EQUILIBRIO CINÉTICO Y PROCESOS RADIATIVOS

- El MI está fuera del equilibrio termodinámico (TE).
  - La densidad de energía media de la radiación estelar corresponde a un TE de T=3K.
  - La energía media de estos fotones es de varios eV (T ~ 10^3 K de las atmósferas estelares).

- Las poblaciones relativas de los niveles atómicos y moleculares no se corresponde con los valores esperados en TE.

Equilibrio cinético

- **Simplificación**:
  - Distribución maxwelliana de velocidades de los átomos, electrones y moléculas.
  - Equipartición de energía cinética entre las diferentes partículas.

- **Justificación**:
  - Predominancia del H y He frente a otros elementos.
  - Las colisiones (energías < 10 eV) entre esos átomos, sus iones y los electrones son prácticamente elásticas.
  - La energía cinética es intercambiada muchas veces antes de que una colisión inelástica con un átomo más pesado, una molécula o un grano tenga lugar.

Una sola T cinética aplicable a los componentes del MI

Equilibrio Termodinámico

- En las estrellas tenemos TE porque:
  - Los procesos de emisión, absorción, difusión y colisión en las estrellas son muy rápidos respecto a las escalas de evolución dinámica.
  - En cada punto de su interior existe LTE (Equilibrio Termodinámico Local) y una sola T describe la distribución de energía de fotones y electrones.
  - La excitación e ionización del gas están determinados por las leyes de Boltzman y Saha.
  - El campo de radiación está caracterizado por la función de Planck.

3

Equilibrio Termodinámico

- Condiciones necesarias para LTE:

(1) El campo de radiación y la materia deben estar fuertemente acoplados a través de los procesos de emisión y absorción:

Cualquier cambio en las características de la radiación debe transmitirse inmediatamente a la materia y viceversa.

(2) Los recorridos libres medios de los fotones y de las partículas deben ser menores que la distancia en la que la temperatura tiene un cambio apreciable.

Suponemos LTE en el MI
Aunque sabemos que el MI no está en equilibrio.

4

Equilibrio Termodinámico

- Condición necesaria y suficiente para LTE:
  Densidades de materia y radiación grandes

A mayor densidad, mejores condiciones para LTE.

- La proporción de reacciones crece con la densidad de partículas interaccionantes.

– Los recorridos libres medios de las partículas y fotones decrecen con el aumento de densidad.

LTE requiere una fuerte interacción materia – radiación y un relativo aislamiento entre regiones con distinta temperatura.

Equilibrio Termodinámico

- En el MI todo sucede más lento:
  - La densidades de materia y radiación son menores.

En el MI no se puede aplicar LTE porque la frecuencia en las interacciones materia – radiación es menor.

– Absolutamente fuera de TE:
  Rayos cósmicos, fondo de radiación X, frentes de choque.

– En general: Las poblaciones de los niveles de átomos y moléculas no están en su distribución de equilibrio (la esperada en distribución maxwelliana de velocidades)

– PERO : Se usan sus ecuaciones como una aproximación a las condiciones reales.

Mejor aproximación a LTE en regiones donde las colisiones sean dominantes en la determinación de las transiciones.

COLISIONES Ión – Ión (1)

- <u>Fricción dinámica:</u>

  Frenado de un grupo de partículas moviéndose en un gas.

- **La velocidad v de una partícula que se desplaza en un gas cambia como resultado de los encuentros con otras partículas.**
- <u>Supongamos</u>:
  - Unas partículas test que poseen la misma velocidad v_t y calculemos su cambio de velocidad y momento al interaccionar con otras partículas.
  - Estas partículas de campo tienen densidad n_f y velocidad v_f.
  - Las partículas campo poseen una distribución isótropa de velocidades.
- <u>Entonces:</u>
  - El término que importa es el de cambio de la velocidad de las partículas test en la dirección paralela a v_t ya que la otra se cancela.

COLISIONES Ión – Ión (2)

t_s Tiempo de frenado: $$-<\Delta v_{||}>\, t_s = v_t$$

Donde $<\Delta v_{||}>$ es el cambio medio de velocidad de las partículas test por segundo.

- Las partículas test se difunden si son mucho menos masivas que las de campo y reducen su momento con poco cambio de energía.
- El tiempo de frenado es el tiempo (rms) requerido para una deflexión de 90º
- Si las partículas test son mucho más pesadas que las de campo, el frenado representa una pérdida de energía cinética y

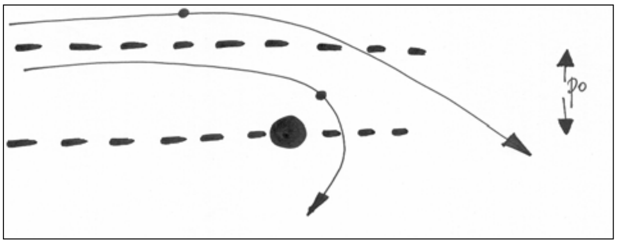
$$t_s = -v_t/(dv/dt)$$

COLISIONES Ión – Ión (3)

- Gas de partículas cargadas:
  - La atracción o repulsión electrostática producirá cambios apreciables en la velocidad tras cada encuentro.

  Supondremos encuentros entre partículas test poco masivas (e) con otras mucho más masivas (iones +) de energía cinética similar.

  Si la velocidad de las partículas de campo mucho menor que las de las partículas test, $v_f \ll v_t$ → v_f puede ser ignorada.



Las órbitas de las partículas test son hipérbolas.

9

COLISIONES Ión – Ión (4)

El ángulo entre las asíntotas de la órbita es 90º (deflexión 90º) si el parámetro de impacto es igual a:

$$p_o = \frac{Z_t\, Z_f\, e^2}{m_t\, v_t^2}$$

- A esa distancia la energía potencial es el doble de la energía cinética: $E_p = 2\ Ec$
- Para tal encuentro $\Delta v_{||} = v_t$
- El intervalo de tiempo medio por partícula test entre encuentros a menor distancia $p < p_o$ es:

$$t_s = \frac{1}{n_f\, v_t\, \pi\, p_o^2} = \frac{m_t^2\, v_t^3}{\pi\, n_f\, Z_t^2\, Z_f^2\, e^4}$$

Para electrones con protones en el MI, (Ne,T)=(1 cm^{-3} , 10^4 K), el tiempo de frenado $t_s(e,p) = t_s/100$

10

COLISIONES Ión – Ión (5)

Para colisiones de electrones más energéticos con electrones como partículas de campo,

$$t_s(e,e) \;=\; (n_p/n_e)\; t_s(e,p)$$

(para $m_e\, v_e^2 > 3\, kT$)

$t_s(e,e)\ \sim$ Tiempo de pérdida de energía $-E_e/(\Delta E_e)$

Las interacciones entre electrones e iones pesados produce poco cambio en la energía media de los electrones y $t_s(e,p)$ corresponde a un tiempo de deflexión.

Otros ejemplos:

$t_s(p,p)$ protones mas rápidos que la media con protones.

$t_s(i,e)$ idem iones con electrones.

11

COLISIONES Ión – Ión (6)

$t_s(e,e)$ $t_s(p,p)$

Son los tiempos necesarios para establecer una distribución maxwelliana de velocidades para electrones o protones.

Ritmo de aproximación a la equipartición de energía cinética de electrones y protones, en distribución maxwelliana de velocidades, a diferentes temperaturas cinéticas,

$$\frac{dT_p}{dt} \;=\; -\frac{2\,(T_p - T_e)}{t_s(p,e)}$$

Tiempo de equipartición para protones interaccionando con electrones. $t_s(p,e)/2$

Tiempo de equipartición para electrones interaccionando con electrones. $t_s(p,e)\; n_e/(2\; n_p)$

Ya que estas colisiones no pueden alterar la energía cinética total del sistema $3\; k(n_p\, T_p \;+\; n_e\, T_e)/2$

COLISIONES Átomo – Átomo (1)

- Estas interacciones son muy débiles ya que la nube de electrones se solapa.
- Se comportan como esferas duras, de forma que la sección eficaz de colisión:

$$\sigma_{nn} \approx \pi\,(r_1^2 + r_2^2) \rightarrow (r_{atomo} \sim 1\mathring{A}) \rightarrow \sigma_{nn} \approx 10^{-15}\,cm^2$$

Donde r_1 y r_2 son los radios de los átomos que colisionan.

El ritmo de colisiones está determinado por esta sección eficaz.

El recorrido libre medio:

$$l_c \approx (n_A\,\sigma_{nn})^{-1} \approx \frac{10^{15}}{n_H}\,cm$$

Siendo n_A la densidad (en número) media de átomos.

COLISIONES Átomo – Átomo (2)

- La velocidad atómica media de un gas a temperatura T:

$$\frac{3}{2}\,m_n\,v^2 = k\,T$$

- El tiempo de vida medio:

$$\frac{1}{\tau_{nn}} \approx \frac{v}{l_c} \approx \left(\frac{2\,k\,T}{3\,m_n}\right)^{1/2} n_n\,\sigma_{nn} = 7\times10^{-12}\,n_{nn}\,T^{1/2}\,s^{-1}$$

$$\tau_{nn} = 4.5\times10^{3}\,n^{-1}\,T^{-1/2} \text{ años}$$

La densidad es la magnitud importante (no la T)

- Ejemplos:

n_{nn}	T(K)	τ_{nn}	
1	80	500	años
10^4	10	1.7	meses
1	10^4	45	años

COLISIONES Ión – Átomo (1)

• El átomo se polariza en presencia del campo eléctrico del ión ya que actúan las fuerzas de Coulomb.

•La energía de la interacción:

$$U(r) \cong \vec{E} \,.\, \vec{p} = \frac{Z\,e}{r^2}\left(\alpha\,\frac{Z\,e}{r^2}\right) = \alpha\,\frac{Z^2\,e^2}{r^4}$$

Polarizabilidad del átomo:

▷ $\alpha \approx a_o^3$ polarizabilidad del átomo
($a_o = 0.529\mathring{A}$ radio del átomo de Bohr).

15

COLISIONES Ión – Átomo (2)

• Interacciones de dos tipos dependiendo de las masas y velocidades implicadas:

<u>Débil</u>

$$\alpha\,\frac{Z^2\,e^2}{r^4} \ll \frac{\mu\,v^2}{2}$$

<u>Fuerte</u>

$$\alpha\,\frac{Z^2\,e^2}{r^4} \gg \frac{\mu\,v^2}{2}$$

Masa reducida: $\mu = (m_1\,m_2)/(m_1 + m_2).$

Los límites entre ambos tipos de interacción están determinados por el parámetro de impacto crítico.

La sección efectiva de colisión:

$$\frac{\alpha\,Z^2\,e^2}{p_o^4} = \frac{\mu\,v^2}{2} \quad ; \quad \sigma_{ni} = \pi\,p_o^2 = \pi\,Z\,e\left(\frac{2\alpha}{\mu}\right)^{1/2}\frac{1}{v}$$

16

COLISIONES Ión – Átomo (3)

Como la densidad de iones y átomos es, en general, diferente no podemos decir como en el caso de colisiones entre átomos:

$$1/\tau_{ni} \approx v/l_v \approx v\, n_?\, \sigma_{ni}$$

Se deja fuera el término de densidad y se calcula un coeficiente que describe el ritmo de colisiones

$$k \;= <\sigma\, v> = \;\pi\, Z\, e \left(\frac{2\,\alpha}{\mu}\right)^{1/2} \;\approx\; 2\times10^{-9}\; cm^{+3}\; s^{-1}$$

(k independiente de v)

Ritmo por unidad de volumen:

$$n_i\, n_n \;\; <\sigma_{ni}\, v> \;\; cm^{-3}\; s^{-1}$$

17

COLISIONES Ión – Átomo (4)

El valor obtenido para k es similar para la mayoría de las reacciones ión-átomo exotérmicas como por ejemplo:

Reacción química entre ión-átomo: $CH^+ \; + \; H_2 \; \rightarrow \; CH_2^+ \; + \; H$

Reacción de intercambio de carga: $O^+ \; + \; H \; \rightarrow \; O \; + \; H^+$

Ejemplos:

▹ ión–átomo $\quad n_i = n_n = 1 \quad \rightarrow \quad 2\times10^{-9}\; cm^{-3}\; s^{-1}$

▹ átomo–átomo $\quad \tau_{nn} = 500$ años $(n_n = 1\; ;\; T = 80K)$
$\rightarrow\; 6.3\times10^{-11}\; s^{-1}$
$\rightarrow\; 6.3\times10^{-11}\; cm^{-3}\; s^{-1}$ en una caja de 1 cm^{-3}.

En este caso las reacciones ión-átomo son más frecuentes que las átomo-átomo en un factor 30.

18

Función de distribución de velocidades

- La función de distribución de velocidades de las partículas de un gas en TE es la de Maxwell.
  - Sea $f(v)dv$ la fracción de partículas con velocidades en el volumen $dv = dv_x\, dv_y\, dv_z$ centrado en v.

$$f(v) = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \qquad v_{max} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

- Se establece TE y distribución de velocidades ~ maxwelliana (estado más probable para Ec total cte) en una región si la E se intercambia en sus diferentes formas y se alcanza un estado estacionario sin flujo de energía.

19

Función de distribución de velocidades

Distribución Maxwelliana de velocidades si la Ec se intercambia entre todas las partículas del gas y no hay transferencia de E de otras formas.

- <u>PERO</u>: en el MI existe una cierta transferencia de energía entre Ec y radiación:

  Las <u>excitaciones colisionales</u> seguidas de <u>desexcitación radiativa espontánea</u> con la emisión de un fotón.

  - Son infrecuentes comparado con las colisiones elásticas → → desviación mínima de la distribución maxwelliana.
  - Desviación: Regiones HII ~ 10^{-6}
  - Regiones HI 10^{-5} – 10^{-2}

•Los átomos y electrones del MI en distribución de velocidades maxwelliana.

•Una sola T cinética es aplicable a todos los tipos de partículas.

20

Función de partición

Distribución Maxwelliana de velocidades →
→ La población relativa de los niveles de energía similar a los valores de TE.

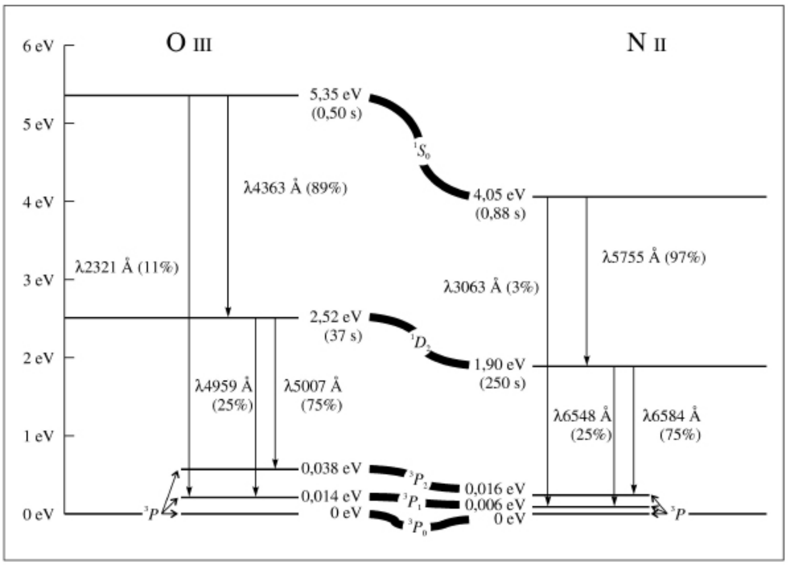
- Tendencia mayor si dominan las transiciones colisionales frente a la emisión y absorción de fotones:
  - Poblaciones de los estados excitados del átomo de H de número cuántico alto (colisiones con electrones).
  - Poblaciones de los niveles más bajos de metales (estados 1D y 1S de CI, OI, NII y OIII) (colisiones con electrones y átomos neutros de H).

Véase un ejemplo en la diapositiva siguiente

- En estos casos la distribución maxwelliana de velocidades, como en TE a una cierta T, tiende a establecer poblaciones relativas en los átomos que están de acuerdo con lo esperado en TE a esa T.

21

Niveles de E inferiores del OIII y NII



22

Equilibrio Termodinámico Equivalente

- TE con T = Tc real y ne como densidad electrónica.
  - La densidad de átomos del elemento X, r+1 veces ionizado es la misma que en TE:

Definiciones:

$n_j\,(X^{(r)})$	Densidad real y esperada de átomos del
$n_j^*\,(X^{(r)})$	elemento X r veces ionizados en el estado j
$b_j = n_j/n_j^*$	densidad observada / esperada en ETE

LTE $b_j = 1$

MI $n_j^* \neq n_j$ distribución de átomos en los diferentes estados es diferente de la esperada

$b_j \simeq 1$ si dominan colisiones frente a ionizaciones y recombinaciones.

Ecuación de Boltzmann (1)

$$\frac{n_j^*}{n_k^*} = \frac{g_{rj}}{g_{rk}}\, e^{-(E_{rj}-E_{rk})/kT}$$

$$\frac{n_j^*}{n_k^*} = \frac{g_{rj}}{g_{rk}}\, e^{-(E_{rj}-E_{rk})/kT} \Rightarrow \frac{n_k}{n_j} = \frac{b_k}{b_j}\frac{g_k}{g_j}\, e^{-h\,\nu_{jk}/kT}$$

Convenio:

$E_k > E_j \rightarrow E_{jk} > 0$

E_{rj}	energía del nivel j r veces ionizado
g_{rj}	peso estadístico (idem)
ν_{jk}	frecuencia de la transición $k \rightarrow j$

Densidad total de $X^{(r)}$ en todos los estados:

$$\sum_k n_k^*(X^{(r)}) = n^*(X^{(r)})$$

24

Ecuación de Boltzmann (2)

Fracción de los átomos $X^{(r)}$ excitados en el nivel j:

$$\frac{n_j^*(X^{(r)})}{n^*(X^{(r)})} = \left(\frac{g_{rj}\; e^{-E_{rj}/kT}}{\sum_k g_{rk}\; e^{-E_{rk}/kT}}\right)$$

Distribución de los átomos o iones en los diferentes niveles:

$$\frac{n_j^*(X^{(r)})}{n^*(X^{(r)})} = \frac{g_{rj}}{f_r}\; e^{-E_{rj}/kT}$$

Función de partición para el ión $X^{(r)}$

$$f_r = \sum_k g_{rk}\; e^{-E_{rk}/kT}$$

25

Ecuación de Saha (1)

$$\frac{n^*(X^{(r+1)})\; n_e}{n^*(X^{(r)})} = \frac{f_{r+1}\; f_e}{f_r}$$

$$f_e = 2\left(\frac{2\pi\; m_e\; k\; T}{h^2}\right)^{3/2} = 4.829 \times 10^{15}\; T^{3/2}$$

Diferentes niveles de ionización en equilibrio termodinámico.

Si se aproximan las funciones de partición por los primeros términos:

$$\frac{n^*(X^{(r+1)})\; n_e}{n^*(X^{(r)})} = \frac{2\; g_{r+1,1}}{g_{r,1}}\left(\frac{2\pi\; m_e\; k\; T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\phi_r/kT}$$

Energía necesaria para ionizar $X^{(r)}$ desde el estado fundamental (j=1)

$$\phi_r = E_{r+1,1} - E_{r,1}$$

26

Algunas propiedades importantes del LTE (1)

•Balance detallado:

Núm. Transiciones j <- k = Núm. Transiciones k <- j

- No hay cambio neto en la distribución de poblaciones
- Se puede expresar la probabilidad de transición de un nivel a otro en términos de la transición contraria.

•Equivalencia LTE y ETE con $b_j = 1$ ó $b_j / b_k = 1$

•LTE es sólo una aproximación que vale bajo ciertas circunstancias.

•Facilita los cálculos pero es peligrosa.
•La intensidad de la radiación no es como la de un BB (función de Planck) como en el caso de TE auténtico.
•Generalmente más débil que la indicada por la función de Planck ya que no todos los niveles están poblados.

27

Algunas propiedades importantes del LTE (2)

•La suposición de LTE no significa que Saha sea aplicable:

•Los procesos radiativos (recombinación radiativa sobre todo) son los que dominan X_i y no las colisiones en la mayor parte de los casos en los que LTE puede aplicarse.

28

TEMPERATURAS

- En el interior estelar el plasma está bien acoplado:
  - Una T define la distribución de velocidades, la distribución de ionizaciones, el espectro y la población de los niveles.
- En el MI estas propiedades están caracterizadas por diferentes T (debido al régimen de baja densidad).

Temperatura de Brillo (Tb)

La de un cuerpo negro que a esa frecuencia emitiera la misma intensidad

$$B_\nu(T_b) = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT_b}-1} \quad erg\ cm^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}\ rad^{-2}$$

29

TEMPERATURAS (2)

Temperatura Efectiva (Teff)

(Temperatura de la radiación): La de un cuerpo negro que coincida con su intensidad integrada.

$$\int_\nu B_\nu\, d\nu = \pi\, B = \pi\, I = \sigma\, T_{eff}^4$$

Temperatura de color (Tc)

La definida por la forma de la distribución espectral de energía (SED).

- Si el espectro es parecido a un cuerpo negro se ajusta a una distribución espectral de BB y se determina la T.
- A veces se usa la ley de desplazamiento de Wien y se determina la T que corresponde al pico (máximo) del espectro.
- Para BB perfecto Tc = Tb = Teff

TEMPERATURAS (3)

Temperatura Cinética (Tk)

La de la distribución maxwelliana de velocidades (LTE).

Para un gas térmico el perfil de las líneas,

$$I(\nu) = I_o \, exp[-\frac{(\nu - \nu_{jk})^2}{2\,\sigma^2}]$$

Y su anchura

$$\sigma = \frac{\nu_{jk}}{c}\sqrt{\frac{kT_K}{\mu}} \; (Hz)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT_K}{\mu}} \; (cm/s)$$

•Perfil de la línea representa Tk sólo si el ensanchamiento Doppler es despreciable respecto a esta anchura térmica.
•Tk diferente para átomos neutros, iones y electrones (diferente μ → distribución maxwelliana distinta)

31

TEMPERATURAS (4)

Temperatura de ionización (T_I)

La de la ecuación de Saha si describe la ionización existente.

Temperatura de excitación (T_{ex})

Caracteriza la población de niveles.

$$\frac{n_k}{n_j} = \frac{g_k}{g_j} \, e^{-h\,\nu_{jk}/kT_{ex}}$$

Temperatura de spin (T_S)

Temperatura de excitación para la línea HI 21cm.

Temperatura bolométrica (T_{bol})

La de un BB de igual I media que el continuo observado.
Para BB Tbol = Teff

Temperatura de antena (T_A)

La señal del radiotelescopio.

32

TEMPERATURAS (5)

•En el interior estelar:

$T_k = T_I = T_{ex} = T_c =$ T termodinámica

•En la Tierra:

$T_k = T_I = T_{ex} = 300$ K

$T_c = 6000$ K

Analizando la radiación

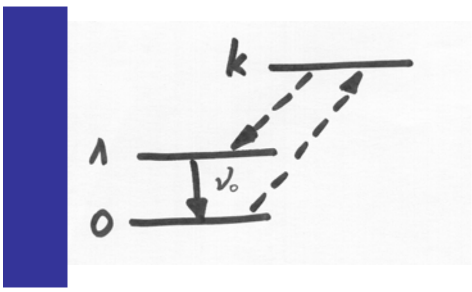
•LTE es aplicable pero no es realmente TE.

33

Distribuciones fuera de equilibrio

MASER

•Microwave amplification stimulated emission radiation.



•**Requisito previo**: inversión en la población de niveles mediante un bombeo a un nivel superior.

•Sobrepoblación del nivel 1, que lo convierte en metaestable si (0 → k → 1) a mayor ritmo que (1 → 0)

34

Espectro emitido

Ecuación de transporte

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

Espesor óptico

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu \, ds$$

Coeficiente de absorción

Kirchoff

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T)$$

Coeficiente de emisión

35

Coeficientes de Einstein

RADIACIÓN DE
CUERPO NEGRO

•Fotones en equilibrio termodinámico (Planck 1901)

$$B_\nu(T) = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\,\left[exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1}$$

•Ley de Wien (1894) (h ν >> kT)

$$B_\nu(T) = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\,exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

36

Coeficientes de Einstein

RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

- Procesos cuánticos en equilibrio:
  - Misma distribución de átomos en diferentes estados que la predicha por las leyes fundamentales de la termodinámica.

- Einstein atacó el problema de ajustar la función de Planck asignando probabilidades a los procesos de emisión y absorción.

- Si sólo se considera absorción y emisión espontánea resulta la ley de Wien.

- Einstein añadió la emisión estimulada para llegar a la expresión de la función de Planck.

- Ley de Wien (1894) ($h\nu \gg kT$)

37

Coeficientes de Einstein

RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

$\boxed{A_{nl}}$ probabilidad de transición espontánea.

$\boxed{B_{ln}\,\overline{J}}$ probabilidad de transición para absorción

Intensidad media integrada a lo largo del perfil de la línea:

$$\overline{J} = \int_0^\infty \phi_\nu \, J_\nu \, d\nu = \int_0^\infty \phi_\nu \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \, d\Omega \, d\nu$$

$$\int_0^\infty \phi_\nu \, d\nu = 1$$

38

Coeficientes de Einstein

RADIACIÓN DE
CUERPO NEGRO

$\boxed{B_{nl}\,\overline{J}}$ probabilidad de transición de emisión estimulada.

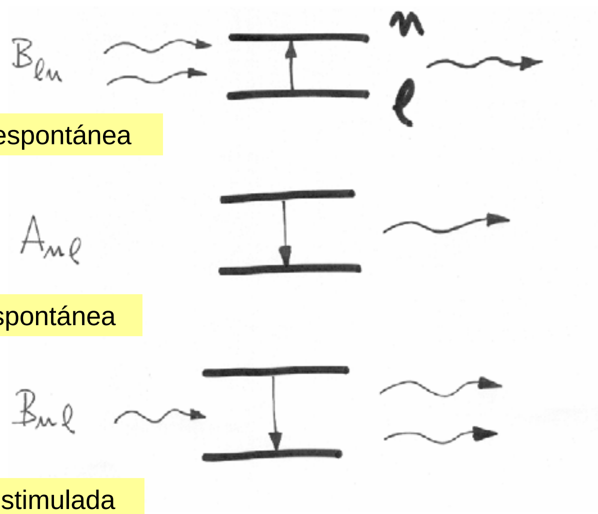
Si J_ν varía lentamente a lo largo de $\Delta\nu$ →
→ el perfil se aproxima por una delta de Dirac

$$B_{nl}\,\overline{J} = B_{nl}\,J_{\nu_o} \qquad\qquad B_{ln}\,\overline{J} = B_{ln}\,J_{\nu_o}$$

39

Coeficientes de Einstein

RADIACIÓN DE
CUERPO NEGRO



Absorción espontánea

Emisión espontánea

Emisión estimulada

40

Coeficientes de Einstein

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE EINSTEIN

Como puede aplicarse el balance detallado:

transiciones hacia i ≡ transiciones desde i

absorciones = emisiones espontáneas + emisiones estimuladas

$$\boxed{n_l\, B_{ln}\, \overline{J} \;=\; n_n\, A_{nl} \;+\; n_n B_{nl}\, \overline{J}}$$

$$\overline{J} \;=\; \left(\frac{n_n\, A_{nl}}{n_l\, B_{ln} \;-\; n_n B_{nl}}\right) \;=\; \frac{A_{nl}/B_{nl}}{(n_l/n_n)(B_{ln}/B_{nl}) - 1}$$

41

Coeficientes de Einstein

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE EINSTEIN

$$\frac{n_l}{n_n} \;=\; \frac{g_l}{g_n}\, exp(h\,\nu_o/kT)$$

$$\overline{J} \;=\; \frac{A_{nl}/B_{nl}}{(g_l\; B_{ln}/g_n\; B_{nl})\; e^{(h\,\nu_o/kT)} \;-\; 1}$$

Si $J_\nu = B_\nu$ y B varía lentamente con la frecuencia (TE).

$$\overline{J} \;=\; \int_0^\infty \phi_\nu\; J_\nu\; d\nu \;=\; B_\nu$$

Recuérdese $(\int_0^\infty \phi_\nu\; d\nu \;=1)$

42

Coeficientes de Einstein

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE EINSTEIN

Entonces para $\overline{J_\nu} = B_\nu$

$$g_l\, B_{ln} = g_n\, B_{nl}$$

Las emisiones estimuladas y las absorciones están relacionadas como los pesos estadísticos de los niveles.

$$A_{nl} = \frac{2\, h\, \nu^3}{c^2}\, B_{nl}$$

La cantidad de emisiones espontáneas frente a emisiones estimuladas va con un factor $(2\, h\, \nu^3)/c^2$

Las relaciones entre los coeficientes de Einstein son propiedades mecano-cuánticas, independientes de T y deben cumplirse incluso fuera de TE.

43

PROCESOS RADIATIVOS

DEFINICIONES DE TRANSPORTE RADIATIVO

La energía dE que atraviesa una superficie dA en el tiempo dt, dentro del rango dν de frecuencia por unidad de ángulo sólido

$$dE = I_\nu\, dA\, dt\, d\Omega\, d\nu$$

I_ν Intensidad específica
$erg\ cm^{-2}\ rad^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}$

$$I_\nu = dE\,/(dA\, dt\, d\Omega\, d\nu)$$

F_ν Flujo
$erg\ cm^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}$

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu\, d\Omega$$

u_ν Densidad de energía
$erg\ cm^{-3}\ Hz^{-1}$

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu\, d\Omega$$

J_ν Intensidad media
$erg\ cm^{-2}\ rad^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}$

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu\, d\Omega$$

44

PROCESOS RADIATIVOS

COEFICIENTE DE EMISIÓN j energía emitida por unidad de tiempo, ángulo sólido y volumen.
Coeficiente de emisión monocromático j_ν

$$dE = j_\nu \, dV \, d\Omega \, dt \, d\nu$$

EMISIVIDAD ϵ_ν energía emitida espontáneamente por unidad de frecuencia, tiempo y masa ($erg \; g^{-1} \; Hz^{-1} \; s^{-1}$)

$$dE = \epsilon_\nu \, \rho dV \, dt \, d\nu \, \frac{\Omega}{4\pi} \quad \rightarrow \quad \boxed{j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \, \rho}{4\pi}}$$

ρdV es la masa y se tiene en cuenta sólo la fracción radiada en el ángulo sólido Ω.

La intensidad añadida por emisión espontánea: $\boxed{dI_\nu = j_\nu \, ds}$

45

PROCESOS RADIATIVOS

COEFICIENTE DE ABSORCIÓN α_ν tiene unidades de inverso de distancia (cm^{-1}) ($\alpha_\nu > 0$ si se quita energía al haz)

$$\boxed{dI_\nu = -\alpha_\nu \, I_\nu \, ds}$$

$$\alpha_\nu = n \, \sigma_\nu = \rho \, k_\nu \rightarrow \mu = \frac{\rho}{n} = \frac{\sigma_\nu}{k_\nu} \rightarrow \boxed{k_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\mu}}$$

σ_ν	sección eficaz	cm^2
n	densidad de absorbentes, en número	cm^{-3}
k_ν	coeficiente de absorción masivo u opacidad: sección eficaz por unidad de masa del absorbente (μ)	$cm^2 \; g^{-1}$

k_ν opacidad para absorción (no por difusión)

46

PROCESOS RADIATIVOS

En este desarrollo se ha supuesto:

1) Sección eficaz mucho menor que la distancia entre partículas. $\sigma^{1/2} \ll d \sim n^{-1/3}$
2) Los absorbentes están repartidos aleatoriamente.
3) No hemos tenido en cuenta difusión.
   Se verán sus efectos cuando tratemos el tema del polvo.

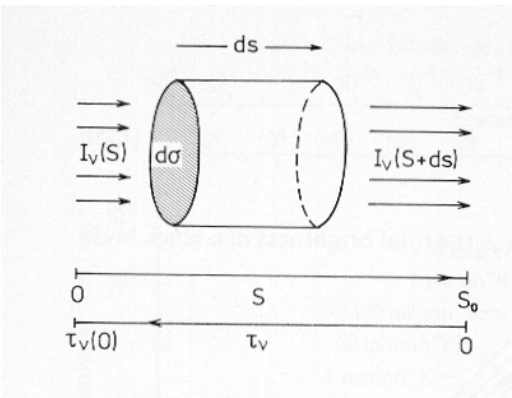
- La emisión estimulada también es proporcional a I como la absorción, pero de signo contrario.

- El coeficiente de absorción es realmente la suma de la absorción y de la emisión estimulada.
  - Puede por lo tanto ser mayor o menor que cero.
  - Si es menor que cero supone energía añadida al haz.

47

ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

¡ Sin difusión !



$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$

Su resolución pasa por conocer las contribuciones relevantes a los coeficientes de emisión y absorción.

48

ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

Se definen:

<u>espesor óptico</u> $d\tau_\nu = \alpha_\nu \, ds \; ; \; \tau_\nu = \int_{s_o}^{s} \alpha_\nu(s') \, ds'$

<u>función fuente</u>: $S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad ; \quad \boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu}$

τ_ν	espesor óptico	función de la frecuencia puede variar a lo largo del camino
S_ν	función fuente	razón entre los coeficientes de emisión y absorción

49

ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

Integrando

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} \, S_\nu(\tau'_\nu) \, d\tau'_\nu$$

$I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu}$	$I_\nu(0)$ disminuida por la absorción
$\int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$	S_ν integrada a lo largo del camino óptico y disminuida por la absorción.

Si el medio tiene temperatura, densidad y composición uniforme, la función fuente es independiente de la posición y por lo tanto del espesor óptico.

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + S_\nu\,(1 - e^{-\tau_\nu}) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}\,(I_\nu(0) - S_\nu)}$$

ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + S_\nu\, (1-e^{-\tau_\nu}) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}\, (I_\nu(0)-S_\nu)$$

Límite ópticamente espeso $\tau \to \infty \Rightarrow I_\nu \to S_\nu$

Límite ópticamente delgado $\tau \to 0 \Rightarrow I_\nu(\tau_\nu) \to I_\nu(0) + S_\nu\, \tau_\nu$

Donde hemos usado la aproximación: ($e^{-x} \simeq 1 - x$ para x pequeños)

Si sólo hay emisión espontánea → la intensidad aumenta con $\int j_\nu\, ds$ es decir linealmente.
Si sólo hay absorción → la intensidad disminuye exponencialmente

a) Si el espesor óptico grande, su valor no importa $I_\nu \to S_\nu$

b) Si es pequeño ($e^{-\tau} \to 1 - \tau$) el comportamiento exponencial se convierte en lineal

ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

- Radiación térmica (materia que emite y absorbe en TE) cumple la Ley de Kirchoff

$$S_\nu = B_\nu(T) \iff j_\nu = \alpha_\nu\, B_\nu(T)$$

Que no es lo mismo que decir: $I_\nu = B_\nu$
Que sólo es válido si $\tau \to \infty$

En general

$$\boxed{I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + B_\nu\, (1 - e^{-\tau_\nu})}$$

La radiación térmica es radiación de cuerpo negro sólo para medios ópticamente espesos.

ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

- Si el medio no es isotermo y $T = T(\tau)$ la integración es más complicada.

Usando la temperatura de brillo, $I_\nu = B_\nu(T_b) = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\,[e^{h\nu/kT_b} - 1]^{-1}$

- La ecuación de transporte radiativo como propagación de Tb en el régimen de Rayleight-Jeans (R-J, hν « kT).

$$I_\nu^{RJ}(T) = \frac{2\,\nu^2}{c^2}\,k\,T \quad \Rightarrow \quad T_b = T_b(0)\,e^{-\tau_\nu} + T\,(1 - e^{-\tau_\nu})$$

- En este régimen $I \propto$ Tb.
- Nótese que Tb no depende de la frecuencia para un cuerpo negro ya que $\tau \to \infty$ y Tb es la temperatura real del material.

53

COEFICIENTES DE EINSTEIN Y TRANSPORTE RADIATIVO

Coeficientes de absorción y emisión en términos de los coeficientes de Einstein

EMISIÓN

$$j_\nu = \frac{h\,\nu}{4\,\pi}\,n_n\,A_{nl}\,\phi(\nu)$$

•En cada transición se emite un fotón de energía hν distribuido en 4π rad^2.

•A_{nl} es el coeficiente de Einstein para emisión espontánea o (probabilidad de la transición por unidad de tiempo).

ABSORCIÓN

$$\alpha_\nu = \frac{h\,\nu}{4\,\pi}\,\phi(\nu)\,(n_l\,B_{ln} - n_n\,B_{nl})$$

•B_{nl} B_{ln} son los coeficientes de Einstein para absorciones y emisiones estimuladas (similar a una absorción negativa ya que depende de la intensidad como la absorción).

54

COEFICIENTES DE EINSTEIN Y TRANSPORTE RADIATIVO

Transporte radiativo en términos de los coeficientes de Einstein

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\,\nu}{4\,\pi}(n_l\,B_{ln} - n_n\,B_{nl})\,\phi(\nu)\,I_\nu + \frac{h\,\nu}{4\,\pi}\,n_n\,A_{nl}\,\phi(\nu)$$

•Recordando la definición de la función fuente

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad \rightarrow \quad S_\nu = \frac{n_n\,A_{nl}}{n_l\,B_{ln} - n_n\,B_{nl}}$$

55

COEFICIENTES DE EINSTEIN Y TRANSPORTE RADIATIVO

Transporte radiativo en términos de los coeficientes de Einstein

Las relaciones de Einstein ligan los coeficientes:

$$g_l\,B_{ln} = g_n\,B_{nl} \qquad\qquad A_{nl} = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\,B_{nl}$$

Conociendo uno de ellos determinamos los otros dos.
Así se puede escribir:

$$\alpha_\nu = \frac{h\,\nu}{4\,\pi}\,n_l\,B_{ln}\left(1 - \frac{g_l\,n_n}{g_n\,n_l}\right)\phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2\,h\,\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_n\,n_l}{g_l\,n_n} - 1\right)^{-1}$$

56

COEFICIENTES DE EINSTEIN Y TRANSPORTE RADIATIVO

Transporte radiativo en términos de los coeficientes de Einstein

Ejemplos:

(a) LTE $\quad (n_l/n_n) = (g_l/g_n)\ exp[(-h\ \nu_{nl})/kT]$ aplicable.

$$\alpha_\nu = \frac{h\ \nu}{4\ \pi}\, n_l\, B_{ln} \left[1 - e^{(-h\ \nu_{nl})/kT}\right] \phi(\nu)$$

Para determinar el coeficiente de absorción sólo necesitamos conocer un coeficiente de Einstein, el perfil de la línea y la temperatura.

Se cumple la ley de Kirchoff $\quad S_\nu = \dfrac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T)$

Espectro emitido

Ecuación de transporte $\longrightarrow$ $\dfrac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$

Espesor óptico

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu\, ds$$

Coeficiente de absorción

Kirchoff $\longrightarrow$ $S_\nu = \dfrac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T)$

Coeficiente de emisión

COEFICIENTES DE EINSTEIN Y TRANSPORTE RADIATIVO

Transporte radiativo en términos de los coeficientes de Einstein

Ejemplos:

(b) NO LTE $(n_l/n_n) \neq (g_l/g_n)\, exp[(-h\, \nu_{nl})/kT]$

Es el caso de la emisión sincrotrón.

(c) Máseres (poblaciones invertidas)

$$(n_n\, g_l)/(n_l\, g_n) = exp[(-h\, \nu_{nl})/kT] \Rightarrow (n_l/n_n) > (g_l/g_n).$$
$$(g_l/g_n) < 1 \Rightarrow n_l > n_n.$$

El nivel superior más poblado $n_n > n_l$ → $\alpha_\nu < 0$ $(\tau < 0)$

Ejemplo τ= -100 y amplificación 10^{43}.

59