes conclusiones:

En cuanto a los problemas de Cambio:

1.- El factor grupo se comporta de modo diferente que en la Fase Primera, porque los grupos de Primaria, son estadísticamente un solo grupo. Recordemos que en la Primera Fase, 3º de E.P. era distinto de 1º y 2º de E.P.

2.- Los resultados de los niños depende del Curso en el que se encuentren y de la Situación de la Incógnita, pero no del tipo de Operación que tengan que realizar para resolver el problema, aunque los problemas Cambio 5 y Cambio 6 son considerados a la inversa que en la Fase Primera, desde el punto de vista del factor Operación.

3.- Además es significativa la interacción Curso x Situación de la Incógnita.

En los problemas de Comparación sucede:

1.- El factor Curso se comporta igual que en la Fase Primera.

2.- En términos globales, la Operación no influye en el rendimiento de los niños. También los problemas Comparación 5 y Comparación 6, desde el factor Operación, son tenidos en cuenta de forma inversa que en la Fase Primera.

3.- Ahora, son significativas las interacciones Curso x Operación y Operación x Lugar de la Incógnita (no lo eran en los problemas de Cambio) y no es significativa la interacción Curso x Situación de la Incógnita, que sí era en los problemas de Cambio.

13.3. FASE TERCERA

En este apartado se trabaja con todos los *Tipos de Problemas*, pero no se tiene en cuenta la variable *Lugar de la Incógnita*. La novedad en esta Fase Tercera es en relación a la variable *Operación.* Los problemas se agrupan teniendo en cuenta tanto la estructura, en el mismo sentido que en la Fase Primera, como el procedimiento, en el mismo sentido que en la Fase Segunda. Cuando coinciden estructura/procedimiento, un grupo será *Suma-Suma* y otro será *Resta-Resta*, o si no coinciden estructura/procedimiento entonces será *Suma-Resta* o *Resta-Suma*.

En consecuencia, se obtienen cuatro grupos distintos. Los 6 problemas de cada tipo se concretan de la forma siguiente: hay 1 grupo de Suma-Suma (SS), 1 grupo de Resta-Suma (RS), 2 grupos de Resta-Resta (RR) y 2 grupos de Suma-Resta (SR). Esta agrupación se repite en los distintos tipos de problemas -Cambio, Combinación y Comparación-. La tabla 13.3.1., recoge cómo queda la variable Operación desde el punto de vista de la estructura/procedimiento. El esquema de esta fase está en la figura 13.3.

FIGURA 13.3

FASE 3ª

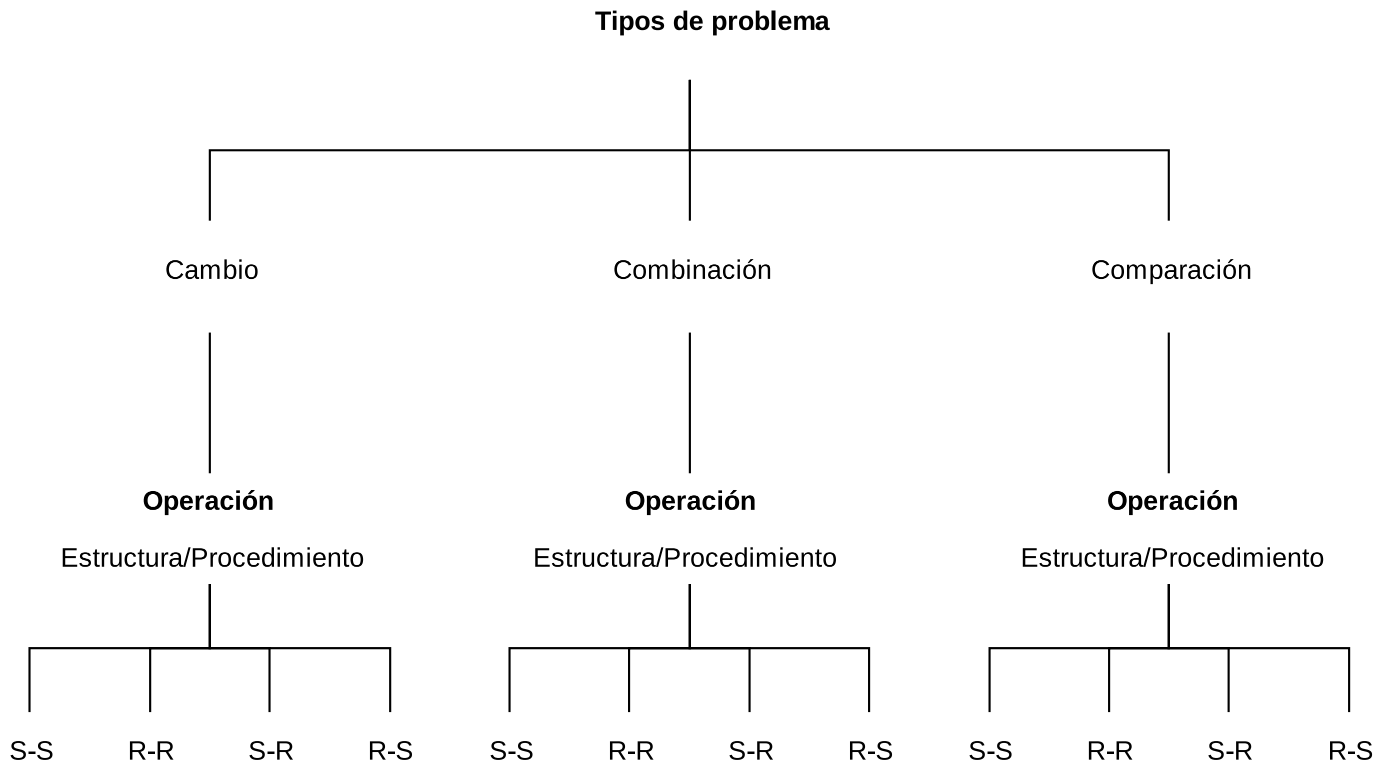


TABLA 13.3.1.

Variable operación: estructura/procedimiento. Fase Tercera

Tipo	Estructura	Procedimiento	Operación
Cambio 1	Aumenta	Suma	SS
Cambio 2	Disminuye	Resta	RR
Cambio 3	Aumenta	Resta	SR
Cambio 4	Disminuye	Resta	RR
Cambio 5	Aumenta	Resta	SR
Cambio 6	Disminuye	Suma	RS
Combinación 1		Suma	SS
Combinación 2		Suma	RS
Combinación 3		Resta	SR
Combinación 4		Resta	RR
Combinación 5		Resta	SR
Combinación 6		Resta	RR
Comparación 1	Más que	Resta	SR
Comparación 2	Menos que	Resta	RR
Comparación 3	Más que	Suma	SS
Comparación 4	Menos que	Resta	RR
Comparación 5	Más que	Resta	SR
Comparación 6	Menos que	Suma	RS

El análisis de varianza mixto 4 Curso (Infantil vs 1º E.P. vs 2ºE.P. vs 3º E.P.) x 4 Operación (suma-suma vs resta-resta vs suma-resta vs resta-suma) x 3 Tipo de Problema (cambio vs combinación vs comparación), nos revela que son significativos los efectos principales de los tres factores: Curso (F =

180.118, p < .00), Operación (F = 44.891, p < .00) y Tipo de Problema (F = 165.581, p < .00), tal como puede observarse en la Tabla 13.3.2.

TABLA 13.3.2

Resultados del Anova. Fase Tercera

Fuentes de variación	*F*	*Significación*
Efectos principales	F = 125.773	P < .00
CURSO	F = 180.118	P < .00
OPERACIÓN	F = 44.891	P < .00
TIPO	F = 165.581	P < .00
Interacciones de dos factores	F = 10.642	P < .000
CURSO x OPERACIÓN	F = 7.204	P < .000
CURSO x TIPO	F = 14.487	P < .00
OPERACIÓN x TIPO	F = 11.954	P < .00
Interacciones de tres factores	F = 2.757	P < .000
CURSO x OPERACIÓN x TIPO	F = 2.757	P < .000

Los factores Curso y Tipo de problema son considerados exactamente igual que en la Fase Primera y por tanto su análisis ya ha sido descrito. Analizamos a continuación el factor Operación que tiene distinto tratamiento, aquí ha sido categorizado en cuatro grupos (Suma-Suma, Resta-Resta, Suma-Resta y Resta-Suma).

Las comparaciones múltiples entre las medias del *factor Operación*, realizadas con el método de Scheffé y a un nivel de significación del 5% dan los resultados siguientes: son significativas las diferencias entre los grupos: Suma-Suma vs Suma-Resta, Suma-Suma vs Resta-Suma, Suma-Suma vs Resta-Resta y Resta-Resta vs Suma-Resta. Lo que equivale a decir que el grupo Suma-Suma es significativamente distinto de los demás grupos y también son distintos entre sí los grupos que utilizan la resta para resolver los problemas. El orden de dificultad de menor a mayor de los cuatro grupos es: Suma-Suma, Resta-Resta, Resta-Suma y Suma-Resta.

TABLA 13.3.3

Medias y desviaciones típicas de la variable Operación. Fase Tercera

OPERACIÓN	*Suma-Suma*	*Resta-Resta*	*Suma-Resta*	*Resta-Suma*
Nº de respuestas	490	785	675	371
Medias	1.70	1.36	1.17	1.29
Desviaciones Típicas	(.63)	(.82)	(.88)	(.86)

Hay doble número de problemas en los grupos Resta-Resta y Suma-Resta que en los grupos Suma-Suma y Resta-Suma.

En general podemos decir que, resulta más fácil para los niños los problemas que coinciden estructura/procedimiento y cuando no ocurre así, las ejecuciones son mejores cuando tienen que emplear la suma (tabla 13.3.3). La tabla 13.3.4. recoge las medias y desviaciones típicas de los diferentes grupos para cada tipo de problemas.

También revela el análisis de varianza que son significativas las interacciones dobles: Curso x Operación ($F = 7.204$, $p < .000$), Curso x Tipo de problema ($F = 14.487$, $p < .00$), Operación x Tipo de problema ($F = 11.954$, $p <.00$), así como la triple: Curso x Operación x Tipo de problema ($F = 2.757$, $p < .000$). Analizaremos la interacción triple para evitar reiteraciones. Las medias y sumatorios de esta interacción se encuentran en la tabla 13.3.1.1.

TABLA 13.3.4

Medias y desviaciones típicas de la variable Operación según el tipo de problema

	Cambio	**Combinación**	**Comparación**	**Total**
Suma-Suma	**1.95** (.22)	**1.91** (.29)	**1.25** (.86)	**1.70** (.63)
Resta-Resta	**1.66** (.61)	**1.41** (.77)	**1.02** (.91)	**1.36** (.82)
Suma-Resta	**1.34** (.83)	**1.36** (.83)	**.81** (.87)	**1.17** (.88)
Resta-Suma	**1.22** (.85)	**1.86** (.40)	**.78** (.87)	**1.29** (.86)

En negrita las medias.
Entre paréntesis las desviaciones típicas.

13.3.1. ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LOS FACTORES: CURSO(A) x OPERACIÓN (B) x TIPO DE PROBLEMA(D)

El análisis de los efectos simples para la interacción Curso x Operación x Tipo de problema revela que existen diferencias significativas del factor Operación en cada uno de los grupos de edad: Infantil ($F = 20.1142$, $p <.0000$), 1º de E.P. ($F = 9.2564$, $p < .0000$), 2º de E.P. ($F = 8.9919$, $p < .0000$) y 3º de E.P. ($F = 11.8004$, $p < .0000$). Al mismo tiempo, también son significativos los efectos simples del factor Curso sobre los niveles del factor Operación (considerada como Estructura/Procedimiento): Suma-suma ($F = 8.3987$, $p < .0000$), Resta-resta ($F = 53.1777$, $p < .0000$), Suma-resta ($F = 69.1657$, $p < .0000$) y Resta-suma ($F = 19.2701$, $p < .0000$) (Anexo 2, tabla 13.3.1.1).

TABLA. 13.3.1.1

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción Curso (A) x Operación (B) x Tipo de Problema(D)

	B_1D_1	B_2D_1	B_3D_1	B_4D_1	B_1D_2	B_2D_2	B_3D_2	B_4D_2	B_1D_3	B_2D_3	B_3D_3	B_4D_3
A_1	1.83	1.50	.69	.38	1.83	.96	.77	1.58	.54	.13	.08	.08
Σ	44	72	33	9	44	46	37	38	13	6	4	2
A_2	2.00	1.63	1.46	1.42	2.00	1.46	1.48	1.92	1.29	.77	.52	.92
Σ	48	78	70	34	48	70	71	46	31	37	25	22
A_3	1.96	1.63	1.40	1.54	1.79	1.29	1.29	2.00	1.54	1.21	1.00	1.04
Σ	47	78	67	37	43	62	62	48	37	58	48	25
A_4	2.00	1.90	1.83	1.54	2.00	1.94	1.90	1.96	1.63	1.96	1.65	1.08
Σ	48	91	88	37	48	93	91	47	39	94	79	26

A_1= Infantil; A_2 = 1º E.P.; A_3 = 2º E.P.; A_4 = 3º E.P.
$B_{1=}$ Suma-Suma; B_2 = Resta-Resta; B_3 = Suma-Resta; B_4 = Resta-Suma.
$D_{1\,=}$ Cambio; D_2 = Combinación; D_3 = Comparación.

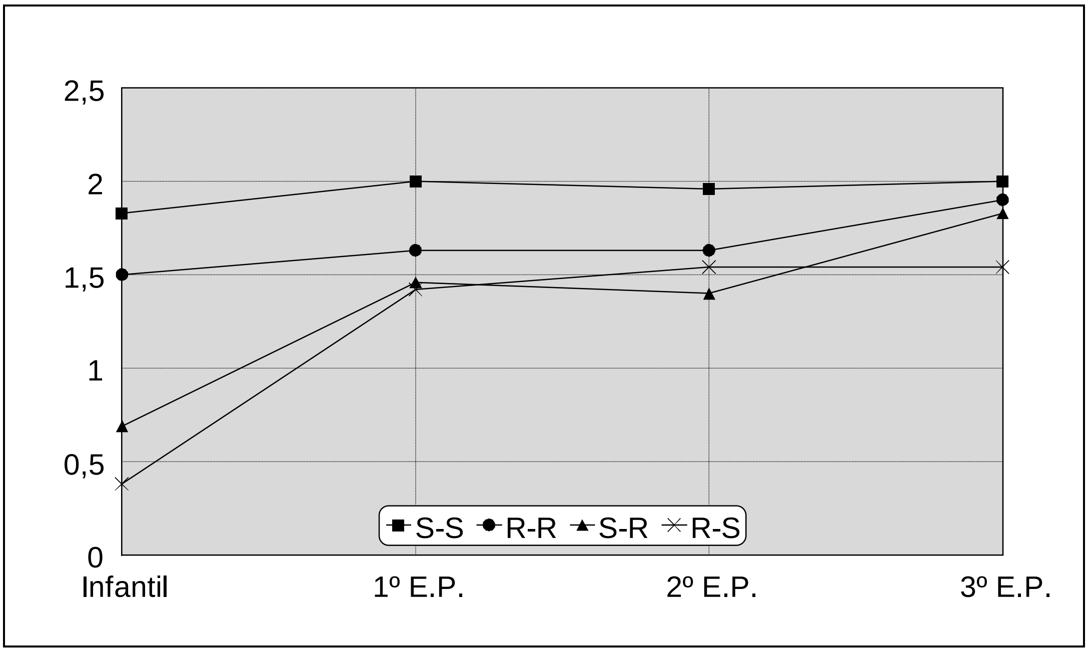
Por otra parte, el análisis de los efectos simples del factor Tipo de Problema en cada uno de los niveles del factor Operación muestra la existencia de efectos significativos en: Suma-Suma ($F = 50.5799$, $p < .0000$), Resta-Resta ($F = 34.0697$, $p < .0000$), Suma-Resta ($F = 26.2145$, $p < .0000$) y Resta-Suma ($F = 52.0753$, $p < .0000$). Asimismo, el análisis de los efectos simples del factor Operación en cada uno de los niveles del factor Tipo de problema indica que resulta significativa la diferencia entre los diferentes niveles de la operación para cada uno de los problemas: Cambio (F =

24.9502, p < .0000), Combinación (F = 23.0027, p < .0000) y Comparación (F = 6.7877, p < .0002).

Además, recordemos que -ya fueron analizados en la interacción A x C x D de la Fase Primera (Anexo 2, tabla 13.1.2.1.)- son significativos los efectos simples del factor Tipo de Problema en todos los niveles de factor Curso. Igualmente son significativos los efectos simples del factor Curso en todos los niveles del factor Tipo de problemas.

FIGURA 13.3.1.1

Puntuaciones obtenidas según la operación en los problemas de Cambio por los distintos cursos



Además de los efectos simples, para el análisis de la interacción Curso x Operación x Tipo de problema, realizamos dos tipos de comparaciones:

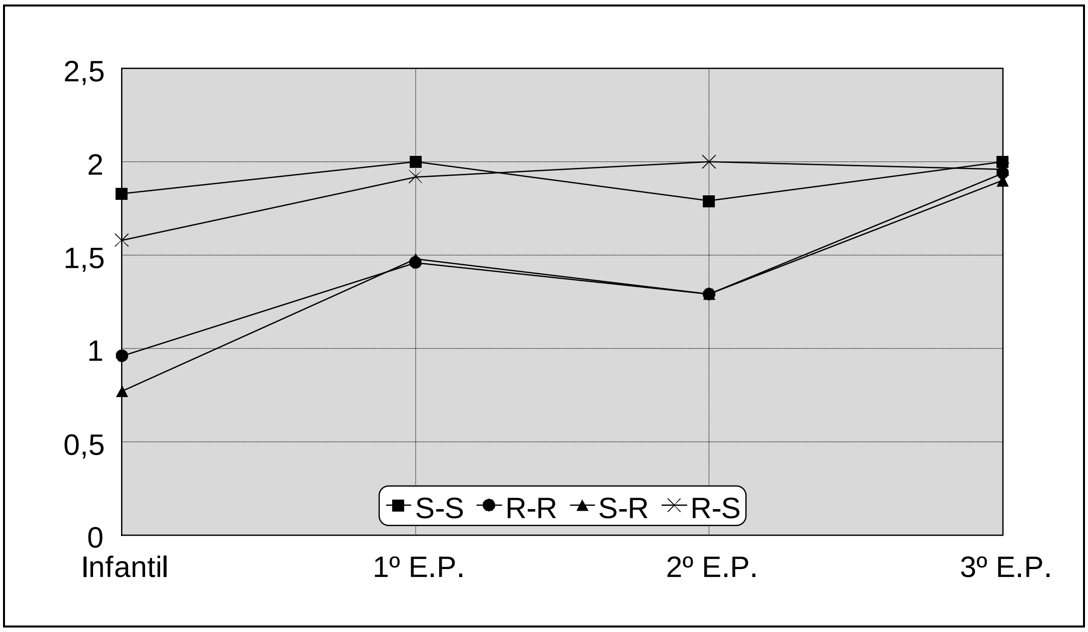
a) Entre los distintos niveles del factor Operación, asignando el mismo peso a los Tipos de Problema en el factor Curso. Este análisis manifiesta diferencias significativas (Anexo 2, tabla 13.3.1.2.) entre los grupos Suma-Suma vs Resta-Resta, Suma-Suma vs Suma-Resta, Suma-Suma vs Resta-Suma y Resta-Resta vs Suma-Resta. Sin embargo el contraste de medias no es significativo entre Resta-Resta vs Resta-Suma y tampoco entre Suma-Resta vs Resta-Suma.

b) Entre los distintos niveles del factor Curso en los factores Operación y Tipo de problema (con igual peso). Los resultados señalan que los cursos 1º y 2º de E.P. no presentan diferencias significativas entre sí en RR y SR, tal y como ocurría cuando era considerada la operación en la Fase Primera, sin embargo no ocurre así en los casos SS y RS en los que además tampoco son diferentes 1º y 3º y 2º y 3º. (Anexo 2, tabla 13.3.1.3.).

El análisis más detallado de esta interacción, realizado mediante los contrastes de interacción con la prueba de Scheffé, para determinar los factores responsables de la significatividad nos muestran lo siguiente. En los problemas de Cambio, se encuentran diferencias significativas sólo entre las medias de Infantil y 3º de E.P. ($F = 16.4228$, $p < .0001$), y entre 2º y 3º de E.P. ($F = 7.2555$, $p < .0079$), para las operaciones SS vs RR. Entre los grupos 1º y 2º de E.P. no existen diferencias significativas entre ningún nivel del factor Operación. Tampoco hay diferencias significativas entre 1º y 2º con 3º de E. P. para SS vs RS y RR vs RS. En los problemas de Combinación, siguen entre los grupos 1º y 2º de E.P. no existiendo diferencias significativas entre ningún nivel del factor Operación. Y no hay diferencias significativas entre 1º y 2º con 3º de E. P. para SS vs RS. En los problemas de Comparación, los grupos de 1º y 2º de E.P. ($F = 1.1267$, $p < .2912$), que eran estadísticamente iguales sólo se comportan lo mismo para los niveles de operaciones SS vs RS. Igualmente no existen diferencias entre 1º y 2º de E.P. y 3º de E. P. para SS vs RS (Anexo 2, tablas 13.3.1.4., 13.3.1.5. y 13.3.1.6.).

FIGURA 13.3.1.2

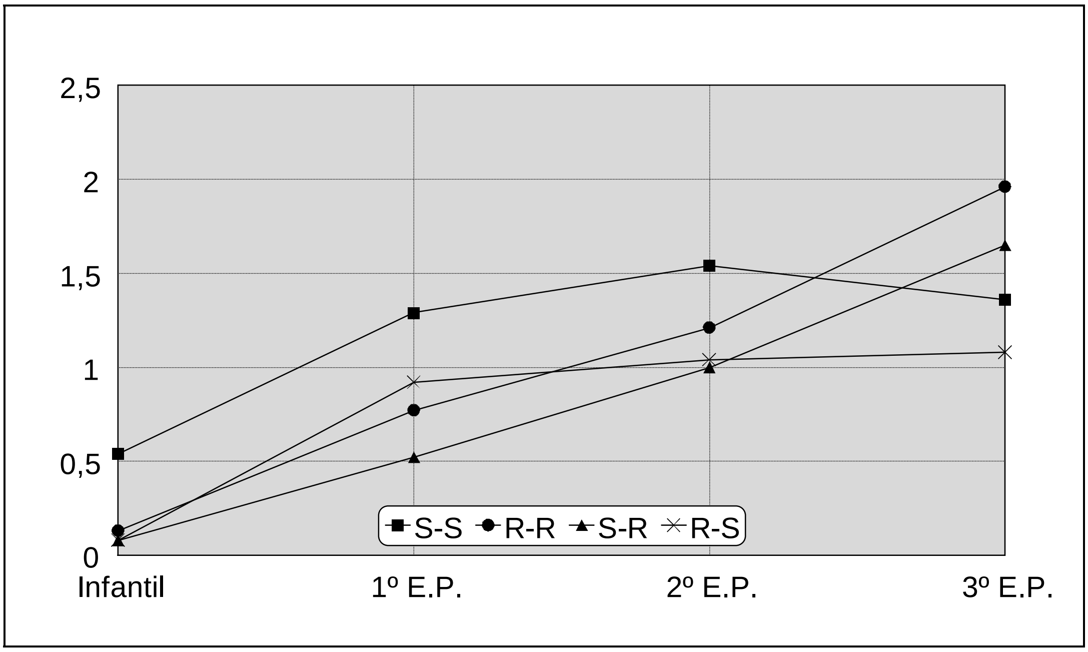
Puntuaciones obtenidas según la operación en los problemas de Combinación por los distintos cursos



Por otra parte, los contrastes de interacciones entre los distintos niveles del factor Operación en cada uno de los Tipos de Problema y en los distintos niveles del factor Curso, manifiestan los resultados siguientes. Respecto al tipo de Problema de Cambio, (figura 13.3.1.1.y en Anexo 2, tabla 13.3.1.7.), podemos observar que la diferencia de medias entre las operaciones: Suma-Suma vs Resta-Resta, Suma-Suma vs Suma-Resta y Suma-Suma vs Resta-Suma son significativas para todos los cursos, tomados dos a dos. Para las operaciones Resta-Resta vs Suma-Resta y Resta-Resta vs Resta-Suma, sólo son significativos entre Infantil y los demás grupos de Primaria. Y, por último, no hay diferencias significativas entre Suma-Resta vs Resta-Suma entre ningún grupo de edad.

FIGURA 13.3.1.3

Puntuaciones obtenidas según la operación en los problemas de Comparación por los distintos cursos



En cuanto a los Problemas de Combinación, (figura 13.3.1.2. y en Anexo 2, tabla 13.3.1.8.), intuitivamente en la figura apreciamos cómo hay una semejanza entre los problemas que se resuelven por suma, por una parte, y los problemas que se resuelven por resta, por otra. Hay diferencias significativas entre Suma-Suma vs Resta-Resta y Suma-Suma vs Suma-Resta para todos los cursos entre sí. También se encuentran diferencias significativas entre Resta-Resta vs Resta-Suma y Suma-Resta vs Resta-Suma en todas las parejas de cursos. Sin embargo, el contraste de medias entre Suma-Suma vs Resta-Suma y Resta-Resta vs Suma-Resta no es significativo en ninguna pareja de cursos.

En la figura 13.3.1.3. y en el Anexo 2, tabla 13.3.1.9., se recogen los resultados respecto a los Problemas de Comparación. Hay diferencias significativas entre Suma-Suma vs Resta-Suma para todas las parejas de cursos entre sí, sin embargo no hay diferencias significativas entre Resta-Resta vs Suma-Resta y Suma-Resta vs Resta-Suma entre los cursos tomados de dos a dos.

Para terminar, la conclusión más significativa de esta Fase Tercera es la diferencia respecto a las Fases Primera y Segunda, en cuanto al factor Operación. Ya que en la fase que acabamos de analizar la operación es significativa, circunstancia que no ocurre ni en la Segunda ni en la Primera Fase; lo que en otras palabras quiere decir que, las diferencias encontradas entre los rendimientos de los niños depende tanto del curso en el que se encuentren, de dónde esté situada la incógnita y del tipo de problema que realicen cómo del tipo de operación , entendida ésta como la coincidencia o no entre la estructura y el procedimiento para resolver el problema.

Son más fáciles los problemas en los que coinciden estructura y procedimiento y, dentro de éstos los de suma. Cuando no coinciden, son los problemas que se resuelven mediante una suma, donde los rendimientos son mejores.

13.4. CONCLUSIONES

Como resumen final, examinaremos los resultados de los problemas de las tres fases del experimento atendiendo especialmente a la operación.

En la **Fase** P**rimera** la operación ha sido considerada desde el punto de vista de la estructura semántica, de tal manera que cuando hay aumento, se considera suma, cuando hay disminución se considera resta -en los problemas de Cambio- y si el término relacional es "más que" es suma y si es "menos que" es resta" -en los problemas de Comparación-. Como consecuencia todos los problemas impares son suma y los pares resta.

TABLA 13.4.1

Resultados (Medias) por cursos, tipo de problemas y operación (según la estructura). Fase Primera

	Cambio		Combinación		Comparación	
	Suma	*Resta*	*Suma*	*Resta*	*Suma*	*Resta*
Infantil	1.07	1.13	1.13	1.17	.24	.11
1ºE.P.	1.64	1.56	1.65	1.61	.78	.82
2ºE.P.	1.58	1.60	1.46	1.54	1.18	1.15
3ºE.P.	1.89	1.78	1.93	1.94	1.64	1.67

En esta Fase Primera no hay diferencias significativas en el factor Operación ($F = .116$, $p<.733$), mientras que sí son significativos los demás factores. Esto significa que los resultados obtenidos por los niños no depende del tipo de operación y sí de la edad, del tipo de problema y de la situación de la incógnita.

Respecto a las interacciones, son significativas las: Curso x Operación x Incógnita ($F = 3.330$, $p < .003$) y Operación x Incógnita x Tipo de problema ($F = 5.006$, $p < .001$).

En cuanto a la primera interacción: curso x operación x incógnita no hay diferencia entre la suma y la resta en ningún grupo de edad ni en ningún lugar de ubicación de la incógnita. Si comparamos los cursos dos a dos, teniendo en cuenta las distintas situaciones de la incógnita, sólo cuando ésta está en el 2º Sumando hay diferencias significativas entre la suma y la resta para 1º y 2º de E.P. Por último, en la operación suma, cuando la incógnita se ubica en el Resultado, Infantil no se diferencia de 1º de E.P. y en la operación resta, Infantil difiere de todos los demás cursos cuando la incógnita está en el 1er Sumando.

En la segunda interacción: operación x incógnita x tipo de problema las diferencias de medias entre la suma y la resta son significativas sólo en los problemas de Cambio. Las comparaciones de interacción nos especifican que hay diferencias significativas entre la suma y la resta cuando la incógnita está en el Resultado, en los problemas de Cambio y en los problemas de Comparación cuando la ubicación es el 2º Sumando.

En la **Fase Segunda** se tiene en cuenta la operación -suma o resta- que se hace para resolver el problema. Los problemas analizados son los de Cambio y Comparación, pero sólo en las situaciones de la incógnita en las que los dos problemas, uno se realiza con suma y otro con resta: Resultado y 1er Sumando para los de Cambio y 2º Sumando y 1er Sumando para los de Comparación.

En los problemas de Cambio no hay diferencias significativas en el factor Operación ($F = 3.690$, $p < .056$), pero sí son significativos los demás factores, por tanto, coincide en todo con la Fase Primera. Pero, el factor curso se comporta de forma diferente a la Fase Primera, en esta Segunda Fase son dos los cursos que son estadísticamente diferentes: uno, Infantil y, otro, todos los cursos de Primaria que se comportan como un único grupo; sin embargo, en la Primera Fase, 1º y 2º de E. P. era un grupo distinto de 3º de E.P. No hay diferencias significativas en las interacciones de la Operación con los factores: Curso y Ubicación de la incógnita.

TABLA 13.4.2

Resultados (Medias) de los problemas de Cambio por cursos, situación de la incógnita y operación (según el procedimiento). Fase Segunda

	Resultado		Primer Sumando	
	Suma	*Resta*	*Suma*	*Resta*
Infantil	1.83	1.63	.38	.33
1º E.P.	2.00	1.83	1.42	1.33
2º E.P.	1.96	1.71	1.54	1.25
3º E.P.	2.00	1.92	1.54	1.79

En los problemas de Comparación sigue sin haber diferencias significativas en el factor Operación ($F = 3.358$, $p < .068$), pero de nuevo son significativos los factores curso y ubicación de la incógnita y el factor Curso se comporta de la misma forma que en la Fase Primera. Estadísticamente hay tres grupos: Infantil, 1º y 2º de E.P. y 3º de E.P.

TABLA 13.4.3

Resultados (Medias) de los problemas de Comparación por cursos, situación de la incógnita y operación (según el procedimiento). Fase Segunda

	Segundo Sumando		Primer Sumando	
	Suma	*Resta*	*Suma*	*Resta*
Infantil	.54	.17	.08	.08
1º E.P.	1.29	.71	0.92	.54
2º E.P.	1.54	1.00	1.04	1.04
3º E.P.	1.63	1.96	1.08	1.54

Los resultados de la interacción Curso x Operación, en relación a los efectos simples de los dos factores, ponen de manifiesto que en el Curso 1º de E.P., hay diferencias significativas entre la suma y la resta ($F = 7.6478$, $p < .0068$) y también en el curso 3º de E.P. ($F = 7.3673$, $p < .0079$); sin embargo ni en Infantil ($F = 3.3660$, $p < .0697$) ni tampoco en 2º de E.P. ($F = 2.4737$, $p < .1191$) hay diferencias entre la operación suma y la operación resta.

Por otro lado, dentro de cada operación hay diferencias significativas entre los cursos. En la operación de sumar, sólo Infantil es significativamente distinto con cada uno de los otros tres cursos de Primaria -recordemos cómo se comportaba el factor curso en los problemas de Cambio-. En la de restar son significativamente distintos todos entre sí.

Los resultados de la interacción Operación x Incógnita manifiestan que sí hay diferencias significativas en el nivel de la incógnita en el 2º Sumando entre la operación suma y la operación resta ($F = .0268$, $p < .8701$) y que no hay diferencia significativa entre la suma y la resta en el nivel de la incógnita en el 1er Sumando ($F = .0268$, $p < .8701$).

Además, también encontramos diferencias significativas entre la situación de la incógnita 2º Sumando vs 1er Sumando en la operación suma ($F = 14.0718$, $p < .0002$), pero no hay diferencias entre 2º Sumando vs 1er Sumando en la operación resta ($F = 1.4546$, $p < .2293$).

En la **Fase Tercera** la operación es considerada tanto en función de la estructura como del procedimiento, se forman cuatro grupos porque se ha tenido en cuenta sí coinciden o no estructura y procedimiento, sí la estructura aumenta o disminuye y sí la operación con la que resuelven el problema es una suma o una resta. Los cuatro grupos, por tanto, que se han formado con el factor operación son: Suma-Suma, Resta-Resta, Suma-Resta y Resta-Suma.

TABLA 13.4.4

Resultados (Medias) por cursos, situación de la incógnita y operación (suma-suma, resta-resta, suma-resta y resta-suma). Fase Tercera

	Cambio				**Combinación**				**Comparación**			
	S-S	*R-R-*	*S-R*	*R-S*	*S-S*	*R-R*	*S-R*	*R-S*	*S-S*	*R-R*	*S-R*	*R-S*
Infantil	1.83	1.50	.69	.38	1.83	.96	.77	1.58	.54	.13	.08	.08
1º E.P.	2.00	1.63	1.46	1.42	2.00	1.46	1.48	1.92	1.29	.77	.52	.92
2º E.P.	1.96	1.63	1.40	1.54	1.79	1.29	1.29	2.00	1.54	1.21	1.00	1.04
3º E.P.	2.00	1.90	1.83	1.54	2.00	1.94	1.90	1.96	1.63	1.96	1.65	1.08

S-S = Suma-Suma; R-R = Resta-Resta; S-R = Suma-Resta; R-S = Resta-Suma.

En esta fase tercera, además de ser significativos los factores Curso y Tipo de problema -como lo eran en las otras dos fases-, también hay diferencias significativas en el factor Operación ($F = 44.891$, $p < .000$), a diferencia de las Fases Primera y Segunda, donde no es significativa la operación. Esto quiere decir que en el rendimiento de los niños también influye el tipo de operación, tal y como se ha catalogado en esta fase, además del curso donde se encuentran y del tipo de problemas que realicen.

El grupo de la operación Suma-Suma es significativamente distinto de los demás y también los grupos que utilizan la resta como procedimiento para resolver el problema. En cambio no es significativo Resta-Resta vs Resta-Suma ni Suma-Resta vs Resta-Suma.

Es también significativa la interacción Curso x Operación x Tipo de problema. Como hemos visto, el análisis de los efectos simple muestra que cada uno de los factores: curso, operación y tipo de problema son significativos en todos los niveles de cada uno de los otros factores.

Por último, considerando cada uno de los tipos de problemas podemos señalar: en los Problemas de Cambio, las diferencias de medias son significativas para SS vs RR, sólo entre Infantil vs 3º de E.P. y 2º E.P. vs 3º E.P., las demás son no significativas. En los problemas de Combinación, son todas las diferencias de medias significativas menos para S-S vs R-S entre 1º y 2º de E.P vs 3º de E.P. y, en los problemas de Comparación, también SS vs RS es no significativa entre 1º E.P. vs 2º de E.P.

Para terminar este apartado señalamos que, hasta ahora, se ha considerado que la dificultad para los niños depende del tipo de problema (Carpenter, 1986; Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Carpenter y Moser, 1983; Lindvall e Ibarra, 1980), así como del lugar donde se ubique la incógnita (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993). Pero, pensamos que hay además otra dificultad: la operación, desde el punto de vista de si coincide o no estructura y procedimiento. Los resultados manifiestan que la dificultad, dentro de la operación sigue la siguiente escala: Suma-Suma, Resta-Resta, Resta-Suma y Suma-Resta, esto nos lleva a pensar que es más fácil para los niños, por una parte, resolver aquellos problemas en los que no hay contradicción y, por otra, los problemas en los que existiendo contradicción tienen que realizar una suma para encontrar la solución.

14. ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS

Realizaremos a continuación el análisis cualitativo de los resultados de los problemas, para cuyo fin consideraremos, por un lado, los procedimientos que el niño utiliza -las estrategias- y, por otro, los errores que comete al aplicarlos.

En este apartado correspondiente a los procedimientos tendremos en cuenta sólo las respuestas que conducen a soluciones correctas. En primer lugar haremos un análisis global de los distintos niveles de estrategias; después, dentro de cada nivel, presentaremos una relación de las correspondientes a la suma y a la resta utilizadas por los niños. Finalmente consideraremos, en detalle, las estrategias que usan en cada uno de los problemas, agrupándolos según se resuelvan mediante suma o mediante resta.

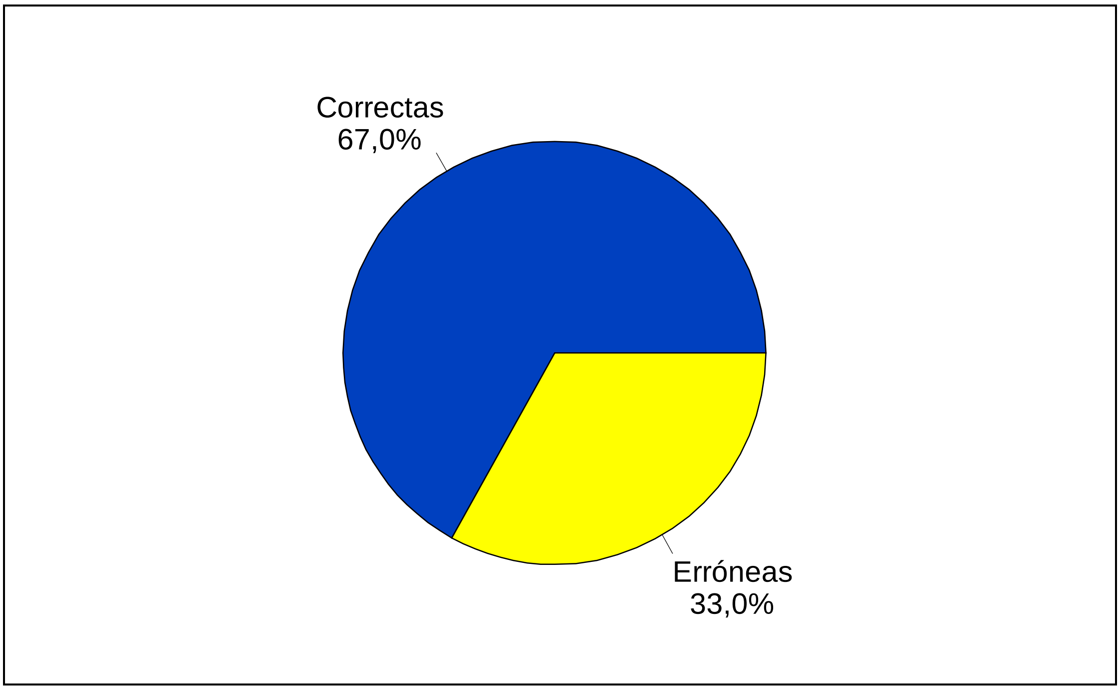
14.1. NIVELES DE EVOLUCIÓN GENERAL DE LAS ESTRATEGIAS

Las respuestas posibles, dadas por los niños podían ser: 3.456 (18 x 2 x 4 x 24 = número de problemas, número de versiones de cada problema, número de grupos y número de alumnos por cada grupo), de las que 2.321 respuestas han sido correctas (el 67 %) y 1.135 respuestas han sido erróneas (el 33%) (figura 14.1.1). Vamos a considerar sólo las correctas; las erróneas serán analizadas en el apartado siguiente (análisis de errores).

Para el análisis de las estrategias nos hemos apoyado en los trabajos de Carpenter y Moser (1982, 1983 y 1984) y hemos considerado los tres niveles propuestos por dichos autores: modelado directo, secuencias de conteo y hechos numéricos.

FIGURA 14.1.1

Porcentaje de respuestas correctas y erróneas



Las estrategias de *modelado directo* son empleadas casi en exclusiva por los alumnos de Infantil (95% de las respuestas), para ir disminuyendo en los dos primeros cursos de Primaria: en 1º E.P. el 59%, -si bien siguen siendo las más usadas por estos alumnos- y en 2º de E.P. el 31%. Prácticamente no son utilizadas por los alumnos de 3º de E.P.: el 5% de las respuestas (tabla 14.1.1 y figura 14.1.2).

Las estrategias de *conteo* evolucionan al contrario de las de modelado directo, son muy poco utilizadas por los alumnos de Infantil (5% de las respuestas), aumentan en el curso 1º de E.P. (27%) y son las elegidas mayoritariamente, tanto por los niños de 2º de E.P. (48% de las respuestas) como por los de 3º de E.P. (51%) (tabla 14.1.1 y figura 14.1.2).

TABLA 14.1.1

Número de respuestas, en los distintos niveles de estrategias, por tipo de problema y por cursos

Cursos	*Infantil*			*1º EP*			*2º EP*			*3º EP*		
Tipo de Problema	Ca	Co	Cp	Ca	Co	Cp	Ca	Co	Cp	Ca	Co	Cp
Nº de Respuestas totales	158	165	25	230	235	115	229	215	168	264	279	238
	348			**580**			**612**			**781**		
Modelado directo	151 (96)	158 (96)	22 (88)	126 (55)	164 (70)	55 (48)	59 (26)	84 (39)	48 (28)	13 (5)	9 (3)	15 (6)
	331(95)			**345**(59)			**191**(31)			**37**(5)		
Conteo	7 (4)	7 (4)	3 (12)	76 (33)	38 (16)	40 (35)	124 (54)	77 (36)	92 (55)	145 (55)	151 (54)	104 (44)
	17(5)			**154**(27)			**293**(48)			**400**(51)		
Hechos numéricos	------			28 (12)	33 (14)	20 (17)	46 (20)	54 (25)	28 (17)	106 (40)	119 (43)	119 (50)
				81(14)			**128**(21)			**344**(44)		

En negrita, totales de respuestas.

Entre paréntesis, tantos por cientos.

Ca = Problema de Cambio.

Co = Problema de Combinación.

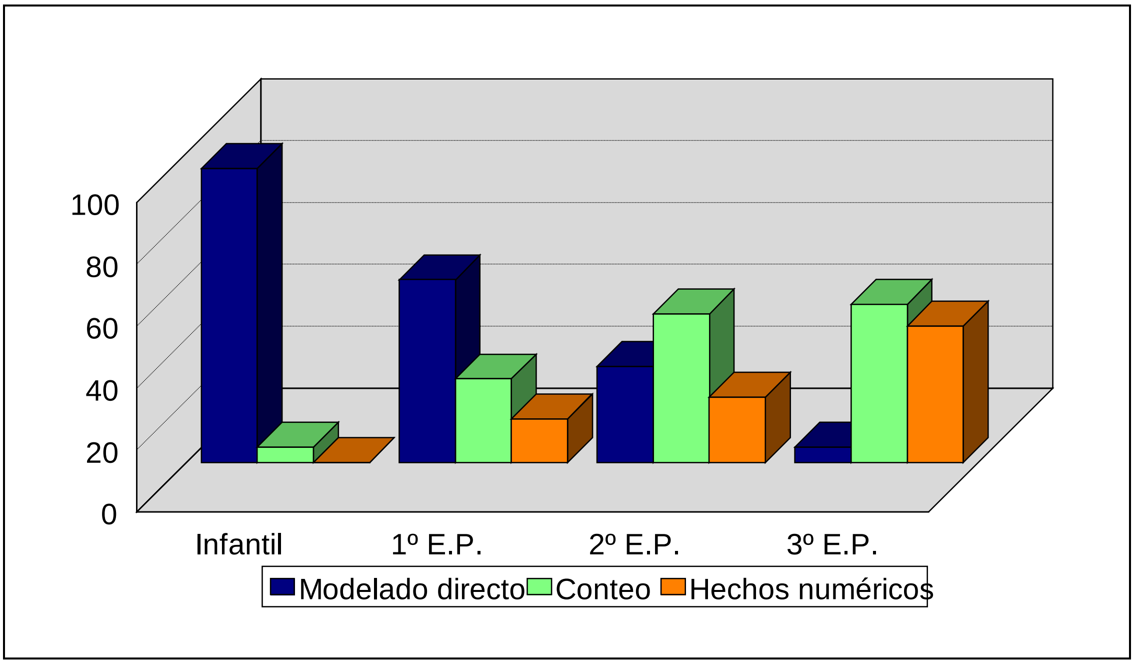
Cp = Problemas de Comparación.

Las estrategias de *hechos numéricos* no son empleadas por el grupo de Infantil, los niños progresivamente las van adquiriendo en los cursos de Primaria: 1º E.P. (14% de las respuestas), 2º E.P. (21% de las respuestas) y 3º

E.P. (44% de las respuestas) (tabla 14.1.1 y figura 14.1.2).

FIGURA 14.1.2

Porcentajes de utilización de las estrategias de modelado directo, conteo y hechos numéricos por cursos



Estos datos confirman de forma general los obtenidos en el estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1984). Igualmente constatamos que los niños en principio no abandonan las estrategias menos evolucionadas por otras más elaboradas: los niños de 1º de E.P. (49%) y los de 2º de E.P. (31%) siguen utilizando la estrategia de contar todos los elementos. Ello se debe probablemente a que, como sostienen otros autores (Carpenter y Moser, 1982; Fuson, 1982; Groen y Parkman, 1972 y Siegler y Klahr, 1981), el disponer de ayudas (objetos) puede inducir a emplear estrategias menos elaboradas en niños mayores.

14. 2. TIPOS DE ESTRATEGIAS EN CADA UNO DE LOS NIVELES

Los resultados globales anteriores, si bien son muy indicativos como evolución general de los grupos de edad, son demasiado generales. Por ello creemos conveniente analizar las distintas estrategias dentro de cada nivel -modelado directo, conteo y hechos numéricos-, agrupadas por estrategias de suma y estrategias de resta.

14.2.1. MODELADO DIRECTO

La finalidad de este apartado es determinar en detalle las distintas formas de utilizar las estrategias de *Contar todo con modelos*, es decir, cuando disponen de elementos manipulativos. Examinaremos primero los datos obtenidos en situaciones de suma, para analizar después los datos en situaciones de resta.

14.2.1.1. **Estrategias de suma**

En el procedimiento de modelado directo, para resolver los problemas aditivos, los niños utilizan la estrategia de *Contar todo* (counting all). Pero además, como señala Baroody (1987), dado que, este procedimiento es laborioso, los niños inventan espontáneamente "atajos" y así evitan el proceso de contar los objetos o dedos uno por uno para representar cada sumando.

TABLA 14.2.1.1

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de MODELADO DIRECTO por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
MODELADO DIRECTO	**331(95%)**	**345(59%)**	**191(31%)**	**37(5%)**
SUMA Contar todo con modelos	**134(38.46%)**	**93(15.91%)**	**25(4.06%)**	**3(0.41%)**
Nivel 1	116(33.29%)	36(6.16%)	3(0.49%)	--
Nivel 2	8(2.30%)	33(5.64%)	5(0.81%)	2(0.27%)
Nivel 3	8(2.30%)	9(1.54%)	13(2.11%)	--
Nivel 4	2(0.57%)	15(2.57%)	4(0.65%)	1(0.14%)
RESTA Contar todo con modelos	**197(56.54%)**	**252(43.09%)**	**166(26.94%)**	**34(4.59%)**
Separar de	134(38.60%)	151(25.82%)	97(15.74%)	32(4.32%)
Separar a	6(1.72%)	5(0.85%)	2(0.33%)	--
Contar hacia adelante	56(16.07%)	89(15.22%)	61(9.90%)	--
Emparejar	1(0.29%)	7(1.20%)	6(0.97%)	2(0.27%)

En negrita, totales de respuestas

En esta misma línea, hemos agrupado las respuestas de los niños en la ejecución de dicha estrategia en cuatro apartados o niveles, que consideramos indican una evolución en su desarrollo.

Nivel 1. Representan contando con objetos cada uno de los sumandos, volviendo después a contarlos todos empezando por el primer sumando. Hay un doble conteo, primero lo hacen para representar cada sumando y después para encontrar el total.

Nivel 2. Representan cada sumando con objetos o dedos, sin contar, y después cuentan para hallar el total. No hay doble conteo en este nivel.

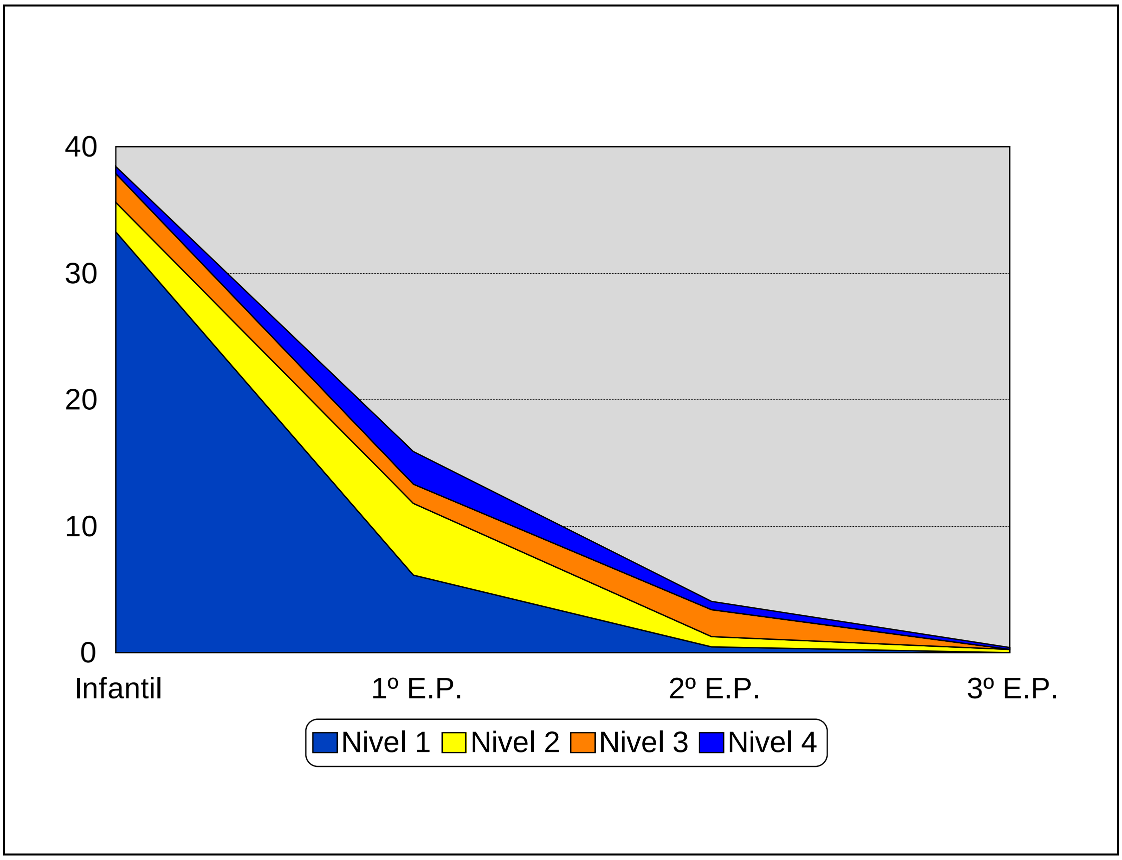
Nivel 3. Cuentan todo a medida que representan los sumandos con los dedos. Se diferencia del nivel 2 en que no hay representación previa, sino que se hace a la vez que el niño cuenta para encontrar el total.

Nivel 4. Forma pautas digitales para representar los sumandos y reconoce el resultado, no cuenta.

En la tabla 14.2.1.1. y en la figura 14.2.1.1. están los resultados de las estrategias de modelado directo de los problemas que se resuelven mediante suma y podemos apreciar como los niños de 2º de Infantil, casi mayoritariamente, en la estrategia de *Contar todo*, se sitúan en el nivel 1, el 33.29% de 38.46%, y realizan el doble conteo. Los alumnos de 1º de E.P., ya inventan atajos para ser más eficaces y sólo realizan el doble conteo -nivel 1- el 6.16% del 15.91% de los que utilizan contar todo. En 2º de E.P. sólo en tres ocasiones del total de respuestas emplean el doble conteo. Y en 3º de E.P. es poco utilizado el modelado directo en la suma: 0.41%.

FIGURA 14.2.1.1

Porcentajes de los cuatro niveles de la estrategia CONTAR TODO CON MODELOS (suma), por cursos

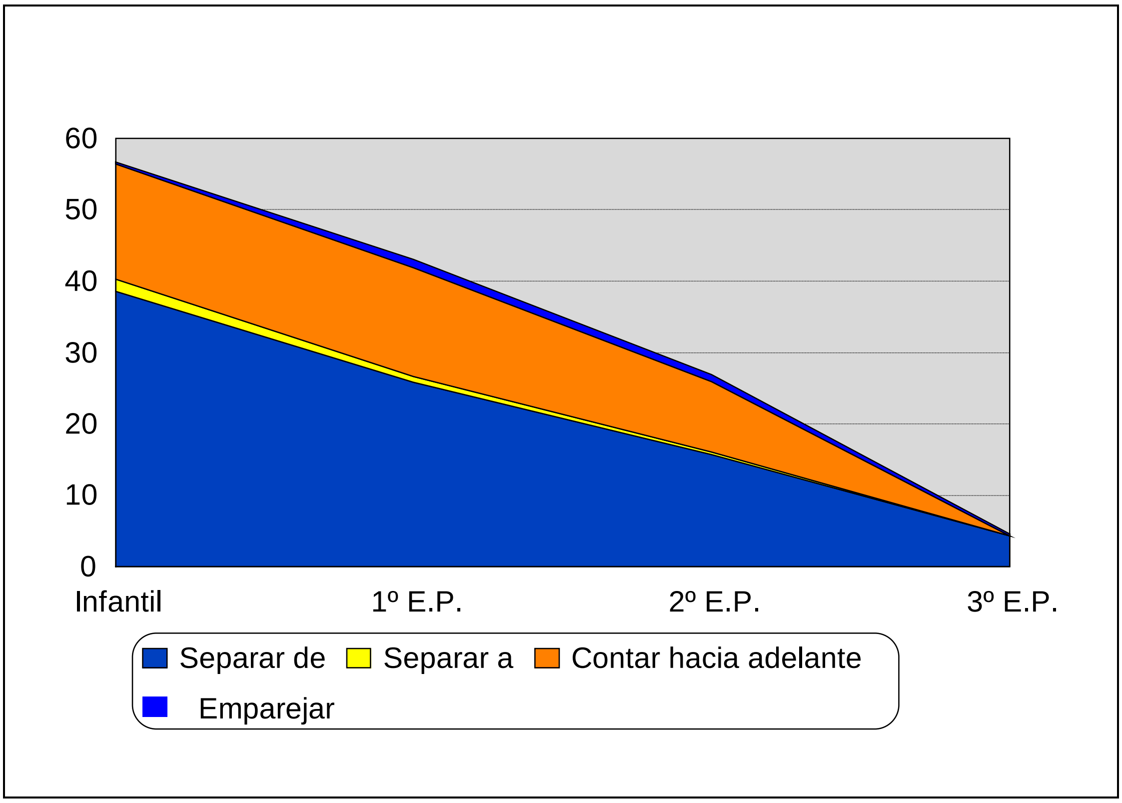


14.2.1.2. **Estrategias de resta**

En este primer nivel -modelado directo- las estrategias de resta son: *Separar de* (separating from), *Separar a* (separating to), *Contar hacia adelante* (adding on) y *Emparejar* (matching).

FIGURA 14.2.1.2

Porcentajes de las distintas estrategias de CONTAR TODO CON MODELOS (resta) por cursos



La distribución de los resultados del nivel de modelado directo con procedimientos de resta, están recogidos en la tabla 14.2.1.1. y en la figura 14.2.1.2. Como podemos ver, tanto la estrategia de *Emparejar* como la de *Separar a*, son muy poco utilizadas por todos los grupos; por el contrario, las estrategias de *Separar de* y *Contar hacia adelante* son usadas por los cursos de Infantil y 1º y 2º de E.P., de manera similar: en Infantil, del 56.54% de las repuestas de modelado directo, el 38.6% son estrategias de *Separar de* (tipo substrativa) y el 16.07% estrategias de *Contar hacia adelante* (tipo aditiva). En 1º de E.P., del 43.09% de las repuestas de modelado directo, el 25.82% son estrategias de S*eparar de* y el 15.22% estrategias de *Contar hacia adelante* y en 2º de E.P. del 26.94% de las repuestas de modelado directo, el 15.74% son estrategias de *Separar de* y el 9.90% estrategias de *Contar hacia adelante*. En 3º de E.P. aunque las estrategias están más evolucionadas, todavía dos niños (0.27%) usan el procedimiento de *Emparejar* en los problemas de comparación y el 4.32% solucionan problemas de resta con la estrategia *Separar de*. De manera general, podemos decir que las estrategias de tipo sustractivo (*Separar de*) son empleadas aproximadamente el doble de veces que las de tipo aditivo (*Contar hacia adelante*).

14. 2. 2. SECUENCIAS DE CONTEO

También en este segundo nivel identificaremos, por una parte, las distintas estrategias de suma y, por otra, las de resta para estudiar los diversos modos empleados por los niños cuando son ya capaces de no necesitar elementos concretos y de resolver los problemas planteados mediante conteo.

14.2.2.1. **Estrategias de suma**

Las estrategias utilizadas en el segundo nivel -secuencias de conteo- por los niños son *Contar todo sin modelos* y *Conteo hacia adelante* (counting on), partiendo del sumando menor o del sumando mayor. Los resultados de las estrategias de suma del nivel de Conteo están en la tabla 14.2.2.1. y se representan en la figura 14.2.2.1.

TABLA 14.2.2.1

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CONTEO por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
CONTEO				

	17(5%)	**154(27%)**	**293(48%)**	**400(51%)**
SUMA	**16(4.71%)**	**100(17.53%)**	**149(24.41%)**	**111(14.15%)**
Contar todo mentalmente	12(3.53%)	11(1.93%)	5(0.82%)	21(2.68%)
Contar a partir del sumando menor	--	16(2.80%)	22(3.60%)	14(1.78%)
Contar a partir del sumando mayor	4(1.18%)	73(12.80%)	122(19.99%)	76(9.69%)
RESTA	**1(0.29%)**	**54(9.47%)**	**144(23.59%)**	**289(36.85%)**
Contar hacia atrás desde	--	15(2.63%)	28(4.59%)	48(6.12%)
Contar hacia atrás hasta	--	2(0,35%)	21(3,44%)	32(4,08%)
Contar a partir de un número dado	1(0.29%)	37(6.49%)	95(15.56%)	209(26.65%)

En negrita los totales de respuestas

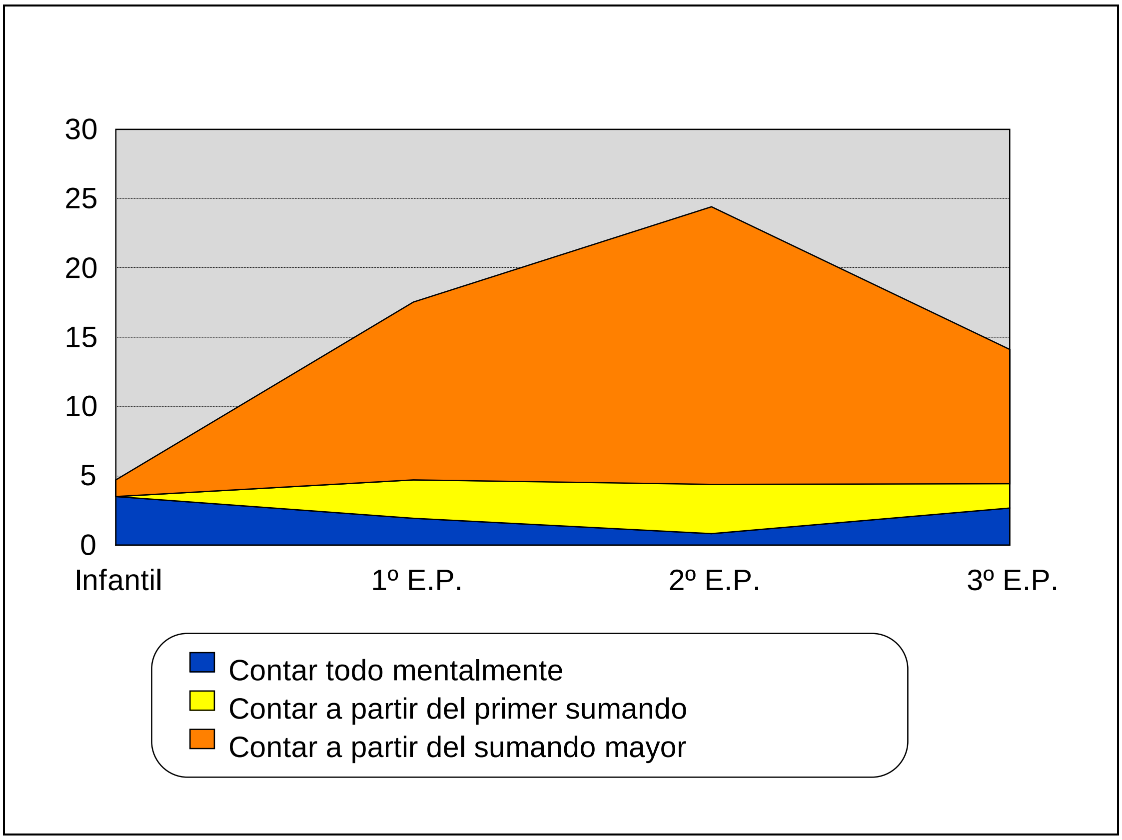
En el grupo de Infantil las estrategias de conteo en cuanto problemas de suma suponen sólo el 4,71% y emplean la estrategia de *Contar todo mentalmente* un 3.53%, bien cerrando los ojos o apoyándose en marcas de la pared, etc. En este grupo encontramos sólo una niña, María, que tiene un nivel más evolucionado que el resto de sus compañeros: C*ontar a partir del sumando mayor*.

En los grupos de primaria es poco usada la estrategia de *Contar todo mentalmente*, pero hay que reflejar que en 3º de E.P. es más usada que en primero y segundo de E.P. Pensamos que es como demostración (...ya soy mayor para usar lapiceros o ...yo no uso ya los dedos) de que no usan ni objetos ni dedos, (una niña decía que se imaginaba puntitos y los iba contando: los dibujó y tenía asociada a cada número una estructura de puntitos, siempre la misma). La estrategia más usada es la de *Contar a partir del sumando mayor* en los tres cursos: 1º de E.P. 12.80%, en 2º de E.P. 19.99% y en 3º de E.P. 9.69%, que demuestran que es la más empleada entre todas las estrategias de conteo por estos cursos. La estrategia *Contar a partir del sumando menor* es usada poco (2.80% en 1º de E.P., 3.60% en 2º de E.P. y 1.78% en 3º de E.P.), pero más que la de *Contar todo mentalmente*.

Al respecto, algunos autores (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Fuson, 1982, 1988) señalan que la mayoría de los niños usan sus dedos para registrar el número de pasos que se incrementan en la secuencia de conteo y también señalan el uso de la estrategia "contar a partir del sumando mayor", que supone una estrategia de conteo más evolucionada y cognitivamente más económica.

FIGURA 14.2.2.1

Porcentajes de estrategias de CONTEO (Suma) por cursos



En líneas generales, los resultados de este estudio en cuanto a las estrategias de modelado directo confirman en parte los resultados del estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1984). Los niños siguen utilizando las estrategias menos evolucionadas, en vez de las más eficientes de conteo o hechos numéricos. En cuanto a las de conteo los resultados bajos en la estrategia de *Contar a partir del sumando menor* frente a los de *Contar a partir del sumando mayor*, nos hacen pensar que no se corrobora la opinión de dichos autores y, una vez que los niños descubren el camino más corto de empezar a contar a partir de sumando mayor, utilizan esta última estrategia -más evolucionada- en vez de la de contar todo mentalmente o empezar a partir del sumando menor (ellos mismos afirman "...así termino antes .., voy más rápido").

14.2.2.2. **Estrategias de resta**

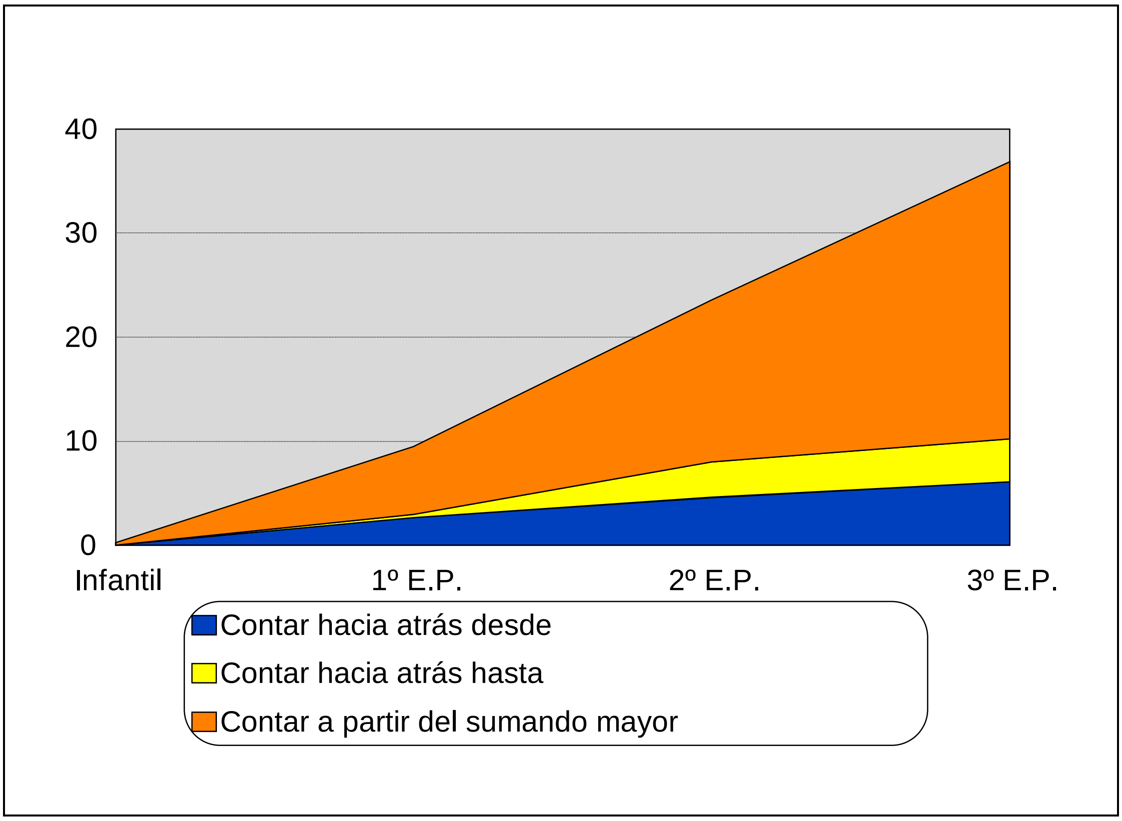
En el segundo nivel -secuencias de conteo- los niños utilizan en la resta las estrategias de *Contar hacia atrás desde* (counting down from), *Contar hacia atrás hasta* (counting down to), *Contar hacia adelante a partir de un número dado* (counting up from given). Los resultados de las estrategias de resta del nivel de Conteo están en la tabla 14.2.2.1. y en la figura 14.2.2.2.

En el curso de Infantil sólo una niña -la que, en las estrategias para resolver problemas de suma, utilizó contar a partir del sumando mayor- resuelve un problema de Combinación con la estrategia de *Contar a partir de un número dado*. En este curso no utilizan el recuento regresivo, que supone un conocimiento conceptual muy complicado y exigente en el plano cognoscitivo, (Baroody, 1984; Fuson y cols. 1982; Ginsburg y Baroody, 1983).

En los cursos de Educación Primaria los procedimientos usados por los niños son muy semejantes, si bien es verdad que usan más el conteo progresivo que el hacia atrás en los tres cursos. La proporción entre ambos conteos es distinta para cada uno de ellos: en 1º de E.P., el 6.49% de conteo progresivo y el 2.98 % de conteo hacia atrás; en 2º de E.P., el 15.56% de conteo progresivo y el 8.03% de conteo hacia atrás; y en 3º de E.P., el 26.65% de conteo progresivo y el 10.20% de conteo hacia atrás. Por tanto los de 3º de E.P., emplean el método más fácil en mayor proporción, que es el de contar a partir de un número dado. Estos resultados son, al menos, curiosos e indicativos de que el retroconteo es un método exigente (Baroody, 1984), pues no sólo conlleva contar regresivamente, sino que a la vez hay que realizar una cuenta progresiva.

FIGURA 14.2.2.2

Porcentajes de las estrategias de CONTEO (Resta) por cursos



Además, el contar hacia atrás puede realizarse de dos formas:

Contar hacia atrás desde (counting down from):

El niño toma como punto de partida el número mayor y desde allí comienza a contar hacia atrás. Así, en 8 - 5 = ? , comienza con 8; menos uno: 7; menos uno: 6; menos uno: 5; menos uno: 4; y menos uno: 3. La respuesta es tres. Esta secuencia tiene tantas denominaciones (nombres de números) como indica el número menor (sustraendo). El último número de la secuencia es el resultado.

Contar hacia atrás hasta (counting down to):

Se comienza la secuencia en el número mayor y se cuenta hacia atrás hasta que se llega al número menor. La respuesta es el número de palabras en la secuencia de conteo. En el ejemplo anterior, 8 - 5 = ? , comienza con 8; menos uno: 7; menos uno: 6; menos uno: 5, que es el dígito del sustraendo. La respuesta es el número de palabras de la secuencia, es decir, ve 3 dedos y esa es la solución; a veces cuenta los dedos usados y otras por percepción de pautas digitales.

En los cursos de Primaria, es más usada la estrategia primera (contar hacia atrás desde), aunque en los resultados puede influir si el sustraendo es pequeño o si están relativamente separados el minuendo y el sustraendo.

En resumen, comparando las estrategias de resta -tipo aditivo/tipo sustractivo- en los dos niveles (modelado directo/secuencias de conteo) observamos que, mientras en el modelado directo son más utilizadas las de tipo sustractivo (*Separar)* que las de tipo aditivo (*Contar hacia adelante)*: en proporción casi doble en 1º y 2º de E.P,. y en 3º de E.P. ni un solo niño elige estas últimas (tabla 6.2.1.1). Por el contrario, en el nivel de conteo, la estrategia *Contar a partir de un número dado* (tipo aditiva), que supone conteo progresivo, es más utilizada por todos los cursos de Primaria que la de *Contar hacia atrás* (tipo sustractivo), que implica conteo regresivo (tabla 14.2.2.1).

Los resultados anteriores confirman dos cosas:

Primera: en el nivel de modelado directo y al disponer el niño de objetos, utiliza procedimientos menos elaborados y así emplea *Separar*, (que implica contar el conjunto total y después separar el subgrupo) y no *Contar hacia adelante* (donde se parte de un subgrupo para llegar al conjunto total y, por tanto, no es necesario contar todo el conjunto).

Segunda: en el nivel de secuencias de conteo utiliza más el recuento progresivo (aditivo) que el regresivo (sustractivo), ya que el primero, como venimos señalando, es más fácil y económico. Cuando llegan a tercero muchos niños descubren los distintos modos y eligen el procedimiento más económico en cada caso (Woods y cols., 1975).

14. 2. 3. HECHOS NUMÉRICOS

Finalmente, en el tercer nivel se analizarán los dos tipos de estrategias que son manejadas por los niños: hechos conocidos y hechos derivados y que son utilizadas indistintamente para la suma y para la resta.

TABLA 14.2.3.1

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de HECHOS NUMÉRICOS por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
HECHOS NUMÉRICOS	--	**81(14%)**	**128(21%)**	**344(44%)**
Hechos conocidos	--	66(11.41%)	109(17.88%)	216(27.63%)
Hechos derivados	--	15(2.59%)	19(3.12%)	128(16.37%)

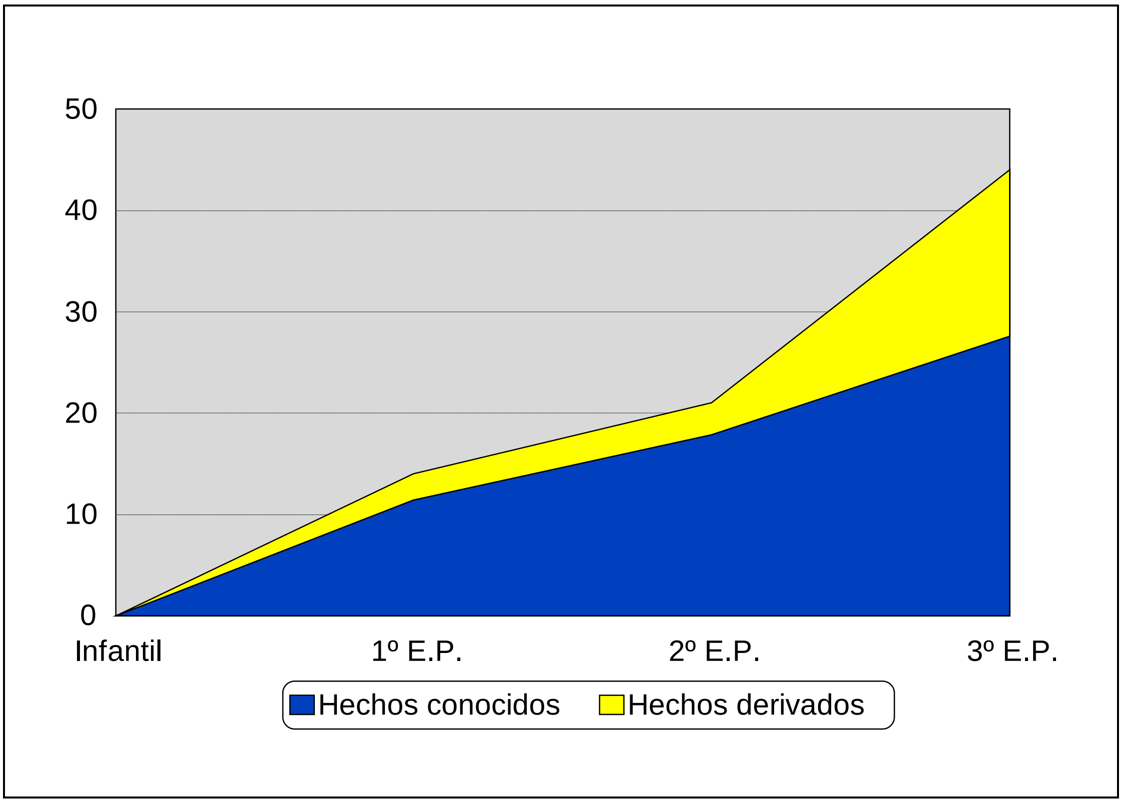
En negrita, totales de respuestas

14.2.3.1. **Estrategias comunes para la suma y la resta**

El tercer nivel de las estrategias lo constituyen los *Hechos numéricos*. Estos procedimientos pueden apoyarse, bien en la memoria, bien en las reglas; y, según lo hagan en una o en otras, serán *Hechos conocidos* o *Hechos derivados* -siguiendo la división de Carpenter y Moser (1982)- y estas estrategias son consideradas tanto de suma como de resta.

FIGURA 14.2.3.1

Porcentajes de las estrategias de HECHOS NUMÉRICOS por cursos



Los resultados de las estrategias de hechos numéricos se pueden ver en la tabla 14.2.3.1.y en la figura 14.2.3.1. Los resultados siguen la línea marcada por Carpenter y Moser (1984). En 2º de Educación Infantil todavía no son utilizadas las estrategias de *Hechos numéricos*: ni memoria, ni reglas. En los cursos de E. Primaria, de una forma progresiva, se extiende su uso: 14% en 1º, 21% en 2º y 44% en 3º. Si pasamos a analizar las dos estrategias de este tercer nivel, tanto en el procedimiento de *Hechos conocidos* (11.41% en 1º de E.P., 17.88% en 2º de E.P: y 27.63% en 3º de E.P.) como en el de *Hechos derivados* (2.59% en 1º de E.P., 3.12% en 2º de E.P. y 16.37% en 3º de E.P.), los grupos se comportan de acuerdo con las pautas de normalidad, siendo siempre más utilizado el primero que el segundo en todos los cursos.

Estas estrategias implican un nivel conceptual más elaborado que las estrategias de conteo, como se ha puesto de manifiesto en numerosos estudios (Baroody, 1987; Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1990, 1992; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter y Fennema, 1992; De Corte y Verschaffel, 1987).

14. 3. ESTRATEGIAS EN LOS DISTINTOS TIPOS DE PROBLEMAS

En este apartado agruparemos los procedimientos -estrategias- utilizados por los niños en la resolución de los problemas según el tipo de éstos (Cambio, Combinación y Comparación) y -dentro de cada tipo- según se trate de problemas que se resuelven sumando o restando. En cada tipo hay siempre dos problemas que se solucionan realizando una suma y cuatro que se resuelven ejecutando una resta. Se parte del número de respuestas correctas dadas a cada problema, por cada uno de los grupos, y se calculan los tantos por ciento, considerando las estrategias empleadas en su resolución, sin referencia a los porcentajes correspondientes a cada nivel de estrategia del grupo. Señalaremos en cada uno de los problemas la estructura semántica y la operación con la que se soluciona y determinaremos si hay relación entre la existencia o inexistencia de conflicto y la elección de la correspondiente estrategia.

14. 3. 1. PROBLEMAS DE CAMBIO

Los problemas de Cambio que se resuelven mediante suma son:

Cambio 1: la estructura semántica es de aumento y se resuelve por suma (SS); no hay conflicto.

Cambio 6: la estructura semántica es de disminución y se resuelve por suma (RS); hay conflicto.

En ambos problemas las estrategias empleadas presentan la siguiente evolución: Los niños de Infantil eligen para los dos problemas procedimientos de modelado directo -86% y 89%- de forma mayoritaria.

En los cursos de Educación Primaria evolucionan de la siguiente forma:

1) Disminuyendo el uso de la estrategia del nivel primero -modelado directo- *Contar todo con modelos* (35% en 1º de E.P., 15% en 2º de E.P. y 2% en 3º de E.P. para Cambio 1; 38% en 1º de E.P., 14% en 2º de E.P. y 5% en 3º de E.P. para Cambio 6).

2) Aumentando en 1º de E.P. respecto de Infantil, en 2º de E.P. respecto de 1º de E.P. y disminuyendo de 2º de E.P. a 3º de E.P., la utilización de las estrategias del segundo nivel -conteo- *Contar todo mentalmente, Contar a partir del primer sumando* y *Contar a partir del sumando mayor* (59% en 1º de E.P., 62% en 2º de E.P. y 44% en 3º de E.P. para Cambio 1; 32% en 1º de E.P., 62% en 2º de E.P. y 46% en 3º de E.P. para Cambio 6).

3) Aumentando la selección de estrategias del tercer nivel -hechos numéricos- (6% en 1 de E.P., 23% en 2º de E.P. y 44% en 3º de E.P. para Cambio 1; 30% en 1º de E.P., 24% en 2º de E.P. y 59% en 3º de E.P.

para Cambio 6).(tablas 14.3.1.1. y 14.3.1.2).

TABLA 14.3.1.1

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CAMBIO 1 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas Correctas	**44**	**48**	**47**	**48**
ESTRATEGIAS *-Contar todo con modelos*	38(86%)	17(35%)	7(15%)	1(2%)
-Contar todo mentalmente	6(14%)	6(13%)	5(11%)	9(19%)
-Contar a partir del sumando mayor	--	22(46%)	24(51%)	17(35%)
-Hecho conocido	--	2(4%)	8(17%)	14(29%)
-Hecho derivado	--	1(2%)	3(6%)	7(15%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Los datos anteriores indican que no hay diferencias en la elección del tipo de estrategia para resolver estos dos problemas -Cambio 1 y Cambio 6-, aunque tienen diferente estructura semántica (aumento para Cambio 1 y disminución para Cambio 6) y se resuelven con la misma operación. Cambio 1 es el problema más fácil (el primero en nuestros resultados, $\bar{x}$ = 1.95. Anexo 2) y no hay conflicto entre la estructura y la operación. Cambio 6 es difícil (el décimo segundo en nuestros resultados, $\bar{x}$ = 1.22) porque, además de existir conflicto entre la estructura y la operación, la incógnita está situada en el primer sumando y la situación de la incógnita es una de las variables que influye en la dificultad de los problemas, sobre todo en el grupo de Infantil (sólo se producen 9 respuestas de las 48 posibles).

TABLA 14.3.1.2

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CAMBIO 6 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas Correctas	**9**	**34**	**37**	**37**
ESTRATEGIAS *-Contar todo con modelos*	8(89%)	13(38%)	5(14%)	2(5%)
-Contar a partir del sumando mayor	1(11%)	9(26%)	16(43%)	12(32%)
-Contar a partir del primer sumando	--	2(6%)	7(19%)	5(14%)
-Hecho conocido	--	10(30%)	8(22%)	14(38%)
-Hecho derivado	--	--	1(2%)	4(11%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

En un estudio de Bermejo y Rodríguez, (1992, p. 36), en el que se realiza un análisis de las estrategias de resolución, cuando tratan de las estrategias aditivas con la incógnita en el segundo sumando, cuya resolución puede efectuarse mediante adición o sustracción, los resultados encontrados por dichos autores son, que la mayor parte de los niños resuelven este tipo de tareas de forma aditiva, contar desde el sumando conocido hasta el resultado y muy pocos usan la estrategia de contar hacia atrás relacionada con la resta. La utilización de esta estrategia requiere, como ya hemos dicho, una competencia conceptual importante porque supone conocer las funciones de cada uno de los términos de la adición (el esquema parte-parte-todo de Resnick, 1893) y un sistema de doble registro.

Los problemas de Cambio que se resuelven mediante resta son:

Cambio 2: la estructura semántica es de disminución y se resuelve por resta (RR); no hay conflicto.

Cambio 3: la estructura semántica es de aumento y se resuelve por resta (SR); hay conflicto.

Cambio 4: la estructura semántica es de disminución y se resuelve por resta (RR); no hay conflicto.

Cambio 5: la estructura semántica es de aumento y se resuelve por resta (SR); hay conflicto.

Los diferentes tipos de estrategias de los problemas que se resuelven mediante resta se recogen en las tablas 14.3.1.3., 14.3.1.4., 14.3.1.5. y 14.3.1.6.

En el grupo de Infantil las estrategias que han sido utilizadas por los niños en el nivel -contar todo con modelos- son:

En los problemas de Cambio 2 y Cambio 4, *Separar de* (98% y 82% respectivamente) y *Separar a* (2% y 15% respectivamente) son estrategias sustractivas. Ambos problemas tienen estructura semántica de disminución y se resuelven con una resta.

En los problemas Cambio 3 y Cambio 5, *Contar hacia adelante* (100% en ambos problemas) es una estrategia aditiva. La estructura semántica de los dos problemas es de aumento, aunque se resuelven mediante una resta.

Los niños de Infantil todavía no son capaces de utilizar las estrategias más evolucionadas de los niveles de conteo y de hechos numéricos.

TABLA 14.3.1.3

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CAMBIO 2 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**39**	**44**	**41**	**46**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	38(98%)	36(82%)	16(39%)	5(9%)
-Separar a	1(2%)	--	--	--
-Contar hacia adelante	--	--	--	--
-Contar hacia atrás desde	--	5(11%)	12(29%)	13(28%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	2(5%)	--
-Contar a partir de un número dado	--	--	3(7%)	10(21%)
-Hecho conocido	--	--	7(17%)	9(20%)
-Hecho derivado	--	3(7%)	1(3%)	9(20%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

TABLA 14.3.1.4

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CAMBIO 3 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**25**	**38**	**37**	**45**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	--	1(3%)	--	--
-Separar a	--	--	--	--
-Contar hacia adelante	25(100%)	21(55%)	11(30%)	--
-Contar hacia atrás				

desde	--	--	--	--
-Contar hacia atrás hasta	--	--	--	2(4%)
-Contar a partir de un número dado	--	13(34%)	20(54%)	25(56%)
-Hecho conocido	--	3(8%)	5(13%)	8(18%)
-Hecho derivado	--	--	1(3%)	10(22%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

En el grupo de Primero de E.P. -nivel de modelado directo- para el problema Cambio 2 todavía es muy utilizada la estrategia de *Separar de* (82%) e igual ocurre con el problema Cambio 4, donde los procedimientos para hallar la solución son *Separar de* (67%) y *Separar a* (9%); por tanto son recursos sustractivos. Por el contrario para Cambio 3 es *Contar hacia adelante* (55%) la estrategia más utilizada, que es de tipo aditivo. Sin embargo en Cambio 5, aunque tiene las mismas características que Cambio 3 (estructura semántica de disminución y que se resuelve mediante resta), los niños casi por igual usan procedimientos sustractivos *Separar de* (10%) y *Separar a* (6%) que aditivos *Contar hacia adelante* (19%).

En el segundo nivel -conteo- para Cambio 2 algunos niños eligen *Contar hacia atrás* (11%) de conteo regresivo; para Cambio 4 todavía son poco niños los que utilizan las estrategias de este nivel. Sin embargo Cambio 3 (34%) y Cambio 5 (47%) son resueltos con la estrategia aditiva de *Contar a partir de un número dado*.

En el nivel tercero -hechos numéricos- los niños de primero ya usan este tipo de procedimiento para los cuatro problemas: Cambio 2 (7%), Cambio 3 (8%), Cambio 4 (15%) y Cambio 5 (12%).

Los niños de Segundo de E.P. siguen, aunque en menor proporción, resolviendo los problemas con estrategias de este nivel -modelado directo-;

así, para Cambio 2, un 39% de los niños lo hace con *Separar de;* y para Cambio 4, un 38% con *Separar de* y un 5% con *Separar a.* Ambos procedimientos son sustractivos, sin embargo para Cambio 3 y Cambio 5 el procedimiento es aditivo: *Contar hacia adelante*, 30% y 11% respectivamente.

En el nivel de conteo el grupo de 2º de E.P. se comporta de forma parecida al grupo de primero de E.P.; es decir, para encontrar la solución a Cambio 2 las estrategias elegidas son sustractivas (34%), para Cambio 3 y Cambio 5 son utilizadas las estrategias aditivas (54% y 57% respectivamente); sin embargo hay diferencias en el problema de Cambio 4, pues, mientras en primero sólo el 6% de los niños lo resuelven (3% estrategia aditiva y 3% estrategia sustractiva), en segundo lo hacen (24%), empleando la estrategia aditiva *Contar a partir de un número dado*, de conteo progresivo y con estrategia substractiva *Contar hacia atrás*, de conteo regresivo (19%).

En el nivel de hechos numéricos, en el curso de 2º de E.P. aumenta el número de niños que adoptan estas estrategias más evolucionadas (20% en Cambio 2, 16% en Cambio 3, 14% en Cambio 4 y 23% en Cambio 5).

En el curso de <u>Tercero de E.P.</u> las estrategias del nivel de modelado directo son usadas en porcentajes muy bajos.

En el nivel de conteo, para Cambio 2, aunque no tan de forma exclusiva o mayoritaria como en 1º y 2º, sigue siendo superior el uso de estrategias sustractivas (28%) que el de aditivas (21%). En Cambio 4, como pasaba en 2º, son superiores las aditivas (42%) a las sustractivas (13%). En Cambio 3 predomina la estrategia de recuento progresivo (56%) *Contar a partir de un número dado*. Y en Cambio 5, sin embargo, aunque usan el recuento progresivo en un 37%, también eligen el conteo hacia atrás en un 26%.

Los hechos numéricos son muy utilizados (40% en Cambio 2, Cambio 3 y Cambio 4; 30% en Cambio 5). Cuando aplican la estrategia de *Hechos derivados* lo hacen usando la regla de los dobles, pensamos que propiciado por los números utilizados en los problemas (5 y 7, 4 y 3, 5 y 4).

Así el problema de Cambio 4.2., de la segunda sesión: "María tenía 12 cromos. Le da algunos cromos a Luis. Ahora María tiene 7 cromos. ¿Cuántos cromos le da a Luis?" es resuelto por una niña de 1º de E. Primaria con una estrategia de *hecho derivado*:

> *Entrevistador*: lee el problema.
> *Sara*: [usando los dedos] cuenta "7, 8, 9, ...no, espera. Son cinco".
> *Entrevistador*: "¿Cómo lo has hecho?"
> *Sara:* "Como 6 + 6 son 12, he juntado 1 con el 6 y son siete y entonces me quedan cinco".

TABLA 14.3.1.5

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CAMBIO 4 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**33**	**34**	**37**	**45**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	27(82%)	23(67%)	14(38%)	2(5%)
-Separar a	5(15%)	3(9%)	2(5%)	--
-Contar hacia adelante	1(3%)	1(3%)	--	--
-Contar hacia atrás desde	--	1(3%)	1(3%)	--
-Contar hacia atrás hasta	--	--	6(16%)	6(13%)
-Contar a partir de un				

número dado	--	1(3%)	9(24%)	19(42%)
-Hecho conocido	--	3(9%)	4(11%)	13(29%)
-Hecho derivado	--	2(6%)	1(3%)	5(11%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Igualmente el problema de Cambio 1.2., de la primera sesión: "María tenía 7 cromos. Luis le da 5 cromos más. ¿Cuántos cromos tiene María ahora?" es resuelto por un niño de 2º de E. Primaria con una estrategia de *hecho derivado*:

Entrevistador: lee el problema.

Javier: contesta "doce".

Entrevistador: "¿Cómo lo has hecho?"

Javier: "Pensando que éste es 6 [Señala el 7] y le regalo uno al cinco y como 6 y 6 son 12, ¡ya está¡"

TABLA 14.3.1.6

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de CAMBIO 5 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**8**	**32**	**30**	**403**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	--	3(10%)	1(3%)	3(7%)
-Separar a	--	2(6%)	--	--
-Contar hacia adelante	8(100%)	6(19%)	3(11%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	--	1(3%)	2(5%)

-Contar hacia atrás hasta	--	2(6%)	1(3%)	9(21%)
-Contar a partir de un número dado	--	15(47%)	17(57%)	16(37%)
-Hecho conocido	--	2(6%)	6(20%)	8(19%)
-Hecho derivado	--	2(6%)	1(3%)	5(11%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Partiendo del análisis que hemos realizado de las estrategias de resta, podemos decir que sí hay diferencias en las utilizadas por los niños en los diferentes problemas de resta, sobre todo en los cursos de Infantil y Primero; es decir, la estructura semántica del problema influye en el procedimiento elegido para su resolución. Así, Cambio 2 y Cambio 4, con estructura semántica de disminución, son resueltos por la estrategia *Separar de*, (sustractiva) y para Cambio 3 y Cambio 5, con estructura semántica de aumento, son empleadas las estrategias de *Contar hacia adelante* y *Contar a partir de un número dado* (aditivas); esta diferencia es menos clara en los cursos de segundo y tercero, sobre todo en Cambio 4, como ya hemos señalado. Estos resultados están en la línea de Carpenter y Moser, (1982, p. 19), al menos en el primer año de escolaridad la estructura semántica del problema determina en alto grado la estrategia escogida para su resolución. Tal influencia decrece progresivamente con la edad de modo que en el tercer año es pequeña. La mayoría de los niños que resuelven con éxito los problemas de Cambio, utilizan la estrategia *Separar de* o *Contar a partir de lo dado*. En este mismo sentido Bermejo (1990), señala que el tipo de problema planteado puede incidir notablemante en la elección de la estrategia utilizada para su resolución. Así, en los problemas de Cambio con la incógnita en el resultado favorecen el uso de la estrategia *Separar de* y *Contar hacia atrás a partir de*; mientras que si la incógnita está en el sustraendo, entonces se prestaría mejor la estrategia *Separar a* y *Contar hacia atrás.*

14. 3. 2. PROBLEMAS DE COMBINACIÓN

En cuanto a los problemas de Combinación hay autores (Carpenter y cols. 1981; Riley y cols. 1983; Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987; Bebout, 1990), que sólo consideran dos tipos: Combinación 1, en el que hay que hallar el grupo total, y Combinación 2, en el que hay que encontrar un subgrupo.

Nosotros hemos seguido la clasificación de Riley y Greeno (1988); dichos autores proponen seis problemas de Combinación: Combinación 1 y Combinación 2, en los que la combinación es desconocida (equivalen al de Combinación 1 de los otros autores) y Combinación 3, Combinación 4, Combinación 5, y Combinación 6, en los que el subgrupo es el desconocido (es el Combinación 2 de los demás autores).

TABLA 14.3.2.1

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMBINACIÓN 1 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas Correctas	**44**	**48**	**43**	**48**
ESTRATEGIAS *-Contar todo con modelos*	41(93%)	19(40%)	3(7%)	--
-Contar todo mentalmente	3(7%)	1(2%)	--	5(10%)
-Contar a partir del sumando mayor	--	6(12%)	16(37%)	11(23%)
-Contar a partir del primer sumando	--	14(29%)	10(23%)	6(13%)
-Hecho conocido	--	8(17%)	12(28%)	15(31%)
-Hecho derivado	--	--	2(5%)	11(23%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Los problemas de Combinación que se resuelven mediante suma son:

Combinación 1

Combinación 2

Los problemas de Combinación 1 y Combinación 2 tienen la combinación desconocida, pero se diferencian en que en Combinación 2 se menciona ésta en primer lugar. La solución se encuentra realizando una suma. Las estrategias utilizadas son las mismas para ambos problemas (tablas 14.3.2.1. y 14.3.2.2), con la única diferencia de que casi no es utilizada la estrategia C*ontar a partir del primer sumando* en Combinación 2. La explicación puede encontrarse en que en Combinación 1 los números de los problemas son: 5 + 3 = --- y 6 + 7 = --- y en Combinación 2 son: 3 + 5 = --- y 8 + 7 = ---, entre el 6 y el 7 comienzan por el primero; pero entre 3 y 5 comienzan por el 5, no sólo porque hay más diferencia, sino porque pocos niños cuentan cinco, al ser 5 los dedos de la mano.

El problema de Combinación 1.2., pasado en la primera sesión, "Luis tiene 6 cromos. Miguel tiene 7 cromos. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?", Fátima, una niña de 2º de E. Primaria, lo resuelve con la estrategia de *empezar por el sumando mayor*:

Entrevistador: lee el problema.

Fátima:[nada más terminar la primera lectura] contesta "trece".

Entrevistador: "¿Cómo lo has hecho?"

Fátima: "Con los dedos, empezando en el último número [señala el 7]; si empiezas por el otro [señala el 6], tardas más; nos lo dice la Seño. He contado 8, 9, 10, 11,12 y13" [al mismo tiempo que va tocando, uno a uno, seis dedos].

TABLA 14.3.2.2

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de

COMBINACIÓN 2 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas Correctas	**38**	**46**	**48**	**47**
ESTRATEGIAS *-Contar todo con modelos*	35(92%)	24(52%)	2(4%)	--
-Contar todo mentalmente	2(5%)	4(9%)	--	7(15%)
-Contar a partir del sumando mayor	1(3%)	11(24%)	25(52%)	13(28%)
-Contar a partir del primer sumando	--	--	3(6%)	1(2%)
-Hecho conocido	--	7(15%)	4(29%)	14(30%)
-Hecho derivado	--	--	4(9%)	12(25%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

El problema de Combinación 2.2., pasado en la tercera sesión, "Hay algunos balones en el patio.De ellos, 8 balones son rojos. Hay 7 balones verdes ¿Cuántos balones hay entre rojos y verdes?", Jose Luis, un niño de 1º de E. Primaria, lo resuelve de esta curiosa manera:

Entrevistador: lee el problema.

Jose Luis: coge 7 lapiceros verdes y los coloca en paralelo y después extiende los cinco dedos de una mano a la izquierda y tres de la otra mano a la derecha de los lapiceros; con la vista cuenta dedos, lapiceros y dedos. Contesta "quince".

Entrevistador: "¿Cómo lo has hecho?"

Jose Luis: "He cogido los lápiceros verdes, como si fueran los balones verdes; luego he puesto una mano aquí [señala a la izquierda de los lapiceros], y luego estos dedos aquí [enseña tres dedos y señala a la derecha de los lapiceros] porque son 8 los balones rojos y luego he contado todos juntos, porque me has dicho *entre* rojos y verdes, y me ha dado quince".

Los problemas de Combinación que se resuelven mediante resta son:

Combinación 3
Combinación 4
Combinación 5
Combinación 6

Los diferentes tipos de estrategias con los que son resueltos estos problemas se recogen en las tablas 14.3.2.3., 14.3.2.4., 14.3.2.5 y 14.3.2.6.

El curso de Infantil, en el nivel de modelado directo, para los problemas de Combinación 3 y Combinación 4 utilizan la estrategia de *Separar de*; para Combinación 5 y Combinación 6 los resuelven empleando tanto *Separar de* como *Contar hacia adelante*; es decir, emplean una estrategia sustractiva y otra aditiva.

Los cursos de Primero y Segundo de E.P. tienen estrategias similares en los problemas que se resuelven por restas. Para resolver los de Combinación 3 y Combinación 4, en ambos, en el nivel de contar todo con modelos, utilizan una estrategia aditiva *Contar hacia adelante* el 73%, en 1º de E.P. y el 71%, en 2º de E.P. para Combinación 3 y el 62%, en 1º de E.P. y el 59%, en 2º de E.P. para Combinación 4.

TABLA 14.3.2.3

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMBINACIÓN 3 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**17**	**34**	**28**	**45**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	17 (100%)	4 (12%)	2 (7%)	--
-Contar hacia adelante	--	25 (73%)	20 (71%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	--	--	2 (4%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	--	1 (2%)
-Contar a partir de un número dado	--	--	--	20 (45%)
-Hecho conocido	--	4 (12%)	3 (11%)	9 (20%)
-Hecho derivado	--	1 (3%)	3 (11%)	13 (29%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Por otro lado, en los problemas, Combinación 5 y Combinación 6, la estrategia más utilizada, en el nivel material, en terminología de De Corte y Verschaffel (1987), es una estrategia sustractiva, *Separar de*, con el 84% en 1º de E.P. y el 47% en 2º de E.P., en el problema Combinación 5 y para Combinación 6, es el 53% en 1º de E.P. y 31% en 2º de E.P.

El grupo de Primero no maneja estrategias del nivel verbal, pero sí de hechos numéricos, por el contrario el curso de Segundo, además de las estrategias de *Hechos numéricos*, también los resuelven con la estrategia aditiva, *Contar a partir de un número dado*, Combinación 5, un 26% y Combinación 6, un 24%.

TABLA 14.3.2.4

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMBINACIÓN 4 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**18**	**34**	**29**	**47**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	18 (100%)	6 (17%)	4 (14%)	1 (2%)
-Contar hacia adelante	--	21 (62%)	17 (59%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	--	--	3 (6%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	--	1 (2%)
-Contar a partir de un número dado	--	1 (3%)	--	26 (56%)
-Hecho conocido	--	5 (15%)	7 (24%)	10 (21%)
-Hecho derivado	--	1 (3%)	1 (3%)	6 (13%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Pocos son los niños de Tercero de E. P. que utilizan estrategias del nivel de modelado directo: así, para los cuatro problemas de Combinación que se resuelven mediante restas, emplean o bien la estrategia aditiva de *Contar a partir de un número dado*, del nivel verbal, o las estrategias del tercer nivel, *Hechos numéricos*.

TABLA 14.3.2.5

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de

COMBINACIÓN 5 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**20**	**37**	**34**	**46**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	12 (60%)	31 (84%)	16 (47%)	4 (9%)
-Contar hacia adelante	8 (40%)	5 (13%)	4 (12%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	1 (3%)	--	3 (7%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	2 (6%)	3 (7%)
-Contar a partir de un número dado	--	--	9 (26%)	21 (45%)
-Hecho conocido	--	--	3 (9%)	7 (15%)
-Hecho derivado	--	--	--	8 (17%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Pocos son los niños de Tercero de E. P. que utilizan estrategias del nivel de modelado directo: así, para los cuatro problemas de Combinación que se resuelven mediante restas, emplean o bien la estrategia aditiva de *Contar a partir de un número dado*, del nivel verbal, o las estrategias del tercer nivel, *Hechos numéricos*.

TABLA 14.3.2.6

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMBINACIÓN 6 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**28**	**36**	**33**	**46**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	13 (47%)	19 (53%)	10 (31%)	4 (9%)
-Contar hacia adelante	14 (50%)	10 (28%)	6 (18%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	--	3 (9%)	7 (15%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	1 (3%)	1 (2%)
-Contar a partir de un número dado	1 (3%)	--	8 (24%)	20 (44%)
-Hecho conocido	--	5 (14%)	4 (12%)	7 (15%)
-Hecho derivado	--	2 (5%)	1 (3%)	7 (15%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Los datos que aportamos están en concordancia con el estudio de De Corte y Verschaffel (1987) y así, cuando ellos comparan sus resultados con los del estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1982, 1984) señalan la diferencia entre las distintas estrategias usadas en la resolución de uno de los problemas de Combinación, llegando a la conclusión de que Carpenter y Moser utilizaron el que corresponde al nuestro de Combinación 5 y De Corte y Verschaffel, el que corresponde al de Combinación 3.

En este último, también en 1º y 2º de E.P. utilizan una estrategia aditiva y, por el contrario, en el de Combinación 5 la estrategia es sustractiva, que es la diferencia encontrada por De Corte y Verchaffel y que viene a confirmar que otra variable que influye en la resolución de los problemas es el orden de presentación de sus sentencias.

14.3.3. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

Los problemas de Comparación que se resuelven mediante suma son:

Comparación 3: en su enunciado figura "más que" y se resuelve por suma (SS); no hay conflicto.

Comparación 6: en su enunciado figura "menos que" y se resuelve por suma (SS); hay conflicto.

El problema Comparación 3 es el único donde el grupo de Infantil consigue más respuestas correctas (13 respuestas de 48 posibles); 10 respuestas utilizan la estrategia de *Contar todo con modelos* y el resto la de *Contar a partir del mayor*.

TABLA 14.3.3.1

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMPARACIÓN 3 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas Correctas	**13**	**31**	**37**	**39**
ESTRATEGIAS *-Contar todo con modelos*	10(77%)	14(45%)	4(11%)	--
-Contar a partir del sumando mayor	3(23%)	12(39%)	27(73%)	18(46%)
-Contar a partir del primer sumando	--	--	2(5%)	2(5%)
-Hecho conocido	--	5(16%)	4(11%)	14(36%)
-Hecho derivado	--	--	--	5(13%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

En los cursos de Primaria las estrategias siguen la evolución de la edad que venimos señalando: disminución de las estrategias del nivel de modelado y aumento de las del nivel de conteo y hechos numéricos; en los dos primeros cursos de Primaria y en tercero es mayoritario el uso de las estrategias de hechos numéricos en el problema Comparación 6 (58 % *Hecho conocido* y 23 % *Hecho derivado*, frente al 19% de *Contar a partir del sumando mayor*). En el problema Comparación 3, sin embargo, es mayor el porcentaje de la estrategia del nivel de conteo *Contar a partir del sumando mayor*, 46%, registrando el 36 % la de *Hecho conocido* y el 13% la de *Hecho derivado*. Podemos sugerir como explicación que el problema Comparación 6 es más difícil que el de Comparación 3, al haber conflicto entre su estructura semántica y la operación y que quienes son capaces de realizarlo bien, no sólo lo resuelven sino que emplean una estrategia más avanzada. Los pares de números usados en ambos problemas son iguales o similares Comparación 3 (5-3 y 9-5) y Comparación 6 (5-3 y 9-6). Estos datos están en la misma línea que un trabajo reciente (Bermejo y cols. 1997,1999) donde estos autores señalan que para el problema de Comparación 6 el grupo de 2º de E.P. emplean las estrategias *Memorísticas* en la totalidad de ensayos correctos.

TABLA 14.3.3.2

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMPARACIÓN 6 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas Correctas	**2**	**22**	**25**	**26**
ESTRATEGIAS *-Contar todo con modelos*	2(100%)	6(27%)	4(16%)	--
-Contar a partir del sumando mayor	--	13(59%)	14(56%)	5(19%)
-Contar a partir del primer sumando	--	--	--	--
-Hecho conocido	--	2(9%)	7(28%)	15(58%)
-Hecho derivado	--	1(5%)	--	6(23%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Los problemas de Comparación que se resuelven mediante resta son:

Comparación 1: en su enunciado está "más que", pero que se resuelve por una resta (SR); hay conflicto.

Comparación 2: en su enunciado está “menos que” y se resuelve por resta (RR); no hay conflicto.

Comparación 4: en su enunciado está “menos que” y se resuelve por resta (RR); no hay conflicto.

Comparación 5: en su enunciado está “más que”, pero que se resuelve por una resta (SR); hay conflicto.

TABLA 14.3.3.3

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMPARACIÓN 1 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**2**	**12**	**23**	**42**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	2(100%)	5(42%)	4(17%)	1(2%)
-Emparejar	--	1(8%)	2(9%)	2(4%)
-Contar hacia atrás desde	--	--	1(4%)	4(10%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	1(4%)	--
-Contar a partir de un número dado	--	5(42%)	13(57%)	18(43%)
-Hecho conocido	--	1(8%)	2(9%)	13(31%)
-Hecho derivado	--	--	--	4(10%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

En general, diversos estudios señalan la mayor dificultad de los problemas de comparación respecto a la de otro tipo de problemas (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Mayer, 1982; Morales, Shute y Pellegrino, 1985; Riley y Greeno, 1988; Riley, Greeno y Heller, 1983). En particular, se refieren a la dificultad cuando hay inconsistencia entre el término relacional y la operación aritmética requerida para resolverlo (Lewis, 1989; Lewis y Mayer, 1987).

La dificultades señaladas, en general, se confirman en nuestro estudio: sólo dos alumnos de Infantil resuelven estos problemas; y por otro lado, en los cursos de Primaria los problemas donde hay conflicto -Comparación 1, Comparación 5 y Comparación 6- los resultados son inferiores a los otros problemas de comparación en los que no existe la inconsistencia del lenguaje.

En cuanto al tipo de estrategias utilizadas en estos problemas cabe destacar:

Los dos alumnos de Infantil resuelven estos problemas, usando la estrategia de *Separar de* y sólo en una ocasión la de *Emparejar*, tal y como puede verse a continuación: El problema 2.2. de Comparación correspondiente a la tercera sesión ("María tiene 14 cromos. Luis tiene 6 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Luis menos que María?"), leído a Juani, una niña de Infantil de 5 años, es resuelto por ella con la estrategia de *emparejamiento*, lo cual se desarrolla así:

> *Entrevistador*: lee el problema.
>
> *Juani*: se cuenta los dedos, duda....vuelve a empezar a contar [le faltan dedos para contar 14].
>
> *Entrevistador*: "si quieres, puedes hacerlo con los lapiceros".
>
> *Juani*: a la vez coge y cuenta en voz alta 14 lapiceros y los deja en un montón. Luego coge y cuenta 6 lapiceros y hace otro montón. Después cuenta y coge 6 de los del montón de 14 y los pone en el montón de 6 haciendo parejas. Luego cuenta los que quedan y dice "ocho".
>
> *Entrevistador*: "¿Cómo lo has hecho?"
>
> *Juani*: "He puesto aquí los que tenía María y los de Luis aquí. Después he

cogido un montón de María como el de Luis y he hecho parejas, como cuando vamos a la calle para ir al teatro. Después he contado lo que quedaba”

En Primero de E.P., respecto a los problemas con conflicto: -Comparación 1 y Comparación 5-, el primero es resuelto tanto por estrategias sustractivas *Separar de*, (48%), y *Emparejar*, (8%) como por la estrategia aditiva *Contar a partir de un número dado* (45%). Comparación 5, se resuelve con las estrategias sustractivas: *Separar de*, (26%), y *Contar hacia atrás*, (15%), y con las de: *Hecho conocido*, (31%), y *Hecho derivado*, (8%). Los otros dos problemas -Comparación 2 y Comparación 4- en los que no existe conflicto, las estrategias que tienen porcentajes mayores son sustractivas: *Separar de*, (45% y 47%), *Emparejar*, (15% y 18%), y *Contar hacia atrás*, (15% y 18%), respectivamente.

En Segundo de E.P. para resolver el problema Comparación 1 la estrategia más usada es aditiva *Contar a partir de un número dado*, (57%), como lo es el término relacional “más que”, de su estructura semántica. Sin embargo, en el otro problema con conflicto -Comparación 5-, la estrategia mayoritaria es *Separar de*, (48%), seguida de la de *Hecho conocido*, (24%); quizás una explicación de por qué usan más una estrategia de modelado directo seguida de una de hechos numéricos en 2º de E.P. sea que, al ser uno de los problemas más difíciles -sólo lo supera Comparación 6 en nuestro estudio-, o recurren a una estrategia menos elaborada, también influenciada por tener material disponible, o utilizan estrategias más avanzadas, dejando sin utilizar las de conteo, que están en un nivel intermedio. En cuanto a los problemas que tienen término relacional “menos que” y que se resuelven mediante una resta -Comparación 2 y Comparación 4- las estrategias utilizadas por los niños de este curso son en un mayor porcentaje sustractivas que aditivas, y usan tanto las de nivel de modelado como las de conteo: pero el problema de Comparación 2 es resuelto por la estrategia aditiva *Contar a partir de un número dado* en un 29%.

TABLA 14.3.3.4

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMPARACIÓN 2 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**2**	**20**	**34**	**47**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	1(50%)	9(45%)	9(26%)	5(11%)
-Emparejar	1(50%)	3(15%)	2(6%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	3(15%)	4(12%)	5(11%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	4(12%)	1(2%)
-Contar a partir de un número dado	--	2(10%)	10(29%)	15(32%)
-Hecho conocido	--	3(15%)	5(15%)	15(32%)
-Hecho derivado	--	--	--	6(12%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

El mismo problema de Comparación 2.2., que hemos presentado más arriba, es resuelto por una niña de 2º de E. Primaria con la siguiente estrategia de *contar a partir de un número dado*:

Examinador: lee el problema.

Isabel: (usando los dedos) cuenta 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 y responde “ocho”.

Examinador: “¿Cómo lo has hecho?”

Isabel: “¡Muy fácil¡ Cuento 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 y veo que son ocho dedos y digo ocho".

TABLA 14.3.3.5

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMPARACIÓN 4 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**4**	**17**	**24**	**47**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	4(100%)	8(47%)	9(38%)	3(6%)
-Emparejar	--	3(18%)	2(8%)	--
-Contar hacia atrás desde	--	3(18%)	5(21%)	5(11%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	2(8%)	5(11%)
-Contar a partir de un número dado	--	--	2(8%)	11(23%)
-Hecho conocido	--	2(11%)	4(17%)	13(28%)
-Hecho derivado	--	1(6%)	--	10(21%)

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

TABLA 14.3.3.6

Número de respuestas y porcentajes de las distintas estrategias de COMPARACIÓN 5 por cursos

Cursos	*Infantil*	*1º EP*	*2º EP*	*3º EP*
Respuestas correctas	**2**	**13**	**25**	**37**
ESTRATEGIAS *-Separar de*	2(100%)	6(27%)	12(48%)	4(11%)

-Emparejar	--	--	--	--
-Contar hacia atrás desde	--	2(15%)	1(4%)	4(11%)
-Contar hacia atrás hasta	--	--	2(8%)	3(8%)
-Contar a partir de un número dado	--	--	4(16%)	8(21%)
-Hecho conocido	--	4(31%)	6(24%)	18(49%)
-Hecho derivado	--	1(8%)	--	--

La puntuación máxima -mayor número posible de aciertos- es 48.

Por último, en Tercero de E.P., son poco utilizadas las estrategias de modelado directo; las de conteo se distribuyen tanto en sustractivas como aditivas, en forma distinta en cada uno de los problemas. Comparación 1, con término relacional “más que”, es resuelto por la aditiva *Contar a partir de un número dado* en un 43 %, y sólo por la sustractiva *Contar hacia atrás* en un 10 %. Comparación 2, lo resuelven con las mismas estrategias que el anterior y con unos porcentajes del 32% y 13%, respectivamente. En los problemas Comparación 4 y Comparación 5, los niños utilizan casi por igual las estrategias sustractivas que las aditivas (tablas 14.3.3.5. y 14.3.3.6.). Las estrategias de hechos numéricos son utilizadas en un 49% en ambos problemas.

Como resumen de los datos anteriores, en cuanto al tipo de estrategias utilizadas en los problemas de comparación, podemos decir que, cuando en un problema existe el término comparativo “mas que” y se resuelve mediante una resta, es decir, existe -como venimos denominándolo- conflicto, hay en términos generales tendencia a elegir estrategias de tipo aditivo. Sin embargo, cuando el término comparativo es “menos que” y se resuelve mediante una resta, hay mayor uso de estrategias de tipo sustractivo que aditivo. En los problemas que son resueltos por suma, cuando hay conflicto, está indeterminado el tipo de estrategia, porque además de ser el problema más difícil de todos en nuestro estudio (Anexo 2), quienes lo resuelven recurren más a estrategias de hechos numéricos que son comunes a la suma y a la resta.

15. ANÁLISIS DE ERRORES

Las respuestas dadas por los niños a los distintos problemas las hemos clasificado en correctas e incorrectas. Las primeras -estrategias- han sido ya analizadas en el apartado anterior, de modo que nos limitaremos aquí a las incorrectas o erróneas. Comenzaremos por considerar y definir los distintos tipos de errores. Determinaremos en los diferentes cursos: Infantil, Primero, Segundo y Tercero de Educación Primaria qué tipos de errores realizan los niños. Con respecto a la variable "ubicación de la incógnita" trataremos de examinar si se relacionan los diferentes tipos de errores con las distintas situaciones de la incógnita: en el Resultado, en el Segundo Sumando o en el Primer Sumando. Finalmente, estableceremos si cada uno de los tipos de problemas -Cambio, Combinación y Comparación- genera determinados tipos de errores.

15.1. TIPOS DE ERRORES

En primer lugar diremos cuándo una respuesta dada por los niños se considera correcta y después clasificaremos y definiremos los errores de los niños al resolver los problemas.

Se considera que una respuesta es correcta *sólo* cuando el niño ha dado el resultado correcto. De modo tal que, aun siendo adecuada la operación elegida, no se considerará correcto el problema si dicha operación se ha ejecutado erróneamente. Sólo, pues, se han computado como correctas las resoluciones que corresponden a una acertada comprensión de la operación adecuada, así como a una buena ejecución de tal operación.

Recordemos que se han propuesto 18 problemas; pero como se han formulado dos versiones de cada uno de ellos, y cada uno de los cuatro grupos está formado por 24 niños, el número de respuestas posibles será 3.456 (18 x 2 x 4 x 24), de las que 2.321 -el 67 %- han sido correctas y 1.135 -el 33%- han sido erróneas (ver figura 14.1.1., página 310).

Para la clasificación de los errores hemos seguido en parte las distintas categorías que proponen De Corte, Verschaffel y De Win (1985) y Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988) en sus trabajos, a saber:

Error 1. Otra operación.

Corresponde al caso en que el niño selecciona inadecuadamente la operación con la que tratará de resolver el problema: sumar en los casos que tiene que restar, o al contrario. Por ejemplo, en el problema

“Agustín tenía 9 caramelos.

Le da algunos caramelos a Juan.

Ahora Agustín tiene 7 caramelos.

¿Cuántos caramelos le da a Juan?”

el niño resuelve el problema sumando, y no restando, que sería lo correcto.

Error 2. Contestar con un número de los dados en el problema.

Así, en el problema

“María tiene 13 cromos.

Luis tiene 6 cromos.

¿Cuántos cromos tiene María más que Luis?”

el niño responde diciendo que 13. A veces también responde 6.

Error 3. Inventa

En esta categoría se incluyen respuestas como “5 porque son los años que tengo”, “3 porque es mi número favorito”, etc.

Error 4. Algunos

Este error no es recogido por los anteriores autores citados y, aunque supone sólo el 3% de los errores cometidos, nos ha parecido interesante hacer una categoría para él. La respuesta “algunos” supone en parte el error 2, pues es contestar, no con un número dado, pero sí con una palabra del problema; sólo es posible en los problemas de Cambio y Combinación, o cuando la cantidad desconocida está situada en el Segundo o Primer sumando.

Error 5. De ejecución

El niño hace una representación correcta del problema y selecciona la operación adecuada, pero se equivoca en la resolución de la operación, bien porque al contar se salta un dígito, olvida las que se lleva, etc..

No incluimos la categoría *sin respuesta* de De Corte y cols. (1985) y de Cummins y cols. (1988), porque ningún niño ha dejado sin respuesta el problema planteado.

15.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para el análisis de los errores se ha empleado el programa estadístico

SAS, con el procedimiento GLM en su apartado “Análisis de hipótesis con medidas repetidas”. Este análisis se distingue de otros análisis multivariante en el interés en comprobar las influencias inter-sujetos, intra-sujeto y la interacción entre los dos tipos de influencias. El Anova de estos tests se construyen sumando todas las variables dependientes en el modelo y se efectúa un análisis de varianza sobre la suma de las variables dividida por la raíz cuadrada del número de variables dependientes. Pero para estos modelos multivariantes se requiere que tengan una distribución normal con una matriz de covarianza cruzada común inter-sujeto y también ciertos patrones de covarianza, conocidos como Tipo H (Cody y Smith, 1991 p. 954), esto se comprueba aplicando un test de transformación ortogonal, conocido como un grupo de componentes ortogonales no siendo necesario cuando hay dos niveles. porque solo se ha transformado una variable, si satisfacen se utilizan los test F usuales. Cuando los datos no satisfacen la suposición de covarianza de tipo H se debe usar un ajuste de los grados de libertad del numerador y denominador. Dos de estos ajuste basados en el factor de ajuste de los grados de libertad, conocido como (ε) épsilon se utilizan en el Procedimiento GLM. Estos dos ajustes estiman ε y multiplican los grados de libertad del numerador y denominador por esta variable aleatoria antes de determinar los niveles de significación para los test F. Los niveles de importancia asociados con los test de ajuste son: El primer ajuste propuesto por Greenhouse y Geisser es el llamado “Greenhouse-Geisser Épsilon” y representa la estimación de máxima probabilidad en el factor Épsilon de Box. Los niveles de significación asociados con los ajustes F se han llamado G-G. Huynh-Feldt han mostrado que el estimador G-G tiende a estar a un nivel bajo, es decir demasiado conservador sobre todo en muestras pequeñas y han propuesto un estimador alternativo que se construye usando estimadores con niveles ni altos ni bajos en el denominador y numerador de Box ε. Se llama

"Huynh-Fedt Epsilon" H-F. Aunque ε debe tener valores entre 0 y 1, el estimador H-F puede estar fuera de este rango. A las puntuaciones obtenidas en los distintos tipos de error, al ser medidas repetidas, se le han aplicado el procedimiento GLM con los ajustes G-G y H-F.

Los resultados obtenidos en el Anova se pueden observar en la tabla 15.2.1.y nos muestran que hay diferencias significativas en las variables: Error ($F = 120.33$, $p < .0001$), Curso ($F = 128.37$, $p < .0001$), Incógnita ($F = 63.45$, $p < .0001$) y Tipo de problema ($F = 166.42$, $p < .0001$). De forma general, podemos afirmar que los errores cometidos por los niños están en función de la edad, del tipo de problema y de la situación de la incógnita.

TABLA 15.2.1.

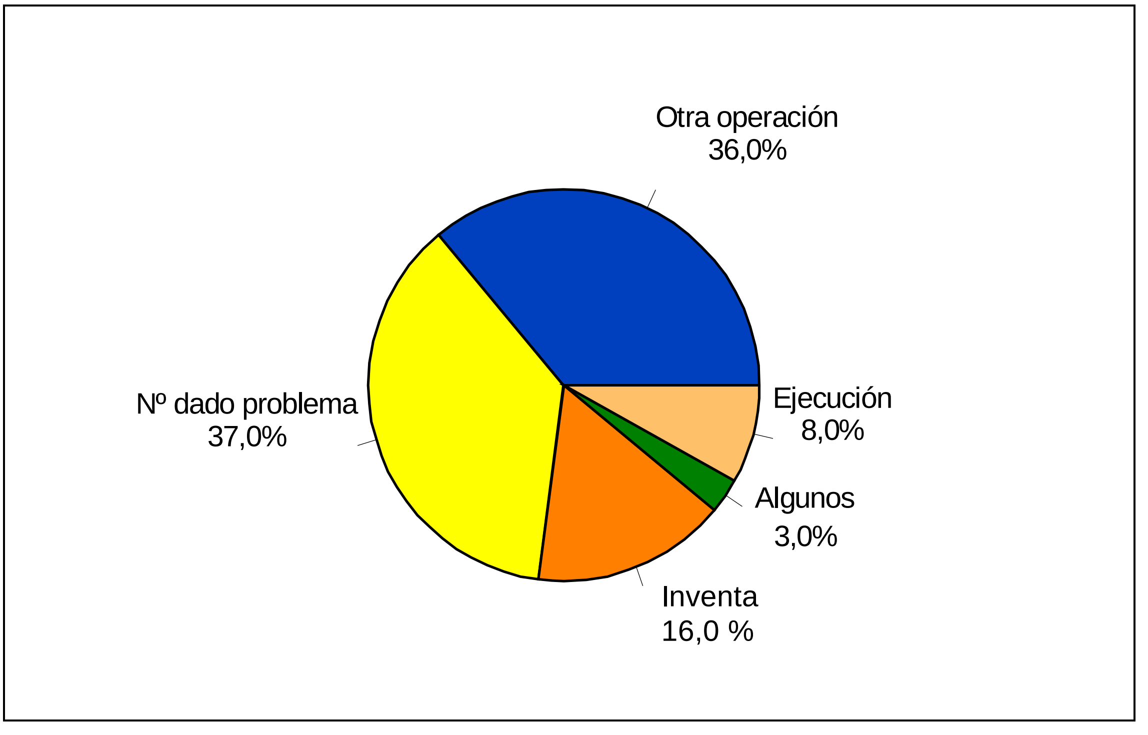
Resultados del Anova.

Fuentes de variación	*F*	*G-G y H-F*
Efectos Principales		
ERROR	F = 120.33	P < .0001
CURSO	F = 128.37	P < .0001
INCÓGNITA	F = 63.45	P < .0001
TIPO PROBLEMA	F= 166.42	P < .0001
Interacciones de dos factores		
ERROR x CURSO	F = 79.94	P < .0001
ERROR x INCÓGNITA	F = 10.00	P < .0001
ERROR x TIPO PROBLEMA	F = 38.85	P < .0001
Interacciones de tres factores		
ERROR x PROBLEMA x CURSO	F = 45.74	P < .0001
ERROR x INCÓGNITA x CURSO	F = 27.00	P < .0001
ERROR x PROBLEMA x INCÓGNITA	F = 12.68	P < .0001

La figura 15.2.1. representa los distintos porcentajes de errores, la tabla 15.2.2. muestra la distribución de las 1135 (33%) respuestas erróneas en cada uno de los tipos de error y en la figura 15.2.2. están representadas las medias de los diferentes errores. En ellas podemos observar que:

FIGURA 15.2.1

Porcentajes de los diferentes tipos de error

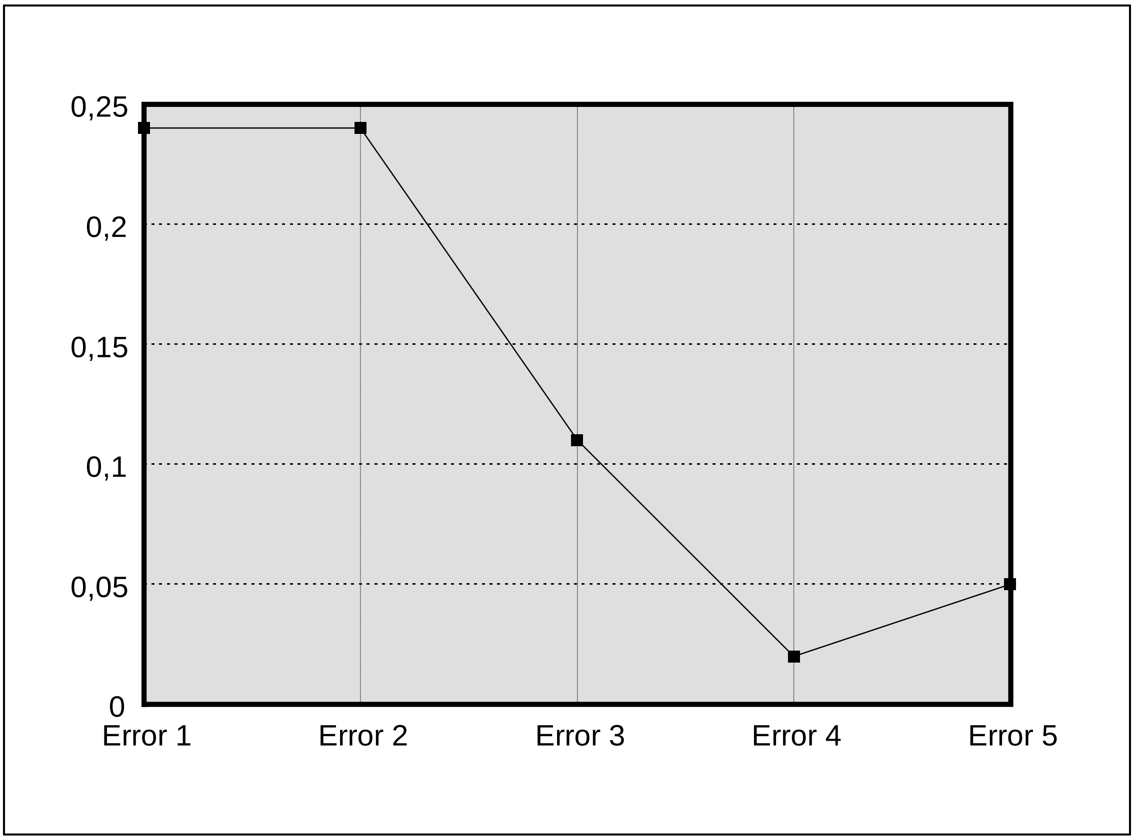


Los errores “Otra operación” y “Responder con un nº dado en el problema” son los que se cometen con mayor frecuencia y casi por igual: 36% y 37%” respectivamente. El 27 % restante se reparte así: un 16% “Inventa” la respuesta; se equivocan al realizar la operación adecuada el 8% y sólo un 3% responde con la palabra “Algunos”, error que hemos considerado porque los participantes en esta investigación lo utilizaban. Cuando se les presentaba problemas de Cambio con la cantidad inicial desconocida, por ejemplo “Agustín tenía algunos caramelos. Juan le da 4 caramelos. Ahora Agustín tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Agustín al principio?”

cogían un indeterminado (algunos) número de objetos y a partir de ahí resolvían el problema, pero los de Infantil -principalmente- respondían con la palabra “algunos”, como si para ellos fuera otro número.

FIGURA 15.2.2.

Medias de los distintos tipos de error



La figura 15.2.3. muestra la representación de las medias de los diferentes errores en cada uno de los cursos. Las tablas 15.2.3. y 15.2.4. recogen las distintas frecuencias y las medias y desviaciones típicas de los diferentes errores por cursos, respectivamente. En ellas podemos observar que:

TABLA 15.2.2

Distribución de frecuencias, porcentajes, medias y desviaciones típicas de los distintos tipos de error

	Tipos de error				
	Otra operación	Nº dado problema	Inventa	Algunos	Ejecución
Frecuencia	407	424	186	29	89
Porcentajes	36%	37%	16%	3%	8%
Medias	.24	.24	.11	.02	.05
Desviaciones Típicas	.56	.57	.37	.15	.22

Los alumnos de Infantil cometen casi tantos errores (516), como los niños de 1º y 2º de E.P. juntos (536), siendo el error "Nº dado en el problema" el más cometido por los pequeños, seguido del error "Inventa".

TABLA 15.2.3

Distribución de frecuencias de errores según las variables curso y error

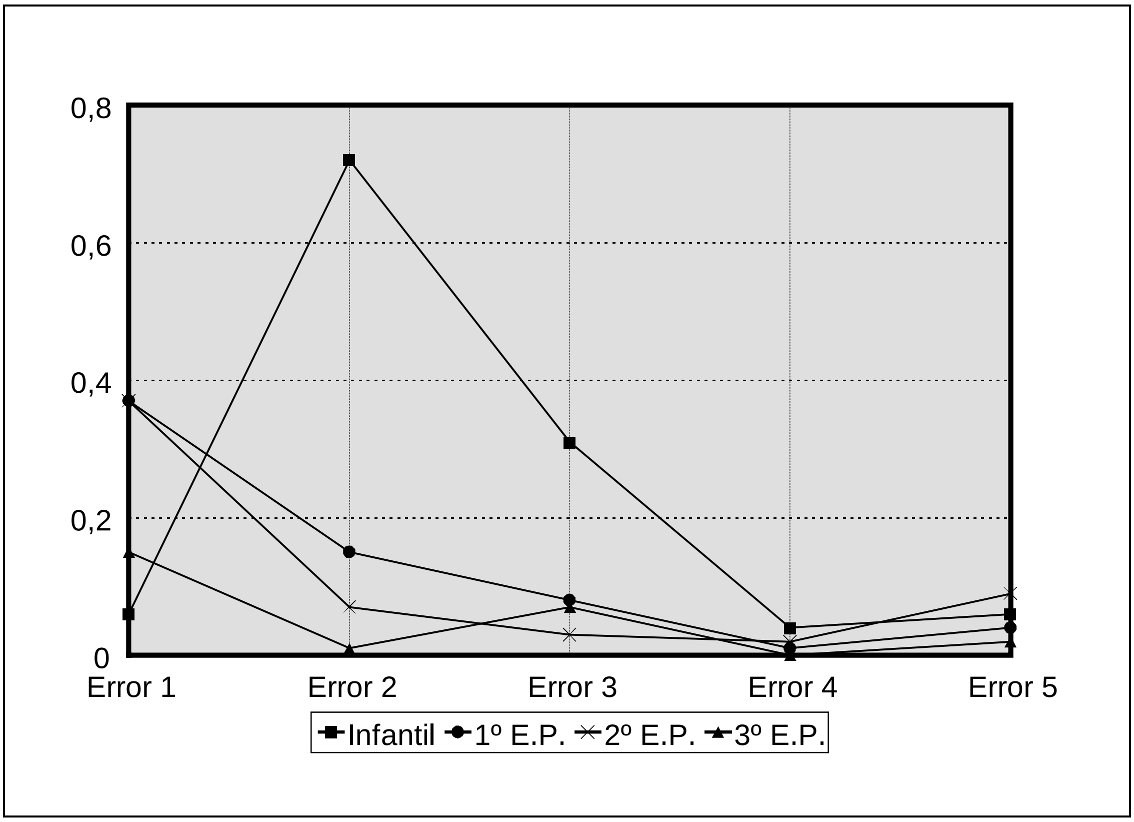
Variables	*Tipo de errores*					
Curso	Otra operación	Nº dado problema	Inven-ta	Algu-nos	Ejecución	Totales
Infantil	29	311	133	17	26	516
1º E.P.	162	65	36	3	18	284
2º E.P.	159	32	14	9	38	252
3er E.P.	57	16	3	0	7	83
						1135

En negrita número total de respuestas erróneas.

FIGURA 15.2.3

Puntuaciones medias obtenidas en cada uno de los errores por los

diferentes cursos



El fallo más común de los cursos de Primaria es el de "Elegir otra operación". Esto nos lleva a pensar que los niños de Infantil todavía no son capaces de codificar rasgos importantes de la información (Siegler, 1991/1986) y por tanto contestan de manera mimética con el número que han oído en el problema. Sin embargo creemos que los alumnos de 1º y 2º de E.P. empiezan a tener un conocimiento adecuado para representar mentalmente el problema, pero fallan en poner en práctica una solución adecuada. Los participantes de 2º E.P., son los que cometen más errores de "Ejecución", -recordemos que eran los que intentaban resolver los problemas realizando la operación de restar, con lápiz y papel- y como no dominaban la técnica de la resta llevándose se equivocaban, les siguen los de Infantil, pero por diferente razón: a la hora de contar es dónde los más pequeños producen sus errores.

En el grupo de 3º E.P. se aprecia un descenso importante en el cómputo total de errores, desapareciendo el error “Algunos”; el error “Inventa” sólo es cometido por tres niños. El error “Otra operación” es el más frecuente para este grupo.

En la tabla 15.2.4. se recogen las medias y desviaciones típicas de los errores de cada curso. A partir de ellas, hemos hallado si hay diferencias significativas entre las medias de los errores en cada uno de los cursos. Los resultados obtenidos nos permiten decir que:

TABLA 15.2.4

Medias y desviaciones típicas de los errores en cada curso

Variables	*Tipo de errores*				
Curso	Otra operación	Nº dado problema	Inventa	Alguno s	Ejecución
Infantil	.06 (.26)	.72 (.82)	.31 (.59)	.01 (.11)	.04 (.20)
1º E.P.	.37 (.68)	.15 (.46).	08 (.34)	.01 (11)	.04 (.20)
2º E.P.	.39 (.66)	.07 (.32)	.03 (.18)	.02 (.17)	.09 (.28)
3er E.P.	.15 (.46)	.14 (.13)	.01 (.08)	0 (0)	.02 (.13)

Entre paréntesis las desviaciones típicas.

En el Curso de Infantil (Anexo 3, tabla 15.2.1) hay diferencias significativas entre los distintos errores, excepto entre los errores: “Otra operación” (Error 1) y “Algunos” (Error 4); “Otra operación” (Error 1) y “Ejecución” (Error 5); y, “Algunos” (Error 4) y “Ejecución” (Error 5). Es decir, para los alumnos de Infantil estos tres errores son cometidos sin diferencia significativa estadísticamente. Sin embargo hay diferencias significativas en el número de errores de: “Nº dado en el problema” (Error 2) e “Inventa” (Error 3) respecto de los tres anteriores y entre ellos.

En los participantes de 1º de E.P. (Anexo 3, tabla 15.2.2), hay diferencias significativas entre todos los errores, únicamente no es significativa la diferencia entre “Inventa” (Error 3) y “Ejecución” (Error 5).

Los resultados de los alumnos de 2º de E.P. (Anexo 3, tabla 15.2.3) nos muestran que no hay diferencias significativas entre las medias de los errores “Nº dado en el problema” (Error 2) e “Inventa” (Error 3); “Nº dado en el problema” (Error 2) y “Ejecución” (Error 5); “Inventa” (Error 3) y “Algunos” (Error 4). Las restantes diferencias de medias son significativas.

Para los alumnos de 3º de E.P. (Anexo 3, tabla 15.2.4) sólo existen diferencias significativas entre el error “Otra operación” (Error 1) y los demás errores, pero no hay diferencias significativas entre los errores 2, 3, 4 y 5. Esto nos indica que, de los alumnos mayores, los que cometen errores lo hacen seleccionando mal la operación.

Pasamos a analizar los errores en función de la “Ubicación de la Incógnita”. La distribución de las frecuencias de los errores, según la situación de la incógnita, se recogen en la tabla 15.2.5. La tabla 15.2.6. nos presenta las medias y desviaciones de los errores por situación de la incógnita y las medias se encuentran representadas en la figura 15.2.4. Observando estos resultados encontramos:

En general podemos apreciar que se generan menos errores cuando la incógnita está en el Resultado y se producen más errores cuando la incógnita se encuentra en el Primer Sumando; casi en el doble (490) cuando es en esta última situación que cuando es en el Resultado (251). Ocupa una posición intermedia cuando la ubicación de la incógnita es el Segundo Sumando (394).

TABLA 15.2.5

Distribución de frecuencias de errores según las variables lugar de la incógnita y error

Variables	*Tipo de errores*					
Incógnita	Otra operación	Nº dado problema	Inventa	Algunos	Ejecu-ción	Total
Resultado	85	100	32	0	34	**251**
2º Sumando	127	160	65	11	31	**394**
1^er^ Sumando	195	164	89	18	24	**490**
						1135

Totales en negrita

Si analizamos con más detalle cada una de las situaciones podemos decir que:

Cuando el lugar de la incógnita se sitúa en el Resultado es el error "Nº dado en el problema" (Error 2) el que se comete con más frecuencia (100), seguido (85) del error "Otra operación" (Error 1). Los errores "Inventa" y "Ejecución" se reducen a una frecuencia de 32 y 34, respectivamente. No puede existir aquí el error de "Algunos".

TABLA 15.2.6

Medias y desviaciones típicas de los errores en cada situación de la incógnita

Variables	*Tipo de errores*				
Incógnita	Otra operación	Nº dado problema	Inventa	Algunos	Ejecución
Resultado	.15 (.45)	.17 (.52)	.05 (.28)	0 0	.06 (.23)
2º Sumando	.22 (.55)	.28 (.62	.11 (.38)	.02 (.17)	.05 (.22)
1er Sumando	.35 (.64)	.27 (.58)	.16 (.44)	.03 (.20)	.04 (.20)

Entre paréntesis las desviaciones típicas.

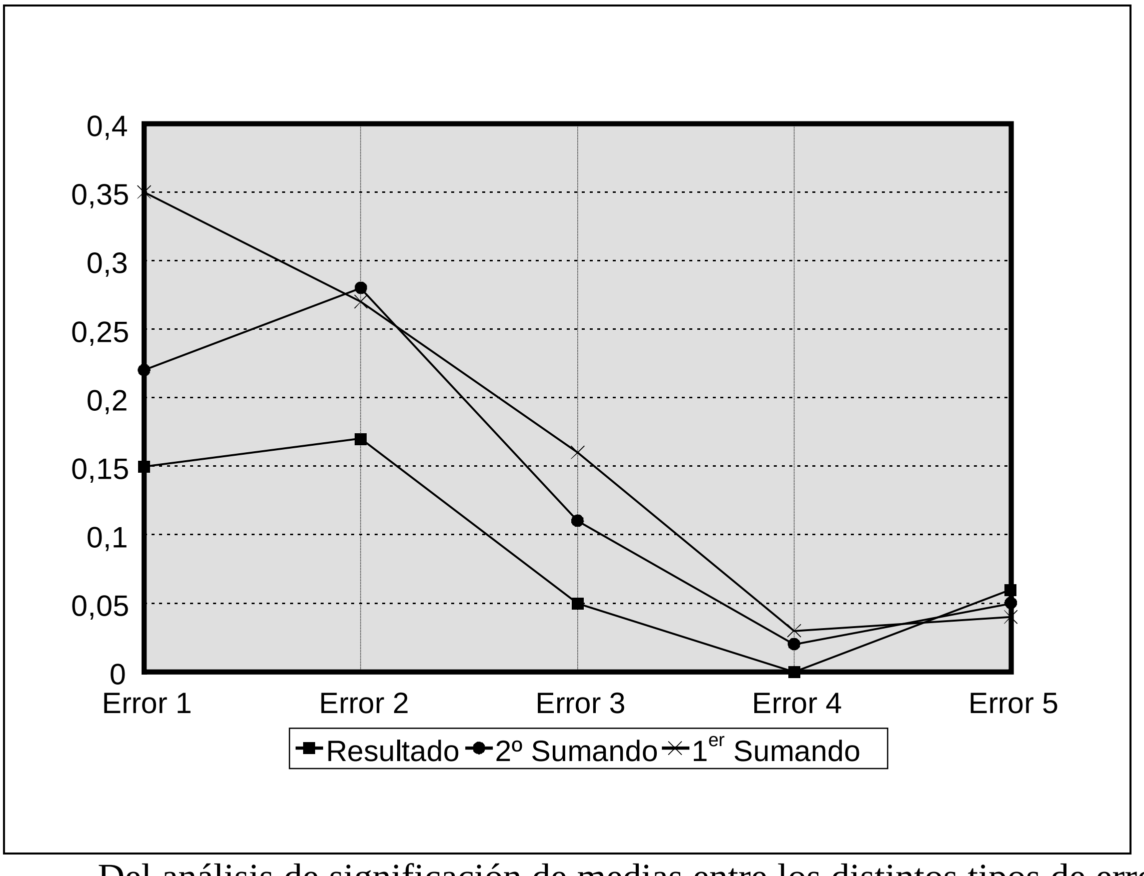
Cuando la ubicación de la incógnita es el Segundo Sumando los errores más cometidos son los mismos que cuando se encuentra la incógnita en el Resultado, si bien hay un aumento considerable de la frecuencia con la que se realizan. El Error 2 "Nº dado en el problema" pasa de 100 a 160 veces. El Error 1 "Otra operación" de 85 a 127 veces y se duplica la frecuencia para el Error 3 "Inventa" que pasa de 32 a 65. Casi se mantiene la frecuencia para el Error 4 "Ejecución" y hay 11 niños que cometen el error de "Algunos", error que en la posición de la incógnita en el Resultado no era posible cometerlo. Si la dificultad aumenta en la posición de la incógnita en el conjunto de cambio, o cuando se ubica en el grupo comparado, o se está en un subgrupo, la consecuencia será un aumento en los errores del niño.

Si la incógnita está en el Primer Sumando, el error más cometido (195 veces) es "Otra operación" (Error 1) seguido del Error 2 "Nº dado en el problema" (164); es decir, al revés que en las dos situaciones anteriores, si bien se comete en igual proporción el Error 2 en esta ubicación que cuando está en el Segundo Sumando. Aumenta, respecto de la posición en el Segundo

Sumando, de 65 a 89 el número de veces que se realiza el Error 4 "Inventa", pero disminuye de 31 a 24 el Error 5 "Ejecución" respecto de la misma posición.

FIGURA 15.2.4

Puntuaciones medias obtenidas de cada uno de los errores en las distintas situaciones de la incógnita



Del análisis de significación de medias entre los distintos tipos de error en cada una de las situaciones de la incógnita podemos destacar:

Cuando se ubica la incógnita en el Resultado no existen diferencia significativas entre los errores "Otra operación" (Error 1) y "Nº dado en el problema" (Error 2); y entre "Inventa" (Error 1) y "Ejecución" (Error 5).

Todas las restantes diferencias de medias de errores son significativas. (Anexo 3, tabla 15.2.5). Los niños, cuando no tienen una representación adecuada del problema, responden indistintamente tanto con un error como con el otro.

Si la incógnita se sitúa en el Segundo Sumando, la única diferencia no significativa es entre los errores “Otra operación” (Error 1) y “Nº dado en el problema” (Error 2) (Anexo 3, tabla 15.2.6), como ocurría en la situación anterior y como también ocurre cuando la incógnita está en el Primer Sumando (Anexo 3, tabla 15.2.7), donde además es no significativa la diferencia entre los errores “Algunos” (Error 4) y “Ejecución” (Error 5).

TABLA 15.2.7

Distribución de frecuencias de errores según las variables tipo de problemas y error

	Tipo de errores					
Tipo de problema	Otra operación	Nº dado problema	Inventa	Alguno s	Ejecu-ción	Total
Cambio	109	62	54	21	25	**271**
Combinación	91	74	49	08	36	**258**
Comparación	207	288	83	00	28	**606**
						1135

Totales en negrita

Finalmente analizaremos los errores según los diferentes tipos de problemas. Las frecuencias de los distintos tipos de error en función de las variables tipo de problema y error se recogen en la tabla 15.2.7. En la tabla 15.2.8. se exponen las medias y desviaciones típicas de los errores en cada uno de los tipos de problemas y las medias están representadas en la figura

15.2.5. A partir de ellas podemos decir:

Son los problemas de Combinación los que generan menos errores (258), seguidos de los de Cambio (271).

Los problemas de Comparación presentan más errores (606) que los otros dos tipos de problemas -Cambio y Combinación- juntos.

TABLA 15.2.8

Medias y desviaciones típicas de los errores en cada tipo de problema

Variables	*Tipo de errores*				
Tipo de problema	Otra operación	Nº dado problema	Inventa	Algunos	Ejecución
Cambio	.19 (.48)	.11 (.36)	.10 (.35)	.04 (.21)	.04 (.20)
Combinación	.16 (.46)	.13 (.40)	.08 (.33)	.01 (.15)	.06 (.24)
Comparación	.37 (.68)	.48 (.78)	.14 (.42)	0 0	.05 (.21)

Entre paréntesis las desviaciones típicas.

El error que más se comete al resolver los problemas de Cambio es el de “Otra operación” (Error 1) (109), seguido de “Nº dado en el problema” (Error 2) (62).

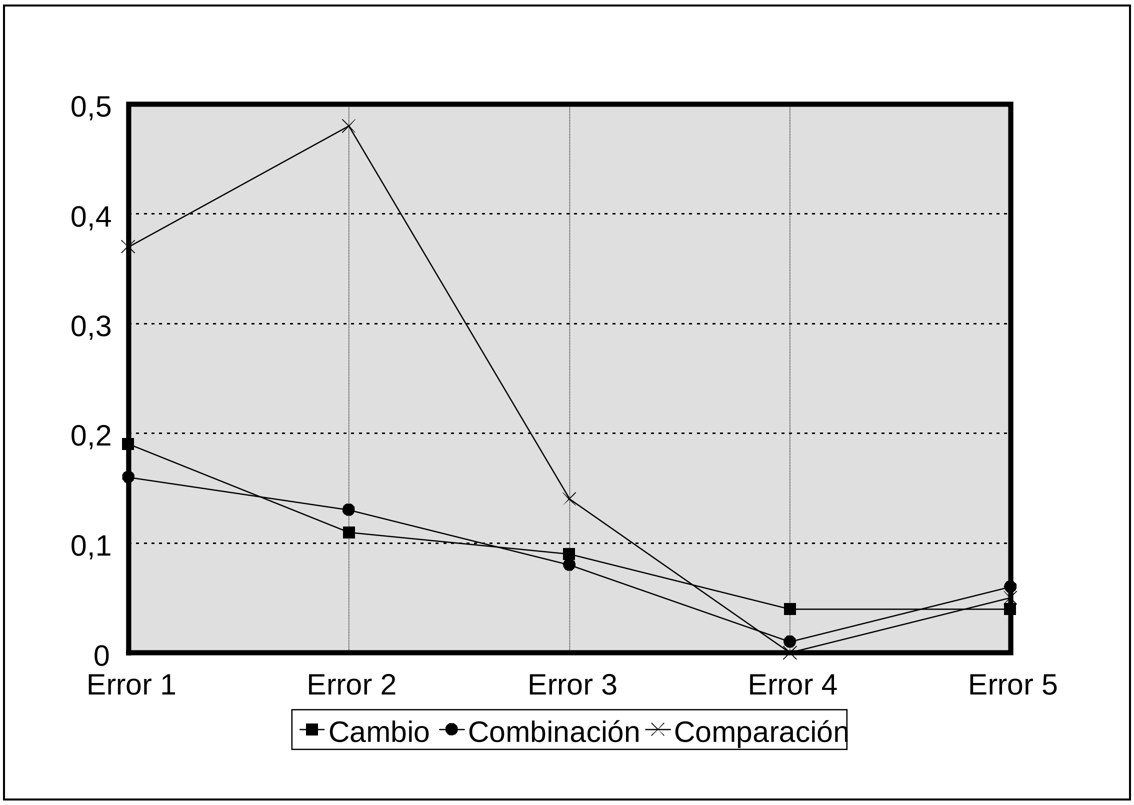
En los problemas de Combinación los errores más frecuentes cometidos coinciden con las de los problemas de Cambio, es decir, el error “Otra operación” (Error 1) (91), seguido de “Nº dado en el problema” (Error

2) (74),

sin embargo la diferencia entre ellos es más pequeña y además hay más errores tipo 2 en los problemas de Combinación que en los de Cambio.

FIGURA 15.2.5

Puntuaciones medias obtenidas por cada uno de los errores en los distintos tipos de problemas



En cuanto a los problemas de Comparación los tipos de errores más frecuentes se invierten respecto de los otros dos tipos de problemas. El error "Nº dado en el problema" (Error 2) (288) es el más realizado por los niños, continuándole el error "Otra operación" (Error 1) (207). Las razones, que ya hemos señalado al analizar la ubicación de la incógnita, hay que buscarlas en la mayor dificultad que supone la estructura semántica de Comparación respecto de las de Cambio y Combinación que hace que los niños no tengan una adecuada representación mental del problema y contesten con el número que acaban de oír.

Los resultados de significación de las diferencias de medias entre las distintas clases de errores en los diferentes tipos de problemas nos indican:

En los problemas de Cambio (Anexo 3, tabla 15.2.8) las diferencias son significativas entre los diferentes tipos de errores menos entre el Error 2 "Nº dado en el problema" y el Error 3 "Inventa" y entre el Error 3 "Inventa" y el Error 5 "Ejecución".

En los problemas de Combinación (Anexo 3, tabla 15.2.9) las diferencias son no significativas entre el Error 1 "Otra operación" y el Error 2 "Nº dado en el problema"; el Error 2 "Nº dado en el problema y el Error 3 "Inventa"; y, entre el Error 3 "Inventa" y el Error 5 "Ejecución". Las restantes diferencias de medias son significativas.

En los problemas de Comparación (Anexo 3, tabla 15.2.10) todas las diferencias de medias entre los cinco tipos de error son significativas.

Finalmente concretaremos diversos aspectos de los errores analizando las interacciones de tres variables, a saber:

Error x Curso x Tipo problema

Error x Curso x Lugar de la incógnita

Error x Tipo de problema x Lugar de la incógnita

TABLA 15.2.9

Distribución de frecuencias según las variables: tipo de problema, curso y error

Variables		*Tipo de errores*					
Problema	**Curso**	Otra op.	Nº dado	Invent.	Alguno	Ejecuc	Totales
Cambio	*Infantil*	11	53	43	14	9	130
	1º E.P.	38	4	9	2	5	58
	2º E.P.	40	3	1	5	10	59
	3º E.P.	20	2	1	0	1	24
							(271)
Combinaci.	*Infantil*	8	58	38	3	16	123
	1º E.P.	35	9	5	1	3	53
	2º E.P.	41	7	6	4	15	73
	3º E.P.	7	0	0	0	2	9
							(258)
Comparac.	*Infantil*	10	200	52	0	1	263
	1º E.P.	89	52	22	0	10	173
	2º E.P.	78	22	7	0	13	120
	3º E.P.	30	14	2	0	4	50
							(606)
Totales		407	424	186	29	89	**1.135**

Entre paréntesis los totales de errores por tipo de problema.
En negrita número total de respuestas erróneas.

La tabla 15.2.9. recoge la distribución de frecuencias de los errores en función de las variables curso y tipo de problema y a partir de ella podemos concluir:

Es en los problemas de Comparación donde todos los alumnos, sean de Infantil o de Primero, Segundo o Tercero de Primaria, cometen más errores que en los problemas de Cambio o Combinación. Para los niños de Infantil, 1º y 3º de E.P. el orden de los problemas, de menor a mayor, que les hace incurrir en errores es: Combinación, Cambio y Comparación. Sin embargo el orden para los de 2º de E.P. es: Cambio, Combinación y Comparación.

El error más cometido -200 veces- lo realizan los alumnos de Infantil en los problemas de Comparación y es el de "Contestar con un nº dado en el problema" (Error 2). Le siguen los alumnos de 1º y 2º de E.P. que generan también errores -89 y 78 veces respectivamente- en los problemas de Comparación, pero esta vez es el Error 1 "Otra operación" el que es más cometido.

Los errores: "Nº dado en el problema" (Error 2) -411 veces- e "Inventa" (Error 3) -113 veces- son los que más frecuentemente cometen los alumnos de Infantil, en cualquiera de los tipos -Cambio, Combinación y Comparación- de problemas. El primer error se produce porque los niños pequeños no son capaces de representar de forma correcta las sentencias del problema. Así cuando tienen que resolver el problema de Cambio "María tenía algunos cromos. Le da 4 cromos a Luis. Ahora María tiene 7 cromos. ¿Cuántos cromos tenía María al principio?", el niño no crea un conjunto para María sino que le asigna un conjunto de 4 cromos y entonces considera a este conjunto como el conjunto de cambio y no como el conjunto inicial. En los problemas de Comparación en la sentencia de relación "Eugenio tiene 3 caramelos más que Agustín" es convertida en "Eugenio tiene 3 lápices". Si el problema es de Combinación, la proposición "entre los dos tienen 9 caramelos" es interpretada como si cada uno de ellos tuviera 9 caramelos. Otra salida para estos niños pequeños es inventar la respuesta: "porque son los años que tengo", "porque es mi número favorito" etc. En los cursos de Primaria el error más cometido en los tres tipos de problemas es siempre

"Otra operación" (Error 1) -378 veces- seguido, con bastante diferencia, de "Contestar con un nº dado en el problema" (Error 2) -113 veces-. En Primaria el niño ya ha recibido instrucciones para resolver las operaciones aritméticas, sabe que cuando se le presentan dos conjuntos o se "da algo" tiene que sumar. Por otra parte también, en los problemas de Comparación, las expresiones "mas que" y "menos que" las asocian a sumar y restar respectivamente. Por tanto, hay una evolución de los errores en función de la escolaridad, independientemente del tipo de problema y así, mientras que en Infantil los errores "Contestar con un nº dado en el problema" e "Inventa" son los que más cometen, en Primaria es "Otra operación" el error más frecuente, confirmándose en gran medida los resultados encontrados en otras investigaciones (Bermejo y Rodriguez, 1988, 1990 y 1997; Carpenter y Moser, 1981, 1983; Cummins, 1991; De Corte y Verschaffel 1985, 1987). Algo parecido ocurre con el error "Algunos", los niños de 3º de E.P., ni en los problemas de Cambio ni en los de Combinación (en los de Comparación no hay posiblidad) cometen este error, son los de Infantil los que más incurren en este error, como consecuencia de no ser capaces de una representación adecuada, contestan con una palabra que han oído.

Las frecuencias de los errores distribuídas según las variables curso y ubicación de la incógnita se muestran en la tabla 15.2.10. y en ella podemos comprobar que:

Cuando la incógnita está situada en el Primer Sumando todos los alumnos, independientemente de la edad, cometen más errores (490) que en cualquiera de las otras dos situaciones. La ubicación de la incógnita en el Segundo Sumando disminuye para todos la cantidad de errores (394) y es todavía menor el número de ellos (251) cuando se encuentra en el Resultado.

TABLA 15.2.10

Distribución de frecuencias según las variables: situación de la incógnita, curso y error

Variables		*Tipo de errores*					
Incógnita	**Curso**	Otra op.	Nº dado	Invent.	Alguno	Ejecuc	Totales
Resultado	*Infantil*	10	76	16	0	17	119
	1º E.P.	40	16	12	0	2	70
	2º E.P.	31	4	4	0	13	52
	3º E.P.	4	4	0	0	2	10
							(251)
2º Sumando	*Infantil*	7	113	49	4	5	178
	1º E.P.	53	26	12	1	8	100
	2º E.P.	51	20	4	6	15	96
	3º E.P.	16	1	0	0	3	20
							(394)
1er Sumando	*Infantil*	12	122	68	13	4	219
	1º E.P.	69	23	12	2	8	114
	2º E.P.	77	8	6	3	10	104
	3º E.P.	37	11	3	0	2	53
							(490)
Totales		407	424	186	29	89	**1.135**

Entre paréntesis los totales de errores por situación de la incógnita.
En negrita número total de respuestas erróneas.

Analizando por cursos encontramos que, cuando la incógnita está en el Primer Sumando, el grupo de Infantil comete 219 errores; el error más cometido -122 veces- es "Contestar con un nº dado en el problema" (Error 2), seguido de "Inventar" -68 veces-. Ya hemos expuesto las razones por las que cuando el niño no es capaz de tener una representación adecuada del problema son los errores anteriores los que son generados. Los alumnos de 1º, 2º y 3º de E.P. manifiestan también más errores -114, 104 y 53 veces respectivamente- en esta misma ubicación, pero es con el Error 1 “Otra operación” (69, 77 y 37 veces) el más cometido.

Para Infantil siempre es el error: “Contestar con un nº dado en el problema” (Error 2) el que más frecuentemente cometen en cualquiera de las situaciones -Resultado, Segundo Sumando, Primer Sumando- de la incógnita, seguido, pero con bastante diferencia, del (Error 1) “Otra operación”. En los cursos de Primaria el error más cometido en las tres situaciones es siempre “Otra operación” (Error 1) seguido de “Nº dado en el problema” (Error 2).

Los niños de Infantil generan 133 veces de las 186 veces que se produce el error “Inventa”, fundamentalmente cuando la situacion de la incógnita está en el Segundo y Primer Sumando.

El error “Algunos” nunca se da en los niños de Tercero en ninguna de las tres ubicaciones, ni en la situación de la incógnita en el Resultado para los otros tres cursos.

El error “Ejecución” va decreciendo en las tres situaciones. En el Resultado 34 veces; en el 2º Sumando 31 y en el 1 er Sumando 24 veces. Podemos observar que se produce más en la situación más fácil y la que genera menos errores, la explicación puede encontrarse porque al ser los niños capaces, por ejemplo, en el problema de Cambio “Agustín tenía 4 caramelos. Juan le da 3 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene Agustín ahora? de poder representar los conjuntos secuencialmente, proposición por proposición, tal y como se presenta en el texto verbal (Riley y Greeno, 1988), pero cometen el error cuando tienen que contar. Sin embargo en las otras dos situaciones de la incógnita, como son más difíciles para los niños, contestan con errores de otro tipo (“inventan” “contestar con un nº dado”). Son los niños de Segundo los que cometen más el error “De ejecución”, recordemos que no tenían bien adquirido el proceso de restar llevándose.

TABLA 15.2.11

Distribución de frecuencias según las variables tipo de problema, situación de la incógnita y tipo de error

Variables		*Tipo de errores*					
Tipo de problema	**Situación Incógnita**	Otra operación	Nºdado problema	Inventa	Algunos	Ejecución	Totales
Cambio	*Resultado*	17	1	1	0	8	27
	2º Sumando	39	19	21	3	8	90
	1er Sumando	53	42	32	18	9	154
							(271)
Combin	*Resultado*	1	1	5	0	15	22
	2º Sumando	47	46	23	8	8	132
	1er Sumando	43	27	21	0	13	104
							(258)
Compar	*Resultado*	67	98	26	0	11	202
	2º Sumando	41	95	21	0	15	172
	1er Sumando	99	95	36	0	2	232
							(606)
Totales		407	424	186	29	89	**1135**

Entre paréntesis los totales de errores por tipo de problema.
En negrita número total de respuestas erróneas.

La tabla 15.2.11. recoge la distribución de frecuencias de la variable error en función de las variables: situación de la incógnita y tipo de problema, a partir de su observación podemos afirmar que:

Son los problemas de Comparación con la incógnita en el Primer Sumando los que generan más número de errores (232), le siguen en número

(202) cuando la incógnita se sitúa en el Resultado, también en los problemas de Comparación.

Es el error 2 “Contestar con un nº dado en el problema” el más cometido en los Problemas de Comparación con la incógnita en el Resultado (98), en el Segundo Sumando (95) y en el Primer Sumando (95), sin embargo en esta última ubicación lo supera el error 1 “Otra operación” (99).

Cada tipo de problema se comporta de una forma distinta en cuanto a producir errores respecto de la posición de la incógnita. En los problemas de Cambio el orden de menor a mayor en cometer errores es: Resultado, Segundo Sumando y Primer Sumando. En los problemas de Combinación: Resultado, Primer Sumando y Segundo Sumando. En los problemas de Comparación: Segundo Sumando, Resultado y Primer Sumando.

El error “Inventa” se produce más en las situaciones de la incógnita en el Segundo y Primer Sumando, independientemente del tipo de problema que sea. Esta conclusión apoya las razones anteriores, el niño tiene más dificultades en la representación de los problemas cuando la incógnita está situada en el Segundo o Primer sumando, y la forma de resolverlo es “inventando” la solución, ya que la solución correcta no es posible con su nivel de competencia.

Para concluir este apartado de análisis de errores, podemos resaltar de forma general dos conclusiones:

Primera: son generados más errores en los siguientes casos: teniendo en cuenta el curso que realizan los niños, son los alumnos de Infantil los que producen más errorres. Si analizamos los diferentes tipos de problemas, son los problemas de Comparación donde más se equivocan los alumnos. Respecto a la ubicación de la incógnita, cuando ésta se situa en el Primer Sumando es cuando el número de errores es mayor.

Segunda: Independientemente del curso, lugar de la incógnita y tipo de problema, los errores más cometidos son “Contestar con un nº dado en el problema” y “Otra operación”. Después y con gran diferencia es el error “Inventa”. Los otros dos “Ejecución” y “Algunos” son cometidos por muy pocos alumnos.

16. ANÁLISIS DE SEGMENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES

Para determinar qué problemas discriminaban unos cursos de otros hemos utilizado un programa de "Segmentación mediante árbol de decisión binario" (SPAD-S). Esta línea de investigación fue iniciada por Morgan y Sonquist (1963); Morgan y Messenger (1973) con el método AID (Automatic Interaction Detection). Le siguieron numerosas contribuciones, hasta la aparición de la obra de Breiman, Friedman, Olshen y Stone en 1984.

La segmentación utilizando árbol de decisión binario presenta importantes ventajas. La primera se centra sin duda en la legibilidad de las reglas de afectación: la interpretación de los resultados es directa, así como intuitiva. Además la técnica es no paramétrica y poco restringida por la naturaleza de los datos. Sin embargo no presenta una función global que considere el conjunto de variables (función lineal discriminante o ecuación de regresión), perdiendo así la representación geométrica bajo forma de configuración de puntos en el espacio.

El análisis discriminante no paramétrico está basado en la construcción de un árbol de decisión binario obtenido mediante particiones sucesivas dos a dos de subconjuntos de la muestra. La idea fundamental se centra en seleccionar cada partición de un subconjunto (o nodo) de tal forma que los nodos descendientes sean más "puros" que el nodo padre. Dicho de otro modo, es necesario que la mezcla de grupos sea menos importante en los nodos descendientes que en el nodo padre. Construye un árbol de decisión binario completo para la discriminación en *k* grupos, caracterizados por las modalidades de una variable. También permite considerar costes de mala clasificación y probabilidad a priori de pertenencia a los grupos.

El método proporciona, a partir del árbol completo, la secuencia de subárboles obtenida utilizando un procedimiento de poda basado en la supresión sucesiva de las ramas con menos información, hablando en términos de discriminación entre las clases. De esta secuencia, selecciona un subárbol "óptimo" con la ayuda de una muestra test basándose en la estimación de la tasa de error teórico de clasificación. Da una descripción del árbol: descripciones de particiones y tamaño de los nodos y el conjunto de nodos terminales. A cada árbol de la secuencia se le asocia el índice de riesgo (coste relativo) de la muestra test y de la muestra base. La muestra test está constituida por un % de la muestra base -se utiliza el 33%- extraídos aleatoriamente de cada uno de los grupos a discriminar. La mejor partición es la que asegura la mayor reducción de impureza pasando de un nodo padre a sus nodos descendientes. Por extensión, llamamos "equi-reductoras" o "concurrentes" a las particiones que aseguran las mayores reducciones de impureza, y llamamos "equi-divisorias" a las particiones que proporcionan las particiones más próximas a la mejor partición.

Un problema de discriminación se da cuando estamos delante de una tabla de datos que contiene n sujetos repartidos en k clases C_1, C_2....C_k. Se trata entonces por una parte, de seleccionar de entre las variables de la tabla las que sean más discriminantes, y por otra parte, construir una regla decisional que permita afectar un nuevo sujeto a una de estas k clases. Si tenemos una variable cualitativa con 3 modalidades (m_1, m_2 y m_3) como es nuestro caso, las particiones posibles son:

a izquierda, sujetos tipo m_1,   a derecha sujetos tipo m_2 o m_3

a izquierda, sujetos tipo m_2,   a derecha sujetos tipo m_1 o m_3

a izquierda, sujetos tipo m_3,   a derecha sujetos tipo m_1 o m_2

Al inicio del procedimiento de construcción del árbol se tiene un único nodo que contiene *n* sujetos repartidos en *k* clases. Se toma en consideración todas las particiones posibles de cada una de las variables. Cada partición divide a la muestra de *n* sujetos en dos subconjuntos o nodos descendientes: el nodo de la izquierda contiene los sujetos que verifican un tipo (según las particiones de las modalidades, señaladas más arriba) y el nodo de la derecha contiene a los otros sujetos. De todas estas particiones posibles retiene la que proporciona los dos nodos menos mezclados en términos de separación de las clases. La misma búsqueda de la mejor partición se efectúa con todas las variables. Se obtiene así la mejor partición de cada una de las variables y el algoritmo retiene finalmente, de entre estas particiones, la que proporcione la mejor separación entre las *k* clases. A continuación el mismo procedimiento de partición se aplica a cada uno de los nodos descendientes.

¿Hasta cuándo se sigue dividiendo los nodos? ¿Cuándo nos detenemos? Si dividimos hasta el final obtendríamos tantos nodos como sujetos, cada uno de ellos conteniendo un único sujeto, lo que conduciría a un TEA (**T**asa de **E**rror **A**parente de clasificación (TEA) es la media de los errores de clasificación en los distintos nodos terminales) igual a 0 que es evidentemente una estimación demasiado optimista de la **T**asa de **E**rror **T**eórica de clasificación (TET) (la obtenida con la muestra test). El problema se centra por tanto en seleccionar, de entre la secuencia de subárboles cuyo número de nodos terminales va de 1 a *n*, el "subárbol óptimo", el cual corresponde al menor valor de la estimación del TET. Esta es la solución propuesta por Breiman y cols. (1988); constituye la base del procedimiento Disar (el empleado en el paquete estadístico SPAD-S) y constituye la referencia actual en materias de técnicas arbóreas (Gueguen y cols., p. 18).

Un árbol pequeño (con pocos nodos terminales) acarrea un TEA el cual, si bien estima correctamente el TET, es demasiado importante. Este caso nos puede conducir a perder buenas particiones y a no utilizar toda la información contenida en la muestra. Por otra parte, a un árbol mayor (con numerosas particiones) se le asocia un TEA que da una estimación demasiado optimista del TET. Es por tanto entre estos dos extremos que debe escogerse el “mejor” subárbol: este será el subárbol cuyo TEA sea el menor posible proporcionando a la vez una estimación del TET lo más correcta posible. La búsqueda de este “mejor” subárbol se hace de la forma siguiente:

*Utilización de una **muestra base** para construir un árbol grande A_{max} con pocos sujetos en cada nodo terminal.

Utilización de un algoritmo para podar “juiciosamente” las ramas de este árbol “máximo” A_{max} . El procedimiento de poda produce una secuencia óptima S de subárboles encajados de tal forma que a cada subárbol de esta secuencia es el de menor TEA comparado con el de todo subárbol del mismo tamaño (es decir con el mismo número de nodos terminales).

El mejor subárbol A se escoge seguidamente de entre los subárboles de la secuencia óptima S* con la ayuda de una **muestra test.** (En nuestro caso se han cogido el 66% de los sujetos en la muestra base y el 33% en la muestra test).

Los sujetos de la muestra test se propagan por cada uno de los subárboles de la secuencia óptima y se sitúan en un nodo terminal, lo que entraña una estimación del TET para cada subárbol de S*. La estimación de TET es igual a la proporción *p* de sujetos mal clasificados en la muestra test. Generalizando se trata del **coste de error aparente** o **coste de error teórico**, que tiene sentido si las probabilidades a priori se estiman mediante las frecuencias de las clases de la muestra y si los costes de mala clasificación son todos iguales a 1. Por tanto**, el árbol A* seleccionado por Disar es el menor subárbol de S* asociado a la estimación más pequeña de TET.**

También el procedimiento Disar determina las probabilidades a priori y los costes de mala clasificación. Estos intervienen en la construcción del arbol

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. LOS CUATRO CURSOS.

FIGURA 16.1.

NODOS 1 TAMAÑO = 64
*Infantil 16
Primero 16
Segundo 16
Tercero 16

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 14
Afectación izquierda Si Var 15 = R141 Respuesta 14 1
R142 Respuesta 14 2
Reducción de la impureza = 0.1300

Nodos 2 Tamaño = 39
Infantil 1
Primero 9
Segundo13
*Tercero 16

Respuesta 11
Afectación izquierda Si Var 12 = R111 Respuesta 11 1
R112 Respuesta 11 2
Reducción de la impureza = 0.0739

Nodos 4 Tamaño = 33
Infantil 1
Primero 9
Segundo7
*Tercero 16

|VARIABLE DE CORTE
Respuesta 14
Afectación izquierda Si Var 15 = R142 Respuesta 14 2
Reducción de la impureza = 0.0604

Nodos 8 Tamaño = 25
Infantil 1
Primero 3
Segundo 6
*Tercero 15
NODO TERMINAL

Nodos 9 Tamaño = 8
Infantil 0
*Primero 6
Segundo1
Tercero 1
NODO TERMINAL

Nodos 5 Tamaño = 6
Infantil 0
Primero 0
*Segundo6
Tercero 0
NODO TERMINAL

Nodos 3 Tamaño = 25
*Infantil 15
Primero 7
Segundo 3
Tercero 0

Respuesta 6
Afectación izquierda Si Var 7 = R602 Respuesta 6 2
Reducción de la impureza = 0.0665

Nodos 6 Tamaño = 8
Infantil 1
*Primero 5
Segundo2
Tercero 0
NODO TERMINAL

Nodos 7 Tamaño = 17
*Infantil 14
Primero 2
Segundo 1
Tercero 0
NODO TERMINAL

en la poda, en el cálculo de los costes de error y de la desviación de la estimación del coste de error teórico.

Además efectúa una edición detallada de un subárbol de la secuencia de la poda. Presenta un dendograma del árbol, seguido de una breve descripción de las particiones. Detalla los nodos del árbol y escribe la regla de afectación a los distintos grupos.

En primer lugar presentamos un análisis de discriminación mediante un árbol de decisión binario con cuatro grupos, correspondientes a cada uno de los cursos que intervienen en el experimento. Como según los resultados del análisis de varianza, los cursos Primero y Segundo de Educación Primaria no son diferentes estadísticamente entre sí, se efectúa otro análisis de segmentación con tres grupos: Infantil, PrimSegu y Tercero, -se considera 1º y 2º de E. P. un sólo grupo-. Por último, se llevan a cabo los análisis de segmentación de cada curso con todos los demás cursos. Pasamos a presentar y comentar los resultados obtenidos en el primer análisis cuyo dendograma está representado en la figura 16.1. En el anexo 4 se encuentran los resultados -paso a paso- de estos análisis.

16.1. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE SEGMENTACIÓN CON LOS CUATRO GRUPOS

Se han utilizado 19 variables que corresponden a: Una es la variable grupo (con 4 modalidades) y las dieciocho restantes son las posibles respuestas a todos los problemas. Cada variable tiene 3 modalidades que corresponden a los valores de cada respuesta (0, 1 y 2) (tabla 16.1.1.) y se escriben así para cada una de ellas:

TABLA 16.1

Variables y modalidades de las respuestas de los dieciocho diferentes tipos de problemas

Variables		Modalidades
Var. 2. Respuesta 1		(3 Modalidades)
R100 – Respuesta 1 0	R101 – Respuesta 1 1	R102 - Respuesta 1 2
Var. 3. Respuesta 2		(3 Modalidades)
R200 – Respuesta 2 0	R201 – Respuesta 2 1	R202 - Respuesta 2 2
Var. 4. Respuesta 3		(3 Modalidades)
R300 – Respuesta 3 0	R301 – Respuesta 3 1	R302 - Respuesta 3 2
Var. 5. Respuesta 4		(3 Modalidades)
R400 – Respuesta 4 0	R401 – Respuesta 4 1	R402 - Respuesta 4 2
Var. 6. Respuesta 5		(3 Modalidades)
R500 – Respuesta 5 0	R501 – Respuesta 5 1	R502 - Respuesta 5 2
Var. 7. Respuesta 6		(3 Modalidades)
R600 – Respuesta 6 0	R601 - Respuesta 6 1	R602 - Respuesta 6 2
Var. 8. Respuesta 7		(3 Modalidades)
R700 – Respuesta 7 0	R701 - Respuesta 7 1	R702 - Respuesta 7 2
Var. 9. Respuesta 8		(3 Modalidades)
R800 – Respuesta 8 0	R801 - Respuesta 8 1	R802 - Respuesta 8 2
Var. 10. Respuesta 9		(3 Modalidades)
R900 – Respuesta 9 0	R901 - Respuesta 9 1	R902 - Respuesta 9 2
Var. 11. Respuesta 10		(3 Modalidades)
R100 – Respuesta 10 0	R101 - Respuesta 10 1	R102 -Respuesta 10 2
Var. 12. Respuesta 11		(3 Modalidades)
R110 – Respuesta 11 0	R111 - Respuesta 11 1	R112 -Respuesta 11 2

Var. 13. Respuesta 12		(3 Modalidades)
R120 – Respuesta 12 0	R121 - Respuesta 12 1	R122 -Respuesta 12 2
Var. 14. Respuesta 13		(3 Modalidades)
R130 – Respuesta 13 0	R131 - Respuesta 13 1	R132 -Respuesta 13 2
Var.154. Respuesta 14		(3 Modalidades)
R140 – Respuesta 14 0	R141 - Respuesta 14 1	R142 -Respuesta 14 2
Var. 16. Respuesta 15		(3 Modalidades)
R150 – Respuesta 15 0	R151 - Respuesta 15 1	R152 -Respuesta 15 2
Var. 17. Respuesta 16		(3 Modalidades)
R160 – Respuesta 16 0	R161 – Respuesta 16 1	R162 -Respuesta 16 2
Var. 18. Respuesta 17		(3 Modalidades)
R170 – Respuesta 17 0	R171 – Respuesta 17 1	R172 -Respuesta 17 2
Var. 19. Respuesta 18		(3 Modalidades)
R180 – Respuesta 18 0	R181 – Respuesta 18 1	R182 -Respuesta 18 2

Variable de grupo = Curso al que pertenece

La tabla 16.1.1 (Anexo 4) proporciona para cada subárbol de la secuencia obtenida

-su número de nodos terminales

-el coste relativo que se le asocia para la muestra base y para la muestra test.

-Para la muestra base este coste relativo es el coste de error aparente con relación al coste de error inicial, sea 0.75%.

-Para la muestra test, se trata de la estimación del coste teórico con relación a la estimación de esta tasa a la raíz del árbol, sea 0.75%. A esta estimación del coste teórico se le asocia su desviación tipo.

Los costes de error aparente y teórico corresponden, en nuestros datos, a los TEA (tasa de error aparente) y TET (tasa de error teórico), ya que las probabilidades a priori se toman iguales a los % de las frecuencias de los grupos en la muestra, y los costes de mala clasificación son todos iguales a 1.

Así el árbol A_4 con 5 nodos terminales

TÊT asociado a A_4 = 0.4583 x 0.75 = 0.343725

$$\text{Desviación tipo (TÊT)} = \sqrt{\frac{0.3437 \times 0.6563}{32}} = 0.08396$$

Se deduce la desviación tipo del coste relativo asociado a A_4 refiriéndonos a esta desviación tipo TÊT de la raíz, o sea,

$$\frac{0.08396}{0.75} = 0.112.$$

En la misma tabla 16.1.1. (Anexo 4) está indicado el subárbol óptimo por una * en la última columna. Se trata del **más pequeño** subárbol en términos de número de nodos terminales de la secuencia correspondiente al menor coste relativo obtenido con la ayuda de la muestra test. Es el subárbol con el menor coste relativo obtenido con la ayuda de la muestra test A_4 que contiene 5 nodos terminales y el coste relativo de la muestra test es 0.4583, aunque hay otros con menos nodos terminales pero con un coste relativo mayor.

La tabla 16.1.2. (Anexo 4) proporciona el árbol decisional binario podado: variables discriminantes, regla de afectación de un nuevo individuo. Así respecto del nodo terminal nº 8 nos proporciona la siguiente información: en la muestra de base, la probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 8 es de 0.39. Si recala en él, se afecta su grupo Tercero y acarrea un riesgo de error igual a 0.40. El riesgo de error es igual al porcentaje de individuos mal clasificados del nodo terminal nº 8 debido a que los costes de error de clasificación se han supuesto iguales y que las probabilidades se han tomado iguales a las frecuencias de los grupos en la muestra.

La tabla 16.1.3. (Anexo 4) contiene las informaciones de los individuos de la muestra test pasadas al árbol podado matizando, el riesgo global de error estimado con la ayuda de la muestra test (estimación del coste teórico = 0.3438) y una estimación del riesgo de error asociado a cada nodo terminal.

La tabla 16.1.4. (Anexo 4) proporciona información complementaria. Permite conocer los efectivos de los perfiles correspondientes a los distintos caminos del árbol. Así el nodo nº 8 contiene 25 individuos de la muestra y han emitido los siguientes tipos de respuestas: R141, R142, R111 y R112. La tabla 16.1.5. (Anexo 4), proporciona la misma información que la tabla anterior (16.1.4.) pero concerniente al paso de los individuos de la muestra en el árbol podado.

En la figura 16.1. podemos ver qué respuestas han sido las que han discriminado las distintas particiones de los nodos. Las respuestas: R1, modalidad 10 y R7, modalidades 70, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo. Recordemos que las modalidades de cada variable significan: terminadas en 0, no hay respuesta en ese problema; terminadas en 1 responden positivamente a uno de los problemas de ese tipo; terminadas en 2 responden a los dos problemas planteados. En dicha figura igualmente se recoge información detallada de todos los nodos (intermedios y terminales) y de todas las particiones del árbol retenido:

- El tamaño del nodo padre y su composición, así como los tamaños y composiciones de sus descendientes.
- (*)Designa el grupo al cual se afecta el nodo.
- La reducción de impureza pasando del nodo padre a sus descendientes. Esta reducción de la impureza es la mayor de las reducciones de **todas** las particiones o cortes admisibles.

También el Anexo 4 incluye las tablas 16.1.6. a la 16.1.10., y las tablas 16.1.11 a la 16.1.15 en las que se describe las nodos terminales de la muestra base y la muestra test, respectivamente, y que proporcionan básicamente para cada nodo terminal: su grupo de afectación (* en la columna 1) y el riesgo de error acarreado por la afectación de un individuo que recala en este nodo terminal (columna 6).

Si analizamos la figura 16.1 observamos que la variable de corte que interviene en la primera división del nodo padre (N = 1) es la "Var 15", respuesta R14 y que corresponde al problema *Comparación 2*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), es la modalidad R 14 1 y R 14 2, y las respuestas pertenecen a (Infantil = 1; 1º = 9; 2º = 13 y 3º = 16). En el nodo derecho (N = 3), modalidad R 14 0, quedan -Infantil = 15; 1º = 7; 2º = 3 y 3º = 0- (figura 16.1.). En principio es un problema de Comparación el que discrimina entre 3º de E.P. e Infantil.

Si continuamos con la rama izquierda, con el nodo N = 2. La variable de corte que interviene en esta segunda división es la "Var 12", respuesta R11 y que corresponde al problema *Combinación 5*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 4), es la modalidad R 11 1 y R 11 2, y las respuestas pertenecen a: Infantil = 1; 1º = 9; 2º = 7 y 3º = 16. En el nodo derecho (N = 5), nodo terminal, modalidad R 11 0, quedan: Infantil = 0; 1º = 0; 2º = 6 y 3º = 0. Es un problema de Combinación el que discrimina entre 3º y 2º de E. P.

Si seguimos dividiendo el nodo N = 4, vuelve a ser el problema Comparación 2 (R14) el que discrimina, separando R 14 2 -la modalidad que corresponde a los que responden a los dos problemas propuestos-, y que se distribuyen en el nodo terminal N = 8 así: Infantil = 1; 1º = 3; 2º = 6 y 3º = 15, de la modalidad R 14 1, -responden a un sólo problema- y que forman el nodo terminal N= 9 con los siguientes sujetos: Infantil = 0; 1º = 6; 2º = 1 y 3º = 1. Es *Comparación 2* el que está discriminando en este caso entre Tercero y

Primero, Tercero contesta a los dos problemas y Primero sólo a uno.

¿Qué pasa con los que no contestaban ningún problema de Comparación 2 (R14 0) y que formaban el nodo 3? La variable de corte "Var 7", respuesta R6, que corresponde al problema *Cambio 6*, es la que sirve para separar y hacer dos nuevos nodos (nodo 6 y 7) y discriminar entre Primero e Infantil. Contestan a los dos problemas R60 2 (Infantil = 1; 1º = 5; 2º = 2 y 3º = 0), no contestan R60 0 o contestan a un problema R60 1 (Infantil = 14; 1º = 2; 2º = 1 y 3º = 0

En resumen: el programa de discriminación utilizando árbol de decisión binario nos proporciona un árbol de decisión con 5 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 0.45, Anexo 4, tabla 8.l0 que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 66% total. Es más indicativo para nosotros los porcentajes de bien clasificados por cursos (Anexo 4, tabla 16.1.19), que son del 100% para los cursos de Infantil y Tercero y del 62.5% y 0.0% para Primero y Segundo respectivamente.

La regla de afectación (Anexo 4, tablas 16.1.6 a 16.1.10) proporcionada es la siguiente:

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidad R142- y Respuesta R11 -modalidades R11 1 y R11 2- se afectará al grupo Tercero con un coste de error igual a 0.400.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidad R14 1- y Respuesta R11 -modalidades R11 1 y R11 2- se afectará al grupo Primero con un coste de error igual al 0.250.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidades R14 1 y R14 2- y Respuesta R11 -modalidad R11 0- se afectará al grupo Segundo con un coste de error igual al 0.000.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidad R14 0- y Respuesta R6 -modalidades R60 2- se afectará al grupo Primero con un coste de error igual al 0.375.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidad R14 0- y Respuesta R6 -modalidades R60 0 y R60 1- se afectará al grupo Infantil con un coste de error igual al 0.176.

16.2. RESULTADOS CONSIDERANDO LOS CURSOS PRIMERO Y SEGUNDO COMO UN SOLO GRUPO

En el Anexo 4 se recogen las diferentes tablas de resultados con el mismo proceso comentado en el apartado anterior, aquí analizaremos la figura 8.2 que nos presenta la descripción de los cortes de la muestra base.

Las respuestas: R1, modalidad 10 y R7, modalidades 70, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo. La variable de corte que interviene en la primera división del nodo padre (N = 1) es la “Var 15”, respuesta R14 y que corresponde al problema *Comparación 2*, es la misma que cuando se consideró los grupos 1º y 2º independientemente. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), es la modalidad R 14 1 y R 14 2, y las respuestas pertenecen a (Infantil = 1; 1º y 2º = 25 y 3º = 16). En el nodo

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CONSIDERANDO PRIMERO Y SEGUNDO UN SOLO GRUPO

FIGURA 16.2.

NODOS 1 TAMAÑO = 64
*Infantil 16
PriSegu 32
Tercero 16

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 14
Afectación izquierda Si Var 15 = R141 Respuesta 14 1
R142 Respuesta 14 2
Reducción de la impureza = 0.1477

Nodos 2 Tamaño = 42
Infantil 1
PriSegu 25
*Tercero 16

Nodos 3 Tamaño = 22
*Infantil 15
PriSegu 7
Tercero 0

Respuesta 16
Afectación izquierda Si Var 17 = R162 Respuesta 16 2
Reducción de la impureza = 0.0779

Respuesta 6
Afectación izquierda Si Var 7 = R602 Respuesta 6 2
Reducción de la impureza = 01218

Nodos 4 Tamaño = 27
Infantil 1
PriSegu 11
*Tercero 15

Nodos 5 Tamaño = 15
Infantil 0
*PriSegu 14
Tercero 1
NODO TERMINAL

Nodos 6 Tamaño = 8
Infantil 1
*PriSegu 7
Tercero 0
NODO TERMINAL

Nodos 7 Tamaño = 14
*Infantil 14
PriSegu 0
Tercero 0
NODO TERMINAL

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 18
Afectación izquierda Si Var 19 = R180 Respuesta 18 0
R182 Respuesta 18 2
Reducción de la impureza = 0.0552

Nodos 8 Tamaño = 20
Infantil 1
PriSegu 5
*Tercero 14
NODO TERMINAL

Nodos 9 Tamaño = 7
Infantil 0
*PriSegu 6
Tercero 1
NODO TERMINAL

derecho (N = 3), modalidad R 14 0, quedan -Infantil = 15; 1º y 2º = 7 y 3º = 0- (figura 16.2). En principio es un problema de Comparación el que discrimina entre Tercero e Infantil.

Si continuamos con la rama izquierda, con el nodo N = 2. La variable de corte que interviene en esta segunda división es la “Var 17”, respuesta R162 y que corresponde al problema *Comparación 4*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 4), es la modalidad R 16 1 y R 16 2, y las respuestas pertenecen a: Infantil = 1; 1º y 2º = 11 y 3º = 15. En el nodo derecho (N = 5), nodo terminal, modalidad R 16 0, quedan: Infantil = 0; 1º y 2º = 14 y 3º = 1. Es un problema de Comparación el que discrimina entre 3º y 1º-2º de E. P.

Si seguimos dividiendo el nodo N = 4, es el problema de *Comparación 6* (R18) el que discrimina, separando R18 0 y R18 2 en el nodo terminal N = 8 así: Infantil = 1; 1º y 2º = 5 y 3º = 14, de la modalidad R181, y que forman el nodo terminal N= 9 con los siguientes sujetos: Infantil = 0; 1º y 2º = 6 y 3º = 1. Es *Comparación 6* el que está discriminando en este caso entre Tercero y Primero-Segundo.

¿Qué pasa con los que no contestaban ningún problema de Comparación 2 (R14 0) y que formaban el nodo 3? La variable de corte “Var 7”, respuesta R6, que corresponde al problema *Cambio 6*, es la que sirve para separar y hacer dos nuevos nodos (nodo 6 y 7) y discriminar entre Primero y Segundo e Infantil. Contestan a los dos problemas R602 (Infantil = 1; 1º y 2º = 7 y 3º = 0), no contestan R600 o contestan a un problema R601 (Infantil = 14; 1º y 2º = 0 y 3º = 0). En esta rama los resultados son iguales tanto si se considera 1º y 2º como dos grupos o si sólo son un grupo (figuras 16.1. y 16.2).

En resumen: el programa de discriminación utilizando árbol de decisión binario nos proporciona un árbol de decisión con 5 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 0.50, (Anexo 4, tabla 16.2.1) lo que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 75% total. Los porcentajes de bien clasificados por cursos (Anexo 4, tabla 16.1.19.), son del 100% para Infantil. El 37.5 % para Tercero y 81.25 % para el grupo Primero-Segundo.

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.2.6 a 16.2.10) es la siguiente:

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidades R142 y R141-, Respuesta R16 -modalidad R162- y Respuesta R18 -modalidad R180 y R182- se afectará al grupo Tercero con un coste de error igual a 0.300.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidades R142 y R141-, Respuesta R16 -modalidad R162- y Respuesta R18 -modalidad R181- se afectará al grupo Primero-Segundo con un coste de error igual a 0.143.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidades R142 y R141-, Respuesta R16 -modalidad R160 y R161- se afectará al grupo Primero-Segundo con un coste de error igual a 0.067.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidad R140- y Respuesta R6 -modalidad R60 2- se afectará al grupo Primero-Segundo con un coste de error igual a 0.125.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R14 -modalidad R140- y Respuesta R6 -modalidades R60 0 y R60 1 - se afectará al grupo Infantil con un coste de error igual a 0.000.

16.3. RESULTADOS DE LOS CURSOS INFANTIL Y PRIMERO

En el Anexo 4 se recogen las diferentes tablas de resultados, aquí analizaremos la figura 16.3 que nos presenta la descripción de los cortes de la

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CURSOS INFANTIL Y PRIMERO.

FIGURA 16.3.

NODOS 1 TAMAÑO = 32
*Infantil 16
Primero 16

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 6
Afectación izquierda Si Var 7 = R602 Respuesta 6 2
Reducción de la impureza = 0.2083

Nodos 2 Tamaño = 12
Infantil 1
*Primero 11
NODO TERMINAL

Nodos 3 Tamaño = 20
*Infantil 15
Primero 5

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 5
Afectación izquierda Si Var 6 = R502 Respuesta5 2
Reducción de la impureza = 01241

Nodos 6 Tamaño = 3
Infantil 0
*Primero 3
NODO TERMINAL

Nodos 7 Tamaño = 17
*Infantil 15
Primero 2
NODO TERMINAL

muestra base.

Las respuestas: R1, modalidad 10 y R7, modalidades 70, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo.

En la figura 16.3. podemos apreciar que la variable de corte que interviene en la primera división del nodo padre (N = 1) es la “Var 7”, R602 y que corresponde al problema *Cambio 6.* La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), que es nodo terminal, es la modalidad R6 2, -contestan a los dos problemas Cambio 6- y las respuestas pertenecen a (Infantil = 1; 1º = 11). En el nodo derecho (N = 3), modalidades R6 0 y R6 1, -o no contestan o sólo contestan a un problema de Cambio 6-, quedan (Infantil = 15 1º = 5). Es el problema de Cambio 6 el que discrimina entre Infantil y Primero.

Continuando con el nodo 3, formado por las modalidades R60 y R61, -o no contestan o sólo contestan a un problema de Cambio 6. La siguiente variable de corte que discrimina es la “Var 6”, respuesta R502, que corresponde al problema *Cambio 5*, es la que sirve para separar y hacer dos nuevos nodos. El nodo 6 formado por los que contestan a los dos problemas R502 (Infantil = 0; 1º = 3), y el nodo 7 compuesto por los que no contestan R500 o contestan a un sólo problema R501 (Infantil = 15; 1º = 2).(figura 16.3).

En resumen: el programa de discriminación utilizando árbol de decisión binario nos proporciona un árbol de decisión con 3 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 0.1250, (Anexo 4, tabla 16.3.1.) lo que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 93.75% total. Que corresponde al 87.50% para Infantil y el 100% a Primero.

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.3.6 a 16.3.8) es la siguiente:

Si un individuo responde a la variable Respuesta R6 -modalidad R602 se afectará al grupo Primero con un coste de error igual a 0.083.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R6 -modalidades R600 y R601 y Respuesta R5 -modalidad R502- se afectará al grupo Primero con un coste de error igual a 0.000.

Si un individuo responde a las variables Respuesta R6 -modalidades R600 y R601- y Respuesta R5 -modalidad R500 y R501- se afectará al grupo Infantil con un coste de error igual a 0.118.

16.4. RESULTADOS DE LOS CURSOS INFANTIL Y SEGUNDO

Como venimos haciendo, analizamos aquí sólo la figura 16.4. El resto de los resultados se encuentra en el Anexo 4. Las respuestas: R1, modalidad 10 y R7, modalidades 70, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo. La variable de corte que interviene en la primera y única división del nodo padre (N = 1) es la "Var 15", R141 y R142 y que corresponde al problema *Comparación 2*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), que es nodo terminal, son las modalidades R14 1 y R14 2, y las respuestas pertenecen a (Infantil = 1; 2º = 14). En el nodo derecho (N = 3), modalidades R140, -o no contestan al problema de Comparación 2-, quedan (Infantil = 15; 2º = 2). Es el problema de Comparación 2 el que discrimina entre Infantil y Segundo.

En resumen: el programa de discriminación utilizando árbol de decisión binario nos proporciona un árbol de decisión con 2 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 0.1250, (Anexo 4 tabla 16.4.1.) lo que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 93.75% total. Que corresponde al 100% para Infantil y el

87.50% a Segundo

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CURSOS INFANTIL Y SEGUNDO.

FIGURA 16.4.

NODOS 1 TAMAÑO = 32

*Infantil 16

Segundo 16

VARIABLE DE CORTE

Respuesta 14

Afectación izquierda Si Var 15 = R141 Respuesta 14 1

R142 Respuesta 14 2

Reducción de la impureza = 0.3314

Nodos 2 Tamaño = 3

Infantil 1

*Segundo 14

NODO TERMINAL

Nodos 3 Tamaño = 17

*Infantil 15

Segundo 2

NODO TERMINAL

(Anexo 4, tabla 16.4.13.).

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.4.6 y 16.4.7.) es la siguiente:

Si un individuo responde a la variable 15, Respuesta R14 - modalidades R142 y R141 se afectará al grupo Segundo con un coste de error igual a 0.067.

Si un individuo responde a la variable 15, respuesta 14, modalidad 140, se afectará al grupo de Infantil con un coste de error igual a 0.118.

16.5. RESULTADOS DE LOS CURSOS INFANTIL Y TERCERO

Las respuestas: R1, modalidad 10 y R7, modalidades 70, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo. Si analizamos la figura 16.5 observamos que la variable de corte que interviene en la primera división del nodo padre (N = 1) es la “Var 15”, respuesta R14, con las modalidades 14 1 y 14 2 y que corresponde al problema *Comparación 2*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), y las respuestas pertenecen a (Infantil = 1; y 3º = 16). En el nodo derecho (N = 3), modalidad R 14 0, quedan (Infantil = 15 y 3º = 0) (figura 16.5.). En principio es un problema de Comparación el que discrimina entre 3º de E.P. e Infantil.

Si continuamos con la rama izquierda, con el nodo N = 2. La variable de corte que interviene en esta segunda división es la “Var 6”, respuesta R5 y que corresponde al problema *Cambio 5*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 4), es la modalidad R 5 1 y R 5 2, y las respuestas pertenecen a: Infantil = 0 y 3º = 16. En el nodo derecho (N = 5), nodo terminal,

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CURSOS INFANTIL Y TERCERO.
FIGURA 16.5.

NODOS 1 TAMAÑO = 32
*Infantil 16
Tercero 16

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 14
Afectación izquierda Si Var 15 = R141 Respuesta 14 1
R142 Respuesta 14 2
Reducción de la impureza = 0.4412

Nodos 6 Tamaño = 17
Infantil 1
*Tercero 16

Nodos 3 Tamaño = 15
*Infantil 15
Tercero 2
NODO TERMINAL

VARIABLE DE CORTE
Respuesta 5
Afectación izquierda Si Var 6 = R501 Respuesta 5 1
R502 Respuesta 5 2
Reducción de la impureza = 0.0588

Nodos 4 Tamaño = 16
Infantil 0
*Tercero 16
NODO TERMINAL

Nodos 5 Tamaño = 1
*Infantil 1
Tercero 0
NODO TERMINAL

modalidad R 5 0, quedan: Infantil = 1 3º = 0. Además es un problema de Cambio el que discrimina entre Infantil y Tercero.

La estimación del porcentaje de bien clasificados es igual al 100.00% tanto para Infantil como para Tercero (Anexo 4, tabla 16.5.14.).

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.5.5 a 16.5.7.) es la siguiente:

Si un individuo responde a las variables 15 Respuesta R14 -modalidades R142 y R141- y variable 6, Respuesta R5 -modalidad 501 y 502 se afectará al grupo Tercero con un coste de error igual a 0.000.

Si un individuo responde a las variables 15 Respuesta R14 -modalidades R142 y R141- y variable 6, Respuesta R5 -modalidad 500 se afectará al grupo Infantil con un coste de error igual a 0.000.

Si un individuo responde a la variable 15 Respuesta R14 -modalidad R140 se afectará al grupo Infantil con un coste de error igual a 0.000.

16.6. RESULTADOS DE LOS CURSOS PRIMERO Y SEGUNDO

Las respuestas: R1, modalidad 10; R7, modalidad 70 y R12, modalidad 121, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo.

La figura 16.6 nos presenta la variable de corte que interviene en la primera y única división del nodo padre (N = 1) es la “Var 9”, R80 y R82 y que corresponde al problema *Combinación 2*. La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), que es nodo terminal, son las modalidades R80 0 y R80 2, y las respuestas pertenecen a (1º = 16; 2º = 10). En el nodo derecho (N = 3),

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CURSOS PRIMERO Y SEGUNDO.

FIGURA 16.6.

NODOS 1 TAMAÑO = 32
*Primero 16 Segundo 16

VARIABLE DE CORTE	
Respuesta 8	
Afectación izquierda	Si Var 9 = R800 Respuesta 8 0 R802 Respuesta 8 2
Reducción de la impureza =	0.1154

Nodos 6 Tamaño = 26
*Primero 16 Segundo 10
NODO TERMINAL

Nodos 3 Tamaño = 6
Primero 0 *Segundo 6
NODO TERMINAL

modalidades R801, -contestan a un sólo problema de Combinación 2-, quedan (1º = 0, 2º = 6). Es el problema de Combinación 2 el que discrimina entre Primero y Segundo.

En resumen: el programa de discriminación utilizando árbol de decisión binario nos proporciona un árbol de decisión con 2 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 1.0000, (tabla 16.6.1.) lo que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 43.75% total. Que corresponde al 62.50% para Primero y el 25.00% a Segundo. Como venimos apreciando, son los alumnos integrantes de los cursos 1º y 2º los peor clasificados, no hay una discriminación clara entre ellos (recordemos que en el análisis de varianza no había diferencias significativas entre ellos)

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.6.6 a 16.6.7.) es la siguiente:

Si un individuo responde a la variable 9 Respuesta R8 -modalidades R800 y R802 se afectará al grupo de Primero con un coste de error igual a 0.385.

Si un individuo responde a la variable 9 Respuesta R8 -modalidad R801 se afectará al grupo de Segundo con un coste de error igual a 0.000.

16.7. RESULTADOS DE LOS CURSOS PRIMERO Y TERCERO

Las respuestas: R1, modalidades 10 y 11; R7, modalidades 70 y 71, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo.

La figura 16.7. reproduce la descripción de los cortes de la muestra base de los cursos Primero y Tercero y en ella podemos observar que la variable de corte que interviene en la primera y única división del nodo padre

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CURSOS PRIMERO Y TERCERO.

FIGURA 16.7.

NODOS 1 TAMAÑO = 32
*Primero 16 Tercero 16

VARIABLE DE CORTE	
Respuesta 16	
Afectación izquierda	Si Var 17 = R162 Respuesta 16 2
Reducción de la impureza =	0.2449

Nodos 2 Tamaño = 19
Primero 4 *Tercero 15
NODO TERMINAL

Nodos 3 Tamaño = 13
*Primero 12 Tercero 1
NODO TERMINAL

(N = 1) es la “Var 17”, R162 y que corresponde al problema *Comparación 4.* La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), que es nodo terminal, es la modalidad R162, y las respuestas pertenecen a (1º = 4; 3º = 15). En el nodo derecho (N = 3), modalidades R160 y R161, -no contestan o contestan a un sólo problema de Comparación 4-, quedan (1º = 12, 3º = 1). Es el problema de Comparación 4 el que discrimina entre Primero y Tercero.

El programa de discriminación, utilizando árbol de decisión binario, nos proporciona un árbol de decisión con 2 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 0.1250, (Anexo 4, tabla 16.7.1.) lo que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 93.75% total. Que corresponde al 87.50% para Primero y el 100.00% a Tercero (Anexo 4, tabla 16.7.12).

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.7.6 y 16.7.7.) es la siguiente:

Si un individuo responde a la variable 17 Respuesta R16 -modalidad R162 se afectará al grupo de Tercero con un coste de error igual a 0.211.

Si un individuo responde a la variable 17 Respuesta R16 -modalidades R160 y R161 se afectará al grupo de Primero con un coste de error igual a 0.077.

16.8. RESULTADOS DE LOS CURSOS SEGUNDO Y TERCERO

Las respuestas: R1, modalidad 10; R7, modalidades 70 y R12, modalidad 120, han sido suprimidas en el análisis por tener peso nulo.

Finalmente analizamos la figura 16.8 con la variable discriminante para

DESCRIPCIÓN DE LOS CORTES. MUESTRA BASE. CURSOS SEGUNDO Y TERCERO

FIGURA 16.8.

NODOS 1 TAMAÑO = 32
*Segundo 16 Tercero 16

VARIABLE DE CORTE	
Respuesta 16	
Afectación izquierda	Si Var 17 = R162 Respuesta 16 2
Reducción de la impureza =	0.2449

Nodos 2 Tamaño = 19
Segundo 4 *Tercero 15
NODO TERMINAL

Nodos 3 Tamaño = 13	
*Segundo	12
Tercero	1
NODO TERMINAL	

los cursos Segundo y Tercero. La variable de corte que interviene en la primera y única división del nodo padre (N = 1) es la “Var 17”, R162 y que corresponde al problema *Comparación 4.* La regla de afectación, nodo izquierdo (N = 2), que es nodo terminal, es la modalidad R162, y las respuestas pertenecen a (1º = 4; 3º = 15). En el nodo derecho (N = 3), modalidades R160 y R161, -no contestan o contestan a un sólo problema de Comparación 4-, quedan (1º = 12, 3º = 1). Es el problema de Comparación 4 el que también discrimina entre Segundo y Tercero como ocurría entre Primero y Tercero.

En resumen: el programa de discriminación utilizando árbol de decisión binario nos proporciona un árbol de decisión con 2 nodos terminales, cuya **estimación del coste relativo** es igual a 0.5000, (Anexo 4, tabla 16.8.1.) lo que conlleva una estimación del porcentaje de bien clasificados igual al 75% total. Que corresponde al 50% para Segundo y el 100.00% a Tercero (Anexo 4, tabla 16.8.13.). Como puede comprobarse los resultados de los nodos son iguales cuando comparamos 1º con 3º y 2º con 3º las diferencias se encuentran que hay una mayor estimación del coste relativo y el porcentaje de bien clasificados es menor para segundo.

La regla de afectación proporcionada (Anexo 4, tablas 16.8.6 y 16.8.7.) es la siguiente:

Si un individuo responde a la variable 17 Respuesta R16 -modalidad R162 se afectará al grupo de Tercero con un coste de error igual a 0.211.

Si un individuo responde a la variable 17 Respuesta R16 -modalidades R160 y R161- se afectará al grupo de Segundo con un coste de error igual a 0.077.

Para terminar este apartado, en el que hemos aplicado el análisis de segmentación mediante árbol de decisión binario, resumimos las conclusiones más significativas:

1. Si analizamos los cuatro grupos, y consideramos los cursos de Primero y Segundo tanto como uno o como dos grupos es el problema Comparación 2 (Respuesta 14) el que ocasiona la primera división del nodo padre. Discriminando entre Infantil, que no resuelve este problema, de Tercero.

2. Si los cursos Primero y Segundo son grupos distintos y dentro del grupo que resuelve uno o dos problemas de Comparación 2, es el problema Combinación 5 (Respuesta 11) el que determina la siguiente división, discriminando entre Tercero y Segundo. Y, finalmente, aún hay otra división, es Tercero el que resuelve los dos problemas de Comparación 2 y sólo un problema, Primero.

3. Entre los que no resuelven el problema de Comparación 2 -considerando los cursos de Primero y Segundo tanto como uno o como dos grupos- es el problema Cambio 6 (Respuesta 6) el que divide a Primero, resolviendo los dos problemas, de Infantil.

4. Si los cursos Primero y Segundo son considerados un sólo grupo, la primera división del nodo padre se mantiene igual. Sin embargo es el problema Comparación 4 (Respuesta 16) el encargado de la segunda partición y Comparación 6 (Respuesta 18) de la tercera partición, discriminando en ambas entre Tercero y el grupo de Primero-Segundo.

5. Entre los Cursos Infantil y Primero, además de la división ya reseñada realizada por Cambio 6, también Cambio 5 (Respuesta 5) modalidad R502, discrimina entre estos cursos.

6. Entre Infantil y Segundo, sólo se produce la discriminación por el problema Comparación 2, modalidades R141 y 142, que ya habíamos señalado.

7. Entre Infantil y Tercero, se produce la discriminación por el problema Comparación 2, modalidades R141 y 142, que ya habíamos señalado y otra división por el problema Cambio 5, modalidades R501 y R 502.

8. Cuando se aplica el análisis de segmentación entre los cursos Primero y Segundo, que según el análisis de varianza no son distintos significativamente, es el problema de Combinación 2, modalidades R800 y R802, el que discrimina.

9. El problema que discrimina entre Primero y Tercero y también entre Segundo y Tercero es Comparación 4. Las diferencias se encuentran en el porcentaje de bien clasificados, que es mayor para Primero (87.5%) que para Segundo (50%) y el 100% para Tercero en ambos casos.

10. Los problemas discriminantes son los que tienen una media más baja y ocupan los últimos lugares, como puede apreciarse en la tabla y en la figura de las páginas 509 y 510, respectivamente del Anexo 2.

11. Igualmente observamos, que a excepción del problema

Comparación 2, que realiza la primera partición -Infantil respecto de Tercero y de Segundo- y Comparación 4 -Tercero con Primero y Segundo- los demás problemas discriminantes no coinciden estructura semántica y procedimiento para resolverlos (tabla 13.3.1.).

17. CONCLUSIONES GENERALES

El análisis de los datos obtenidos en la presente investigación nos permite extraer las siguientes conclusiones generales:

Con respecto a la primera pregunta *"¿Los rendimientos de los niños en los problemas dependerán del curso escolar, del tipo de problema y del lugar dónde se encuentre ubicada la incógnita?"* podemos destacar los siguientes resultados:

1º) Existen diferencias significativas, en general, en el rendimiento de los niños en función del nivel de escolaridad, de tal manera que los cursos más avanzados obtienen mejores resultados. Es un dato esperado y lógico; sin embargo, aunque los niños de Segundo superan en sus realizaciones a los de Primero, las diferencias entre ambos no son estadísticamente significativas como para matemáticamente establecer distinción entre uno y otro grupo.

2º) En cuanto al tipo de problema, los datos obtenidos demuestran que son muy similares los resultados globales de los niños en los problemas de Combinación ($\overline{x}$ = 1.55) y en los problemas de Cambio ($\overline{x}$= 1.53). Pero es el problema Cambio 1 el que consigue una media mayor ($\overline{x}$ = 1.95) y una desviación típica menor (σ = .22), seguido por Combinación 1 con media $\overline{x}$ = 1.91 y σ = .29. Son los problemas de Comparación los que resultan más difíciles para todos los niños y, por tanto, los que producen más diferencias entre los cursos; esta dificultad está en línea con todas las investigaciones realizadas en torno al tema.

3º) Con respecto a la ubicación de la incógnita, podemos afirmar que hay diferencias significativas, cuando se comparan las soluciones de los niños en las distintas situaciones en las que está situada la incógnita. Los niños alcanzan el mayor nivel de éxito cuando la incógnita se ubica en el Resultado. Resultan un poco más difícil los problemas en los que la solución consiste en encontrar el Segundo término. Y la dificultad es mayor cuando la cantidad desconocida se sitúa en el Primer Sumando.

En este estudio hemos considerado la variable operación desde tres puntos de vista distintos y a partir de los resultados que hemos encontrado, cabe señalar lo siguiente:

En primer lugar, nos preguntábamos*: "Cuando la operación es considerada desde el punto de vista de la estructura semántica, ¿existirán diferencias significativas entre la operación de sumar y la de restar?"*

En la variable operación, considerada según la estructura semántica -los problemas impares son suma y los pares resta-, no hemos encontrado diferencias significativas entre ambas operaciones, aunque los resultados de la suma son superiores a los obtenidos en la resta. Esta conclusión general resulta matizada cuando interactúan de forma significativa la operación, la situación de la incógnita y la edad de los niños. Los Cursos 1º y 2º de E.P. presentan diferencias significativas entre la suma y la resta cuando la incógnita se sitúa en el 2º Sumando. Además, las operaciones se comportan de diferente manera. En la suma, cuando está la incógnita en la posición más fácil para los niños -es decir en el Resultado-, las respuestas de los niños de Infantil no son significativamente distintas de las de Primero. En cuanto a la resta, en la posición más difícil -o sea en el Primer Sumando-, las respuestas de los tres grupos de Primaria se comportan de igual forma, diferenciándose de las de Infantil. Por tanto, las diferencias entre el grupo de Infantil y todos los de E. Primaria pueden ser imputables principalmente a la operación de restar. Esto se ha explicado señalando que la operación de restar es una operación más compleja que la suma, de modo que es norma dejar su enseñanza "para más tarde".

Igualmente hemos analizado la interacción significativa: operación x ubicación de la incógnita x tipo de problema. Las diferencias entre la operación suma y la operación resta solamente se dan en los problemas de Cambio cuando la incógnita está en el Resultado y en los problemas de Comparación si hay que encontrar el 2º Sumando.

En el segundo punto de vista considerábamos que*: "Cuando la operación se contempla como el procedimiento -suma o resta- con el que se resuelve el problema, ¿existirán diferencias significativas entre la operación suma y la operación resta?"*

Si la variable operación es utilizada como el procedimiento -hacer una suma o una resta- para resolver el problema, tanto en los problemas de Cambio como en los de Comparación -los de Combinación no se analizan-, volvemos a encontrar que no existen diferencias significativas entre los resultados obtenidos por los niños en los problemas que se resuelven por suma y los de aquellos que se resuelven por resta. El hecho de no existir diferencias entre los grupos en la operación nos hace pensar que los niños tienen igual competencia para una u otra operación desde muy temprano, y que no hay razones para postergar la enseñanza de la resta a cursos superiores.

Por último, partíamos de : *“Si se tiene en cuenta, tanto la estructura semántica como la operación con la que se resuelven los problemas, ¿encontraremos diferencias significativas entre los grupos, en función de que haya o no correspondencia entre estructura y procedimiento?”*

Cuando hemos considerado la operación desde el punto de vista de si se corresponde o no estructura y procedimiento, hemos categorizado cuatro grupos para la variable operación, teniendo en cuenta si la estructura aumenta o disminuye y si la operación con la que se resuelven el problema es una suma o una resta. Las cuatro combinaciones posibles son: Suma-Suma, Resta-Resta, Suma-Resta y Resta-Suma.

En este caso, podemos afirmar que existen diferencias significativas en la variable operación, diferencias que no hemos encontrado cuando la operación era considerada ni como estructura, ni como procedimiento. Estos resultados nos llevan a introducir una nueva dificultad (hasta ahora influía la situación de la incógnita y el tipo de problema) para los niños cuando resuelven los problemas: la correspondencia o no entre estructura y procedimiento. Además, el orden de dificultad encontrado dentro de la operación, de menor a mayor, ha sido: Suma-Suma, Resta-Resta, Resta-Suma y Suma-Resta. En otras palabras, resultan más fáciles para los niños los problemas en los que coinciden estructura y procedimiento y dentro de esta coincidencia los que se tienen que resolver por suma. Los problemas más fáciles han sido Cambio 1 y Combinación 1 y en ambos coinciden estructura y procedimiento y los dos se resuelven mediante una suma. Cuando hay contradicción, son mejores los resultados si los niños tienen que utilizar la suma para resolver el problema.

El segundo objetivo era el análisis cualitativo de los resultados en el que nos proponíamos estudiar los diferentes métodos de resolución empleados por los niños para contestar a los problemas. Respecto de las estrategias nos interrogábamos: *"¿Las estrategias utilizadas por los niños, variarán según el curso escolar, el tipo de problema y el lugar ocupado por la incógnita?"*

Hemos encontrado que existen diferencias significativas entre los distintos grupos experimentales con respecto al tipo de estrategias utilizadas, de tal manera que las estrategias de Modelado directo son casi las únicas utilizadas por los niños de Infantil (el 95% de sus respuestas). En Primero siguen siendo las estrategias más utilizadas, disminuyendo su uso en el grupo de Segundo y prácticamente no son utilizadas por los niños de Tercero. La evolución de las estrategias de Conteo se manifiesta de forma inversa a las de Modelado directo: comienzan a ser utilizadas por los niños de Primero y son elegidas mayoritariamente, tanto por los alumnos de Segundo como de Tercero. Y, por último, las estrategias de hechos numéricos no son empleadas por los niños de Infantil y se produce un aumento de su uso curso a curso en Primaria.

Hemos concretado más los datos generales anteriores, refiriendo cada nivel a los distintos tipos de estrategias y agrupándolas en estrategias de suma, de resta y comunes para ambas operaciones. En cuanto a las estrategias de suma, hemos identificado varias formas de ejecutar la estrategia de "contar todo con modelos" y hemos propuesto varios niveles evolutivos. Los niños de Infantil se sitúan en el Nivel 1, en el que realizan un doble conteo, como consecuencia de no poseer demasiado dominio en este tipo de tareas. Sin embargo, los niños de Primero y Segundo que utilizan esta estrategia forman pautas digitales para representar a los sumandos y así evitar el doble conteo. En el nivel de Conteo, la estrategia más usada por los cursos de Primaria es la de “contar a partir del sumando mayor”, que supone una estrategia más evolucionada y cognitivamente más económica que la de “contar todo a partir del sumando menor”. Por otra parte, en el nivel de Modelado directo, la estrategia “Separar de” -tipo sustractivo- es empleada el doble de veces que la de “Contar hacia adelante”, que es de tipo aditivo. En el nivel de Conteo sucede al contrario, la estrategia “Contar a partir de un nº dado” -tipo aditivo- es más utilizada por todos los cursos de Primaria que la de “Contar hacia atrás” -tipo sustractivo-. La explicación puede encontrarse en que, al tener el niño ayudas externas (objetos para representar los conjuntos), utiliza procedimientos menos elaborados, y así emplea “Separar de” -que implica contar el conjunto total y después separar el subgrupo- y no “Contar hacia adelante” -se parte de un subgrupo para llegar al conjunto total y no es necesario contar todo el conjunto-. Por la misma razón, en el nivel de Conteo utiliza más el recuento progresivo (aditivo), que es más fácil y económico que el regresivo (sustractivo).

Por último, hemos analizado las estrategias utilizadas por los niños en los diferentes problemas, agrupándolos según se resuelvan, bien por suma bien por resta, y teniendo en cuenta si hay conflicto o no entre estructura y procedimiento. Los resultados hallados nos indican que:

En los problemas de Cambio que se resuelven por suma (Cambio 1 y Cambio 6), no hay diferencia en las estrategias empleadas en ambos problemas, aunque en uno hay conflicto y en otro no, siendo la edad la que determina el tipo de estrategia utilizado. El resto de los problemas de Cambio se resuelven mediante resta, y en ellos sí hay diferencias en las estrategias, sobre todo en los cursos de Infantil y Primero. Cambio 2 y Cambio 4, ambos con estructura semántica de disminución y por tanto sin conflicto con el procedimiento, son resueltos por la estrategia: “Separar de” -sustractiva-. Para resolver Cambio 3 y Cambio 5, con estructura semántica de aumento y en conflicto con el procedimiento, los niños utilizan las estrategias de: “Contar hacia adelante” y “Contar a partir de un nº dado”, que son aditivas.

El comportamiento de las estrategias en los problemas de Comparación es similar al de los problemas de Cambio. En Comparación 3 y Comparación 6 -que se realizan mediante suma- hay indeterminación en cuanto al tipo de estrategias utilizado; puede ser consecuencia de que al ser más difíciles, aquellos que los resuelven recurren a estrategias de tipo memorístico. Sin embargo, en los que se resuelven mediante resta, hay tendencia cuando está el término “más que” - por tanto hay conflicto-, a usar estrategias de tipo aditivo, y en los que está el término “menos que” -y no existe conflicto- hay un mayor uso de estrategias de tipo sustractivo.

Respecto a los problemas de Combinación no hay diferencias entre las estrategias utilizadas en los problemas en los que se encuentra la solución realizando una suma. No hay tanta nitidez en las estrategias de los problemas de Combinación que se resuelven mediante una resta: si usan objetos para representar los números prefieren una estrategia sustractiva “Separar de”, y cuando no, prefieren estrategias de tipo aditivo “Contar hacia adelante”.

Igualmente hemos estudiado qué ocurre con aquellas respuestas que no conducen a la solución correcta del problema y en este sentido habíamos planteado: *“¿Cuando hay una respuesta errónea, el error será función del tipo de problema, del lugar de la incógnita y del curso escolar?”*

Para clasificar las respuestas erróneas hemos tomado como punto de referencia los trabajos de De Corte, Verschaffel y De Win (1985) y de

Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988). Hemos adoptado las siguientes clases de errores:

1. Otra operación.
2. Contestar con un número de los dados en el problema.
3. Inventar.
4. Contestar con “Algunos”.
5. De ejecución.

Todas las respuestas de los niños pueden incluirse en alguna de las cinco categorías que hemos señalado y ninguno de ellos dejó de contestar a los problemas que les fueron planteados. De dichas respuestas podemos concluir que:

Los errores: “Otra operación” y “Contestar con un nº de los dados” son los errores que cometen con más frecuencia los niños y casi con el mismo porcentaje, 36% y 37% respectivamente. Le sigue el error “Inventa”, un 16% y utilizan en menor cuantía los errores de “Ejecución”, un 8% y “Algunos” un 3%.

También los resultados ponen de manifiesto que es el curso de Infantil el que más contribuye a la aparición de errores (516), casi tantos errores como los de 1º y 2º de E.P. juntos, en especial los errores “Contestar con un nº dado en el problema” e “Inventa. Primero de E.P. provoca igualmente la aparición de los distintos tipos de error, pero de forma más moderada (284), siendo el error “Otra operación” el más cometido. En Segundo de E.P. hay una ligera disminución respecto de Primero (252); sigue siendo el error “Otra operación” el de mayor frecuencia, pero hay un considerable aumento del error “Ejecución”. Es Tercero el que menos contribuye a la aparición de errores (83), suponiendo el error “Otra operación” el 69% de todos los errores cometidos por este curso.

La situación de la incógnita influye también en la aparición o no de los tipos de error. Cuando se sitúa en el Resultado es cuando hay menos frecuencia absoluta de errores (251); no existiendo diferencias significativas entre “Otra operación” (Error 1) y “Contestar con un nº dado” (Error 2) y entre “Inventa” (Error 3) y “Ejecución” (Error 5). Cuando se encuentra en el 2º Sumando aumenta el número de errores (394); no hay diferencias significativas entre el Error 1 “Otra operación y el Error 2 “Nº dado en el problema”. El mayor número de errores se ha producido cuando la incógnita se encuentra en el Primer Sumando (490), siendo el error “Otra operación” el más cometido.

En cuanto al tipo de problemas, son los de Comparación los que provocan la aparición de un mayor número de errores (606), más que los otros dos tipos de problemas juntos, siendo el error “Contestar con un nº dado” el de mayor frecuencia. Le siguen los problemas de Cambio (271) y finalmente los problemas de Combinación (258). En estos dos últimos tipos de problemas es el error “Otra operación” el error más repetido.

Cuando hemos considerado la interacción de las variables error, tipo de problema y el lugar ocupado por la incógnita observamos que en los problemas de Cambio hay más errores cuando la incógnita está ubicada en el Primer Sumando. En los problemas de Combinación se producen más errores cuando se sitúa en el Segundo Sumando. Y, por último, en los problemas de Comparación, cualquier situación en la que esté la incógnita, contribuye de forma significativa a la producción de errores.

Los resultados del análisis de la interacción entre las variables error, situación de la incógnita y curso, nos permiten afirmar que cuando la incógnita está situada en el Primer Sumando todos los alumnos, sea cual sea el curso, cometen más errores que en cualquiera de las otras situaciones.

Disminuye el número de errores cuando se ubica en el Segundo Sumando la incógnita y es todavía menor en el Resultado, sin que la edad sea un factor influyente.

Finalmente, del estudio de la interacción entre las variables error, tipo de problema y situación de la incógnita podemos concluir que son los problemas de Comparación con la incógnita en el Primer Sumando los que generan más número de errores (232); los Problemas de Comparación, con la incógnita en el Resultados son los que ocupan el segundo lugar en número de errores (202).

En cuanto al tercer y último objetivo nos hacíamos la siguiente pregunta: *”¿Cuáles son los problemas que serían característicos, por su dificultad, de los diferentes cursos escolares aquí estudiados?”*

Para determinar qué problemas discriminaban unos cursos de otros hemos aplicado un programa de “segmentación mediante árbol de decisión binario”. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que es el problema de Comparación 2 (incógnita en el resultado, término “menos que” y coincidencia entre estructura y procedimiento -Resta-Resta-) el que hace la primera división: el grupo de Infantil respecto de los grupos de Primaria. Considerando un solo grupo Primero y Segundo, siguen siendo los problemas de Comparación 4 y Comparación 6 (incógnita en el 2º Sumando y en el 1er Sumando, respectivamente) los que originan las siguientes particiones respecto de Tercero. Esto indica y confirma, por un lado, que es la estructura de comparación la más difícil y, por otro, que la ubicación de la incógnita también determina la dificultad en los problemas.

El análisis de los datos también indica, cuando hemos realizado la segmentación curso a curso, que entre Infantil y Primero son los problemas

Cambio 6 y Cambio 5 los encargados de discriminar entre estos cursos. En ambos problemas la incógnita se sitúa en el Primer Sumando -situación muy difícil para Infantil- y tampoco en ellos coinciden estructura y procedimiento, siendo Cambio 6 resuelto por suma y Cambio 5 por resta. En lo que respecta a la discriminación entre Infantil y Tercero, además del problema Comparación 2, es también Cambio 5 el encargado de hacer entre estos dos grupos otra partición. Aunque hemos venido considerando que los cursos Primero y Segundo se comportan como un sólo grupo, sin embargo los datos obtenidos nos aportan una diferencia entre ellos: es el problema Combinación 1 el que origina una partición entre ellos, pero con la siguiente peculiaridad: los niños de Primero, o no resuelven el problema, o resuelven los dos problemas planteados. Por último, las diferencias encontradas entre los cursos Primero y Tercero -y también entre Segundo y Tercero- las determina el problema Comparación 4.

Como síntesis, debe decirse que los resultados coinciden con otras investigaciones en el sentido de que la edad de los niños, situación de la incógnita y tipo de variables determinan la dificultad de los problemas. Sin embargo, la coincidencia o no de estructura y procedimiento añade una variable más, que generalmente no ha sido tenida en cuenta -salvo, en algunos trabajos, para problemas de Comparación-, por lo que serían deseables futuras investigaciones extensivas a todos los tipos de problemas, que constaten estos datos y añadan otros nuevos, con la finalidad de alcanzar conclusiones que puedan ser aplicadas a la enseñanza de los problemas de sumar y restar.

Por último, queremos resaltar la discrepancia que existe entre los resultados de las investigaciones de tipo teórico y la enseñanza que se realiza en las escuelas: una verdadera comunicación, que contrastara y llevara a la práctica las aportaciones teóricas, obtendría fructiferas conclusiones que beneficiarían la enseñanza de las Matemáticas. De ella serían los niños -que, en definitiva, son quienes nos preocupan- los auténticos destinatarios.

BIBLIOGRAFÍA

ADETULA, L. O. (1990). Language factor: does it affect children's performance on word problems? Educational Studies in Mathematics, 21, 351-365.

AGUILAR, M. (1997). Diseño y aplicación de un programa instruccional de resolución de problemas aritméticos. Tesis Doctoral. Cadiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

AGUILAR, M. y MARTÍNEZ; J. (1996). La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a los de cambio y comparación. Suma, 21, 35-39.

AGUILAR, M. y MARTÍNEZ; J. (1998). Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) de una operación formulados con números pequeños. Suma, 27, 71-80.

AGUILAR, M. y NAVARRO, J. I. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. Revista de Psicología General y Aplicada, 53(1), 63-83.

AIZPÚN, A., CASALS, M. y SUÁREZ, J. J. (1994). Perspectivas del aprendizaje de las Matemáticas en la escuela Primaria. En J.YAGÜE (Dir.) Los aprendizajes instrumentales en la Educación Primaria (187-237). Madrid: Escuela Española.

ALSINA, C., ÁLVAREZ, J. M., NISS, M., PÉREZ, A., RICO, L. y SFARD, A. (1998). Proceedings of the 8 th International Congress on Mathematical Education. (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

ALSINA, C., ÁLVAREZ, J. M., HODGSON, B., LABORDE, C. y PÉREZ, A. (1998). 8 th International Congress on Mathematical Education . Selected Lectures. (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

ANGUERA, M. T. (1982). Posiblidades de la metodología cualitativa vs cuantitativa. Revista Investigación Educativa, 3(6), 127-144.

ARNAU, J. (1981). Diseños experimentales en psicología y educación, Tomo 1. Mexico: Trillas.

ARNAU, J. (1984). Diseños experimentales en psicología y educación, Tomo 2. Mexico: Trillas.

ARRIETA, J. J. (1989). La resolución de problemas y la educación matemática: hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. Enseñanza de las Ciencias, 7(1), 63-71.

ASHCRAFT, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: a chronometric approach. Developmental Review, 2, 213-236.

ASHCRAFT, M. H. (1983). Procedural knowledge versus fact retrival in mental aritmetics: a reply to Baroody. Developmental Review, 3, 231-235.

ASHCRAFT, M. H. (1985). Is it parfetched that some of us remember our arithmetic facts? Journal for Research in Mathematics Education, 16, 99-105.

ASHCRAFT, M. H. (1990). Strategic processing in children's mental arithmetic: a review and proposal. En D. F. BJORKLUND (Eds.), Children's strategies. Contemporary views of cognitive development (185-212). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

ASHCRAFT, M. H. y BATAGLIA, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. Journal of Experimental Psychology: Human learning and Memory, 4, 527-538.

ASHCRAFT, M. H., y FIERMAN, B. A. (1982). Mental adittion third, fourth and sixth graders. Journal of experimental child Psychology, 33, 216-234.

ASHCRAFT, M. H., FIERMAN, B. A. y BARTOLOTTA, R. (1984). The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. Development Review, 4, 157-170.

BACKMAN, C. A. (1978). Analyzing children's work procedures. En M. N. SUYDAM y R. E. REYS, Developing computational skills. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

BARNETT, J. (1980). The study of syntax variables. En G. A. GOLDIN y C. E. McCLINTOCK (Eds.), Task variables in mathematical problem solving (23-68). Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

BAROODY, A. J. (1983). The development of Procedural Knowlegde: An alternative explanation for Chronometric trends of mental arithmetic. <u>Development Review</u>, <u>3</u>, 225-230.

BAROODY, A. J. (1984a). The case of Felicia: a young child's strategies for reducing memory demands during mental addition. <u>Cognition and Instruction</u>, <u>1(1)</u>, 109-116.

BAROODY, A. J. (1984b). A reexamination of mental arithmetic models and data: a reply to Ashcraft. <u>Development Review</u>, <u>4</u>, 148-156.

BAROODY, A. J. (1984c). Children's difficulties in subtraction: Some causes and questions. <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, <u>15(3)</u>, 203-213.

BAROODY, A. J. (1985). Pitfalls in equating informal arthmetic procedures with specific mathematical conceptions. <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, <u>16(3)</u>, 233-236.

BAROODY, A. J. (1986). Basic counting principles used by mentally retarded children. <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, <u>17(5)</u>, 382-389.

BAROODY, A. J. (1987a). The development of counting strategies for single-digit addition. <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, <u>18(2)</u>, 141-157.

BAROODY, A. J. (1987b). Children's mathematical thinking. Nueva York: Teachers College Press. (Versión en castellano: (1988). <u>El pensamiento matemático de los niños</u>. Madrid: Visor y M.E.C.).

BAROODY, A. J. (1993). The relationship between the order-irrelevance principle and counting skill. <u>Journal for Research in Mathematics Education</u>, <u>24(5)</u>, 415-427.

BAROODY, A. J. (1995). The role of the number-after rule in the invention of computational shortcuts. <u>Cognition and Instruction</u>, <u>13(2)</u>, 189-219.

BAROODY, A. J. y GANNON, K. E. (1984). The development of the commutatity principle and economical addition strategies. <u>Cognition and Instruction</u>, <u>1(3)</u>, 321-339.

BAROODY, A. J., y GINSBURG, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of Arithmetic. En J. HIEBERT (Comp.), Conceptual and procedural knowlegde: the case of Mathematics (75-112). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

BEBOUT, H. (1990). Children' symbolic representation of addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2), 123-131.

BEDNARZ, N. Y GARNIER, C. (1996). Children's development in solving a certain class of additive problems in mathematics: a didactic intervention based on action. Learning and Instruction, 6(2), 131-150.

BEISHUIZEN, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtractions up to 100 in dutch seconds grades. Journal for Research in Mathematics Education, 24(4), 294-323.

BELL, A., FISCHBEIN, E. y GREER, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context. Educational Studies in Mathematics, 15, 129-147.

BELTRÁN, J., BERMEJO, V., PRIETO, M. D. y VENCE, D. (1993). Intervención Psicopedagógica. Madrid: Pirámide.

BERMEJO, V. (1990). El niño y la aritmética. Barcelona: Paidós.

BERMEJO, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. BELTRÁN, V. BERMEJO, M. D. PRIETO y D. VENCE (Eds.), Intervención Psicopedagógica (169-185). Madrid: Pirámide.

BERMEJO, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. BELTRÁN y C. GENOVARD (Eds.), Psicología de la Instrucción I: Variables y procesos básicos. Madrid: Síntesis.

BERMEJO, V. y LAGO, M. O. (1987). El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. Psicólogos. Papeles del Colegio, 6(32), 35-47.

BERMEJO, V. y LAGO, M. O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. Infancia y Aprendizaje, 44, 109-121.

BERMEJO, V. y LAGO, M. O. (1991). Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos.Madrid: C.I.D.E.

BERMEJO, V., LAGO, M. O. y RODRIGUEZ, P. (1994a). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. Cognitiva, 6(2), 159-174.

BERMEJO, V., LAGO, M. O. y RODRIGUEZ, P. (1994b). Un modelo de los niveles de comprensión de la propiedad conmutativa de la adición. Anuario de Psicología, 62, 25-40.

BERMEJO, V. LAGO, M. O. y RODRIGUEZ, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción, secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. Revista de Psicología General y Aplicada, 51(3-4), 533-552.

BERMEJO, V. LAGO, M. O. y RODRIGUEZ, P. (2000). La perspectiva constructivista en la enseñanza de las matemáticas. En J. N. GARCÍA-SÁNCHEZ (Coord.), De la psicología de la instrucción a las necesidades curriculares, 83-92. Barcelona: Oikos-Tau.

BERMEJO, V. LAGO, M. O., RODRIGUEZ, P. y PÉREZ, M (2000). Fracaso escolar en Matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. Revista de Psicología General y Aplicada, 53(1), 43-62.

BERMEJO, V., LAGO, M. O., RODRIGUEZ, P., PÉREZ, M., BEJERANO, F.y MORICHE, E. (1997). Intervención psicopedagógica en el aula de matemáticas. Un programa instruccional para el Primer Ciclo de Educación Primaria. Memoria de Investigación. Madrid: C.I.D.E.

BERMEJO, V., LAGO, M. O., RODRIGUEZ, P., PÉREZ, M., BEJERANO, F., MORICHE, E., DOPICO, C., LOZANO, J. M y PINTOS, M. T. (1999). Intervención psicopedagógica en el aula de matemáticas. Un programa psicoinstruccional para el Primer Ciclo de Educación Primaria. Premios Nacionales de Investigación Educativa 1998, 189-210. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura y C.I.D.E.

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. Infancia y Aprendizaje, 39-40, 71-81.

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P. (1987b). Fundamentos cognitivos de la adición. Psiquis, 8, 21-30.

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P. (1988). La genèse de l'opération d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmas additifs. European Journal of Psychology of Education, Número Especial, 75-76.

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P. (1990). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. Investigaciones Psicológicas. 8, 23-39.

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P. (1992). Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de solución. Investigaciones Psicológicas, 11, 21-45.

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P. (1994). Competencia conceptual y de procedimiento: comprensión de la propiedad conmutativa de la adición y estrategias de solución. Estudios de Psicología, 51, 3-21.

BETHENCOURT, J. T. (1987). La importancia del lenguaje en la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción. Suma, 16, 4-9.

BETHENCOURT, J. T. y TORRES, E. (1987). La diferencia de sexo en la resolución de problemas aritméticos: un estudio transversal. Infancia y Aprendizaje, 38, 9-20.

BISHOP, A. J., CLEMENTS, K., KILPATRICK, CH. y LABORDE, C. (Eds.) (1996). International Handbook of Mathematics Education. Dordrech: Kluiwer.

BISQUERRA, R. (1989). Introducción conceptual al análisis multivariable. Volumenes I y II. Barcelona: PPU.

BLANCO, L. J. (1998). Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar matemáticas. Cultura y Educación, 9, 77-96.

BORASI, R. (1986). On the nature of problems. Educational Studies in Mathematics, 17, 125-141.

BOULTON-LEWIS, G. M. (1993a). Young children's representations and strategies for subtraction. British Journal of Educational Psychology, 63, 441-456.

BOULTON-LEWIS, G. M. (1993b). An assessment of the processing load of some strategies and representations subtraction used by teachers and young children. Journal of Mathematical Behavior, 12, 387-409.

BOULTON-LEWIS, G. M. y TAIT, K. (1994). Young children's representations and strategies for addition. British Journal of Educational Psychology, 64, 231-242.

BOUVIER, A. y GERGE, M. (1984). Diccionario de Matemáticas. Madrid: Akal Editores.

BRAINE, M. DS., COWAN, N., SAMUELS, M. C. y TAMIS-LEMONDA, C. (1993). The development of categories at the semantics/syntax interface. Cognitive Development, 8, 465-494.

BREIMAN, L., FRIEDMAN, J. H., OLSHEN, R. A. y STONE, C. J. (1984). Classification and regresion trees. Wadwsorth International Group.

BRIAS, D. J. y LARKIN, J. H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1(3), 245-296.

BRISSIAUD, R. (1993). El aprendizaje del cálculo. Madrid: Visor.

BRISSIAUD, R. (1994). Teaching and development: Solving "missing addend" problems using subtraction. Special Issue: Learning and development: Contributions from Vygotsky. European Journal of Psycology of Education, 9(4), 343-365.

BROWN, J. S., y BURTON, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills. Cognitive Science, 2, 155-192.

BROWN, J. S., y VANLEHN, K (1980). Repair theory: a generative of bugs in procedural skills. Cognitive Science, 4, 379-426.

BROWN, J. S., y VANLEHN, K (1982). Towards a generative theory of bugs. En T. P., CARPENTER, J. M MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (117-135). Hillsdale Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

BURKHARDT, H. (1988). Teaching problem solving. En H. BURKHARDT, S. GROVES, A. SCHOENFELD y K. STACEY (Eds.), Problem solving -a world view (Proceeding of the problem solving theme group, ICME 5) (3-42). Nottingham: Shell Centre.

BYRNES, J. R. y WASIK, B. A. (1991). Role of knowledge in mathematical procedural learning. Development psychology, 27(5), 777-786.

CALLEJO. M. L. (1992). Curriculum de matemáticas y resolución de problemas. Suma, 10, 25-35.

CAMPBELL, P. F. (1998). Transforming mathematics instruction in every elementary classroom: using research as a basis for effective school practice. En C. ALSINA, J. M. ÁLVAREZ, B. HODGSON, C. LABORDE y A. PÉREZ (Eds.), 8 th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures (75-83). (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

CAMPBELL, D. T y STANLEY (1973). Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social. Buenos Aires: Amorrortu.

CARDELLE-ELAWAR, M. (1995). Effects of metacognitice instruction on low achievers in mathematics problems. Teaching and Teacher Education, 11(1), 81-95.

CAREY, D. A. (1991). Number sentences: linking addition and subtraction word problems and symbols. Journal for Research in Mathematics Education, 22(4), 266-280.

CARPENTER, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. HIEBERT: Conceptual and procedural knowlegde: the case of Mathematics (113-132). Hilsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P., ANSELL, E., FRANKE, L. M., FENNEMA, E. y WEISBECK, L. (1993). Models of Problem solving: a study of Kindergarten children's problem-solving proceses. Journal for Research in Mathematics Education, 24(5), 428-441.

CARPENTER, T. P.y FENNEMA, E. (1992). Cognitively guided instruction: building on the knowledge of students and teachers. En W. SECADA (Ed.), Curriculum reform: the case of mathematics in the United States. Special Issue of Internacional Journal of Educational Research (457-470). Elmsford, Nueva York: Pergamon Press, Inc.

CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., PETERSON, y CAREY D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of student's problem solving in elementary arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 19(5),385-401.

CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., PETERSON, P. L., CHIANG. CH. y LOEF, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study. American Educational Research Journal, 26(4), 499-531.

CARPENTER, T. P., FRANCKE, M. L., JACOBS, V. R., FENNEMA, E. y EMPSON, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 3-20.

CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. Y MOSER, J. M. (1981). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. Y MOSER, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. Educational Studies in Mathematics, 14, 55-72.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. P., CARPENTER, J. M MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (9-24). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P., y MOSER, J. M. (1983). The acquisition of Addition and Subtraction Concepts. En R. LESH y M. LANDAU (Comps.), Acquisitions of mathematics: Concepts and processes (7-44). Nueva York: Academic Press.

CARPENTER, T. P., y MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. Journal for Research in Mathematics Education, 15(3), 179-202.

CARPENTER, T. P., MOSER, J. M. y BEBOUT, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction world problems. Journal for Research in Mathematics Education, 19(4), 345-357.

CARPENTER, T. P., MOSER, J. M. Y ROMBERG, T. A. (1982). Addition and sustraction: A cognitive perspective. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P. y PETERSON, P. L. (1988). Learning through instruction: the study of students' thinking during instruction in mathematics. Educational Psychologist, 23(2), 79-85.

CARRETERO, M. y GARCÍA MADRUGA, J. A. (1984). Lecturas de psicología del pensamiento. Madrid: Alianza Editorial.

CASCALLANA, M. T. (1988). Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid: Santillana.

CASE, R. (1978). Implications of developmental psychology for the desing instruction. En R. GLASER, J. LESHGOLD, J. PELLEGRINO y J. FOKKEMA (Eds.), Advances in instructional psychology (441-463). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CASE, R (1982). General developmental influences on the acquisition of elementary concepts and algorithms in arithmetic. En T. P., CARPENTER, J. M MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (156-170). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CASE, R. (1993). Theories of learning and theories of development. Educational Psycologist, 28(3), 219-233.

CASTRO, E., RICO, L. y CASTRO MARTÍNEZ, E. (1987). Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar. Madrid: Síntesis.

CASTRO, E. (1995). Niveles de comprensión en problemas verbales de estructura multiplicativa. Granada: Comares.

CASTRO, E., RICO, L. y GIL, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. Enseñanza de las Ciencias, 10(3), 243-253.

CASTRO, E., RICO, L., GUTIERREZ, J., CASTRO, E., SEGOVIA, I., MORCILLO, N., FERNÁNDEZ, F., GONZÁLEZ, E. y TORTOSA, A. (1996). Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en Primaria. Revista de Investigación Educativa, 14(2), 121-139.

CAULEY, K. M. (1988). Construction of logical knowledge: study of borrowing in subtraction. Journal of Educational Psychology, 80(2), 202-205.

CLARK, E. V. (1973). Non-linguistic strategies and the acquisition of word meanings. Cognition, 2, 161-182.

CLARK, H. H. (1969). Linguistic processes in deductive reasoning. Psychological Review, 76, 387-404.

CLEMENTS, M. A. (1999). Planteamiento y resolución de problemas: ¿Es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI ? Suma, 30, 27-30.

COBB, P. (1987). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. Educational Studies in Mathematics, 18, 109-124.

COBB, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. Educational Psychologist, 23, 87-103.

COBB, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. En C. FOSNOT (Ed.), Constructivism: Theory, perspectives and practice (33-52). Nueva York: Teachers College Press.

COBB, P. (1998). Accounting for mathematical learning in the social context of the classroom. En C. ALSINA, J. M. ÁLVAREZ, B. HODGSON, C. LABORDE y A. PÉREZ (Eds.), 8 th International Congress on

Mathematical Education. Selected Lectures (85-99). (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

COBB, P. y WHEATLEY, G. (1988). Children's initial understanding of ten. Focus on learning problems in Mathematics, 10, 1-28.

COBB, P., WOOD, T., YACKEL, E., NICHOLLS, J., WHEATLEY, G., TRIGATTI, B. y PERLWITZ, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. Journal for Research in Mathematics Education, 22(1), 3-29.

COBO, P. (1995). Efectos de la utilización de los gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. Uno, 4, 63-75.

COCKCROFT (1982). Mathematics counts. Londres: Her Majesty's Stationery Office. (Traducción española (1985). Las matemáticas si cuentan. Informe Cockcroft. Madrid: M.E.C.)

CODY, R. P. y SMITH, J. K. (1991). Applied statistics and the SAS programming language. Nueva Jersey: Prentice Hall.

COLLINS, A., BROWN, J. S. y NEWMAN, S. E. (1989). Cognitive apprenticaship: teaching the craft of reading, writing and mathematics. En L. B. RESNICK (Ed.), Knowing, learning, and instruction. Essays in honor of Robert Glaser (453-494). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CONNELL, M. L. y PECK, D. M. (1993). Report of a conceptual change intervention in elementary mathematics. Journal of Mathematical Beavior, 12(4), 329-350.

COSTA, A. (1996). Prefacio. En L. B. RESNICK y L. KLOPFER (Eds.) (1989). Toward the thinking curriculum: currente cognitive research. Virginia: ASCD (Traducción española: Currículum y cognición (1996) (11-15). Argentina: Aique).

COWAN, R. (1987). When do children trust counting as a basis for relative number judgment? Journal of Experimental Child Psychology, 43, 328-345.

COWAN, R. y DANIELS, H. (1989). Children’s use counting and guidelines in judging relative number. British Journal of Educational Psychology, 59, 200-210.

CUADRAS, C. M. (1991). Métodos de análisis multivariable. Barcelona: PPU.

CUADRAS, C. M. (1991). Problemas de probabilidad y estadística. Inferencia estadística, Volumen 2. Barcelona: PPU.

CUMMINS, D. D. (1991). Children’s interpretations of arithmetic word problems. Cognition and Instruction, 8(3), 261-289.

CUMMINS, D., KINTSCH, W., REUSSER, K. Y WEIMER, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. Cognitive Psychology, 20, 405-438.

CHAMORRO, M. C. (1995). Los procesos de aprendizaje en matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria. Uno, 4, 87-96.

CHI, M. y GLASER, (1986). La capacidad de resolución de problemas. En R. J. STERNBERG (Ed.), Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información (293-324). Barcelona: Labor.

CHI, M. T., GLASER, R. y FARR, M. J. (1988). The nature of expertise. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CHRISTOU, C. y PHILIPPOU, G. (1999). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 29(4), 436-442.

DAVIS, E. J. y McKILLIP, W. D. (1980). Improving story-problem solving in elementary school mathematics. En S. KRULIK y R. E. REYS (Eds.), Problems solving in school mathematics (80-91). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

DAVIS, G. y PEPPER, K. (1992). Mathematical problem solving by pre-school children. Educational Studies in Mathematics, 23, 397-415.

DAVIS-DORSEY, J., ROSS, S. M. y MORRISON, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. Journal of Educational Psychology, 83, 61-68.

DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. BELTRÁN, V. BERMEJO, M. D. PRIETO y D. VENCE (Eds.), Intervención Psicopedagógica (145-168). Madrid: Pirámide.

DE CORTE; E. (1995) Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. Educational Psycologist, 30(1), 37-46.

DE CORTE, E y VERSCHAFFEL, L. (1981). Children's solution processes in elementary arithmetic problems: analysis and improvement. Journal of Educational Psychology, 73(6), 765-779.

DE CORTE, E y VERSCHAFFEL, L. (1985a). Beginning first graders initial representation of arithmetic word problems. The Journal of Mathematical Behavior, 4, 3-21.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1985b). Working with simple word problems in early mathematics instruction. En L. STREEFLAND (Ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1. Individual Contributions (304-309). Utrecht, Paises Bajos: Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center, Subfaculty, Universidad de Utrecht.

DE CORTE, E y VERSCHAFFEL, L. (1987a). Using retelling data to study young children's word-problem-solving. En J. A. SLODOBA y D. ROGERS (Comps.), Cognitive processes in mathematics (42-59). Nueva York: Oxford University Press.

DE CORTE, E y VERSCHAFFEL, L. (1987b). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solvind addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 18(5), 363-381.

DE CORTE, E y VERSCHAFFEL, L. (1993). Some factors influencing the solution of adittion and subtraction word problems. En K. DURKIN y B: SHIRE (Eds.), Language in Mathematics Education (118-130). Philadelphia: Open University Press.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. y DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. Journal of Educational Psychology, 77, 460-470.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. y PAUWELS, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' Eye movements. Journal of Educational Psychology, 82(2), 359-365.

DELLAROSA, D. (1986). A computer simulation of children's arithmetic word-problem solving. Behavior Research Methods, Instruments & Computers, 18(2), 147-154. Citado por DELLAROSA, KINTSCH, REUSER y WEIMER (1988).

DELLAROSA, D., KINTSCH, W., REUSSER, K. Y WEIMER, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. Cognitive Psychology, 20, 405-438.

DELLAROSA, D., WEIMER, R. y KINTSCH, W. (1985). Children's recall of arithmetic word problems. Tech Rep. 148. Boulder: University of Colorado, Institute of Cognitive Science.

DENISE, M. K. (1984). Solving arithmetic word problems: role of reading and computational skills. Journal of Educational Psychology, 76(2), 205-210.

DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA (1992). Vigésima Primera Edición. Madrid: Espasa-Calpe.

DICKSON, L., BROWN, M., y GIBSON, O. (1984). Children learning mathematics: a teacher´s guide to recent research. (Traducción española: El aprendizaje de las matemáticas. (1991). Madrid: MEC y Labor).

DIXON, J. A. Y MOORE, C. F. (1996). The development role of intuitive priciples in choosing mathematical strategies. Development-Psycology , 32(2), 241-253.

DONLAN, C. (1998). The development of mathematical skills. East Sussex: Psychology Press Ltd., Publishers.

ETXEBERRIA, J., JOARISTI, L. y LIZASOAIN, L. (1991). Programación y análisis estadísticos básicos con SPSS/PC+. Madrid: Paraninfo.

EKENSTAN, A. AF. y GREGER, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. Educational Studies in Mathematics, 14, 369-384.

FAN, N., MUELLER, J. H. y MARINI, A. E. (1994). Solving difference problems: wording primes coordination. Cognition and Instruction, 12(4), 355-369.

FAYOL, M. y ABDI, H. (1986). Impact des formulations sur la resolution de problémes additifs chez l'enfant de 6 a 10 ans. European Journal of Psychology of Education, 1(1), 41-58.

FENNEMA, E., CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L., LEVI, L., JACOBS, V. R. y EMPSON, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4),

FENNEMA, E., CARPENTER, T. P., y LAMON, S. J. (1991). (Eds). Integrating research on teaching and learning mathenatics. Albany: State University of New York Press.

FENNEMA, E., FRANKE, M. L., CARPENTER, T. P. y CAREY, D. A. (1993). Using children's mathematical knowledge in instruction. American Educational Research Journal, 30(3), 555-583.

FLETCHER (1985). Understanding and solving arithmetic word problems: a computer simulation. Behavior Research Methods, Instruments & Computers, 17(5), 565-571.

FONT, V. (1996). Enfoques cognitivos: su aplicación a las matemáticas. Suma, 22, 51-57.

FORD, M.I. (1990). The writing process: a strategy for problem solvers. Arithmetic Teacher, 38(3), 35-38.

FOSNOT, C. (Ed.) (1996). Constructivism: Theory, perspectives and practice. Nueva York: Teachers College Press.

FRAIVILLIG, J. L., MURPHY, L. A. y FUSON, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in Everyday Mathematics classrooms. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 148-170.

FRANKE, M. L. y CAREY, D. A. (1997). Young children's perceptions of mathematics in problem-solving environments. Journal for Research in Mathematics Education, 28(1), 8-25.

FUNG LIN, N.L: (1990). The effect of superfluous information on children's solution of story arithmetic problems. Educational Studies in Mathematics, 21, 509-520.

FUSON, K. C..(1982). The counting-on solution procedure: Analysis and empirical results. En T. P. CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (67-81). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

FUSON, K. C. (1984). More complexities in subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 15(3), 214-225.

FUSON, K. C. (1986). Teaching children to subtract by counting up. Journal for Research in Mathematics Education, 17(3), 172-189.

FUSON, K. C. (1988). Children's counting and concepts of number. Nueva York: Springer-Verlag.

FUSON, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (243-275). Nueva York: Mc Millan.

FUSON, K. C. (1992). Research on learning and teaching addtion and subtraction of whole numbers. En G. LEINHARDT, R. PUTNAM y R.A. HATTRUP (Eds.), Analysis of arithmetics for mathematics teaching (53-187). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

FUSON, K. C. y BRIARS, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first-and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 21(3), 180-206.

FUSON, K. C., CARROLL, W. M. y DRUECK, J. V. (2000). Achievement results for second and third graders using the staudards-based curriculum everyday mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 31(3), 277-295.

FUSON, K. C. y FUSON, A. M. (1992). Instruction supporting children's counting on for addition and counting up for subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), 72-78.

FUSON, K., RICHARDS, J. y BRIARS, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. En C. BRAINERD (De.) Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development (33-92). Nueva York: Springer-Verlag.

FUSON, K., WEARNE, D., HIEBERT, J. C., MURRAY, H. G., HUMAN, P. G., OLIVIER, A. I., CARPENTER, T. P. y FENNEMA, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 28(2), 130-162.

FUSON, K. C. y WILLIS, G. B. (1986). First and second grades performance on compare and equalize word problems. En Proceeding of the tenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education (19-24). Londres: Universidad de Londres. Instituto de Educación.

FUSON, K. C. y WILLIS, G. B. (1988). Subtracting by counting up: more evidence. Journal for Research in Mathematics Education, 19(5), 402-420.

FUSON, K. C. y WILLIS, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. Journal of Educational Psychology, 81(4), 514-520.

GAGNÉ, R. M. (1965). The conditions of learning. Nueva York: Holt, Rinehart y Winston. (Traducción española: 1971, Las condiciones del aprendizaje. Madrid: Aguilar.

GAROFALO, J. y LESTER, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 163-176.

GEARY, D. C. (1995) Reflections of evolution and culture in children's cognition: Implications for mathematical development and instruction. American Psycologist, 50(1), 24-37.

GEARY, D. C. y WIDAMAN K. F. (1987). Individual differences in cognitive arithmetic. Journal of experimental Psycology: General, 116(2), 154-171.

GELMAN, R. y GALLISTEL, C. R. (1978). The child´s understanding of number. Cambridge, Massachusetts: Hardvard University Press.

GENOVARD, C. y GOTZENS, C. (1990). Psicología de la instrucción. Madrid: Santillana.

GIL, D. y GUZMAN, M. de (1993). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Madrid: Popular.

GIL, D., MTNZ-TORREGROSA, J., RAMÏREZ, L., DUMAS-CARRÉ, A., GOFARD, M. y PESSOA, A. (1992). La didáctica de la resolución de problemas en cuestión: elaboración de un modelo alternativo. Didáctica de las ciencias experimentales y sociales, 6, 73-85.

GILL, A. J. Y THMPSON, A. (1995). Bridging second-grade children's thinking and mathematical recording. Journal of Mathematical Behavior, 14(3), 349-362.

GIMÉNEZ, J. (1994). Lenguaje verbal y matemáticas: separación sin relaciones. Estado de la investigación. Suma, 16, 54-66.

GINSBURG, H. P. (Ed.). (1983). The development of mathematical thinking. Nueva York: Academic Press.

GINSBURG, H. P., KOSSAN, N. E., SCHWARTZ, R. y SWANSON, D. (1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. En H. P. GINSBURG (Comp.), The development of mathematical thinking (7-47). Nueva York: Academic Press.

GINSBURG, H. P. y YAMAMOTO, T. (1986). Understanding, motivation, and teaching: comment on lampert's knowing, doing and teaching multiplication. Cognition and Instruction, 3, 357-370.

GÓMEZ, R., HADFIELD, O. D. y HOUSNER, L. D. (1996). Conceptuals maps and simulated teaching episodes as indicators of competence in teaching elementary mathematics. Journal of Educational Psycology, 88(3), 572-585.

GOMEZ-GRANELL, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. Comunicación, Lenguaje y Educación, 3-4, 5-15.

GOMEZ-GRANELL, C. (1990). Estrategias de aprendizaje en psicopedagía de las matemáticas. En MONEREO (Comp.), Monografía sobre enseñar a aprender y a pensar en la escuela. Infancia y Aprendizaje, Número monográfico, (31-46).

GOMEZ-GRANELL, C. (1991). Introducción: la didáctica de las matemáticas en los 90. Comunicación, Lenguaje y Educación, 11-12, 7-9.

GOMEZ-GRANELL, C. (1991). Cognición, contexto y enseñanza de las matemáticas. Comunicación, Lenguaje y Educación, 11-12, 11-26.

GONZÁLEZ, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo. Revista de Investigación educativa, 18(1), 175-199.

GRAY, E. M. y TALL, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 116-140.

GREENO, J. G. (1982). Processes of solving arithmetic word problems. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Nueva York.

GREENO, J. G. (1987). Instructional representations based on research about understanding. En A. H. SCHOENFELD, Cognitive science and mathematics education (61-88). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

GREENO, J. G. (1998). Trajectories of participation and practice: some dynamic aspects of the thinking practices of teaching, educational desing, and research. En J. G. GREENO y S. V. GOLDMAN (Eds.), Thinking Practices in mathematics and science learning (79-88). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

GREENO, J. G. y GOLDMAN, S. V. (Eds.) (1998). Thinking Practices in mathematics and science learning. Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

GREENO, J. G., RILEY, M. S.y GELMAN, R. (1984) Conceptual competence and children's counting. Cognitive Psychology, 16, 94-143.

GREER, B. (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. En J. A. SLODOBA y D. ROGERS (Comps.), Cognitive processes in mathematics (60-80). Nueva York: Oxford University Press.

GROEN, G. J. y PARKMAN, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79 (4), 329-343.

GUEGUEN, A., NAKACHE, J. P. y NICOLAU MOLINA, J. (1993). SPAD-S Segmentación mediante árbol de decisión binario. (Traducción de Aluja, T. y Ibáñez, E.). Saint-Mandé: Centro International de Statistique et d'Informatique Appliquées.

GUZMAN, M. de (1993). Enseñanza de la matemática. En D. GIL. y M. de GUZMAN, Enseñanza de las ciencias y la matemática (93-136). Madrid: Popular.

GUZMÁN, M. de (1998). El papel del matemático en la educación matemática. En C. ALSINA, J. M. ÁLVAREZ, M. NISS, A. PÉREZ, L. RICO y A. SFARD (Eds.), Proceedings of the 8 th International Congress on Mathematical Education, Conferencias Plenarias (47-63). (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

HAYES, J. R. y SIMON, H. A. (1974). Understanding written instructions. En L. W. GREGG (Comp.), Knowledge and cognition. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

HAYES, J. R. y SIMON, H. A. (1977). Psychological differences among problem isomorphs. En N. J. CASTELLAN, D. B. PISONI y G. R. POTTS (Comps.), Cognitive theory, Vol 2. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

HARPER, E. y ROW. (1975). Experimental desing in Psychology research. Nueva York.

HART, L. C. (1993). Some factors that impede or enhance performace in mathematical problem solving. Journal for Research in Mathematics Education, 24 (2), 167-171.

HART, K. (1998). What responsability do researchrs have to Mathematics teachers and children? En C. ALSINA, J. M. ÁLVAREZ, B. HODGSON, C. LABORDE y A. PÉREZ (Eds.), 8 th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures (251-256). (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

HEGARTY, M., MAYER, R. E. y GREEN, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence. From student' eye fixations. Journal of Educational Psychology, 84 (1), 76-84.

HEGARTY, M., MAYER, R. E. y MONK, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems. A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. Journal of Educational Psychology, 87(1), 18-32.

HELLER, J. I. y GREENO, J. G. (1978). Semantic processing of arithmetic word problem solving. Congreso Anual de la Midwertern Psychological Association. Chicago.

HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sitemas de representación en matemáticas. Suma, 16, 82-90.

HIDALGO, S., MAROTO, A. y PALACIOS, A. (1999). Las aptitudes básicas como elemento determinante en el rendimiento de las matemáticas: su influencia en los curriculos de Primaria. Revista de Educación, 300, 271-293.

HIDALGO, S., MAROTO, A. y PALACIOS, A. (1999). Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar de matemáticas. Suma, 30, 37-45.

HIEBERT, J. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal arithmetic problems. Journal for Research in Mathematics Education, 13(5), 341-349.

HIEBERT, J., CARPENTER, T. P. FENNEMA, E., FUSON, K., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., y WEARNE, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. Educational Researcher, 25(4), 12-21.

HIEBERT, J., CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1982). Cognitive development and children's solutions to verbal arithmetic problems. Journal for Research in Mathematics Educations, 13(2), 83-98.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. HIEBERT (Ed.), Conceptual and procedural knowlegde: the case of Mathematics (1-27). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

HOWSON, G., NEBRES, B. y WILSON, B. (1991). Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. Comunicación, Lenguaje y Educación, 11-12, 95-112.

HUDSON, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. Child Development, 54, 84-90.

HUTTENLOCHER, J. y STRAUSS, S. (1968). Comprehension and a statement's relation to the situation it describes. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior.7, 300-304.

HUGHES, M. (1987). Los niños y los números. Barcelona: Planeta.

ICMI, (1986). Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. Valencia: Mestral.

INSTITUTO NACIONAL DE CALIDAD Y EVALUACIÓN (1996). Evaluación de la Educación Primaria. Informa preliminar. Madrid: M.E.C. Secretaría de Estado de Educación.

IRWIN, K. C. (1996). Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part-whole relationships. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 25-40

JERMAN, M. (1974). Problem length as a structural variables in verbal arithmetic problems. Educational Studies in Mathematics, 5, 109-123.

JERMAN, M. y MIRMAN, S. (1974). Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics. Educational Studies in Mathematics, 5, 317-362.

JERMAN, M. y REES, R. (1972). Predicting the relative difficulty of the verbal arithmetics problems. Educational Studies in Mathematics, 4, 306-323.

JONES, G., THORNTON, C. y TOOHEY, M. (1985). A Multi-Option Program for learning basic addition facts: Case studies and a experimental report. Journal of Learning Disabilities, 18, 319-325.

KAMII, C. K. (1985). El niño reinventa la aritmética. Madrid: Visor.

KAMII, C. K. (1992). Reinventando la aritmética II. Madrid: Visor.

KAMII, C. K. y DOMINICK, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. En L. J. MORROW y M. J. KENNEY (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (130-140). Reston: The National Council of teachers of mathematics.

KAPLAN, R. G., YAMAMOTO, T. y GINSBURG, H. P. (1996). La enseñanza de conceptos matemáticos. En L. B. RESNICK y L. KLOPFER (Eds.) (1989). Toward the thinking curriculum: currente cognitive research. Virginia: ASCD (Traducción española: Currículum y cognición (1996). Argentina: Aique).

KARMILOFF-SMITH, A. (1986). From meta-processes to conscious access: Evidence from children's metalinguistic and repair data. Cognition, 23, 95-147.

KILPATRICK, J. (1990). Lo que el constructivismo puede ser para la educación matemática. Educar, 17, 37-52.

KILPATRICK, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. A. GROUWS (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (3-38). Nueva York: Mc Millan. (Traducción en castellano J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA. (1994). Educación matemática e investigación. (15-96). Madrid: Síntesis).

KILPATRICK, J., RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación matemática e investigación. Madrid: Síntesis.

KINTSCH, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: a construction-integration model. Psychological Review, 95, 163-182.

KINTSCH, W. y GREENO, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, 92(1), 109-129.

KINTSCH, W. y Van DIJK, T. A. (1978). Towardas a model of text comprehension and production. Psychological Review, 85, 363-394.

KLIEBART, H. M. (1977). Problems of definition in curriculum. Presentado en la reunión anual de la American Educational Research Association. Nueva York.

KNIGHT, F. y BEHRENS, M. (1928). The learning of the 100 addition combination and the 100 susbtraction combinatiom. Nueva York: Longmans, Green and Co.

KRINNISKT, N. y MIRONOV, G. (1978). Programation et langages simboliques. Paris: Mir.

KRULIK, S. Y RUDNICK, K. (1980). Problem solving in school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. Year Book. Virginia: Reston.

LACASA, P. y HERRANZ, P. (1995). Aprendiendo a aprender: resolver problemas entre iguales. Madrid: C.I.D.E.

LANGFORD, P. E. (1986). Arithmetical word problems: thinking in the head versus thinking on the table. Educational Studies in Mathematics, 17, 193-199.

LAPOINTE, A. E., MEAD, N. A. y PHILLIPS, G. W. (1989). A world of differences: An international assessment of mathematics and science. Princeton, Nueva Jersey: Educational Testing Servuce. (Traducción en castellano. Madrid: C.I.D.E.).

LEAN, G. A., CLEMENTS, M. A. y DEL CAMPO, G. (1990). Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: a comparative. Educational Studies in Mathematics, 21, 165-191.

LeBLANC, J. F., PROUDFIT, L. y PUTT, Y. J. (1980). Teaching problem solving in the elementary school. En S. KRULIK y R. E. REYS (Eds.), Problems solving in school mathematics (104-116). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

LESH, R. Y LANDAU, M. (Eds). (1983). Acquisition of mathematical concepts and processes. Nueva York: Academic Press.

LESH, R. y LANDAU, M. (1983). Introduction. En R. LESH y M. LANDAU (Comps.), Acquisitions of mathematics: Concepts and processes (1-6). Nueva York: Academic Press.

LESTER Jr., F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. J. SHUMWAY (Ed.), Research in mathematics education (286-323). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

LESTER Jr., F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. En R. LESH y M. LANDAU (Comps.), Acquisitions of mathematics: Concepts and processes (229-256). Nueva York: Academic Press.

LESTER Jr., F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. Journal for Research in Mathematics Education, 25(6), 660-675.

LEWIS, A. (1989). Traning students to represent arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 81(4), 521-531.

LEWIS, A. y MAYER, R. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 79(4), 363-371.

LINDVALL, C. M., e IBARRA, C. G. (1980). An analysis of incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. Journal for Research in Mathematics Education, 11, 50-62.

LITTLEFIELD, J. y RIESER, J. J. (1993). Semantic features of similarity and children's strategies for identifying relevant information in mathematical story problems. Cognition and Instruction, 11(2), 133-188.

LOPES, B. y COSTA, N. (1996). Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: fundamentación, presentación e implicaciones educativas. Enseñanza de las Ciencias, 14(1), 45-61.

LORENZO, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. Suma, 21, 11-20.

MANDH, H., DE CORTE, E., BENNET, N. y FRIEDERICH, H. F. (Eds.). Learning and instruction. European research in an international context. analysis of complex skills and complex knowledge domains. Oxford: Pergamon.

MARTÍNEZ, J. (1995). Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa desde el punto de vista de las categorías semánticas en 3º, 4º y 5º de EGB/Primaria. Tesis doctoral. Madrid: UNED.

MARTÍNEZ, J. (1999). Los problemas aritméticos elementales en los libros de texto y en los cuadernos de trabajo de los alumnos. Lo que va de la EGB a la Primaria. Tavira, 15, 27-69.

MARTÍNEZ, R. (1999). El análisis multivariante en la investigación científica. Cuadernos de Estadística. Madrid: La Muralla. Hespérides.

MARTÍNEZ, J. y AGUILAR, M. (1996). La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a los de cambio y comparación. Suma, 21, 35-39.

MARTÍNEZ; J. G. R. y MARTÍNEZ, N. C. (1998). In defense of Mathematics reform and the NCTM's Standards. The Mathematics Teacher, 91(9), 746-748.

MAYER, R. E. (1982). Memory for algebra story problems. Journal of Educational Psychology, 74(2), 199-216.

MAYER, R. E. (1983). Thinking, problem solving and cognition. Nueva York: Freeman and Company. (Traducción castellano: Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidós, 1986).

MAYER, R. E. (1985). Mathematical Ability. En R. J. STERNBERG (Ed.), Human abilities (127-150). Nueva York: W. H. Freedman y Co. (Traducción castellana (1986): Capacidad matemática. Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información (165-194). Barcelona: Labor).

MAYER, R. E. (1986). Mathematics. En R. F. DILLON y R. J. STERNBERG (Eds.), Cognition and Instruction. Nueva York: Academic Press.

MAYER, R. E. (1989). Introduction to special section on cognition and instruction. Journal of Educational Psychology, 81, 452-456.

MAZA, C. (1989). Sumar y restar. Madrid: Visor.

MAZA, C. (1995). Aritmética y representación. De la comprensión del texto al uso de los materiales. Barcelona: Paidós.

McCLAIN, K, COBB, P. y BOWERS, J. (1998). A contextual investigation of three-digit addition and sustraction. En L. J. MORROW y M. J. KENNEY (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (140-150). Reston: The National Council of teachers of mathematics.

McLEOD, D. B. (1989). The role of affect in mathematical problem solving. En D. B. McLEOD y V. M. ADAMS (Eds.), Affect and Mathrmatical problem solving: A new perspective (20-36). Nueva York: Springer-Verlag.

McLEOD, D. B. (1980). Information-processing theories and mathematics learning: the role of affect. International Journal of Educational Research, 14, (13-29).

McLEOD, D. B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: News views of affect in Mathematics Educations. En D. B. McLEOD, D. B. y V. M. ADAMS (Eds.), Affect and Mathematical problem solving: A new perspective. Nueva York: Springer-Verlag.

McLEOD, D. B. y ADAMS, V. M. (1989). Affect and Mathematical problem solving: A new perspective. Nueva York: Springer-Verlag.

McNEAL, B. (1995). Learning not to think in a textbook-based mathematics class. Journal of mathematics behavior, 14(2), 205-234.

M.E.C. (1985). La enseñanza de las matemáticas a debate. Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.

MEIER, S. T. (1993). Revitalizing the measurement curriculum. American Psychologist, 48(8), 886-891.

MIALARET, G. (1967). L'aprentissage des mathématiques. Bruselas: Charles Dessart. (Edición española: Madrid: Pablo del Rio, 1977).

MOLINER, M. (1986). Diccionario de uso del español. Tomo I y II. Madrid: Gredos.

MORALES, R., SHUTE, V. y PELLEGRINO, J. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. Cognition and Instruction, 2(1), 41-57.

MORGAN, J. N. y MESSENGER, R. C. (1973). THAID: a sequential search program for the analysis of nominal scale dependent variables. Institute for Social Research. Universidad de Michigan.

MORGAN, J. N. y SONQUIST, J. A. (1963). Problems in the analysis of survey data and a proposal. J. Amer Statist., Vol. 58, 415-535.

MORROW, L. J. y KENNEY, M. J. (Eds.) (1998). The teaching and learning of algorithms in school mathematics. Reston: The National Council of teachers of mathematics.

MOSER, J. M. (1982). He emergence of algorithmic problem solving behavior. Recherches en Didactique des Mathematiques, 3(1), 135-156.

MUNN, P. y STEPHEN, C. (1993). Children's understanding of number words. British Journal of Educational Psycology, 63(3), 521-527.

MUTHUKRISHMA, N. y BORKOWSKI, J. G. (1995). How oearning context facilitate strategy transfer. Applied cognitive psycology, 9(5), 425-446.

NATHAN, M. J., KINTSCH, W. y YOUNG, E. (1992). A theory of algebra word problem comprehension and its implications for the desing of learning environments. Cognition and Instruction, 9(4), 329-390.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. P., CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (25-38). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

NESHER, P. (1998). School stereotype word problems and the open nature of applications. En C. ALSINA, J. M. ÁLVAREZ, B. HODGSON, C. LABORDE y A. PÉREZ (Eds.), 8 th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures (335-343). (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

NESHER, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. Suma, 31, 19-26.

NESHER, P.y GREENO, J. G. (1982). Semantic categories of word-problems reconsidered. The 5th Conference of the I.G.P.M.E. Grenoble, 63-68.

NESHER, P., GREENO, J. G. y RILEY, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and sustraction. Educational Studies in Mathematics, 13, 373-394.

NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. Educational Studies in Mathematics, 26, 1-23.

NESHER, P. y KATRIEL, T. (1978). A semantic analysis of addition and sustraction word problems in arithmetic. Educational Studies in Mathematics, 8, 251-269.

NESHER, P. y TEUBAL, E. (1974). Verbal cuestion as an interfering factor verbal problem solving. Educational Studies in Mathematics, 6, 41-51.

NEUMAN, D. (1996). ¿Existen problemas específicos en los primeros cursos de la escuela? Uno, 9, 49-57.

NEWELL, A. y SIMON, H. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall.

NICKERSON, R. S., PERKINS, D. N. y SMITH, E. E. (1985). The teaching of thinking. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

NISS, M. (1996). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? En L. PUIG y J. CALDERON (Comps.), Investigación y didáctica de las matemáticas (19-30). Madrid: C.I.D.E.

NORTES, A. (1991). El lenguaje en matemáticas. Epsilón, 20, 41-44.

NORTES, A. (1992). Resolución de problemas. Bordón, 44(2), 213-216.

NORTES, A. (1993). Un modelo de evaluación diagnóstica en matemáticas. Murcia: Secretaría de Publicaciones. Universidad de Murcia.

OHLSON, S. (1992). Information-processing explantions of insight and related phenomena. En M. T. KEANE y K. J. GILHOOLY (Eds.), Advances in the psychology of thinking, Vol. 1 (1-44). Nueva York: Harvester/Wheatsheaf.

ORRANTÍA, J., MORÁN, M. C., GRACIA, A. D. y GONZÁLEZ, L. (1993). La resolución de problemas de matemáticas en el Primer Ciclo de Educación Primaria. Madrid: C.I.D.E. Memoria de Investigación.

ORRANTÍA, J., MORÁN, M. C., GRACIA, A. D. y GONZÁLEZ, L. (1995). ¡Tenemos un problema¡ propuesta de un programa para enseñar a resolver problemas de matemáticas. Comunicación, Lenguaje y Educación, 28(5), 15-28.

ORRANTÍA, J., MORÁN, M. C. y GRACIA, A.D. (1997). Evaluación y Zona de Desarrollo Próximo: una aplicación a contenidos procedimentales. Cultura y Educación, 6/7, 39-56.

ORTON, A. (1990). Didáctica de las Matemáticas. Madrid: MEC-Morata.

PETERSON, P. L., CARPENTER, T. P. y FENNEMA, E. (1989). Teachers' knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: correlational and case analyses. Journal of Educational Psychology, 81(4), 558-569.

POLYA, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. Princeton Nueva Jersey: Princeton University Press. 2 Vols. (Traducción castellanaa: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos, 1966).

POLYA, G. (1957). How to solve it, (2ª de.). Princeton Nueva Jersey: Princeton University Press. (Traducción castellana, Cómo plantear y resolver problemas. México, D. F: Trillas, 1965).

POSTIGO, Y., PÉREZ ECHEVARRÍA, M. P. y SANZ, A. (1999). Un estudio acerca de las diferencias de género en la resolución de problemas científicos. Enseñanza de las Ciencias, 17(2), 247-258.

POZO, J. I. y PÉREZ ECHEVARRÍA, M. P. (1995). La solución de problemas en la enseñanza: aportaciones de los trabajos sobre expertos y novatos. En M. RODRIGUEZ MONEO, El papel de la psicología del aprendizaje en la formación inicial del profesorado (109-143). Cuadernos del I.C.E., 12. Madrid: Universidad Autónoma.

PRIETO, M. D. (1993). La enseñanza de las matemáticas como resolución de problemas. En J. BELTRÁN, V. BERMEJO, M. D. PRIETO y D. VENCE (Eds.), Intervención Psicopedagógica (186-208). Madrid: Pirámide.

PUENTE, A. (1993). Modelos mentales y habilidades en la solución de problemas aritméticos verbales. Revista de Psicología General y Aplicada, 46(2), 149-160.

PUIG, L. y CALDERÓN, J. (1996). Investigación y didáctica de la matemáticas. Madrid: C.I.D.E.

PUIG, L. y CERDÁN, F (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.

PUTNAM, R. T., deBETTENCOURT, L. U. y LEINHARDT, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and substraction. Cognition and Instruction, 7(3), 245-285.

RABINOWITZ, M. y WOOLLEY, K. E. (1995). Much ado about nothing: The relation among computational skill, arithmetic word problem comprehension, and limited attentional resources. Cognition and Instruction, 13(1), 51-71.

RATHMELL, E. C. (1986). Helping childre learn to solve story problems. En A. ZOLLMAN, W. SPEER y J. MEYER (Eds.), The fifth mathematics methods conference papers (101-109). Bowing Green, OH: Bowling Green State University.

REED, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 13(1), 124-139.

RESNICK, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. En T. P., CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (136-155). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

RESNICK, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. GINSBURG (Comp.), The development of mathematical thinking (109-151). Nueva York: Academic Press.

RESNICK, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. American Psycologist, 44(2), 162-169.

RESNICK, L. B., BILL, V. y LESGOLD, S. (1995). Developing thinking abilities in arithmetic class. En A. DEMETRIOU, M. SHAYER y A. EFKLIDES (Eds.), Neo-piagetian theories of cognitive development: implcations and applications for education. Londres: Routledge y Kegan Paul.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W.(1981). The psychology of mathematical thinking. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Assiciates.

(Traducción en español. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. (1990). Madrid: Paidós-MEC.

RESNICK, L. B. y KLOPFER, L. (Eds.) (1989). Toward the thinking curriculum: currente cognitive research. Virginia: ASCD (Traducción española: Currículum y cognición (1996). Argentina: Aique).

RESNICK, L. B. y KLOPFER, L. (1996). Hacia un currículum para desarrollar el pensamiento: una visión general En L. B. RESNICK y L. KLOPFER (Eds.) (1989). Toward the thinking curriculum: currente cognitive research. Virginia: ASCD (Traducción española: Currículum y cognición (1996). Argentina: Aique).

RESNICK, L. B. y OMANSON, S. F.(1987). Learning to understand arithmetic. En R. GLASER (Ed.), Advances in instructional psychology (41-95). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1984). Historia de la Matemática. De la Antigüedad a la Baja Edad Media. Vol. 1. Madrid: Gedisa.

RICO, L. (1997). Reflexiones sobre los fines de la educación matemática. Suma, 24, 5-19.

RICO, L. (1998). Programas de doctorado e investigación académica: Educación matemática en la Universidad española. En C. ALSINA, J. M. ÁLVAREZ, B. HODGSON, C. LABORDE y A. PÉREZ (Eds.), 8 th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures (369-380). (Sevilla 14-21 de Julio 1996). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación Matemática en la España del siglo XX. En J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA, Educación matemática e investigación (101-207). Madrid: Síntesis.

RILEY, M. S. (1979). The development of children's ability to solve arithmetic word problems. Paper presented at Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, California.

RILEY, M. S. y GREENO, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. Cognition and Instruction, 5(1), 49-101.

RILEY, M. S., GREENO, J. G. y HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. GINSBURG (Comp.), The development of mathematical thinking (153-196). Nueva York: Academic Press.

RITTLE-JOHNSON, B. y SIEGLER, R. S. (1998). The relationship between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. En C. DONLAN (Eds.), The development of mathematical skills (75-110). East Sussex: Psychology Press Ltd., Publishers.

RIVIERE, A. (1987). El sujeto de la Psicología Cognitiva. Madrid: Alianza.

RIVIERE, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En A MARCHESI, C. COLL y J. PALACIOS (Comps.), Desarrollo psicológico y educación. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar. V. III. 2 (155-182). Madrid: Alianza Editorial.

RODRIGO, M. J. y ARNAY, J. (1997). Enseñar a aprender en la escuela. Ecos de un debate constructivista. Infancia y Aprendizaje, 79, 47-88.

ROJANO, T (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las ciencias, 12(1), 45-56.

ROMBERG, T. A. (1982). An emerging paradigm for research on addition and subtraction skills. En T. P., CARPENTER, J. M MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (1-7). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

ROMBERG, T. A. (1991). Características problemáticas del curriculum escolar en Matemáticas. Revista de Educación, 294, 323-406.

ROMBERG, T. A. y CARPENTER, T. P. (1986). Research on teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry. En W. WITTROCK (Comp.), Handbook of Research on teaching (850-873). Nueva York: Mc. Millan,

ROMBERG, T. A. y COLLIS, K. F. (1985). Cognitive functioning and performance on addition and subtraction word problem. Journal for Research in Mathematics Educations, 16(5), 375-382.

ROMBERG, T. A., HARVEY, J. G., MOSER, J. y MONTGOMERY, M. (1974). Developing mathematical processes. Chicago: Rand-McNally.

RUDNITSKY, A., ETHEREDGE, S., FREEMAN, S. J. y GILBERT, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. Journal for Research in Mathematics Education, 26(5), 467-486.

SAS/STAT. (1994). User's guide. Volumen 1 y 2. SAS Institute Inc.

SCHAAF, W. L. (1966). What is Comtemporary Mathematics? Stanford, CA: School Mathematics Study Group.

SCHIFTER, D. E. (1993). Mathematics process as mathematics content: A course for teachers. Journal of Mathematical Behavior, 12(3), 271-283.

SCHIFTER, D. E. (1996). A constructivist perspective on teaching and learning mathematics. En C. FOSNOT (Ed.), Constructivism: Theory, perspectives and practice (73-91). Nueva York: Teachers College Press.

SCHIFTER, D. E. y SIMON, M. A. (1992). Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning. Teaching and Teacher Education, 8(2), 187-197.

SCHIFTER, D. E. y O'BRIEN, D. C. (1997). Interpreting the standarsds: Translating principles into practice. Teaching Children Mathematics, 4, 202-205.

SCHOENFELD, A. H. (1985a). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En M.E.C. La enseñanza de la matemática a debate (25-30). Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.

SCHOENFELD, A. H. (1985b). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas. Matemáticos. En M.E.C. La enseñanza de la matemática a debate (31-65). Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.

SCHOENFELD, A. H. (1985c). Mathematical problems solving. Orlando: Academic Press.

SCHOENFELD, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. SCHOENFELD, Cognitive science and mathematics education (189-215). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SCHOENFELD, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of "welltaught" mathematics courses. Educational Psychilogist, 23, 145-166.

SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. GROUWS (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (334-370). Nueva York: Mc Millan.

SCHOENFELD, A. H. (1996). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. B. RESNICK y L. KLOPFER (Eds.) (1989). Toward the thinking curriculum: currente cognitive research. Virginia: ASCD (Traducción española: Currículum y cognición (1996). Argentina: Aique).

SECADA, W. G., FUSON, K. C. y HALL, J. W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. Journal for Research in Mathematics Educations, 14(1), 47-57.

SERRANO, J. M. y DENIA, A. M. (1987). Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. Infancia y Aprendizaje, 39-40, 57-69.

SIEGLER, R. S. (1983a). Information processing approaches to development. En P. H. MUSSEN (Ed.), Handbood of child psychology. Nueva York: John Wiley y Sons.

SIEGLER, R. S. (1983b). Five generalizations about cognitive development. American Psychologist, 38, 263-277. (Trad. castellano: Cinco generalizaciones sobre el desarrollo cognitivo. En M. CARRETERO y J. A. GARCÍA MADRUGA (Eds.), Lecturas de psicología del pensamiento (393-415). Madrid: Alianza Editorial, 1984).

SIEGLER, R. S. (1987a). Strategy choices in subtraction. En J. A. SLODOBA y D. ROGERS (Comps.), Cognitive processes in mathematics (81-106). Nueva York: Oxford University Press.

SIEGLER, R. S. (1987b). The perils of averaging data over strategies: an example from childrens addition. Journal of Experimental Psychology: General, 116(3), 250-264.

SIEGLER, R. S. (1988). Individual differences in strategy choices: good students, not-so-good studens, and perfectionists. Child Development, 59, 833-851.

SIEGLER, R. S. (1989). How children discover new strategies. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SIEGLER, R. S. (1991/1986). Children's thinking. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall/Simon y Schuster.

SIEGLER, R. S. y ROBINSON, M. (1982). The development of numerical understandings. En H. REESE y L. LIPSITT (Eds.), Advances in child development and behavior Vol 16, (241-311). Nueva York: Academic Press.

SIEGLER, R. S. y SHRAGER, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? En C. SOPHIAN (Comp), Origins of cognitive skills (229-293). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SILVER, E. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: a focus on relationships. En J. HIEBERT (Comp.), Conceptual and procedural knowlegde: the case of Mathematics (181-198). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SILVER, E. A. y THOMPSON, A. G. (1984). Research perspective on problem solving in elementary school mathematics. Elementary School Journal, 84, (529-545).

SIMON, H. A. (1978). Information processing theory of human problem solving (Tra. cast en M. CARRETERO y J. A. GARCÍA MADRUGA (Eds.), Lecturas de psicología del pensamiento (197-219). Madrid: Alianza Editorial, 1984.). En W. K. ESTES (Eds.), Handbook of learning and cognitive processes. Human Information Processing Vol. 5. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SIMON, M. A. (1995a). Elaborating models of mathematics teaching: A response to Steffe and D'Ambrosio. Journal for Research in Mathematics Educations, 26(2), 160-162.

SIMON, M. A. (1995b). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivit perspective. Journal for Research in Mathematics Educations, 26(2), 114-145.

SIMON, M. A. y SCHIFTER, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. Educational Studies in Mathematics, 22, 309-331.

SMITH; B. O. (1987). Definitions of teaching. En H. E. MITZEL (Ed.) The International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education Nueva York: Pergamon Press.

SOLOWAY, E., LOCHHEAD, J. y CLEMENT, J. (1982). Does computer programmnig enhance problem solving ability? Some positive evidence on algebra word problems. En R. J. SEIDEL, R. E. ANDERSON y B. HUNTER (Eds.) Computer Literacy. Nueva York: Academic Press.

SOPHIAN, C, y McCORGRAY, P. (1994). Part-Whole knownledge and early arithmetic problem solving. Cognitión and Instruction, 12(1), 3-33.

SOPHIAN, C., HARLEY, H., y MANOS MARTIN, C. S. (1995). Relational and representational aspects of early number development. Cognition and instruction, 13(2), 253-268.

SOPHIAN, C. y VONG, K. I. (1995). The parts and whole of arithmetic stiry problems: Developing knowledge in the preschool years. Cognition and Instruction, 13(3), 469-477.

SORIANO, E. (1996). Enseñar a pensar al alumnado del Primer Ciclo de Primaria a través de la matemática. Suma, 23, 7-20.

STANIC, G. y KILPATRICK, J (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. CHARLES y E. SILVER (Eds.), Research Agenda in Mathematics Education: The teaching and assessing of mathematical problem solving (1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

STARKEY, P. Y GELMAN, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. P. CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (99-116). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

STEFFE, L. P., y GALE, J. (1995). Constructivism in education. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

STEFFE, L. P., von GLASERSFELD, E., RICHARDS, J. y COBB, P. (1983). Children s counting types: Philosophy, theory and application. Nueva York: Praeger Publishers.

STEFFE, L. P., THOMPSON, P. W. y RICHARDS, J. (1982). Children's counting in arithmetical problem solving. En T. P. CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (83-97). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

STEINBERG, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. Journal for Researh in Mathematics Education, 16(5), 337-355.

STERN, E. (1989). The role of arithmetic in solving problems. Informa presentado a la Tercera Conferencia de la Asociación de Enseñanza e Instrucción. Madrid.

STERN, E. (1992). Warum werden Kapitänausgaben gelöst? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. Der Mathematikunterricht, 4, 7-29.

STERN, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparision of sets so difficult for children? Journal of Educational Psychology, 85(1), 7-23.

STERN, E. y LEHRNDORFER, A. (1992). The role of situatinal contex in solving word problems. Cognitive Development, 7, 259-268.

STERNBERG, R. J. (1986). Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información. Barcelona: Labor.

SUPPES, P. y GROEN (1967). Some counting models for first grade performance data on simple facts. En J. M. SCANDURA (Ed.) Research in mathematics education (35-43). Washington, Columbia: National Council of Teachers of Mathematics.

SUPPES, P., LOFTUS, E. y JERMAN, M. (1969). Problem solving on a computer-based teletype. Educational Studies in Mathematics, 2, 1-15.

THOMPSON, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. Educational Studies in Mathematics, 25, 165-208.

THOMPSON, P. W. (1994). Young children's idiosyncratic written algorithms addition. Educational Studies in Mathematics, 26, 323-345.

THORNDIKE, E. L. y WOODWORT R. S. (1901). The influence of improvement in one mental function on the efficiency of other mental functions. Psycological Review, 8, 247-261.

THORNTON, C. A. (1990). Solution strategies: subtraction number facts. Educational Studies in Mathematics, 21, 241-263.

TOMAS FOLCH, M. (1990). Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. Educar, 17, 119-140.

VAN DIJK, T.A. (1980). Macroestructures. Hilldsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

VAN DIJK, T. A. y KINTSCH, W. (1983). Strategies of discourse comprehension. Nueva York: Academic Press.

VANLEHN, K. (1983). On the representation of procedures in repair theory. En H. P. GINSBURG (Comp.), The development of mathematical thinking (197-252). Nueva York: Academic Press.

VANLEHN, K. (1986). Arithmetic procedures are induced from examples. En J. HIEBERT (Ed.), Conceptual and procedural knowlegde: the case of Mathematics (133-179). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

VEGA, M. de (1984). Introducción a la Psicología Cognitiva. Madrid: Alianza (7ª edición 1994).

VERNAUG, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la realité. Berna: Peter Lang. (Versión en español: El niño, las matemáticas y la realidad (1991). Mejico: Trillas).

VERNAUG, G. (1982). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P., CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (39-59). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

VERSCHAFFEL, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's represations and solutions of compare problems. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 141-165.

VERSCHAFFEL, L. y DE CORTE, E. (1993). Do non-smantic factors also influence the solution process of adittion and subtraction word problems?. En H. MANDH, E. DE CORTE, N. BENNET y H. F.FRIEDERICH (Eds.). Learning and instruction. European research in an international context. analysis of complex skills and complex knowledge domains. Oxford: Pergamon.

VERSCHAFFEL, L. y DE CORTE, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theorical, methodological, and practical outcomes. Educational Psycology Review, 5(3), 239-256.

VERSCHAFFEL, L. y DE CORTE, E. (1997).Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the Primary school? En T. NUNES y P. BRYANT (Eds.). Learning and teaching mathematics (69-97). Hove UK: Teachers College Press.

VERSCHAFFEL, L. y DE CORTE, E. y LASURE, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelin of school arithmetic word problems. Learning and Instruction, 4(4), 273-294.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E. y PAUWELS, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. Journal of Educational Psychology, 84(1), 85-94.

VON GLASERSFELD, E. (1996). Introduction: aspects of constructivism. En C. FOSNOT (Ed.). Constructivism: Theory, perspectives and practice (3-7). Nueva York: Teachers College Press.

WEAVER, J. F. (1971). Some factors associated with pupil's performance levels on simple open addition and subtraction sentences. Arithmetic Teacher, 18, 513-519.

WEAVER, J. F. (1982). Interpretations of number operations and symbolic representations of addition and sustraction. En T. P., CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (Comps.), Addition and subtraction: a congnitive perstective (60-66). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

WILLIS, G. B. y FUSON, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. Journal of Educational Psychology, 80(2), 192-201.

WOODS, S. S., RESNICK, L. B. y GROEN, G. J. (1975). An experimental test of five process models for subtraction. Journal of Educational Psychology, 67(1), 17-21.

WOLTERS, M. A. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. Educational Studies in Mathematics, 14, 127-138.

YACKEL, E. y COOB, P. (1996). Sociomathematicl norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 458-477.

YOUNG, R. M. y O'SHEA, T. (1981). Errors in children's subtraction. Cognitive Science, 5(2), 153-177.

ZEICHNER, K. (1995). Beyond the divide of teacher research and academic research. Teachers and teaching: Theory and practice, 1(2), 153-172.

ANEXO 1

PROTOCOLO DE PRUEBAS: PRIMERA SESIÓN

Nombre ______________________________ Fecha nacimiento ____________
Colegio _________________ Curso _________ Fecha prueba ____________
Hora inicio __________________ Hora Terminación _____________________

Problema	Lectura/Preguntas	Manipulación	Verbalización
3.2. Cambio	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
5.1. Compar.	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
5.1. Cambio	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
1.2. Compar.	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________		

	Dime cómo lo haces		
Problema	**Lectura/Preguntas**	**Manipulación**	**Verbalización**
1.2. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
1.2. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
3.2. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
3.2. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
5.1. Combin.	Lee el examinador:		

	______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		

<u>PROTOCOLO DE PRUEBAS: SEGUNDA SESIÓN</u>

Nombre ______________________________ Fecha nacimiento ____________
Colegio _________________ Curso _________ Fecha prueba ____________
Hora inicio ___________________ Hora Terminación _____________________

Problema	**Lectura/Preguntas**	**Manipulación**	**Verbalización**
4.2. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
3.1. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
3.1. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo		

	haces		
1.1. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
Problema	**Lectura/Preguntas**	**Manipulación**	**Verbalización**
1.1. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
4.2. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
4.2. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
1.1. Cambio	Lee el examinador: ______________		

	Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
3.1. Combin.	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		

PROTOCOLO DE PRUEBAS: TERCERA SESIÓN

Nombre ______________________________ Fecha nacimiento ____________
Colegio _________________ Curso _________ Fecha prueba ____________
Hora inicio ___________________ Hora Terminación _____________________

Problema	Lectura/Preguntas	Manipulación	Verbalización
4.1. Combin.	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
2.2. Cambio	Lee el examinador: _____________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		

6.1. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
6.1.Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		

Problema	**Lectura/Preguntas**	**Manipulación**	**Verbalización**
2.2. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
4.1. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
6.1. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño:		

	_________________ Dime cómo lo haces		
4.1. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		
2.2. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		

PROTOCOLO DE PRUEBAS: CUARTA SESIÓN

Nombre ______________________________ Fecha nacimiento ____________
Colegio _________________ Curso _________ Fecha prueba ____________
Hora inicio ___________________ Hora Terminación _____________________

Problema	Lectura/Preguntas	Manipulación	Verbalización
2.1. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: _________________ Dime cómo lo haces		

5.2. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		
2.1. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		
2.1. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		
Problema	**Lectura/Preguntas**	**Manipulación**	**Verbalización**
6.2. Combin.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		
6.2. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________		

	Dime cómo lo haces		
6.2. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		
5.2. Cambio	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		
5.2. Compar.	Lee el examinador: ______________ Lee el niño: __________________ Dime cómo lo haces		

ANEXO 2

ANALYSIS OF VARIANCE. FASE PRIMERA

	R	Respuesta
by	CURSO	
	OP	Operación
	IN	Incógnita
	TIPO	Tipo
	SEXO	

Source of Variation	Sum of Squares	DF	Mean Square	F	Sig of F
Main Effects	409.682	9	45.520	112.676	.00
CURSO	218.455	3	72.818	180.246	.00
OP	.047	1	.047	.116	.733
IN	50.223	2	25.112	62.159	.00
TIPO	135.126	2	67.563	167.238	.00
SEXO	3.802	1	3.802	9.412	.002
2-Way Interactions	86.717	31	2.797	6.924	.000
CURSO OP	.140	3	.047	.115	.951
CURSO IN	9.737	6	1.623	4.017	.001
CURSO TIPO	35.373	6	5.895	14.593	.00
CURSO SEXO	4.544	3	1.515	3.749	.011
OP IN	.774	2	.387	.958	.384
OP TIPO	.219	2	.109	.271	.763
OP SEXO	.006	1	.006	.014	.907
IN TIPO	35.197	4	8.799	21.781	.00
IN SEXO	.447	2	.223	.553	.575
TIPO SEXO	.111	2	.055	.137	.872
3-Way Interactions	48.871	51	.958	2.372	.000
CURSO OP IN	8.071	6	1.345	3.330	.003
CURSO OP TIPO	1.390	6	.232	.573	.752
CURSO OP SEXO	.162	3	.054	.134	.940
CURSO IN TIPO	26.129	12	2.177	5.390	.000
CURSO IN SEXO	1.273	6	.212	.525	.790
CURSO TIPO SEXO	2.659	6	.443	1.097	.362
OP IN TIPO	8.090	4	2.023	5.006	.001
OP IN SEXO	.997	2	.499	1.234	.291
OP TIPO SEXO	.006	2	.003	.007	.993
IN TIPO SEXO	.119	4	.030	.074	.990
4-Way Interactions	17.904	40	.448	1.108	.298
CURSO OP IN TIPO	8.615	12	.718	1.777	.047
CURSO OP IN SEXO	4.335	6	.722	1.788	.098
CURSO OP TIPO SEXO	1.097	6	.183	.453	.843
CURSO IN TIPO SEXO	3.030	12	.252	.625	.823
OP IN TIPO SEXO	.881	4	.220	.545	.703
5-Way Interactions	4.400	12	.367	.908	.539
CURSO OP IN TIPO SEXO	4.400	12	.367	.908	.539
Explained	567.574	143	3.969	9825	.000
Residual	639.925	1584	.404		
Total	1207.499	1727	.699		

1728 cases were processed
0 cases (.0 pct) were missing

ANEXO 2

ANALYSIS OF VARIANCE. FASE SEGUNDA. PROBLEMAS DE CAMBIO

	R	respuesta
BY	CURSO	
	OP	operación
	IN	incógnita

Source of Variation	**Sum of Squares**	**DF**	**Mean Square**	**F**	**Signif of F**
Main Effects	75.680	5	15.136	48.629	.000
CURSO	32.529	3	10.843	34.836	.000
OP	1.148	1	1.148	3.690	.056
IN	42.003	1	42.003	134.946	.000
2-way Interactions	19.018	7	2.717	8.729	.000
CURSO OP	1.529	3	.510	1.637	.180
CURSO IN	17.049	3	5.683	18.259	.000
OP IN	.440	1	.440	1.414	.235
3-way Interactions	.445	3	.148	.477	.699
CURSO OP IN	.445	3	.148	.477	.699
Explained	95.143	15	6.343	20.378	.000
Residual	114.542	368	.311		
Total	209.685	383	.547		

384 Cases were processed.
0 Cases (.0 PCT) were missing.

ANEXO 2

ANALYSIS OF VARIANCE. FASE SEGUNDA. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

	R	respuesta
BY	CURSO	
	OP	operación
	IN	incógnita

Source of Variation	Sum of Squares	DF	Mean Square	F	Signif of F
Main Effects	102.052	5	20.410	38.934	.000
CURSO	90.917	3	30.306	57.810	.000
OP	1.760	1	1.760	3.358	.068
IN	9.375	1	9.375	17.883	.000
2-way Interactions	13.375	7	1.911	3.645	.001
CURSO OP	10.115	3	3.372	6.431	.000
CURSO IN	.917	3	.306	.583	.627
OP IN	2.344	1	2.344	4.471	.035
3-way Interactions	.615	3	.205	.391	.760
CURSO OP IN	.615	3	.205	.391	.760
Explained	116.042	15	7.736	14.757	.000
Residual	192.917	368	.524		
Total	308.958	383	.807		

384 Cases were processed.
0 Cases (.0 PCT) were missing.

ANEXO 2

ANALYSIS OF VARIANCE. FASE TERCERA

	R	Respuesta
BY	CURSO	
	OP	Operación
	TIPO	Tipo

Source of Variation	Sum of Squares	DF	Mean Square	F	Sig of F
Main Effects	410.560	8	51.320	125.773	.000
CURSO	220.483	3	73.494	180.118	.000
OP	54.951	3	18.317	44.891	.000
TIPO	135.126	2	67.563	165.581	.000
2-way Interactions	91.187	21	4.342	10.642	.000
CURSO OP	26.454	9	2.939	7.204	.000
CURSO TIPO	35.466	6	5.911	14.487	.000
OP TIPO	29.266	6	4.878	11.954	.000
3-way Interactions	20.252	18	1.125	2.757	.000
CURSO OP TIPO	20.252	18	1.125	2.757	.000
Explained	521.999	47	11.106	27.219	.000
Residual	685.500	1680	.408		
Total	1207.499	1727	.699		

1728 Cases were processed.
0 Cases (.0 PCT) were missing.

ANEXO 2

FASE PRIMERA

TABLA 13.1.2.1.

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

Efectos Simples

Del Factor B		
para el nivel A_0 ⟶	F = .0125	p < .9112
para el nivel A_1 ⟶	F = .1159	p < .7337
para el nivel A_2 ⟶	F = .0635	p < .8012
para el nivel A_3 ⟶	F = .2326	p < .6299
para el nivel C_1 ⟶	F = .0286	p < .8658
para el nivel C_2 ⟶	F = .9921	p < .3197
para el nivel C_3 ⟶	F = .1446	p < .7039
Del Factor C		
para el nivel A_0 ⟶	F = 26.4552	p < .0000
para el nivel A_1 ⟶	F = 4.9800	p < .0073
para el nivel A_2 ⟶	F = 9.7274	p < .0001
para el nivel A_3 ⟶	F = 15.0814	p < .0000
para el nivel B_1 ⟶	F = 19.0404	p < .0000
para el nivel B_2 ⟶	F = 18.9270	p < .0000
Del Factor A		
para el nivel B_1 ⟶	F = 63.9345	p < .0000
para el nivel B_2 ⟶	F = 64.2483	p < .0000
para el nivel C_1 ⟶	F = 29.8585	p < .0000
para el nivel C_2 ⟶	F = 52.3801	p < .0000
para el nivel C_3 ⟶	F = 56.6783	p < .0000

TABLA 13.1.2.2

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

Niveles del factor Operación en el factor Curso

F B comp. en A_0A_1 =	F = .0924	p < .7612
F B comp. en A_0A_2 =	F = .0061	p < .9376
F B comp. en A_0A_3 =	F = .0760	p < .7829
F B comp. en A_1A_2 =	F = .0071	p < .9328
F B comp. en A_1A_3 =	F = .2608	p < .6097
F B comp. en A_2A_3 =	F = .0026	p < .9597

TABLA 13.1.2.3.

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

Niveles del factor curso en el factor operación

F A_0A_1 comp. en B	=	F = 85.3777	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B	=	F = 121.8481	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B	=	F = 438.3555	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B	=	F = 1.8234	p < .1773
F A_1A_3 comp. en B	=	F = 96.8116	p < .0000
F A_2A_3 comp. en B	=	F = 79.5828	p < .0000
F A_0A_1 comp. en B_1	=	F = 42.6751	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B_1	=	F = 56.4618	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_1	=	F = 215.8265	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_1	=	F = .4306	p < .5120
F A_1A_3 comp. en B_1	=	F = 48.4343	p < .0000
F A_2A_3 comp. en B_1	=	F = 45.2845	p < .0000
F A_0A_1 comp. en B_2	=	F = 42.5378	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B_2	=	F = 65.4295	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_2	=	F = 221.7645	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_2	=	F = 1.5650	p < .2116
F A_1A_3 comp. en B_2	=	F = 48.1909	p < .0000
F A_2A_3 comp. en B2	=	F = 34.6495	p < .0000

TABLA 13.1.2.4.

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

F B comp.x comp $C_1C_2A_0A_1$	F = 1.6544	p < .1989
F B comp.x comp $C_1C_2A_0A_2$	F = .4020	p < .5263
F B comp.x comp $C_1C_2A_0A_3$	F = .0026	p < .9597
F B comp.x comp $C_1C_2A_1A_2$	F = .9389	p < .3330
F B comp.x comp $C_1C_2A_1A_3$	F = .0607	p < .8054
F B comp.x comp $C_1C_2A_2A_3$	F = .4513	p < .5020
F B comp.x comp $C_1C_3A_0A_1$	F = .2099	p < .6470
F B comp.x comp $C_1C_3A_0A_2$	F = .4501	p < .5026
F B comp.x comp $C_1C_3A_0A_3$	F = .6677	p < .4142
F B comp.x comp $C_1C_3A_1A_2$	F = 2.1234	p < .1456
F B comp.x comp $C_1C_3A_1A_3$	F = .0283	p < .8665
F B comp.x comp $C_1C_3A_2A_3$	F = .0040	p < .9497
F B comp.x comp $C_2C_3A_0A_1$	F = .0022	p < .9624
F B comp.x comp $C_2C_3A_0A_2$	F = .0209	p < .8850
F B comp.x comp $C_2C_3A_0A_3$	F = .0089	p < .9249
F B comp.x comp $C_2C_3A_1A_2$	F = .4882	p < .4850
F B comp.x comp $C_2C_3A_1A_3$	F = .6602	p < .4168
F B comp.x comp $C_2C_3A_2A_3$	F = .5552	p < .4565

TABLA 13.1.2.5.

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita ©

F B comp.x comp $C_1A_0A_1$	F = .3818	$p < .5371$
F B comp.x comp $C_1A_0A_2$	F = .0054	$p < .9417$
F B comp.x comp $C_1A_0A_3$	F = .4761	$p < .4907$
F B comp.x comp $C_1A_1A_2$	F = .9943	$p < .3154$
F B comp.x comp $C_1A_1A_3$	F = .1357	$p < .7088$
F B comp.x comp $C_1A_2A_3$	F = 1.9285	$p < .1660$
F B comp.x comp $C_2A_0A_1$	F = 1.4998	$p < .2217$
F B comp.x comp $C_2A_0A_2$	F = .6657	$p < .4152$
F B comp.x comp $C_2A_0A_3$	F = .4695	$p < .4938$
F B comp.x comp $C_2A_1A_2$	F = 4.7670	$p < .0298$
F B comp.x comp $C_2A_1A_3$	F = .4360	$p < .5096$
F B comp.x comp $C_2A_2A_3$	F = .0281	$p < .8669$
F B comp.x comp $C_3A_0A_1$	F = 1.5812	$p < .2096$
F B comp.x comp $C_3A_0A_2$	F = 1.0744	$p < .3008$
F B comp.x comp $C_3A_0A_3$	F = .2801	$p < .5970$
F B comp.x comp $C_3A_1A_2$	F = 1.2217	$p < .2700$
F B comp.x comp $C_3A_1A_3$	F = .2561	$p < .6132$
F B comp.x comp $C_3A_2A_3$	F = .7558	$p < .3854$

TABLA 13.1.2.6.

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

F A_0A_1 comp. x comp B C_1	F = 11.7668	$p < .0007$
F A_0A_2 comp. x comp B C_1	F = 26.2407	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B C_1	F = 92.2007	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B C_1	F = 2.2469	$p < .1350$
F A_1A_3 comp. x comp B C_1	F = 35.2990	$p < .0000$
F A_2A_3 comp. x comp B C_1	F = 25.5626	$p < .0000$
F A_0A_1 comp. x comp B C_2	F = 31.0585	$p < .0000$
F A_0A_2 comp. x comp B C_2	F = 34.7827	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B C_2	F =198.0171	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B C_2	F = .0834	$p < .7730$
F A_1A_3 comp. x comp B C_2	F = 51.3465	$p < .0000$
F A_2A_3 comp. x comp B C_2	F = 47.3137	$p < .0000$
F A_0A_1 comp. x comp B C_3	F = 57.7183	$p < .0000$
F A_0A_2 comp. x comp B C_3	F = 80.6574	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B C_3	F =208.2061	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B C_3	F = .4760	$p < .4908$
F A_1A_3 comp. x comp B C_3	F = 20.8480	$p < .0000$
F A_2A_3 comp. x comp B C_3	F = 71.1758	$p < .0000$

TABLA 13.1.2.7.

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

F A_0A_1 comp. x comp B_1 C_1	F = 3.0870	p < .0811
F A_0A_2 comp. x comp B_1 C_1	F = 5.7228	p < .0181
F A_0A_3 comp. x comp B_1 C_1	F = 34.9538	p < .0000
F A_1A_2 comp. x comp B_1 C_1	F = .3095	p < .5789
F A_1A_3 comp. x comp B_1 C_1	F = 16.5888	p < .0001
F A_2A_3 comp. x comp B_1 C_1	F = 14.9764	p < .0002
F A_0A_1 comp. x comp B_1 C_2	F = 24.0070	p < .0000
F A_0A_2 comp. x comp B_1 C_2	F = 23.5529	p < .0000
F A_0A_3 comp. x comp B_1 C_2	F = 74.1128	p < .0000
F A_1A_2 comp. x comp B_1 C_2	F = .0116	p < .9145
F A_1A_3 comp. x comp B_1 C_2	F = 10.1730	p < .0018
F A_2A_3 comp. x comp B_1 C_2	F = 11.3432	p < .0010
F A_0A_1 comp. x comp B_1 C_3	F = 27.7434	p < .0000
F A_0A_2 comp. x comp B_1 C_3	F = 42.6490	p < .0000
F A_0A_3 comp. x comp B_1 C_3	F = 165.2364	p < .0000
F A_1A_2 comp. x comp B_1 C_3	F = .4576	p < .4999
F A_1A_3 comp. x comp B_1 C_3	F = 23.8308	p < .0000
F A_2A_3 comp. x comp B_1 C_3	F = 20.9345	p < .0000
F A_0A_1 comp. x comp B_2 C_1	F = 9.6440	p < .0023
F A_0A_2 comp. x comp B_2 C_1	F = 24.7312	p < .0000
F A_0A_3 comp. x comp B_2 C_1	F = 59.0899	p < .0000
F A_1A_2 comp. x comp B_2 C_1	F = 2.6529	p < .1056
F A_1A_3 comp. x comp B_2 C_1	F = 18.5972	p < .0000
F A_2A_3 comp. x comp B_2 C_1	F = 10.6925	p < .0013
F A_0A_1 comp. x comp B_2 C_2	F = 9.0896	p < .0030
F A_0A_2 comp. x comp B_2 C_2	F = 12.2655	p < .0006
F A_0A_3 comp. x comp B_2 C_2	F = 134.7434	p < .0000
F A_1A_2 comp. x comp B_2 C_2	F = .2413	p < .6240
F A_1A_3 comp. x comp B_2 C_2	F = 51.9930	p < .0000
F A_2A_3 comp. x comp B_2 C_2	F = 42.1645	p < .0000
F A_0A_1 comp. x comp B_2 C_3	F = 30.0044	p < .0000
F A_0A_2 comp. x comp B_2 C_3	F = 37.9312	p < .0000
F A_0A_3 comp. x comp B_2 C_3	F = 65.4193	p < .0000
F A_1A_2 comp. x comp B_2 C_3	F = .0869	p < .7686
F A_1A_3 comp. x comp B_2 C_3	F = 3.0179	p < .0845
F A_2A_3 comp. x comp B_2 C_3	F = 2.3109	p < .1307

TABLA 13.1.2.7bis

INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Ubicación Incógnita (C)

F A_0A_1 comp. x comp B_1 C_1	F = 3.0870	$p < .0811$
F A_0A_2 comp. x comp B_1 C_1	F = 5.7228	$p < .0181$
F A_0A_3 comp. x comp B_1 C_1	F = 34.9538	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B_1 C_1	F = .3095	$p < .5789$
F A_1A_3 comp. x comp B_1 C_1	F = 16.5888	$p < .0001$
F A_2A_3 comp. x comp B_1 C_1	F = 14.9764	$p < .0002$
F A_0A_1 comp. x comp B_2 C_1	F = 9.6440	$p < .0023$
F A_0A_2 comp. x comp B_2 C_1	F = 24.7312	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B_2 C_1	F = 59.0899	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B_2 C_1	F = 2.6529	$p < .1056$
F A_1A_3 comp. x comp B_2 C_1	F = 18.5972	$p < .0000$
F A_2A_3 comp. x comp B_2 C_1	F = 10.6925	$p < .0013$
F A_0A_1 comp. x comp B_1 C_2	F = 24.0070	$p < .0000$
F A_0A_2 comp. x comp B_1 C_2	F = 23.5529	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B_1 C_2	F = 74.1128	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B_1 C_2	F = .0116	$p < .9145$
F A_1A_3 comp. x comp B_1 C_2	F = 10.1730	$p < .0018$
F A_2A_3 comp. x comp B_1 C_2	F = 1.3432	$p < .0010$
F A_0A_1 comp. x comp B_2 C_2	F = 9.0896	$p < .0030$
F A_0A_2 comp. x comp B_2 C_2	F = 12.2655	$p < .0006$
F A_0A_3 comp. x comp B_2 C_2	F = 134.7434	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B_2 C_2	F = .2413	$p < .6240$
F A_1A_3 comp. x comp B_2 C_2	F = 51.9930	$p < .0000$
F A_2A_3 comp. x comp B_2 C_2	F = 42.1645	$p < .0000$
F A_0A_1 comp. x comp B_1 C_3	F = 27.7434	$p < .0000$
F A_0A_2 comp. x comp B_1 C_3	F = 42.6490	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B_1 C_3	F = 165.2364	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B_1 C_3	F = .4576	$p < .4999$
F A_1A_3 comp. x comp B_1 C_3	F = 23.8308	$p < .0000$
F A_2A_3 comp. x comp B_1 C_3	F = 20.9345	$p < .0000$
F A_0A_1 comp. x comp B_2 C_3	F = 30.0044	$p < .0000$
F A_0A_2 comp. x comp B_2 C_3	F = 37.9312	$p < .0000$
F A_0A_3 comp. x comp B_2 C_3	F = 65.4193	$p < .0000$
F A_1A_2 comp. x comp B_2 C_3	F = .0869	$p < .7686$
F A_1A_3 comp. x comp B_2 C_3	F = 3.0179	$p < .0845$
F A_2A_3 comp. x comp B_2 C_3	F = 2.3109	$p < .1307$

ANEXO 2

FASE PRIMERA

TABLA 13.1.3.1.
INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

Efectos Simples

Del Factor C		
para el nivel D_1 ⟶	F = 44.6539	p < .0000
para el nivel D_2 ⟶	F = 36.6107	p < .0000
para el nivel D_3 ⟶	F = 5.9547	p < .0028
Del Factor D		
para el nivel A_0 ⟶	F = 79.4875	p < .0000
para el nivel A_1 ⟶	F = 55.9701	p < .0000
para el nivel A_2 ⟶	F = 12.8441	p < .0000
para el nivel A_3 ⟶	F = 12.6838	p < .0000
para el nivel C_1 ⟶	F = 153.6079	p < .0000
para el nivel C_2 ⟶	F = 13.0338	p < .0000
para el nivel C_3 ⟶	F = 31.2182	p < .0000
Del Factor A		
para el nivel D_1 ⟶	F = 29.2201	p < .0000
para el nivel D_2 ⟶	F = 24.9820	p < .0000
para el nivel D_3 ⟶	F = 109.5131	p < .0000

TABLA 13.1.3.2.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

Niveles del factor Curso en los factores Incógnita y Curso

F A_0A_1 comp. en CD =	F = 85.3777	p < .0000
F A_0A_2 comp. en CD =	F = 121.8481	p < .0000
F A_0A_3 comp. en CD =	F = 438.3555	p < .0000
F A_1A_2 comp. en CD =	F = 1.8234	p < .1773
F A_1A_3 comp. en CD =	F = 96.8116	p < .0000
F A_2A_3 comp. en CD =	F = 79.5828	p < .0000

TABLA 13.1.3.3.
INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

Niveles del factor Incógnita en el factor Curso

F C_1C_2D comp. en A =	F = 28.5058	p < .0000
F C_1C_3D comp. en A =	F = 10.9050	p < .0010
F C_2C_3D comp. en A =	F = 75.5473	p < .0000

TABLA 13.1.3.4.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F A_0A_1 comp. en C_1C_2D =	F = 38.9770	p < .0000
F A_0A_2 comp. en C_1C_2D =	F = 58.1194	p < .0000
F A_0A_3 comp. en C_1C_2D =	F = 267.4817	p < .0000
F A_1A_2 comp. en C_1C_2D =	F = 1.4037	p < .2366
F A_1A_3 comp. en C_1C_2D =	F = 85.4686	p < .0000
F A_2A_3 comp. en C_1C_2D =	F = 70.4994	p < .0000
F A_0A_1 comp. en C_1C_3D =	F = 54.4851	p < .0000
F A_0A_2 comp. en C_1C_3D =	F = 87.5989	p < .0000
F A_0A_3 comp. en C_1C_3D =	F = 250.7582	p < .0000
F A_1A_2 comp. en C_1C_3D =	F = 2.1234	p < .1456
F A_1A_3 comp. en C_1C_3D =	F = 50.0240	p < .0000
F A_2A_3 comp. en C_1C_3D =	F = 36.7204	p < .0000
F A_0A_1 comp. en C_2C_3D =	F = 58.4106	p < .0000
F A_0A_2 comp. en C_2C_3D =	F = 107.1731	p < .0000
F A_0A_3 comp. en C_2C_3D =	F = 392.9173	p < .0000
F A_1A_2 comp. en C_2C_3D =	F = .4882	p < .4850
F A_1A_3 comp. en C_2C_3D =	F = 64.8546	p < .0000
F A_2A_3 comp. en C_2C_3D =	F = 58.3184	p < .0000

TABLA 13.1.3.5.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F A_0A_1 comp. en $C_1C_2D_1$=	F = 5.9664	p < .0155
F A_0A_2 comp. en $C_1C_2D_1$=	F = 5.2878	p < .0226
F A_0A_3 comp. en $C_1C_2D_1$=	F = 29.8784	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_1C_2D_1$=	F = .0562	p < .8129
F A_1A_3 comp. en $C_1C_2D_1$=	F = 8.0508	p < .0050
F A_2A_3 comp. en $C_1C_2D_1$=	F = 10.8957	p < .0012
F A_0A_1 comp. en $C_1C_2D_2$=	F = 19.8345	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_1C_2D_2$=	F = 8.1813	p < .0047
F A_0A_3 comp. en $C_1C_2D_2$=	F = 68.1552	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_1C_2D_2$=	F = 2.1927	p < .1403
F A_1A_3 comp. en $C_1C_2D_2$=	F = 14.2626	p < .0002
F A_2A_3 comp. en $C_1C_2D_2$=	F = 25.6971	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $C_1C_2D_3$=	F = 37.5491	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_1C_2D_3$=	F =106.5762	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $C_1C_2D_3$=	F =484.9376	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_1C_2D_3$=	F = 11.3147	p < .0009
F A_1A_3 comp. en $C_1C_2D_3$=	F =102.2754	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $C_1C_2D_3$=	F = 38.7611	p < .0000

TABLA 13.1.3.6.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F A_0A_1 comp. en $C_1C_3D_1$=	F = 27.7896	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_1C_3D_1$=	F = 27.5712	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $C_1C_3D_1$=	F = 58.6097	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_1C_3D_1$=	F = .1052	p < .7461
F A_1A_3 comp. en $C_1C_3D_1$=	F = 3.6938	p < .0561
F A_2A_3 comp. en $C_1C_3D_1$=	F = 6.2275	p < .0134
F A_0A_1 comp. en $C_1C_3D_2$=	F = 14.3438	p < .0002
F A_0A_2 comp. en $C_1C_3D_2$=	F = 8.4406	p < .0041
F A_0A_3 comp. en $C_1C_3D_2$=	F = 52.9698	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_1C_3D_2$=	F = 1.0767	p < .3008
F A_1A_3 comp. en $C_1C_3D_2$=	F = 9.1566	p < .0028
F A_2A_3 comp. en $C_1C_3D_2$=	F = 20.4492	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 48.1291	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 129.1931	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 362.1176	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 12.3718	p < .0005
F A_1A_3 comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 65.2510	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 17.7222	p < .0000

TABLA 13.1.3.7.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F A_0A_1 comp. en $C_2C_3D_1$=	F = 30.6773	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_2C_3D_1$=	F = 37.7091	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $C_2C_3D_1$=	F = 102.2267	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_2C_3D_1$=	F = .0784	p < .7797
F A_1A_3 comp. en $C_2C_3D_1$=	F = 11.7036	p < .0008
F A_2A_3 comp. en $C_2C_3D_1$=	F = 11.4217	p < .0009
F A_0A_1 comp. en $C_2C_3D_2$=	F = 27.9402	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_2C_3D_2$=	F = 13.3002	p < .0003
F A_0A_3 comp. en $C_2C_3D_2$=	F = 139.0979	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_2C_3D_2$=	F = 2.4290	p < .1208
F A_1A_3 comp. en $C_2C_3D_2$=	F = 28.0465	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $C_2C_3D_2$=	F = 50.0585	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 30.9567	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 86.1316	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 212.9248	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 5.4676	p < .0204
F A_1A_3 comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 34.4907	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 11.8688	p < .0007

TABLA 13.1.3.8.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F C_1C_2D comp. en A_0A_1=	F = 18.5023	p < .0000
F C_1C_2D comp. en A_0A_2=	F = 26.3784	p < .0000
F C_1C_2D comp. en A_0A_3=	F = 12.4496	p < .0005
F C_1C_2D comp. en A_1A_2=	F = 16.2929	p < .0001
F C_1C_2D comp. en A_1A_3=	F = 6.1377	p < .0135
F C_1C_2D comp. en A_2A_3=	F = 13.4575	p < .0003
F C_1C_3D comp. en A_0A_1=	F = 47.0773	p < .0000
F C_1C_3D comp. en A_0A_2=	F = 58.4041	p < .0000
F C_1C_3D comp. en A_0A_3=	F = 51.4168	p < .0000
F C_1C_3D comp. en A_1A_2=	F = 25.9945	p < .0000
F C_1C_3D comp. en A_1A_3=	F = 24.8164	p < .0000
F C_1C_3D comp. en A_2A_3=	F = 38.4236	p < .0000
F C_2C_3D comp. en A_0A_1=	F = 6.7952	p < .0094
F C_2C_3D comp. en A_0A_2=	F = 5.6422	p < .0179
F C_2C_3D comp. en A_0A_3=	F = 12.4309	p < .0005
F C_2C_3Dcomp. en A_1A_2=	F = 1.2070	p < .2724
F C_2C_3D comp. en A_1A_3=	F = 6.5484	p < .0108
F C_2C_3D comp. en A_2A_3=	F = 5.5710	p < .0186

TABLA 13.1.3.9.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_2D_1$ comp. en A_0A_1=	F = 25.0651	p < .0000
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_0A_2=	F = 19.5713	p < .0000
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_0A_3=	F = 12.5168	p < .0005
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_1A_2=	F = 17.7473	p < .0000
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_1A_3=	F = 11.8135	p < .0007
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_2A_3=	F = 7.1581	p < .0081
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_0A_1=	F = 62.9123	p < .0000
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_0A_2=	F = 74.5657	p < .0000
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_0A_3=	F = 29.5766	p < .0000
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_1A_2=	F = 50.3682	p < .0000
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_1A_3=	F = 19.7028	p < .0000
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_2A_3=	F = 22.8207	p < .0000
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_0A_1=	F = 7.8893	p < .0055
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_0A_2=	F = 2.1206	p < .1470
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_0A_3=	F = .5774	p < .4483
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_1A_2=	F = 3.0049	p < .0846
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_1A_3=	F = 1.2532	p < .2644
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_2A_3=	F = .0099	p < .9208

TABLA 13.1.3.10.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_3D_1$ comp. en A_0A_1=	F = 89.8413	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_0A_2=	F = 88.2168	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_0A_3=	F = 72.2605	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_1A_2=	F = 29.8471	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_1A_3=	F = 25.7104	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_2A_3=	F = 22.9310	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_0A_1=	F = 34.8798	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_0A_2=	F = 42.4184	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_0A_3=	F = 19.2190	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_1A_2=	F = 31.1538	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_1A_3=	F = 13.4712	$p < .0003$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_2A_3=	F = 17.4754	$p < .0000$
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_0A_1=	F = .0993	$p < .7530$
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_0A_2=	F = .3853	$p < .5355$
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_0A_3=	F = 4.1513	$p < .0430$
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_1A_2=	F = .1162	$p < .7335$
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_1A_3=	F = 3.6241	$p < .0585$
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_2A_3=	F = 9.1367	$p < .0029$

TABLA 13.1.3.11.
INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_2C_3D_1$ comp. en A_0A_1=	F = 15.9331	$p < .0001$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_0A_2=	F = 18.2400	$p < .0000$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_0A_3=	F = 21.3031	$p < .0000$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_1A_2=	F = 1.4840	$p < .2247$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_1A_3=	F = 2.7967	$p < .0961$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_2A_3=	F = 3.7760	$p < .0535$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_0A_1=	F = 2.3754	$p < .1249$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_0A_2=	F = 3.9939	$p < .0471$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_0A_3=	F = 1.3398	$p < .2485$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_1A_2=	F = 1.8858	$p < .1713$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_1A_3=	F = .3310	$p < .5657$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_2A_3=	F = 1.1070	$p < .2941$
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_0A_1=	F = 5.8606	$p < .0164$
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_0A_2=	F = 4.3100	$p < .0392$
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_0A_3=	F = 8.2887	$p < .0044$
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_1A_2=	F = 3.9866	$p < .0473$
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_1A_3=	F = 9.1011	$p < .0029$
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_2A_3=	F = 9.3847	$p < .0025$

TABLA 13.1.3.9 bis

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_2D_1$ comp. en A_0A_1=	F = 25.0651	$p < .0000$

F $C_1C_2D_1$ comp. en A_0A_2=	F = 19.5713	$p < .0000$
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_0A_3=	F = 12.5168	$p < .0005$
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_1A_2=	F = 17.7473	$p < .0000$
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_1A_3=	F = 11.8135	$p < .0007$
F $C_1C_2D_1$ comp. en A_2A_3=	F = 7.1581	$p < .0081$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_0A_1=	F = 89.8413	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_0A_2=	F = 88.2168	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_0A_3=	F = 72.2605	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_1A_2=	F = 29.8471	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_1A_3=	F = 25.7104	$p < .0000$
F $C_1C_3D_1$ comp. en A_2A_3=	F = 22.9310	$p < .0000$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_0A_1=	F = 15.9331	$p < .0001$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_0A_2=	F = 18.2400	$p < .0000$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_0A_3=	F = 21.3031	$p < .0000$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_1A_2=	F = 1.4840	$p < .2247$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_1A_3=	F = 2.7967	$p < .0961$
F $C_2C_3D_1$ comp. en A_2A_3=	F = 3.7760	$p < .0535$

TABLA 13.1.3.10 bis

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_2D_2$ comp. en A_0A_1=	F = 62.9123	$p < .0000$
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_0A_2=	F = 74.5657	$p < .0000$
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_0A_3=	F = 29.5766	$p < .0000$
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_1A_2=	F = 50.3682	$p < .0000$
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_1A_3=	F = 19.7028	$p < .0000$
F $C_1C_2D_2$ comp. en A_2A_3=	F = 22.8207	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_0A_1=	F = 34.8798	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_0A_2=	F = 42.4184	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_0A_3=	F = 19.2190	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_1A_2=	F = 31.1538	$p < .0000$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_1A_3=	F = 13.4712	$p < .0003$
F $C_1C_3D_2$ comp. en A_2A_3=	F = 17.4754	$p < .0000$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_0A_1=	F = 2.3754	$p < .1249$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_0A_2=	F = 3.9939	$p < .0471$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_0A_3=	F = 1.3398	$p < .2485$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_1A_2=	F = 1.8858	$p < .1713$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_1A_3=	F = .3310	$p < .5657$
F $C_2C_3D_2$ comp. en A_2A_3=	F = 1.1070	$p < .2941$

TABLA 13.1.3.11 bis

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_2D_3$ comp. en A_0A_1=	F = 7.8893	$p < .0055$
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_0A_2=	F = 2.1206	$p < .1470$

F $C_1C_2D_3$ comp. en A_0A_3=	F = .5774	p < .4483
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_1A_2=	F = 3.0049	p < .0846
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_1A_3=	F = 1.2532	p < .2644
F $C_1C_2D_3$ comp. en A_2A_3=	F = .0099	p < .9208
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_0A_1=	F = .0993	p < .7530
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_0A_2=	F = .3853	p < .5355
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_0A_3=	F = 4.1513	p < .0430
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_1A_2=	F = .1162	p < .7335
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_1A_3=	F = 3.6241	p < .0585
F $C_1C_3D_3$ comp. en A_2A_3=	F = 9.1367	p < .0029
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_0A_1=	F = 5.8606	p < .0164
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_0A_2=	F = 4.3100	p < .0392
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_0A_3=	F = 8.2887	p < .0044
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_1A_2=	F = 3.9866	p < .0473
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_1A_3=	F = 9.1011	p < .0029
F $C_2C_3D_3$ comp. en A_2A_3=	F = 9.3847	p < .0025

ANEXO 2

FASE PRIMERA

TABLA 13.1.4.1.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

Efectos Simples

Del Factor D		
para el nivel B_1 ⟶	F = 134.2918	p < .0000
para el nivel B_2 ⟶	F = 43.8703	p < .0000
Del Factor B		
para el nivel D_1 ⟶	F = 10.3253	p < .0015
para el nivel D_2 ⟶	F = .6768	p < .4117
para el nivel D_3 ⟶	F = 3.8389	p < .0515

TABLA 13.1.4.2.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F B comp. en C_1D =	F = .0286	p < .8658
F B comp. en C_2D =	F = .9921	p < .3197
F B comp. en C_2D =	F = .1446	p < .7039

TABLA 13.1.4.3.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F B comp. en C_1D_1	F = 10.3253	p < .0015
F B comp. en C_1D_2	F = .6768	p < .4117
F B comp. en C_1D_3	F = 3.8389	p < .0515
F B comp. en C_2D_1	F = .1556	p < .6936
F B comp. en C_2D_2	F = .1206	p < .7286
F B comp. en C_2D_3	F = 5.2480	p < .0231
F B comp. en C_3D_1	F = .1144	p < .7356
F B comp. en C_3D_2	F = .3196	p < .5725
F B comp. en C_3D_3	F = .0268	p < .8701

TABLA 13.1.4.4.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F B comp. en C_1C_2D=	F = .3933	p < .5307
F B comp. en C_1C_3D=	F = .1502	p < .6984
F B comp. en C_2C_3D=	F = .1688	p < .6812

TABLA 13.1.4.5.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F B comp. en $C_1C_2D_1$=	F = 1.1931	p < .2754
F B comp. en $C_1C_3D_1$=	F = .8035	p < .3706
F B comp. en $C_2C_3D_1$=	F = .2539	p < .6147
F B comp. en $C_1C_2D_2$=	F = .0000	p < 1.0000
F B comp. en $C_1C_3D_2$=	F = .0261	p < .8718
F B comp. en $C_2C_3D_2$=	F = .4065	p < .5241
F B comp. en $C_1C_2D_3$=	F = .0521	p < .8196
F B comp. en $C_1C_3D_3$=	F = 1.6037	p < .2062
F B comp. en $C_2C_3D_3$=	F = 2.9200	p < .0883

TABLA 13.1.4.6.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F B comp. en $C_1C_2D_1D_2$	F = .5121	p < .4744
F B comp. en $C_1C_2D_1D_3$	F = .5411	p < .4622
F B comp. en $C_1C_2D_2D_3$	F = .0288	p < .8654
F B comp. en $C_1C_3D_1D_2$	F = .3296	p < .5660
F B comp. en $C_1C_3D_1D_3$	F = .1359	p < .7125
F B comp. en $C_1C_3D_2D_3$	F = .9958	p < .3186
F B comp. en $C_2C_3D_1D_2$	F = .6521	p < .4196
F B comp. en $C_2C_3D_1D_3$	F = .8146	p < .3671
F B comp. en $C_2C_3D_2D_3$	F = .6760	p < .4112

TABLA 13.1.4.7.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F C_1C_2D comp. en B =	F = 28.5058	p < .0000
F C_1C_3D comp. en B =	F = 75.5473	p < .0000
F C_2C_3D comp. en B =	F = 10.9050	p < .0010
F C_1C_2D comp. en B_1 =	F = 10.0048	p < .0016
F C_1C_3D comp. en B_1=	F = 38.3546	p < .0000
F C_2C_3D comp. en B_1 =	F = 9.0495	p < .0027
F C_1C_2D comp. en B_2 =	F = 19.2391	p < .0000
F C_1C_3D comp. en B_2 =	F = 37.0752	p < .0000
F C_2C_3D comp. en B_2 =	F = 2.7458	p < .0981

TABLA 13.1.4.8.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_2D_1$ comp. en B_1	F = 28.7444	p < .0000
F $C_1C_3D_1$ comp. en B_1	F = 72.5146	p < .0000
F $C_2C_3D_1$ comp. en B_1	F = 8.0437	p < .0051
F $C_1C_2D_2$ comp. en B_1	F = 45.3317	p < .0000
F $C_1C_3D_2$ comp. en B_1	F = 30.0658	p < .0000
F $C_2C_3D_2$ comp. en B_1	F = 1.2932	p < .2568
F $C_1C_2D_3$ comp. en B_1	F = 11.8830	p < .0007
F $C_1C_3D_3$ comp. en B_1	F = .0273	p < .8690
F $C_2C_3D_3$ comp. en B_1	F = 12.5981	p < .0005
F $C_1C_2D_1$ comp. en B_2	F = 6.3525	p < .0125
F $C_1C_3D_1$ comp. en B_2	F = 30.4247	p < .0000
F $C_2C_3D_1$ comp. en B_2	F = 8.8775	p < .0033
F $C_1C_2D_2$ comp. en B_2	F = 32.7582	p < .0000
F $C_1C_3D_2$ comp. en B_2	F = 19.6615	p < .0000
F $C_2C_3D_2$ comp. en B_2	F = 1.9648	p < .1626
F $C_1C_2D_3$ comp. en B_2	F = .7660	p < .3826
F $C_1C_3D_3$ comp. en B_2	F = 5.1415	p < .0245
F $C_2C_3D_3$ comp. en B_2	F = 1.9036	p < .1693

TABLA 13.1.4.10.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C) x Tipo (D)

F $C_1C_2D_1$ comp. en B=	F = 30.1363	p < .0000
F $C_1C_2D_2$ comp. en B=	F = 77.7939	p < .0000
F $C_1C_2D_3$ comp. en B=	F = 2.9510	p < .0866
F $C_1C_3D_1$ comp. en B=	F = 95.6869	p < .0000
F $C_1C_3D_2$ comp. en B=	F = 49.4945	p < .0000
F $C_1C_3D_3$ comp. en B=	F = 2.9929	p < .0844
F $C_2C_3D_1$ comp. en B=	F = 16.9572	p < .0000
F $C_2C_3D_2$ comp. en B=	F = 3.2106	p < .0740
F $C_2C_3D_3$ comp. en B=	F = 11.9541	p < .0006

ANEXO 2

FASE SEGUNDA. PROBLEMAS DE CAMBIO

TABLA 13.2.1.1.
INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C)

Efectos Simples

Del Factor A		
Para el nivel C_1	F = 3.3311	p < .0207
Para el nivel C_2	F = 3.3558	p < .0000
Del Factor C		
Para el nivel A_1	F =161.2063	p < .0000
Para el nivel A_2	F = 16.1772	p < .0001
Para el nivel A_3	F = 13.4329	p < 0004
Para el nivel A_4	F = 10.3272	p < .0018

TABLA 13.2.1.2.

INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C)

F A_0A_1 comp. en C =	F = 27.7896	p < .0000
F A_0A_2 comp. en C =	F = 27.5712	p < .0000
F A_0A_3 comp. en C =	F = 58.6097	p < .0010
F A_1A_2 comp. en C =	F = .1052	p < .0016
F A_1A_3 comp. en C =	F = 3.6938	p < .0000
F A_2A_3 comp. en C =	F = 6.2275	p < .0027
F A_0A_1 comp. en C_1 =	F = 4.6258	p < .0341
F A_0A_2 comp. en C_1 =	F = 1.3490	p < .2484
F A_0A_3 comp. en C_1 =	F = 7.6955	p < .0067
F A_1A_2 comp. en C_1 =	F = 1.2703	p < .2626
F A_1A_3 comp. en C_1 =	F = .4087	p < .5242
F A_2A_3 comp. en C_1 =	F = 3.3307	p < .0712
F A_0A_1 comp. en C_3 =	F = 46.8051	p < .0000
F A_0A_2 comp. en C_3 =	F = 60.5046	p < .0000
F A_0A_3 comp. en C_3 =	F =131.0914	p < .0000
F A_1A_2 comp. en C_3 =	F = .0161	p < .8990
F A_1A_3 comp. en C_3 =	F = 3.8447	p < .0529
F A_2A_3 comp. en C_3 =	F = 4.1220	p < .0452

TABLA 13.2.1.3.
INTERACCIÓN Curso (A) x Incógnita (C)

F C_1C_3 comp en A_0A_1=	F = 89.8413	p < .0000
F C_1C_3 comp en A_0A_2=	F = 88.2168	p < .0000
F C_1C_3 comp en A_0A_3=	F = 72.2605	p < .0000
F C_1C_3 comp en A_1A_2=	F = 29.8471	p < .0000
F C_1C_3 comp en A_1A_3=	F = 25.7104	p < .0000
F C_1C_3 comp en A_2A_3=	F = 22.9310	p < .0000

FASE SEGUNDA. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

TABLA 13.2.2.1.

INTERACCIÓN Operación (B) x Incógnita (C)

Efectos Simples

Del Factor B		
Para el nivel C_1 ⟶	F = 14.0718	p < .0002
Para el nivel C_2 ⟶	F = 1.4546	p < 2293
Del Factor C		
Para el nivel B_1 ⟶	F = 5.2480	p < .0231
Para el nivel B_2 ⟶	F = .0268	p < .8701

TABLA 13.2.2.2.

INTERACCIÓN Curso(A) x Operación (B)

Efectos Simples

Del Factor B		
Para el nivel A_0 ⟶	F = 3.3660	p < .0697
Para el nivel A_1 ⟶	F = 7.6478	p < .0068
Para el nivel A_2 ⟶	F = 2.4737	p < .1191
Para el nivel A_3 ⟶	F = 7.3673	p < 0079
Del Factor A		
Para el nivel B_1 ⟶	F = 17.4174	p < .0000
Para el nivel B_2 ⟶	F = 49.1060	p < .0000

TABLA 13.2.2.3.

INTERACCIÓN Curso(A) x Operación (B)

F A_0A_1 comp. en B_1 =	F = 25.8053	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B_1 =	F = 44.8479	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_1 =	F = 49.6619	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_1 =	F = 1.1267	p < .2912
F A_1A_3 comp. en B_1 =	F = 1.9732	p < .1634
F A_2A_3 comp. en B_1 =	F = .1358	p < .7133

TABLA 13.2.2.4.

INTERACCIÓN Curso(A) x Operación (B)

F A_0A_1 comp. en B_2	=	F = 15.4521	p < .0002
F A_0A_2 comp. en B_2	=	F = 42.8727	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_2	=	F = 267.7416	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_2	=	F = 5.5034	p < .0211
F A_1A_3 comp. en B_2	=	F = 64.5254	p < .0000
F A_2A_3 comp. en B_2	=	F = 23.9996	p < .0000

TABLA 13.2.2.5.

INTERACCIÓN Curso(A) x Operación (B)

F B_1B_2 comp. en A_0	=	F = 3.366	p < .0697
F B_1B_2 comp. en A_1	=	F = 7.648	p < .0068
F B_1B_2 comp. en A_2	=	F = 7.367	p < .119
F B_1B_2 comp. en A_3	=	F = 7.367	p < .0079

ANEXO 2

FASE TERCERA

TABLA 13.3.1.1.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

Efectos Simples

Del Factor B		
para el nivel A_0 ⟶	F = 20.1142	p < .0000
para el nivel A_1 ⟶	F = 9.2564	p < .0000
para el nivel A_2 ⟶	F = 8.9919	p < .0000
para el nivel A_3 ⟶	F = 11.8004	p < .0000
para el nivel D_1 ⟶	F = 24.9502	p < .0000
para el nivel D_2 ⟶	F = 23.0027	p < .0000
para el nivel D_3 ⟶	F = 6.7877	p < .0002
Del Factor A		
para el nivel B_1 ⟶	F = 8.3987	p < .0000
para el nivel B_2 ⟶	F = 53.1777	p < .0000
para el nivel B_3 ⟶	F = 69.1657	p < .0000
para el nivel B_4 ⟶	F = 19.2701	p < .0000
Del Factor D		
para el nivel B_1 ⟶	F = 50.5799	p < .0000
para el nivel B_2 ⟶	F = 34.0697	p < .0000
para el nivel B_3 ⟶	F = 26.2145	p < .0000
para el nivel B_4 ⟶	F = 52.0753	p < .0000

Los demás Efectos Simples están recogidos en la INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D) de la Fase 1ª en el Anexo, tabla 13.1.2.1.

TABLA 13.3.1.2.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F B_1B_2 comp. en A =	F = 38.2827	p < .0000
F B_1B_3 comp. en A =	F = 83.4163	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A =	F = 43.3677	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A =	F = 14.6032	p < .0001
F B_2B_4 comp. en A =	F = 1.5469	p < .2139
F B_3B_4 comp. en A =	F = 3.4080	p < .0652

TABLA 13.3.1.3.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F A_0A_1 comp. en B_1 =	F = 9.4816	p < .0025
F A_0A_2 comp. en B_1 =	F = 10.3663	p < .0016
F A_0A_3 comp. en B_1 =	F = 19.2576	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_1 =	F = .0000	p < 1.0000
F A_1A_3 comp. en B_1 =	F = 1.6240	p < .2046
F A_2A_3 comp. en B_1 =	F = 1.9205	p < .1680
F A_0A_1 comp. en B_2 =	F = 18.2433	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B_2 =	F = 29.0844	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_2 =	F =209.2993	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_2 =	F = .8971	p < .3444
F A_1A_3 comp. en B_2 =	F = 76.2567	p < .0000
F A_2A_3 comp. en B_2 =	F = 65.4837	p < .0000
F A_0A_1 comp. en B_3 =	F = 42.3200	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B_3 =	F = 59.3842	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_3 =	F =276.2099	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_3 =	F = .5888	p < .4435
F A_1A_3 comp. en B_3 =	F = 56.6432	p < .0000
F A_2A_3 comp. en B_3 =	F = 51.2270	p < .0000
F A_0A_1 comp. en B_4 =	F = 27.9365	p < .0000
F A_0A_2 comp. en B_4 =	F = 41.8885	p < .0000
F A_0A_3 comp. en B_4 =	F = 42.8673	p < .0000
F A_1A_2 comp. en B_4 =	F = .6902	p < .4075
F A_1A_3 comp. en B_4 =	F = .7056	p < .4023
F A_2A_3 comp. en B_4 =	F = .0000	p < 1.0000

TABLA 13.3.1.4.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F.A_0A_1 comp. en $B_1B_2D_1$ =	F = 1.9484	p < .1645
F A_0A_2 comp. en $B_1B_2D_1$ =	F = 1.7712	p < .1854
F A_0A_3 comp. en $B_1B_2D_1$ =	F = 16.4228	p < .0001
F A_1A_2 comp. en $B_1B_2D_1$ =	F = .0217	p < .8832
F A_1A_3 comp. en $B_1B_2D_1$ =	F = 5.1832	p < .0243
F A_2A_3 comp. en $B_1B_2D_1$ =	F = 7.2555	p < .0079
F A_0A_1 comp. en $B_1B_3D_1$ =	F = 17.7738	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_1B_3D_1$ =	F = 15.3142	p < .0001
F A_0A_3 comp. en $B_1B_3D_1$ =	F = 52.1966	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_3D_1$ =	F = .2316	p < .6310
F A_1A_3 comp. en $B_1B_3D_1$ =	F = 6.9878	p < .0091
F A_2A_3 comp. en $B_1B_3D_1$ =	F = 11.7524	p < .0008
F A_0A_1 comp. en $B_1B_4D_1$ =	F = 14.6018	p < .0002
F A_0A_2 comp. en $B_1B_4D_1$ =	F = 18.2788	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_1B_4D_1$ =	F = 20.4800	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_4D_1$ =	F = .1122	p < .7384
F A_1A_3 comp. en $B_1B_4D_1$ =	F = .2720	p < .6032
F A_2A_3 comp. en $B_1B_4D_1$ =	F = .0356	p < .8507
F A_0A_1 comp. en $B_2B_3D_1$ =	F = 14.7572	p < .0002
F A_0A_2 comp. en $B_2B_3D_1$ =	F = 14.1185	p < .0002
F A_0A_3 comp. en $B_2B_3D_1$ =	F = 64.9788	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_2B_3D_1$ =	F = .0892	p < .7655
F A_1A_3 comp. en $B_2B_3D_1$ =	F = 13.3805	p < .0003
F A_2A_3 comp. en $B_2B_3D_1$ =	F = 19.3141	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_2B_4D_1$ =	F = 10.8114	p < .0013
F A_0A_2 comp. en $B_2B_4D_1$ =	F = 14.7672	p < .0002
F A_0A_3 comp. en $B_2B_4D_1$ =	F = 32.8459	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_2B_4D_1$ =	F = .1284	p < .7206
F A_1A_3 comp. en $B_2B_4D_1$ =	F = 4.3359	p < .0391
F A_2A_3 comp. en $B_2B_4D_1$ =	F = 3.4891	p < .0639
F A_0A_1 comp. en $B_3B_4D_1$ =	F = 42.4586	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_3B_4D_1$ =	F = 47.8143	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_3B_4D_1$ =	F =110.4854	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_3B_4D_1$ =	F = .0000	p < 1.0000
F A_1A_3 comp. en $B_3B_4D_1$ =	F = 6.4175	p < .0124
F A_2A_3 comp. en $B_3B_4D_1$ =	F = 7.5285	p < .0069

TABLA 13.3.1.5.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F.A_0A_1 comp. en $B_1B_2D_2$ =	F = 10.4318	p < .0015
F A_0A_2 comp. en $B_1B_2D_2$ =	F = 2.6612	p < .1050
F A_0A_3 comp. en $B_1B_2D_2$ =	F = 57.8000	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_2D_2$ =	F = 2.2374	p < .1369
F A_1A_3 comp. en $B_1B_2D_2$ =	F = 14.7002	p < .0002
F A_2A_3 comp. en $B_1B_2D_2$ =	F = 28.5587	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_1B_3D_2$ =	F = 15.7875	p < .0001
F A_0A_2 comp. en $B_1B_3D_2$ =	F = 6.0587	p < .0150
F A_0A_3 comp. en $B_1B_3D_2$ =	F = 51.4085	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_3D_2$ =	F = 2.8342	p < .0945
F A_1A_3 comp. en $B_1B_3D_2$ =	F = 10.1212	p < .0018
F A_2A_3 comp. en $B_1B_3D_2$ =	F = 26.8047	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_1B_4D_2$ =	F = 8.9053	p < .0036
F A_0A_2 comp. en $B_1B_4D_2$ =	F = 4.8374	p < .0303
F A_0A_3 comp. en $B_1B_4D_2$ =	F = 12.8320	p < .0005
F A_1A_2 comp. en $B_1B_4D_2$ =	F = 1.0496	p < .3082
F A_1A_3 comp. en $B_1B_4D_2$ =	F = 1.2000	p < .6557
F A_2A_3 comp. en $B_1B_4D_2$ =	F = 2.8702	p < .0935
F A_0A_1 comp. en $B_2B_3D_2$ =	F = 27.9402	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_2B_3D_2$ =	F = 13.3002	p < .0003
F A_0A_3 comp. en $B_2B_3D_2$ =	F = 139.0979	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_2B_3D_2$ =	F = 2.4290	p < .1208
F A_1A_3 comp. en $B_2B_3D_2$ =	F = 28.0465	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $B_2B_3D_2$ =	F = 50.0585	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_2B_4D_2$ =	F = 13.4438	p < .0003
F A_0A_2 comp. en $B_2B_4D_2$ =	F = 8.1349	p < .0050
F A_0A_3 comp. en $B_2B_4D_2$ =	F = 70.6396	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_2B_4D_2$ =	F = .4607	p < .4984
F A_1A_3 comp. en $B_2B_4D_2$ =	F = 14.6057	p < .0002
F A_2A_3 comp. en $B_2B_4D_2$ =	F = 19.4107	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_3B_4D_2$ =	F = 19.3816	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_3B_4D_2$ =	F = 13.3010	p < .0004
F A_0A_3 comp. en $B_3B_4D_2$ =	F = 62.7475	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_3B_4D_2$ =	F = .6823	p < .4102
F A_1A_3 comp. en $B_3B_4D_2$ =	F = 10.2625	p < .0017
F A_2A_3 comp. en $B_3B_4D_2$ =	F = 17.7954	p < .0000

TABLA 13.3.1.6.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F A_0A_1 comp. en $B_1B_2D_3$ =	F = 31.2504	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_1B_2D_3$ =	F = 84.2086	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_1B_2D_3$ =	F = 326.0481	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_2D_3$ =	F = 7.5330	p < .0068
F A_1A_3 comp. en $B_1B_2D_3$ =	F = 62.0938	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $B_1B_2D_3$ =	F = 24.1460	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_1B_3D_3$ =	F = 21.6025	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_1B_3D_3$ =	F = 65.4775	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_1B_3D_3$ =	F = 202.8202	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_3D_3$ =	F = 8.2032	p < .0048
F A_1A_3 comp. en $B_1B_3D_3$ =	F = 47.7656	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $B_1B_3C_3$ =	F = 13.2147	p < .0004
F A_0A_1 comp. en $B_1B_4D_3$ =	F = 25.8053	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_1B_4D_3$ =	F = 44.8479	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_1B_4D_3$ =	F = 49.6619	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_1B_4D_3$ =	F = 1.1267	p < .2912
F A_1A_3 comp. en $B_1B_4D_3$ =	F = 1.9732	p < .1634
F A_2A_3 comp. en $B_1B_4D_3$ =	F = .1358	p < .7133
F A_0A_1 comp. en $B_2B_3D_3$ =	F = 38.8271	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_2B_3D_3$ =	F = 117.0481	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_2B_3D_3$ =	F = 726.3468	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_2B_3D_3$ =	F = 15.8442	p < .0001
F A_1A_3 comp. en $B_2B_3D_3$ =	F = 153.9517	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $B_2B_3D_3$ =	F = 50.3667	p < .0000
F A_0A_1 comp. en $B_2B_4D_3$ =	F = 41.5271	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_2B_4D_3$ =	F = 94.9311	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_2B_4D_3$ =	F = 286.9278	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_2B_4D_3$ =	F = 5.7976	p < .0173
F A_1A_3 comp. en $B_2B_4D_3$ =	F = 44.3944	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $B_2B_4D_3$ =	F = 17.0196	p < .0001
F A_0A_1 comp. en $B_3B_4D_3$ =	F = 31.9890	p < .0000
F A_0A_2 comp. en $B_3B_4D_3$ =	F = 78.3671	p < .0000
F A_0A_3 comp. en $B_3B_4D_3$ =	F = 204.0079	p < .0000
F A_1A_2 comp. en $B_3B_4D_3$ =	F = 6.8507	p < .0098
F A_1A_3 comp. en $B_3B_4D_3$ =	F = 37.6132	p < .0000
F A_2A_3 comp. en $B_3B_4D_3$ =	F = 10.8741	p < .0012

TABLA 13.3.1.7.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F B_1B_2 comp. en A_0A_1 D_1=	F = 12.0523	p < .0007
F B_1B_3 comp. en A_0A_1 D_1 =	F = 39.3754	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_1 D_1 =	F = 58.5610	p < .0000
F B_2B_4 comp. en A_0A_1 D_1 =	F = 25.2116	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A_0A_1 D_1 =	F = 17.9011	p < .0000
F B_3B_4 comp. en A_0A_1 D_1 =	F = 1.2394	p < .2675
F B_1B_2 comp. en A_0A_2 $D_{1==}$	F = 6.1889	p < .0140
F B_1B_3 comp. en A_0A_2 D_1 =	F = 44.6130	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_2 D_1=	F = 49.0846	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A_0A_2 D_1 =	F = 23.0225	p < .0000
F B_2B_4 comp. en A_0A_2 D_1 =	F = 22.5537	p < .0000
F B_3B_4 comp. en A_0A_2 D_1 =	F = .2984	p < .5857
F B_1B_2 comp. en A_0A_3 $D_{1==}$	F = .0609	p < .8054
F B_1B_3 comp. en A_0A_3 D_1 =	F = 25.6963	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_3 D_1 =	F = 55.1286	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A_0A_3 D_1 =	F = 16.9925	p < .0001
F B_2B_4 comp. en A_0A_3 D_1 =	F = 38.7412	p < .0000
F B_3B_4 comp. en A_0A_3 D_1 =	F = 3.8969	p < .0503
F B_1B_2 comp. en A_1A_2 D_1 =	F = 8.7562	p < .0036
F B_1B_3 comp. en A_1A_2 D_1 =	F = 23.6877	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_1A_2 D_1 =	F = 19.4763	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A_1A_2 D_1 =	F = 3.6457	p < .0577
F B_2B_4 comp. en A_1A_2 D_1 =	F = 1.4112	p < .2368
F B_3B_4 comp. en A_1A_2 D_1 =	F = .1442	p < .7047
F B_1B_2 comp. en A_1A_3 D_1 =	F = .0000	p < 1.0000
F B_1B_3 comp. en A_1A_3 D_1 =	F = 12.9662	p < .0004
F B_1B_4 comp. en A_1A_3 D_1 =	F = 23.5565	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A_1A_3 D_1 =	F = 1.5870	p < .2093
F B_2B_4 comp. en A_1A_3 D_1 =	F = 6.2545	p < .0135
F B_3B_4 comp. en A_1A_3 D_1 =	F = 1.8048	p < .1813
F B_1B_2 comp. en A_2A_3 D_1 =	F = 8.2149	p < .0048
F B_1B_3 comp. en A_2A_3 D_1 =	F = 15.2067	p < .0001
F B_1B_4 comp. en A_2A_3 D_1 =	F = 18.8599	p < .0000
F B_2B_3 comp. en A_2A_3 D_1 =	F = 3.0198	p < .0839
F B_2B_4 comp. en A_2A_3 D_1 =	F = 4.5867	p < .0339
F B_3B_4 comp. en A_2A_3 D_1 =	F = .3983	p < .5290

TABLA 13.3.1.8.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

F B_1B_2 comp. en A_0A_1 D_2	=	F = 35.9038	p < .0000
F B_1B_3 comp. en A_0A_1 D_2	=	F = 35.5246	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_1 D_2	=	F = 3.7600	p < .0555
F B_2B_3 comp. en A_0A_1 D_2	=	F = .4645	p < .4963
F B_2B_4 comp. en A_0A_1 D_2	=	F = 18.3051	p < .0000
F B_3B_4 comp. en A_0A_1 D_2	=	F = 19.8324	p < .0000
F B_1B_2 comp. en A_0A_2 D_2	=	F = 30.7645	p < .0000
F B_1B_3 comp. en A_0A_2 D_2	=	F = 35.4575	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_2 D_2	=	F = .0568	p < .8121
F B_2B_3 comp. en A_0A_2 D_2	=	F = .6008	p < .4392
F B_2B_4 comp. en A_0A_2 D_2	=	F = 27.8880	p < .0000
F B_3B_4 comp. en A_0A_2 D_2	=	F = 32.5093	p < .0000
F B_1B_2 comp. en A_0A_3 D_2	=	F = 18.0203	p < .0000
F B_1B_3 comp. en A_0A_3 D_2	=	F = 20.0808	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_3 D_2	=	F = 3.3918	p < .0687
F B_2B_3 comp. en A_0A_3 D_2	=	F = .9574	p < .3291
F B_2B_4 comp. en A_0A_3 D_2	=	F = 7.6155	p < .0065
F B_3B_4 comp. en A_0A_3 D_2	=	F = 10.3773	p < .0016
F B_1B_2 comp. en A_1A_2 D_2	=	F = 18.4033	p < .0000
F B_1B_3 comp. en A_1A_2 D_2	=	F = 19.3376	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_1A_2 D_2	=	F = 1.0496	p < .3082
F B_2B_3 comp. en A_1A_2 D_2	=	F = .0083	p < .9275
F B_2B_4 comp. en A_1A_2 D_2	=	F = 23.2806	p < .0000
F B_3B_4 comp. en A_1A_2 D_2	=	F = 24.5893	p < .0000
F B_1B_2 comp. en A_1A_3 D_2	=	F = 11.4422	p < .0009
F B_1B_3 comp. en A_1A_3 D_2	=	F = 11.4887	p < .0009
F B_1B_4 comp. en A_1A_3 D_2	=	F = 1.8312	p < .1792
F B_2B_3 comp. en A_1A_3 D_2	=	F = .0132	p < .9086
F B_2B_4 comp. en A_1A_3 D_2	=	F = 6.3535	p < .0128
F B_3B_4 comp. en A_1A_3 D_2	=	F = 6.5381	p < .0116
F B_1B_2 comp. en A_2A_3 D_2	=	F = 7.0177	p < .0090
F B_1B_3 comp. en A_2A_3 D_2	=	F = 8.7049	p < .0037
F B_1B_4 comp. en A_2A_3 D_2	=	F = 2.8702	p < .0935
F B_2B_3 comp. en A_2A_3 D_2	=	F = .0440	p < .8340
F B_2B_4 comp. en A_2A_3 D_2	=	F = 12.6574	p < .0005
F B_3B_4 comp. en A_2A_3 D_2	=	F = 15.2937	p < .0001

TABLA 13.3.1.9.
INTERACCIÓN Curso (A) x Operación (B) x Tipo de problema (D)

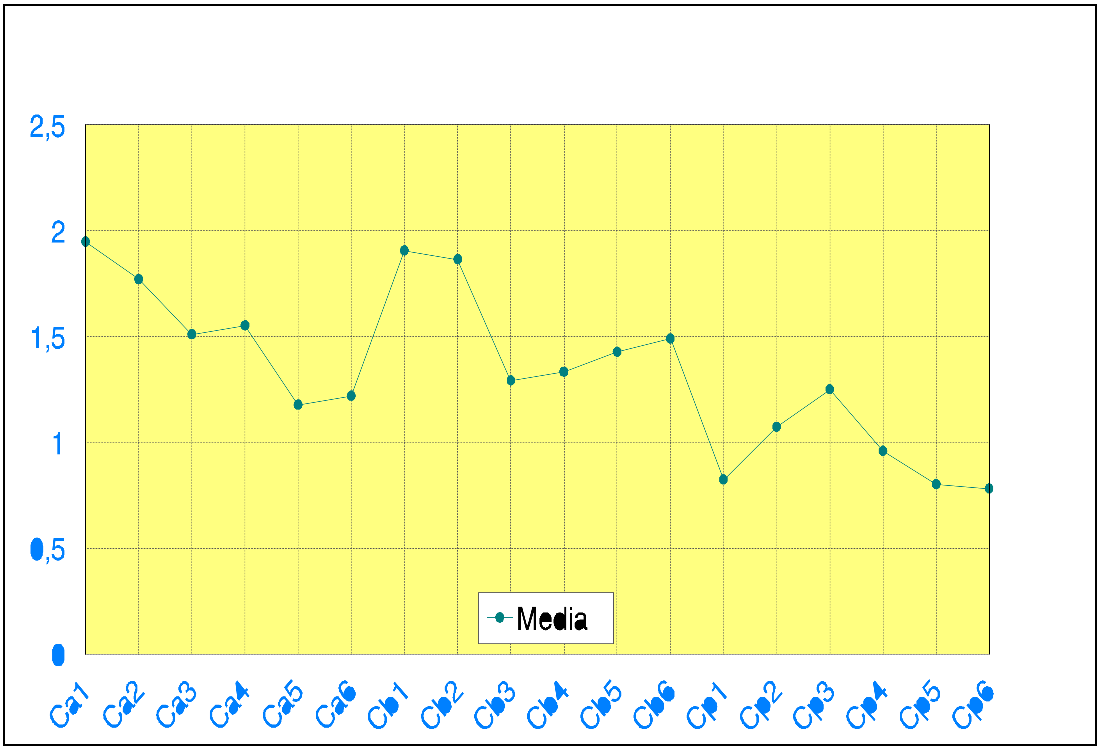
F B_1B_2 comp. en A_0A_1 D_3 =	F = 11.6905	p < .0008
F B_1B_3 comp. en A_0A_1 D_3 =	F = 25.2749	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_0A_1 D_3 =	F = 5.9645	p < .0145
F B_2B_3 comp. en A_0A_1 D_3 =	F = 2.3659	p < .1257
F B_2B_4 comp. en A_0A_1 D_3 =	F = .1546	p < .6948
F B_3B_4 comp. en A_0A_1 D_3 =	F = 2.8598	p < .0930
F B_1B_2 comp. en A_0A_2 D_3 =	F = 6.1889	p < .0140
F B_1B_3 comp. en A_0A_2 D_3 =	F = 12.1173	p < .0007
F B_1B_4 comp. en A_0A_2 D_3 =	F = 7.8805	p < .0061
F B_2B_3 comp. en A_0A_2 D_3 =	F = 1.1385	p < .2873
F B_2B_4 comp. en A_0A_2 D_3 =	F = .5075	p < .4774
F B_3B_4 comp. en A_0A_2 D_3 =	F = .0225	p < .8810
F B_1B_2 comp. en A_0A_3 D_3 =	F = .0609	p < .8054
F B_1B_3 comp. en A_0A_3 D_3 =	F = 1.8286	p < .1784
F B_1B_4 comp. en A_0A_3 D_3 =	F = 8.1346	p < .0053
F B_2B_3 comp. en A_0A_3 D_3 =	F = 1.6524	p < .2002
F B_2B_4 comp. en A_0A_3 D_3 =	F = 7.7292	p < .0062
F B_3B_4 comp. en A_0A_3 D_3 =	F = 3.1835	p < .0775
F B_1B_2 comp. en A_1A_2 D_3 =	F = 8.7562	p < .0036
F B_1B_3 comp. en A_1A_2 D_3 =	F = 21.0070	p < .0000
F B_1B_4 comp. en A_1A_2 D_3 =	F = 6.4792	p < .0125
F B_2B_3 comp. en A_1A_2 D_3 =	F = 3.7279	p < .0550
F B_2B_4 comp. en A_1A_2 D_3 =	F = .0048	p < .9447
F B_3B_4 comp. en A_1A_2 D_3 =	F = 2.1642	p < .1435
F B_1B_2 comp. en A_1A_3 D_3 =	F = .4153	p < .5203
F B_1B_3 comp. en A_1A_3 D_3 =	F = 6.1889	p < .0140
F B_1B_4 comp. en A_1A_3 D_3 =	F = 6.9779	p < .0097
F B_2B_3 comp. en A_1A_3 D_3 =	F = 5.1687	p < .0241
F B_2B_4 comp. en A_1A_3 D_3 =	F = 5.7943	p < .0174
F B_3B_4 comp. en A_1A_3 D_3 =	F = .2834	p < .5953
F B_1B_2 comp. en A_2A_3 D_3 =	F = .0000	p < 1.0000
F B_1B_3 comp. en A_2A_3 D_3 =	F = 3.5561	p < .0614
F B_1B_4 comp. en A_2A_3 D_3 =	F = 10.4649	p < .0017
F B_2B_3 comp. en A_2A_3 D_3 =	F = 5.7097	p < .0178
F B_2B_4 comp. en A_2A_3 D_3 =	F = 15.3799	p < .0001
F B_3B_4 comp. en A_2A_3 D_3 =	F = 3.1509	p < .0780

ANEXO 2

Medias y Desviaciones totales de todos los problemas, ordenados de menor a mayor dificultad

Clase de Problema	Respuesta	Media	Desviación
Cambio 1	1	1.9479	.2234
Combinación 1	7	1.9063	.2930
Combinación 2	8	1.8646	.4005
Cambio 2	2	1.7708	.8583
Cambio 4	4	1.5521	.6939
Cambio 3	3	1.5104	.7677
Combinación 6	12	1.4896	.7254
Combinación 5	11	1.4271	.8045
Combinación 4	10	1.3333	.8165
Combinación 3	9	1.2917	.8450
Comparación 3	15	1.2500	.8584
Cambio 6	6	1.2188	.8486
Cambio 5	5	1.1771	.8583
Comparación 2	14	1.0729	.9090
Comparación 4	16	.9583	.9052
Comparación 1	13	.8229	.8583
Comparación 5	17	8021	.8899
Comparación 6	18	.7813	.8730

Medias totales de todos los problemas



Ca = Problemas de Cambio.
Cb = Problemas de Combinación.
Cp = Problemas de Comparación

ANEXO 3

TABLA 15.2.1.
Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en el curso de Infantil

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	91	0.0001	10408.5	0.0001
Error 1-3	40	0.0001	2759	0.0001
Error 1-4	6	0.0807	98	0.1526
Error 1-5	0	1	26	0.7921
Error 2-3	51	0.0001	5977.5	0.0001
Error 2-4	97	0.0001	10342.5	0.0001
Error 2-5	91	0.0001	11889..	0.0001
Error 3-4	46	0.0001	2761.5	0.0001
Error 3-5	40	0.0001	2970	0.0001
Error 4-5	-6	0.0807	-84	0.2136

TABLA 15.2.2.
Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en el curso de 1º de E.P.

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	335	0.0001	2379	0.0001
Error 1-3	43	0.0001	2912.5	0.0001
Error 1-4	56	0.0001	3267	0.0001
Error 1-5	48	0.0001	3192	0.0001
Error 2-3	9.5	0.0295	381.5	0.0168
Error 2-4	22.5	0.0001	557	0.0001
Error 2-5	14.5	0.0003	593.5	0.0001
Error 3-4	13	0.0001	179	0.0001
Error 3-5	5	0.1433	153.5	0.0155
Error 4-5	-8	0.0004	-75	0.0023

TABLA 15.2.3.
Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en el curso de 2º de E.P.

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	45.5	0.0001	3044.5	0.0001
Error 1-3	51	0.0001	3424	0.0001
Error 1-4	54.5	0.0001	3338.5	0.0001
Error 1-5	39	0.0001	3295	0.0001
Error 2-3	55	0.0801	132	0.0097
Error 2-4	9	0.0021	148	0.0022
Error 2-5	-6.5	0.1299	-75	0.5767
Error 3-4	3.5	0.1892	24.5	0.3619
Error 3-5	-12. 0	0.0012	-318	0.0005
Error 4-5	-15.5	0.0001	-318.5	0.0001

TABLA 15.2.4.
Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en el curso de 3º de E.P.

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	22	0.0001	625.5	0.0001
Error 1-3	23	0.0001	604.5	0.0001
Error 1-4	24.5	0.0001	612.5	0.0001
Error 1-5	21	0.0001	661.5	0.0001
Error 2-3	1	0.7266	6	0.5625
Error 2-4	25	0.0625	7.5	0.0625
Error 2-5	-1	0.7744	-3	1.0000
Error 3-4	1.5	0.2500	3	0.2500
Error 3-5	-2.	0.3438	-11.	0.3438
Error 4-5	-3.5	0.0156	-14.	0.0156

TABLA 15.2.5.

Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en la situación de la incógnita en el resultado

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	0	1	-427.5	0.2136
Error 1-3	19.5	0.0001	836.5	0.0001
Error 1-4	32	0.0001	1040.	0.0001
Error 1-5	15	0.0029	1074.	0.0001
Error 2-3	19.5	0.0001	763.5	0.0001
Error 2-4	32	0.0001	1040	0.0001
Error 2-5	15	0.0029	1321.5	0.0001
Error 3-4	12.5	0.0001	162.5	0.0001
Error 3-5	-4.5	0.2976	-16	0.8960
Error 4-5	-17.	0.0001	-297.5	0.0001

TABLA 15.2.6.

Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en la situación de la incógnita en el segundo sumando

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	-9	0.2198	-1179	0.1145
Error 1-3	18	0.0028	1698	0.0001
Error 1-4	40.5	0.0001	1945	0.0001
Error 1-5	29	0.0001	2055.5	0.0001
Error 2-3	27	0.0001	2081	0.0001
Error 2-4	49.5	0.0001	2922.5	0.0001
Error 2-5	38.	0.0001	3333.5	0.0001
Error 3-4	22.5	0.0001	639	0.0001
Error 3-5	11	0.0198	633.5	0.0011
Error 4-5	-11.5	0.0003	-183.5	0.0031

TABLA 15.2.7.

Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en la situación de la incógnita en el primer sumando

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	19	0.0158	2085.5	0.0390
Error 1-3	39.5	0.0001	4613.5	0.0001
Error 1-4	68.5	0.0001	5916	0.0001
Error 1-5	64	0.0001	5568	0.0001
Error 2-3	20.5	0.0003	1458	0.0002
Error 2-4	49.5	0.0001	2938.5	0.0001
Error 2-5	45	0.0001	3607.5	0.0001
Error 3-4	29	0.0001	1272.5	0.0001
Error 3-5	24.5	0.0001	1272.5	0.0001
Error 4-5	-4.5	0.1996	-54	0.4097

TABLA 15.2.8.

Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en los problemas de Cambio

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	17	0.0039	1279	0.0018
Error 1-3	21.5	0.0001	1309	0.0003
Error 1-4	34	0.0001	1819	0.0001
Error 1-5	30.5	0.0001	1743.5	0.0001
Error 2-3	4.5	0.3356	93	0.5639
Error 2-4	17	0.0001	492.5	0.0001
Error 2-5	13.5	0.0024	633	0.0002
Error 3-4	12.5	0.0015	405.5	0.0008
Error 3-5	9	0.0328	419	0.0019
Error 4-5	-3.5	0.3604	-39.5	0.6010

TABLA 15.2.9.

Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en los problemas de Combinación

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	4	0.5159	417	0.2332
Error 1-3	13.5	0.0093	844.5	0.0024
Error 1-4	31	0.0001	1091	0.0001
Error 1-5	15.5	0.0017	1100.5	0.0001
Error 2-3	9.5	0.0344	347	0.0456
Error 2-4	27	0.0001	826.5	0.0001
Error 2-5	11.5	0.0235	822	0.0007
Error 3-4	17.5	0.0001	344.5	0.0001
Error 3-5	2	0.7275	232.5	0.1717
Error 4-5	-15.5	0.0001	-271.5	0.0001

TABLA 15.2.10.

Diferencias entre los distintos niveles de la variable error en los problemas de Comparación

Variables	Pr M Sign	Significación	Pr Sgn Rank	Significación
Error 1-2	-11.	0.0026	-3638.5	0.0096
Error 1-3	42	0.0001	5205	0.0001
Error 1-4	76	0.0001	5814	0.0001
Error 1-5	62	0.0001	6131	0.0001
Error 2-3	53	0.0001	5479.5	0.0001
Error 2-4	87	0.0001	7612.5	0.0001
Error 2-5	73	0.0001	8615.5	0.0001
Error 3-4	34	0.0001	1173	0.0001
Error 3-5	20	0.0001	1138	0.0001
Error 4-5	-14.	0.0001	-203	0.0001

ANEXO 4

ANÁLISIS DE SEGMENTACIÓN

16.1. RESULTADOS CONSIDERANDO LOS CUATRO GRUPOS

Variables		Modalidades
1.	Curso al que pertenece	(4 modalidades)
2.	Respuesta 1	(3 modalidades)
3.	Respuesta 2	(3 modalidades)
4.	Respuesta 3	(3 modalidades)
5.	Respuesta 4	(3 modalidades)
6.	Respuesta 5	(3 modalidades)
7.	Respuesta 6	(3 modalidades)
8.	Respuesta 7	(3 modalidades)
9.	Respuesta 8	(3 modalidades)
10.	Respuesta 9	(3 modalidades)
11.	Respuesta 10	(3 modalidades)
12.	Respuesta 11	(3 modalidades)
13.	Respuesta 12	(3 modalidades)
14.	Respuesta 13	(3 modalidades)
15.	Respuesta 14	(3 modalidades)
16.	Respuesta 15	(3 modalidades)
17.	Respuesta 16	(3 modalidades)
18.	Respuesta 17	(3 modalidades)
19.	Respuesta 18	(3 modalidades)

Muestra test extraída al azar PTEST = 33%

Probabilidad a priori y Frecuencias de las Muestras

Clase	Probabilidad a priori	Muestra de base Efe.	%	Muestra test Efe	%
Infantil	0.250	16	25.00	8	25.00
Primero	0.250	16	25.00	8	25.00
Segundo	0.250	16	25.00	8	25.00
Tercero	0.250	16	25.00	8	25.00
Total	1.000	64	100.00	32	100.00

Costes de mala clasificación

Clase de afectación	Clase de origen Infantil	Primero	Segundo	Tercero
Infantil	0.00	1.00	1.00	1.00
Primero	1.00	0.00	1.00	1.00
Segundo	1.00	1.00	0.00	1.00
Tercero	1.00	1.00	1.00	0.00

Las probabilidades a priori son iguales en todos los grupos. Se extrae aleatoriamente una muestra test y los costes de mala clasificación son iguales a 1.

TABLA 16.1.1

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Muestra base	Máximo
A1	16	0.7083 +/- 0.118	0.1667	
A2	13	0.6667 +/- 0.118	0.1667	
A3	6	0.6250 +/- 0.118	0.3125	
A4	5	0.4583 +/- 0.112	0.3750	*
A5	4	0.5833 +/- 0.117	0.4583	
A6	3	0.6667 +/- 0.118	0.5625	
A7	2	0.6667 +/- 0.118	0.6875	
A8	1	1.0000 +/- 0.102	1.0000	

Coste de error inicial = 0.7500
Afectación inicial = INFA

CONCLUSIÓN
Subárbol máximo N = 4
Número de nodos terminales = 5

Descripción del árbol después de la poda

Árbol escogido: 5 Nodos Terminales

MUESTRA	%	EFECTIVO
BASE	66.67	64
TEST	33.33	32
TOTAL	100.00	96

DIBUJO DEL ÁRBOL – REFERENCIA

1. T Número de Nodo.
2. “*” Clase de afectación del nodo T.
   Cla(T) = “*”.
3. R(*/T) Riesgo (o coste medio) de error acarreado por la afectación del nodo T a la clase “*”.
4. P(T) Probabilidad de recalar en el nodo T.

TABLA 16.1.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.2813

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
8	Terc	.40	0.39	8			
				4	4	Var 15	R142
9	Prim	.25	0.13	9			R111
				2	2	Var 12	R112
5	Segu	.00	0.09	5			R141
				1	1	Var 15	R142
6	Prim	.38	0.13	6			
				3	3	Var 7	R602
7	Infa	.18	0.27	7			

TABLA 16.1.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN COSTE TEÓRICO = 0.3438

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	

8	Terc	.50	0.50	8						
					4			4	Var 15	R142
9	Prim	.60	0.16	9						R111
						2		2	Var 12	R112
5	Segu	.00	0.09		5					R141
							1	1	Var 15	R142
6	Prim	.00	0.09		6					
						3		3	Var 7	R602
7	Infa	.00	0.25		7					

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL - REFERENCIA

1. T — Número de Nodo.
2. N — Efectivo del nodo T.
3. % — Porcentaje del nodo T.
4. “*” — Clase de afectación del nodo T.
   Cla(T) = “*”.
5. R(*/T) — Riesgo (o coste medio) de error acarreado
   por la afectación del nodo T a la clase “*”.
6. P(T) — Probabilidad de recalar en el nodo T.
7. Var — Número de orden de la variable de corte.

TABLA 16.1.4

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 9.
Número de Nodos Terminales: 5.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Variable Corte	Corte
1	64	100.00	Inf.	0.75	1.00	15	R14	R141
								R142
2	39	60.94	3º	0.59	0.61	12	R11	R111
								R112
4	33	51.56	3º	0.52	0.52	15	R14	R142
8	25	39.06	3º	0.40	0.39		Nodo term.	
9	8	12.50	1º	0.25	0.13		Nodo term.	
5	6	9.38	2º	0.00	0.09		Nodo term.	
3	25	39.06	Inf.	0.40	0.39	7	R6	R602
6	8	12.50	1º	0.38	0.13		Nodo term.	
7	17	26.56	Inf.	0.18	0.27		Nodo term.	

TABLA 16.1.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO.

Número total de Nodos: 9.
Número de Nodos Terminales: 5.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte

1	32	100.00	Inf.	0.75	1.00	15	R14		R141 R142
2	21	65.63	3º	0.62	0.66	12	R11		R111 R112
4	21	65.63	3º	0.62	0.66	15	R14		R142
8	16	50.00	3º	0.50	0.50			Nodo term.	
9	5	15.63	1º	0.60	0.16			Nodo term.	
5	0	0.00	2º	0.00	0.00			Nodo term.	
3	11	34.38	Inf.	0.27	0.34	7	R6		R602
6	3	9.38	1º	0.00	0.09			Nodo term.	
7	8	25.00	Inf.	0.00	0.25			Nodo term.	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES. MUESTRA BASE, EFE = 64

REFERENCIA
Nodo número = T P(T) : Probabilidad de pertenencia al nodo T
(1) Clase J (afectación a J =*).
(2) Efectivo del nodo T en la clase J.
(3) Efectivo total en la clase J.
(4) Proporción de sujetos de la clase J en nodo T
(5) Proporción de sujetos del nodo T pertenecientes a la clase J.
(6) R(J/T) Riesgo de error medio acarreado por la afectación del nodo T a la clase J.

TABLA 16.1.6. Nodo Número nº = 8 P(8) = 0.3906

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	1	16	6.25	4.00	0.960
1º	3	16	18.75	12.00	0.880
2º	6	16	37.50	24.00	0.760
*3º	15	16	93.75	60.00	0.400
Total	25	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R142	
Respuesta 11	=	R111	R112

TABLA 16.1.7. Nodo Número nº = 9 P(9) = 0.1250

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	16	0.00	0.00	1.000
*1º	6	16	37.50	75.00	0.250
2º	1	16	6.25	12.50	0.875
3º	1	16	6.25	12.50	0.875
Total	8	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	
Respuesta 11	=	R111	R112

TABLA 16.1.8. Nodo Número nº = 5 P(5) = 0.0938

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	16	0.00	0.00	1.000
1º	0	16	0.00	0.00	1.000
2º*	6	16	37.50	100.00	0.000
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	6	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142
Respuesta 11	=	R110	

TABLA 16.1.9. Nodo Número nº = 6 P(6) = 0.1250

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	1	16	6.25	12.50	0.875
1º*	5	16	31.25	62.50	0.375
2º	2	16	12.50	25.00	0.750
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	8	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R140	
Respuesta 6		=	R602

TABLA 16.1.10. Nodo Número nº = 7 P(7) = 0.2656

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.*	14	16	87.50	82.35	0.176
1º	2	16	12.50	11.76	0.882
2º	1	16	6.25	5.88	0.941
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	17	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R140		
Respuesta 6		=	R600	R601

DESCRIPCIÓN DE LOS NODOS TERMINALES
MUESTRA TEST, EFE = 32

TABLA 16.1.11. Nodo Número nº = 8 P(8) = 0.5000

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º	3	8	37.50	18.75	0.813
2º	5	8	62.50	31.25	0.688
*3º	8	8	100.00	50.00	0.500
Total	16	32		100.00	

TABLA 16.1.12 Nodo Número nº = 9 P(9) = 0.1563

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
*1º	2	8	25.00	40.00	0.600
2º	3	8	37.50	60.00	0.400
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	5	32		100.00	

TABLA 16.1.13. Nodo Número nº = 5 P(5) = 0.0000

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º	0	8	0.00	0.00	1.000
*2º	0	8	0.00	0.00	1.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	0	32		100.00	

TABLA 16.1.14. Nodo Número nº = 6 P(6) = 0.0938

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
*1º	3	8	37.50	100.00	0.000
2º	0	8	0.00	0.00	1.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	3	32		100.00	

TABLA 16.1.15 Nodo Número nº = 7 P(7) = 0.2500

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.*	8	8	100.00	100.00	0.000
1º	0	8	0.00	0.00	1.000
2º	0	8	0.00	0.00	1.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	8	32		100.00	

MUESTRA BASE = 64

TABLA 16.1.16.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN			
	Infantil	Primero	Segundo	Tercero
Infantil	14	2	1	0
	87.5	12.5	6.3	0.0
Primero	1	11	3	1
	6.3	68.8	18.8	6.3
Segundo	0	0	6	0
	0.0	0.0	37.5	0.0
Tercero	1	3	6	15
	6.3	18.8	37.5	93.8
Total	16	16	16	16
	100.0	100.0	100.0	100.0

TABLA 16.1.17. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	14	16	87.50
1º	11	16	68.75
2º	6	16	37.50
3º	15	16	93.75
	46	64	71.88

MUESTRA TEST = 32

TABLA 16.1.18

Clase de afectación	Infantil	Primero	Segundo	Tercero
Infantil	8	0	0	0
	100.	0.0	0.0	0.0
Primero	0	5	3	0
	0.0	62.5	37.5	0.0
Segundo	0	0	0	0
	0.0	0.0	0.0	0.0
Tercero	0	3	5	0
	0.0	37.5	62.5	0.0
Total	8	8	8	8
	100.0	100.0	100.0	100.0

TABLA 16.1.19. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	8	8	100.00
1º	5	8	62.50
2º	0	8	0.00
3º	8	8	100.00
	21	32	65.63

16.2. RESULTADOS CONSIDERANDO LOS CURSOS PRIMERO Y SEGUNDO UN SÓLO GRUPO

TABLA 16.2.1.

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Muestra base	Máximo
A1	11	0.5000 +/- 0.153	0.1250	
A2	9	0.5000 +/- 0.153	0.1250	
A3	6	0.5000 +/- 0.153	0.2188	
A4	5	0.5000 +/- 0.153	0.2813	*
A5	3	0.6875 +/- 0.168	0.5625	
A6	2	0.8750 +/- 0.175	0.7500	
A7	1	1.0000 +/- 0.177	1.0000	

Coste de error inicial = 0.500
Afectación inicial = PRIMSEG

CONCLUSIÓN
Sub árbol máximo N = 4
Número de nodos terminales = 5

La tabla 16.2.1. nos proporciona para cada subárbol de la secuencia obtenida: el número de nodos terminales y el coste relativo que se le asocia para la muestra base y para la muestra test y que es 0.50. Los costes de error aparente y teórico corresponden, en nuestros datos, a los TEA (tasa de error aparente) y TET (tasa de error teórico), ya que las probabilidades a priopri se toman iguales a los % de las frecuencias de los grupos en la muestra, y los costes de mala clasificación son todos iguales a 1. El subárbol óptimo es el indicado con * y es el árbol A_4 con 5 nodos terminales. Se trata del **más pequeño** subárbol en términos de número de nodos terminales de la secuencia correspondiente y al menor coste relativo, 0.5000, aunque hay otros con igual coste relativo pero con más nodos terminales.

Las tablas 16.2.2. y 16.2.3. muestran el árbol decisional binario podado para la muestra base y la muestra test respectivamente y las variables discriminantes (Respuestas: 14, 16, 18 y 6). Asi respecto del nodo terminal nº 8 nos proporciona la siguiente información: en la muestra de base, la probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 8 es de 0.31. Si recala en él, se afecta su grupo Tercero y acarrea un riesgo de error igual a 0.30.

TABLA 16.2.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.1406

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
8	Terc	.30	0.31	8			R180
				4	4	Var 19	R182
9	PriSe	.14	0.11	9			
				2	2	Var 17	R162
5	PriSe	.07	0.23	5			R141
				1	1	Var 15	R142
6	PriSe	.13	0.13	6			
				3	3	Var 7	R602
7	Infa	.00	0.22	7			

TABLA 16.2.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN COSTE TEÓRICO = 0.2500

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
8	Terc	.00	0.09	8			R180
				4	4	Var 19	R182
9	PriSe	.83	0.19	9			
				2	2	Var 17	R162
5	PriSe	.00	0.28	5			R141
				1	1	Var 15	R142
6	PriSe	.00	0.09	6			
				3	3	Var 7	R602
7	Infa	.27	0.34	7			

Las tablas 16.2.4. y 16.2.5. proporcionan información del árbol podado, muestra base y muestra test, y en el que podemos seguir los perfiles de los distintos caminos. Las tablas siguientes -de la 16.2.6 a la 16.2.9- nos describen los cortes de la muestra base y, a partir de ellas, comentaremos las distintas respuestas discriminativas que sirven para dividir al nodo padre y a los demás nodos, hasta llegar a los nodos terminales y veremos los sujetos que se encuentran en cada uno de ellos.

TABLA 16.2.4.

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 9.
Número de Nodos Terminales: 5.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	64	100.00	1º-2º	0.50	1.00	15	R14	R141
								R142
2	42	65.63	1º-2º	0.40	0.66	17	R16	R162
4	27	42.19	3º	0.44	0.42	19	R18	R180
								R182

8	20	31.25	3º	0.30	0.31		Nodo term.	
9	7	10.94	1º-2º	0.14	0.11		Nodo term.	
5	15	23.44	1º-2º	0.07	0.23		Nodo term.	
3	22	34.38	Inf.	0.32	0.34	7	R6	R602
6	8	12.50	1º-2º	0.13	0.13		Nodo term.	
7	14	21.88	Inf.	0.00	0.22		Nodo term.	

TABLA 16.2.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO.

Número total de Nodos: 9.
Número de Nodos Terminales: 5.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	1º-2º	0.50	1.00	15	R14	R141
								R142
2	18	56.25	1º-2º	0.44	0.56	17	R16	R162
4	9	28.13	3º	0.11	0.28	19	R18	R180
								R182
8	3	9.38	3º	0.00	0.09		Nodo term.	
9	6	18.75	1º-2º	0.83	0.19		Nodo term.	
5	9	28.13	1º-2º	0.00	0.28		Nodo term.	
3	14	43.75	Inf.	0.43	0.44	7	R6	R602
6	3	9.38	1º-2º	0.00	0.09		Nodo term.	
7	11	34.38	Inf.	0.27	0.34		Nodo term.	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA BASE, EFE = 64

TABLA 16.2 6. Nodo Número N = 8 P(8) = 0.3125

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	1	16	6.25	5.00	0.950
1º y 2º	5	32	15.63	25.00	0.750
3º*	14	16	87.50	70.00	0.300
Total	20	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142
Respuesta 16	=	R162	
Respuesta 18	=	R180	R182

TABLA 16.2.7. Nodo Número N = 9 P(9) = 0.1094

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	16	0.00	0.00	1.000
1º y 2º *	6	32	18.75	85.71	0.143
3º	1	16	6.25	14.29	0.857
Total	7	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142
Respuesta 16	=	R162	
Respuesta 18	=	R181	

TABLA 16.2.8. Nodo Número N = 5 P(5) = 0.2344

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	16	0.00	0.00	1.000
1º y 2º *	14	32	43.75	93.33	0.067
3º	1	16	6.25	6.66	0.933
Total	15	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142
Respuesta 16	=	R160	R161

TABLA 16.2.9. Nodo Número N = 6 P(6) = 0.1250

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	1	16	6.25	12.50	0.875
1º y 2º *	7	32	21.88	87.50	0.125
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	8	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R140	
Respuesta 6		=	R602

TABLA 16.2.10. Nodo Número N = 7 P(7) = 0.2188

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf. *	14	16	87.50	100.00	0.000
1º y 2º	0	32	0.00	0.00	1.000
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	14	64		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R140		
Respuesta 6		=	R600	R601

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA TEST, EFE = 32

TABLA 16.2.11. Nodo Número N = 8 P (8) = 0.0938

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º y 2º	0	16	0.00	0.00	1.000
3º*	3	8	37.50	100.00	0.000
Total	3	32		100.00	

TABLA 16.2.12. Nodo Número N = 9 P(9) = 0.1875

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º y 2º *	1	16	6.25	16.67	0.833
3º	5	8	62.50	83.33	0.167
Total	6	32		100.00	

TABLA 16.2.13. Nodo Número N = 5 P(5) = 0.2813

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º y 2º*	9	16	56.25	100.00	0.000

3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	9	32		100.00	

TABLA 16.2.14. Nodo Número N = 6 P(6) = 0.0938

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º y 2º*	3	16	18.75	100.00	0.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	3	32		100.00	

TABLA 16.2.15. Nodo Número N = 7 P(7) = 0.3125

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.*	8	8	100.00	72.73	0.273
1º y 2º	3	16	18.75	27.27	0.727
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	11	32		100.00	

MUESTRA BASE = 64

TABLA 16.2.16.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN		
	Infantil	PrimSeg	Segundo
Infantil	14	0	0
	87.5	0.0	0.0
PrimSegu	1	27	2
	6.3	84.4	12.5
Tercero	1	5	14
	6.3	15.6	87.5
Total	16	32	16
	100.0	100.0	100.0

TABLA 16.2.17. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	14	16	87.50
1º y 2º	27	32	84.38
3º	14	16	87.50
	55	64	85.94

MUESTRA TEST = 32

TABLA 16.2.18.

Clase de afectación			
	Infantil	PrimSegu	Tercero
Infantil	8	3	0
	100.	18.8	0.0
PrimSegu	0	13	5
	0.0	81.3	62.5
Tercero	0	0	3
	0.0	0.0	37.5
Total	8	16	8

	100.0	100.0	100.0

TABLA 16.2.19. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	8	8	100.00
1º y 2º	13	16	81.25
3º	3	8	37.50
	24	32	75.00

16.3. RESULTADOS DE LOS CURSOS INFANTIL Y PRIMERO

TABLA 16.3.1.

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Muestra base	Máximo
A1	6	0.2500 +/- 0.165	0.0625	
A2	5	0.2500 +/- 0.165	0.0625	
A3	3	0.1250 +/- 0.121	0.1875	*
A4	2	0.5000 +/- 0.217	0.3750	
A5	1	1.0000 +/- 0.250	1.0000	

Coste de error inicial = 0.5000
Afectación inicial = INFA

CONCLUSIÓN
Sub árbol máximo N = 3
Número de nodos terminales = 3
Descripción del árbol después de la poda
Árbol escogido: 3 Nodos Terminales

MUESTRA	%	EFECTIVO
BASE	66.67	32
TEST	33.33	16
TOTAL	100.00	48

TABLA 16.3.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.0000

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Prim	.08	0.38	2			
				1	1	Var 7	R602
6	Prim	.00	0.09	6			
				3	3	Var 6	R502
7	Infa	.12	0.53	7			

TABLA 16.3.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN COSTE TEÓRICO = 0.0625

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Prim	.00	0.25	2			
				1	1	Var 7	R602
6	Prim	.20	0.31	6			
				3	3	Var 6	R502
7	Infa	.00	0.44	7			

Las tablas 16.3.4. y 16.3.5. proporcionan información del árbol podado, muestra base y muestra test, y en el que podemos seguir los perfiles de los distintos caminos. Las tablas siguientes -de la 16.3.6 a la 16.3.9- nos describen los cortes de la muestra base y, a partir de ellas, comentaremos las distintas respuestas discriminativas que sirven para dividir al nodo padre y a los demás nodos, hasta llegar a los nodos terminales y veremos los sujetos que se encuentran en cada uno de ellos. (Figura 16.3 recogida en el texto).

TABLA 16.3.4.

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 5.
Número de Nodos Terminales: 3.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	Inf.	0.50	1.00	7	R6	R602
2	12	37.50	1º	0.08	0.38		Nodo terminal	
3	20	62.50	Inf.	0.25	0.63	6	R5	R502
6	3	9.38	1º	0.00	0.09		Nodo terminal	
7	17	53.13	Inf.	0.12	0.53		Nodo terminal	

TABLA 16.3.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO

Número total de Nodos: 5.
Número de Nodos Terminales: 3.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	16	100.00	Inf.	0.50	1.00	7	R6	R602
2	4	25.00	1º	0.00	0.25		Nodo terminal	
3	12	75.00	Inf.	0.33	0.75	6	R5	R502
6	5	31.25	1º	0.20	0.31		Nodo terminal	
7	7	43.75	Inf.	0.00	0.44		Nodo terminal	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES. MUESTRA BASE, EFE. = 32

TABLA 16.3.6. Nodo Número = 2 P(2) = 0.3750

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	1	16	6.25	8.33	0.917
1º*	11	16	68.75	91.67	0.083
Total	12	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 6	=	R602

TABLA 16.3.7. Nodo Número N = 6 P(6) = 0.0938

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	16	0.00	0.00	1.000
1º*	3	16	18.75	100.00	0.000
Total	3	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 6	= R600	R601
Respuesta 5	= R502	

TABLA 16.3.8. Nodo Número N = 7 P(7) = 0.5313

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.*	15	16	93.75	88.24	0.118
1º	2	16	12.50	11.76	0.882
Total	17	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 6	=	R600	R601
Respuesta 5	=	R500	R501

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES. MUESTRA TEST, EFE. = 16

TABLA 16.3.9. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.2500

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
1º*	4	8	50.00	100.00	0.000
Total	4	16		100.00	

TABLA 16.3.10. Nodo Número N = 6 P(6) = 0.3125

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6)R (J/T)
Inf.	1	8	12.50	20.00	0.800
1º*	4	8	50.00	80.00	0.200
Total	5	16		100.00	

TABLA 16.3.11. Nodo Número N = 7 P(7) = 0.4375

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.*	7	8	87.50	100.00	0.000
1º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	7	16		100.00	

MUESTRA BASE = 32

TABLA 16.3.12.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Infantil	Primero
Infantil	15	2
	93.8	12.5
Primero	1	14
	6.3	87.5
Total	16	16
	100.0	100.0

TABLA 16.3.13. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
Infantil	15	16	93.75
Primero	14	16	87.50
	29	32	90.63

MUESTRA TEST = 16

TABLA 16.3.14.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Infantil	Primero
Infantil	7	0
	87.5	0.0
Primero	1	8
	12.5	100.0
Total	8	8
	100.0	100.0

TABLA 16.3.15. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
Infantil	7	8	87.50
Primero	8	8	100.00
	15	16	93.75

16.4. RESULTADOS DE LOS CURSOS INFANTIL Y SEGUNDO

La tabla 16 4.1. contiene al subárbol óptimo, es el indicado con * y es el árbol A_3 con 2 nodos terminales. Se trata del **más pequeño** subárbol en términos de número de nodos terminales de la secuencia correspondiente y al menor coste relativo, 0.1250, ya los otros tienen mayor coste relativo aunque menos nodos terminales.

Las tablas 16.4.2. y 16.4.3. muestran el árbol decisional binario podado para la muestra base y la muestra test respectivamente y la variable discriminante (Respuesta 14). Asi respecto del nodo terminal nº 2 nos proporciona la siguiente información: en la muestra de base, la probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 2 es de 0.47. Si recala en él, se afecta su grupo Segundo y acarrea un riesgo de error igual a 0.07.

TABLA 16.4.1.

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Muestra base	Máximo
A1	4	0.3750 +/- 0.195	0.1250	
A2	3	0.3750 +/- 0.195	0.1250	
A3	2	0.1250 +/- 0.121	0.1875	*
A4	1	1.0000 +/- 0.250	1.0000	

Coste de error inicial = 0.5000
Afectación inicial = INFA

CONCLUSIÓN
Sub árbol máximo N = 3
Número de nodos terminales = 2

Descripción del árbol después de la poda
Árbol escogido: 2 Nodos Terminales

MUESTRA	%	EFECTIVO
BASE	66.67	32
TEST	33.33	16
TOTAL	100.00	48

TABLA 16.4.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.0938

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Segu	.07	0.47	2		Var 15	R141
				1	1		R142
3	Infa	.12	0.53				
				3			

TABLA 16.4.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN COSTE TEÓRICO = 0.0625

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Segu	.00	0.44	2		Var 15	R141
				1	1		R142
3	Infa	.11	0.56				
				3			

TABLA 16.4.4.

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	Inf.	0.50	1.00	15	R14	R141 R142
2	15	46.88	2º	0.07	0.47		Nodo terminal	
3	17	53.13	Inf.	0.12	0.53		Nodo terminal	

TABLA 16.4.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	16	100.00	Inf.	0.50	1.00	15	R14	R141 R142
2	7	43.75	2º	0.00	0.44		Nodo terminal	
3	9	56.25	Inf.	0.11	0.56		Nodo terminal	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA DE BASE, EFE, = 32

TABLA 16.4.6. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.4688

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	1	16	6.25	6.67	0.933
2º*	14	16	87.50	93.33	0.067
Total	15	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142

TABLA 16.4.7. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.5313

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.*	15	16	93.75	88.24	0.118
1º	2	16	12.50	11.76	0.882
Total	17	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R140

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA TEST, EFE, = 16

TABLA 16.4 8. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.4375

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
2º*	7	8	87.50	100.00	0.000
Total	7	16		100.00	

TABLA 16.4.9. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.5625

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
Inf.*	8	8	100.00	88.89	0.111
2º	1	8	12.50	11.11	0.889
Total	9	16		100.00	

AFECTACIÓN INDIVIDUOS

MUESTRA BASE = 32

TABLA 16.4.10

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Infantil	Segundo
Infantil	15	2
	93.8	12.5
Segundo	1	14
	6.3	87.5
Total	16	16
	100.0	100.0

TABLA 16.4.11. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	15	16	93.75
2º	14	16	87.50
	29	32	90.63

MUESTRA TEST = 16

TABLA 16.4.12.

Clase de	CLASE DE ORIGEN

afectación	Infantil	Segundo
Infantil	8	1
	100.0	12.5
Segundo	0	7
		87.5
Total	8	8
	100.0	100.0

TABLA 16.4.13. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	8	8	100.00
2º	7	8	87.50
	15	16	93.75

16.5. RESULTADOS DE LOS CURSOS INFANTIL Y TERCERO

TABLA 16.5.1.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.0000

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
4	Tercero	.00	0.50	4			R501
				2	2	Var 6	R502
5	Infantil	.00	0.03	5			R141
				1	1	Var 15	R142
3	Infantil	.00	0.47				
				3			

TABLA 16.5.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN DEL COSTE TEÓRICO = 0.0000

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
4	Tercero	.00	0.50	4			R501
				2	2	Var 6	R502
5	Infantil	.00	0.03	5			R141
				1	1	Var 15	R142
3	Infantil	.00	0.47				
				3			

TABLA 16.5.3

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 5.
Número de Nodos Terminales: 3.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	Inf.	0.50	1.00	15	R14	R141
								R142
2	17	53.13	3º	0.06	0.53		R5	R501
								R502
4	16	50.00	3º	0.00	0.50		Nodo Terminal	
5	1	3.13	Inf	0.00	0.03		Nodo Terminal	
3	15	46.88	Inf	0.00	0.47		Nodo Terminal	

TABLA 16.5.4.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO

Número total de Nodos: 5.
Número de Nodos Terminales: 3.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	16	100.00	Inf.	0.50	1.00	15	R14	R141 R142
2	8	50.00	3º	0.00	0.50	6	R5	R501 R502
4	8	50.00	3º	0.00	0.50		Nodo Terminal	
5	0	0.00	Inf	0.00	0.00		Nodo Terminal	
3	8	50.00	Inf	0.00	0.50		Nodo Terminal	

DESCRIPCIÓN NODOS TERMINALES. MUESTRA BASE, EFE, = 32

TABLA 16.5.5. Nodo Número N = 4 P(4) = 0.5000

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	16	0.00	0.00	1.000
3º*	16	16	100.00	100.00	0.000
Total	16	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142
Respuesta 5	=	R501	R502

TABLA 16.5.6. Nodo Número N = 5 P(5) = 0.0313

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf*.	1	16	6.25	100.00	0.000
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	1	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R141	R142
Respuesta 5	=	R500	

TABLA 16.5.7. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.4688

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.*	15	16	93.75	100.00	0.00
3º	0	16	0.00	0.00	1.000
Total	15	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 14	=	R140

DESCRIPCIÓN NODOS TERMINALES. MUESTRA TEST. EFE. = 16

TABLA 16.5.8. Nodo Número N = 4 P(4) = 0.5000

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.	0	8	0.00	0.00	1.000
3º*	8	8	100.00	100.00	0.000
Total	8	16		100.00	

TABLA 16.5.9. Nodo Número N = 5 P(5) = 0.0000

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.*	0	8	0.00	0.00	0.000
3º	0	8	0.00	0.00	0.000
Total	0	16		100.00	

TABLA 16.5.10. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.5000

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
Inf.*	8	8	100.00	100.00	0.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	8	16		100.00	

AFECTACIÓN INDIVIDUOS

MUESTRA BASE = 32

TABLA 16.5.11

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Infantil	Tercero
Infantil	16	0
	100.0	0.0
Tercero	0	16
	0.0	100.0
Total	16	16
	100.0	100.0

TABLA 16.5.12. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	16	16	100.00
3º	16	16	100.00
	32	32	100.00

MUESTRA TEST = 16

TABLA 16.5.13.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Infantil	Tercero
Infantil	8	0
	100.0	0.0
Tercero	0	8
	0.0	100.0
Total	8	8
	100.0	100.0

TABLA 16.5.14. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
Inf.	8	8	100.00
3º	8	8	100.00
	16	16	100.00

16.6. RESULTADOS DE LOS CURSOS PRIMERO Y SEGUNDO

La tabla 16.6.1. contiene al subárbol óptimo, es el indicado con * y es el árbol A_6 con 1 nodo terminal. Se trata del **más pequeño** subárbol en términos de número de nodos terminales de la secuencia correspondiente y al menor coste relativo, 1.0000, hay otros con igual coste relativo aunque con más nodos terminales.

Las tablas 16.6.2. y 16.6.3. muestran el árbol decisional binario podado para la muestra base y la muestra test respectivamente y la variable discriminante (Respuesta 8). Así respecto del nodo terminal nº 2 nos proporciona la siguiente información: en la muestra de base, la probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 2 es de 0.81. Si recala en él, se afecta su grupo Primero y acarrea un riesgo de error igual a 0.38. La probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 3 es de 0.19. Si recala en él, se afecta su grupo Segundo y acarrea un riesgo de error igual a 0.00.

TABLA 16.6.1.

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Muestra base	Máximo
A1	8	1.0000 +/- 0.250	0.1875	
A2	6	1.0000 +/- 0.250	0.1875	
A3	5	1.0000 +/- 0.250	0.2500	
A4	3	1.0000 +/- 0.250	0.4375	
A5	2	1.1250 +/- 0.248	0.6250	
A6	1	1.0000 +/- 0.250	1.0000	*

Coste de error inicial = 0.5000
Afectación inicial = Prim

CONCLUSIÓN
Sub árbol máximo N = 6
Número de nodos terminales = 2

Descripción del árbol después de la poda
Árbol escogido: 2 Nodos Terminales

MUESTRA	%	EFECTIVO
BASE	66.67	32
TEST	33.33	16
TOTAL	100.00	48

TABLA 16.6.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.3125

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Prim	.38	0.81	2			R800
				1	1	Var 9	R802
3	Segu	.00	0.19				
				3			

TABLA 16.6.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN DEL COSTE TEÓRICO = 0.5625

T	"*"	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Prim	.55	0.69	2			R800
				1	1	Var 9	R802
3	Segu	.60	0.31				
				3			

TABLA 16.6.4.

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	1º	0.50	1.00	9	R8	R800
								R802
2	26	81.25	1º	0.38	0.81		Nodo terminal	
3	6	18.75	2º	0.00	0.19		Nodo terminal	

TABLA 16.6.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	16	100.00	1º	0.50	1.00	9	R8	R800
								R802
2	11	68.75	1º	0.55	0.69		Nodo term.	
3	5	31.25	2º	0.60	0.31		Nodo term.	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA DE BASE, EFE, = 32

TABLA 16.6.6. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.8125

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º*	16	16	100.00	61.54	0.385
2º	10	16	62.50	38.46	0.615
Total	26	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 8	=	R800	R802

TABLA 16.6.7. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.1875

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º	0	16	0.00	0.00	1.000
2º*	6	16	37.50	100.00	0.000
Total	6	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 8	=	R801

DESCRIPCIÓN NODOS TERMINALES. MUESTRA TEST. EFE. = 16

TABLA 16.6.8. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.6875

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º*	5	8	62.50	45.45	0.545
2º	6	8	72.00	54.55	0.455
Total	11	16		100.00	

TABLA 16.6.9. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.3125

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º	3	8	37.50	60.00	0.400
2º*	2	8	25.00	40.00	0.600
Total	5	16		100.00	

MUESTRA BASE = 32

TABLA 16.6.10.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Primero	Segundo
Primero	16	10
	100.0	62.5
Segundo	0	6
	0.0	37.5
Total	16	16
	100.0	100.0

TABLA 16.6.11. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
1º	16	16	100.00
2º	6	16	37.50
	22	32	68.75

MUESTRA TEST = 16

TABLA 16.6.12

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Primero	Segundo
Primero	5	6
	62.5	75.0
Segundo	3	2
	37.5	25.0
Total	8	8
	100.0	100.0

TABLA 16.6.13. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
1º	5	8	62.50
2º	2	8	25.00
	7	16	43.75

16.7. RESULTADOS DE LOS CURSOS PRIMERO Y TERCERO

La tabla 16.7.1. contiene al subárbol óptimo, es el indicado con * y es el árbol A_4 con 2 nodos terminales. Se trata del **más pequeño** subárbol en términos de número de nodos terminales de la secuencia correspondiente y al menor coste relativo, 0.1250, hay otros con igual coste relativo aunque con más nodos terminales.

Las tablas 16.7.2. y 16.7.3. muestran el árbol decisional binario podado para la muestra base y la muestra test respectivamente y la variable discriminante (Respuesta 16). Así respecto del nodo terminal nº 2 nos proporciona la siguiente información: en la muestra de base, la probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 2 es de 0.59. Si recala en él, se afecta su grupo Tercero y acarrea un riesgo de error igual a 0.21. La probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 3 es de 0.41. Si recala en él, se afecta su grupo Primero y acarrea un riesgo de error igual a 0.08.

TABLA 16.7.1.

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Coste relativo Muestra base	Máximo
A1	5	0.3750 +/- 0.195	0.1250	
A2	4	0.3750 +/- 0.195	0.1250	
A3	3	0.1250 +/- 0.121	0.1875	
A4	2	0.1250 +/- 0.121	0.3125	*
A5	1	1.0000 +/- 0.250	1.0000	

Coste de error inicial = 0.5000

Afectación inicial = Prim

CONCLUSIÓN

Sub árbol máximo N = 4

Número de nodos terminales = 2

Descripción del árbol después de la poda

Árbol escogido: 2 Nodos Terminales

MUESTRA	%	EFECTIVO
BASE	66.67	32
TEST	33.33	16
TOTAL	100.00	48

TABLA 16.7.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.1563

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Terc	.21	0.59	2			
				1	1	Var 17	R162
3	Prim	.08	0.41				
				3			

TABLA 16.7.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN DEL COSTE TEÓRICO = 0.0625

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	

2	Terc	.11	0.56	2			
				1	1	Var 17	R162
3	Prim	.00	0.44				
				3			

TABLA 16.7.4.

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	1º	0.50	1.00	17	R16	R162
2	19	59.38	3º	0.21	0.59		Nodo terminal	
3	13	40.63	1º	0.08	0.41		Nodo terminal	

TABLA 16.7.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	16	100.00	1º	0.50	1.00	17	R16	R162
2	9	56.25	3º	0.11	0.56		Nodo terminal	
3	7	43.75	1º	0.00	0.44		Nodo terminal	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA DE BASE, EFE, = 32

TABLA 16.7.6. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.5938

(1) Clase J	k(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º	4	16	25.00	21.05	0.789
3º*	15	16	93.75	78.95	0.211
Total	19	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 16	=	R162

TABLA 16.7.7. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.4063

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º*	12	16	75.00	92.31	0.077
3º	1	16	6.25	7.69	0.923
Total	13	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 16	=	R160	R161

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA TEST, EFE, = 16

TABLA 16.7.8. Nodo Número N = 2 P(2)= 0.5625

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1	1	8	12.50	11.11	0.889

3º*	8	8	100.00	88.89	0.111
Total	9	16		100.00	

TABLA 16.7.9. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.4375

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
1º*	7	8	87.50	100.00	0.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	7	16		100.00	

MUESTRA BASE

TABLA 16.7.10.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Primero	Tercero
Primero	12	1
	75.0	6.25
Tercero	4	15
	25.0	93.75
Total	16	16
	100.0	100.0

TABLA 16.7.11. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
1º	12	16	75.00
3º	15	16	93.75
	27	32	84.38

MUESTRA TEST

TABLA 16.7.12.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Primero	Tercero
Primero	7	0
	87.5	0.0
Tercero	1	8
	12.5	100.0
Total	8	8
	100.0	100.0

TABLA 16.7.13. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
1º	7	8	87.50
3º	8	8	100.00
	15	16	93.75

16. 8. RESULTADOS DE LOS CURSOS SEGUNDO Y TERCERO

La tabla 16.8.1. contiene al subárbol óptimo, es el indicado con * y es el árbol A_3 con 2 nodos terminales. Se trata del **más pequeño** subárbol en términos de número de nodos terminales de la secuencia correspondiente y al menor coste relativo, 0.5000, aunque hay otro con un coste relativo menor, tiene 4 nodos terminales.

Las tablas 16.8.2. y 16.8.3. muestran el árbol decisional binario podado para la muestra base y la muestra test respectivamente y la variable discriminante (Respuesta 16). Así respecto del nodo terminal nº 2 nos proporciona la siguiente información: en la muestra de base, la probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 2 es de 0.59. Si recala en él, se afecta su grupo Tercero y acarrea un riesgo de error igual a 0.21. La probabilidad para que un individuo recale en el nodo nº 3 es de 0.41. Si recala en él, se afecta su grupo Primero y acarrea un riesgo de error igual a 0.08.

TABLA 16.8.1.

SUBÁRBOL MÁXIMO (*)

Árbol	Nodos Terminales	Coste relativo Muestra Test	Muestra base	Máximo
A1	5	0.6250 +/- 0.232	0.1875	
A2	4	0.3750 +/- 0.195	0.1875	
A3	2	0.5000 +/- 0.217	0.3125	*
A4	1	1.0000 +/- 0.250	1.0000	

Coste de error inicial = 0.5000

Afectación inicial = Segu

CONCLUSIÓN

Sub árbol máximo N = 3

Número de nodos terminales = 2

Descripción del árbol después de la poda

Árbol escogido: 2 Nodos Terminales

TABLA 16.8.2.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE), COSTE APARENTE = 0.1563

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Terc	.21	0.59	2			
				1	1	Var 17	R162
3	Segu	.08	0.41	3			

TABLA 16.8.3.

ÁRBOL PODADO (MUESTRA TEST), ESTIMACIÓN DEL COSTE TEÓRICO = 0.2500

T	“*”	R(*/T)	P(T)		Nodo	Corte	
2	Terc	.33	0.75	2			
				1	1	Var 17	R162
3	Segu	.00	0.25	3			

TABLA 16.8.4.

DESCRIPCIÓN DEL ÁRBOL PODADO (MUESTRA BASE)

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	32	100.00	2º	0.50	1.00	17	R16	R162
2	19	59.38	3º	0.21	0.59		Nodo terminal	
3	13	40.63	2º	0.08	0.41		Nodo terminal	

TABLA 16.8.5.

PASO DE LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA TEST POR EL ÁRBOL PODADO

Número total de Nodos: 3.
Número de Nodos Terminales: 2.

T	N	%	*	R (*/T)	P (T)	VAR	Var. Corte	Corte
1	16	100.00	2º	0.50	1.00	17	R16	R162
2	12	75.00	3º	0.33	0.75		Nodo terminal	
3	4	25.00	2º	0.00	0.25		Nodo terminal	

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA DE BASE, EFE, = 32

TABLA 16.8.6. Nodo Número N = 2 P(2) = 0.5938

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
2º	4	16	25.00	21.05	0.789
3º*	15	16	93.75	78.95	0.211
Total	19	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 16	=	R162

TABLA 16.8.7 .Nodo Número N = 3 P(3) = 0.4063

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
2º*	12	16	75.00	92.31	0.077
3º	1	16	6.25	7.69	0.923
Total	13	32		100.00	

Regla de afectación

Respuesta 16	=	R160	R161

DESCRIPCIÓN DE NODOS TERMINALES, MUESTRA TEST, EFE, = 16

TABLA 16.8.8. Nodo Número N = 2 P(2)= 0.7500

(1) Clase J	(2) Efect.	(3) Total	(4) % T en J	(5) % J en T	(6) R (J/T)
2	4	8	50.0	33.33	0.667
3º*	8	8	100.00	66.67	0.333
Total	12	16		100.00	

TABLA 16.8.9. Nodo Número N = 3 P(3) = 0.2500

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Clase J	Efect.	Total	% T en J	% J en T	R (J/T)
2º*	4	8	50.0	100.00	0.000
3º	0	8	0.00	0.00	1.000
Total	4	16		100.00	

MUESTRA BASE

TABLA 16.8.10.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Segundo	Tercero
Segundo	12	1
	75.0	6.25
Tercero	4	15
	25.0	93.75
Total	16	16
	100.0	100.0

TABLA 16.8.11. Porcentaje aparente de bien clasificados

Clase	Ef.	/ sobre	%
2º	12	16	75.00
3º	15	16	93.75
	27	32	84.38

MUESTRA TEST

TABLA 16.8.12.

Clase de afectación	CLASE DE ORIGEN Segundo	Tercero
Segundo	4	0
	50.0	0.0
Tercero	4	8
	50.0	100.0
Total	8	8
	100.0	100.0

TABLA 16.8.13. Estimación del porcentaje teórico de bien clasificado

Clase	Ef.	/ sobre	%
2º	4	8	50.00
3º	8	8	100.00
	15	16	93.75