Cálculo de incertidumbres y expresión de los resultados de las prácticas

Ningún experimento en el que se mide una cierta magnitud es absolutamente preciso, es decir, el resultado de la medida no coincide exactamente con el valor real de la magnitud. Si queremos utilizar el experimento para comprobar una teoría (o también para caracterizar un producto que va a ser comercializado) es necesario estimar la desviación del valor medido con respecto al valor real. La **teoría de errores** estudia cómo estimar esta desviación.
En estas notas se explica qué es la incertidumbre de una medida, cómo se calcula y cómo deben expresarse los resultados de las medidas.

1. Error e incertidumbre

En un procedimiento experimental que nos proporciona el valor de una magnitud X, el resultado no coincide exactamente con el valor real de dicha magnitud. La diferencia entre el valor real y el valor medido se llama **error de la medida**:

$$\boxed{\varepsilon = X_{med} - X_{real}} \qquad [1]$$

Los errores pueden clasificarse, según su origen, en sistemáticos y accidentales.

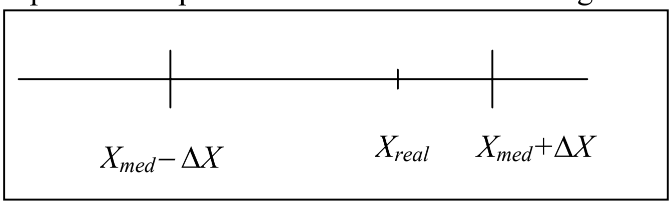
Los **errores sistemáticos** son debidos a defectos del método o del instrumento que dan lugar a una desviación de los resultados de las medidas siempre en el mismo sentido. Entre estos errores cabe destacar el *error de cero* como, por ejemplo, el que tiene una balanza cuyo cero no está bien ajustado por defecto de los brazos. Estos errores de deben detectar e intentar eliminar, ya que no admiten tratamiento estadístico.

Los **errores accidentales** son debidos a causas imposibles de controlar (p.e. cambios de temperatura, presión, vibraciones, etc.), que alteran el resultado a veces por defecto y otras por exceso. Habitualmente se hace la hipótesis de que estos errores se distribuyen al azar, siguiendo leyes estadísticas que permiten determinar el valor más probable, así como el margen de incertidumbre.

El error es siempre desconocido, pero puede estimarse una cota superior para su valor absoluto. Esta cota se denomina **incertidumbre de la medida** y se denota por ΔX. De la definición de error y de incertidumbre deducimos que el valor real de la medida se encuentra en el intervalo:

$$\boxed{X_{real} \in \left[X_{med} - \Delta X, X_{med} + \Delta X\right]} \qquad [2]$$

Gráficamente podemos representar esta situación de la siguiente forma:



X_{med} se encuentra en el punto medio del intervalo. Por ello, el resultado de una medida se escribe siempre en la forma:

$$\boxed{X = X_{medida} \pm \Delta X}$$

A veces es útil comparar el error de una medida con el valor de la misma. Se define para ello la **incertidumbre relativa** de una medida como el cociente:

$$\boxed{\delta = \frac{\Delta X}{X_{med}}}$$

Para distinguirla de la incertidumbre relativa, la incertidumbre ΔX se denomina **incertidumbre absoluta**. La incertidumbre relativa es útil para los comentarios de las prácticas. Sin embargo, para expresar el resultado de una medida hay que utilizar siempre las incertidumbres absolutas. Obsérvese que la incertidumbre relativa es adimensional (puede también expresarse en tanto por ciento) mientras que la absoluta tiene las mismas unidades que la magnitud medida.

Hemos visto la diferencia entre los conceptos *error* e *incertidumbre*. Distinguirlos facilita la comprensión de la teoría de errores. Sin embargo, por comodidad, es muy frecuente utilizar la palabra error para referirse a la incertidumbre de una medida.

2. Cálculo de incertidumbres

La incertidumbre se calcula de forma diferente dependiendo de si el valor de la magnitud se observa directamente en un instrumento de medida (**medida directa**) o si se obtiene manipulando matemáticamente una o varias medidas directas (**medida indirecta**). En una práctica calcularemos primero la incertidumbre de las medidas directas y luego la de las indirectas.

2.1. Cálculo de la incertidumbre en medidas directas

La forma de calcular la incertidumbre absoluta ΔX depende del número n de medidas efectuadas:

- **Una sola medida (*n*=1)**

En este caso tomaremos la incertidumbre debida a la precisión del instrumento de medida. Normalmente se toma igual a la división mínima de su escala (o, en el caso de balanzas, la pesa de menor valor) y la denotamos por p.

$$\Delta X = p$$

Hay casos en donde el procedimiento de medida aumenta la incertidumbre p y ésta no puede tomarse igual a la graduación de la escala. Por ejemplo, si se utiliza un cronómetro capaz de medir centésimas de segundo pero es el experimentador quien tiene que accionarlo, la precisión p de la medida será el tiempo de reacción del experimentador, que es del orden de dos décimas de segundo. Otro ejemplo es el caso de algunos experimentos de óptica, en los que el experimentador desplaza una lente hasta que una imagen proyectada en una pantalla se ve con nitidez. Aunque la regla del banco óptico en donde se encuentra la lente tiene precisión de un milímetro, la imagen puede verse nítida en un rango de 4 o 5 milímetros. En este caso, *p* sería igual a 4 o 5 milímetros. De estos ejemplos comprobamos que hay que entender bien el procedimiento experimental para encontrar el valor correcto de *p* y que no existe ninguna "receta" que nos dé ese valor en todos los casos posibles.

- **Más de una medida (n≥2)**

Veamos ahora cómo se puede estimar la incertidumbre debida a factores ambientales aleatorios. Para esta estimación es necesario repetir la medida varias veces *en las mismas condiciones*. En cada una de estas repeticiones de la medida los factores aleatorios afectan de forma diferente, lo que permite obtener información acerca de su magnitud.

Si repetimos n veces la medida de una magnitud X y denotamos por $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ los resultados de las n medidas, entonces el mejor valor es la **media aritmética**, es decir:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Tomaremos como incertidumbre absoluta ΔX la mayor entre la incertidumbre debida a la precisión del aparato p y la debida a factores aleatorios, que dependerá del número de medidas:

si $2 \leq n \leq 10$ $\quad \boxed{\Delta X = max(p, D_m)}$

si $n > 10$ $\quad \boxed{\Delta X = max(p, \sigma_m)}$

donde D_m es la desviación máxima y viene definida como:

$$D_m = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}$$

y σ_m es la desviación típica de la media (o error cuadrático de la media) y viene dada por la expresión:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - X_i\right)^2}{n\,(n-1)}}$$

Por tanto σ_m es una medida del grado de dispersión de la distribución de los valores alrededor de la media. Cuando σ_m es grande, los valores individuales están muy dispersos.

Finalmente, la medida directa debe expresarse en la forma (con los redondeos que se explican en la sección siguiente):

$$\boxed{X = (\overline{X} \pm \Delta X)\ unidades}$$

2.2. Cálculo de la incertidumbre de una medida indirecta

Una vez obtenida la incertidumbre de las medidas directas, calculamos las de las medidas indirectas. Supongamos que se desea medir la magnitud R=f(X,Y,Z), que es función de otras magnitudes X,Y,Z, que se han medido directamente, junto con sus incertidumbres directas, obteniéndose los valores:

$$X = \overline{X} \pm \Delta X\,;\; Y = \overline{Y} \pm \Delta Y\,;\; Z = \overline{Z} \pm \Delta Z$$

La incertidumbre de la magnitud *R* viene dada por:

$$\boxed{\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial X}\right|\Delta X + \left|\frac{\partial R}{\partial Y}\right|\Delta Y + \left|\frac{\partial R}{\partial Z}\right|\Delta Z}$$

- Ejemplo 1: en el caso en que hubiéramos medido espacios y tiempos para determinar la velocidad de un móvil (v=s/t) tendríamos:

$$\Delta V = \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|\Delta s + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|\Delta t = \left|\frac{1}{\bar{t}}\right|\Delta s + \left|\frac{-\bar{s}}{\bar{t}^2}\right|\Delta t$$

- Ejemplo 2: determinamos la aceleración *g* de la gravedad utilizando el péndulo simple. Tomamos medidas de la longitud del péndulo *L* y del periodo de oscilación *T*, obteniendo:

L=(1.01 ± 0.01) m
T=(1.13 ± 0.01) s
Nótese que hemos tomado como incertidumbres de la medida de la longitud ΔL y del periodo Δ*T* la precisión de la regla y del cronómetro, respectivamente.
A partir de la expresión:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

determinamos un valor g=9.83 m/s^2. A continuación calculamos la incertidumbre de esta medida indirecta

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial L}\right|\Delta L + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T = \left|\frac{4\pi^2}{T^2}\right|\Delta L + \left|\frac{-2\cdot 4\pi^2 L}{T^3}\right|\Delta T = 0.86 \cong 0.9$$

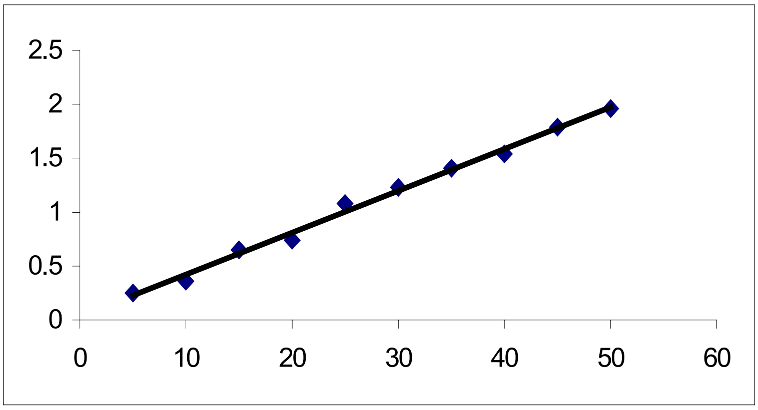
por tanto: g=(9.8±0.9) m s^{-2}

3. Ajuste lineal de datos experimentales

Hay otras formas de obtener el valor de una magnitud a partir de medidas directas. Nos ocuparemos aquí de la **regresión lineal**, un método de gran utilidad en ciencias experimentales. Utilizamos regresiones lineales cuando sabemos que la relación entre dos magnitudes X e Y es *lineal*, es decir:

$$\boxed{Y = mX + c}$$

en donde m se denomina **pendiente** y c **ordenada en el origen**. Cuando dos magnitudes se relacionan linealmente, la gráfica de los puntos (X,Y) es una recta de pendiente m que corta el eje vertical en el punto $(0,c)$. Si obtenemos mediante medidas (directas o indirectas) n pares de valores (X_i, Y_i), con $i=1,2,\ldots,n$, y representamos estos pares de valores en el plano, los puntos no estarán perfectamente alineados (ver figura), debido a los errores experimentales.



La regresión lineal nos permite obtener la recta *que más se aproxima a dichos puntos*. Se utiliza el método de los mínimos cuadrados, es decir, si la desviación de la lectura iésima es

$$Y_i - mX_i - c$$

los valores mejores de m y c serán aquellos que minimicen la suma de los cuadrados de las desviaciones.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - mX_i - c)^2$$

Por tanto, a partir de las siguientes expresiones (condición de mínimo) podremos obtener m y c

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

La pendiente y la ordenada en el origen de dicha recta vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\boxed{m = \frac{E}{D}} \qquad \boxed{c = \overline{Y} - m\overline{X}}$$

en donde

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) - n\overline{X}^2$$

$$E = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \right) - n\overline{X}\,\overline{Y}$$

siendo

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

En cualquier regresión <u>es necesario realizar la gráfica</u> con los puntos experimentales y la recta ajustada. De este modo es fácil comprobar si la regresión está bien hecha, ya que la recta ajustada debe pasar cerca de los puntos experimentales.

En este curso no calcularemos las incertidumbres de m y c de forma rigurosa. Estas incertidumbres dependen de la incertidumbre de las medidas X_i, Y_i, así como de la "holgura" con la que podemos mover y girar la recta sin que se aleje de los puntos experimentales. Si esta holgura fuera muy amplia, lo cual ocurrirá siempre que los puntos experimentales no estén bien alineados, habría que revisar la hipótesis de que la relación entre X e Y es lineal.

4. Presentación de resultados

Las calculadoras que utilizamos para realizar los cálculos dan muchas más cifras de las que son físicamente representativas. Si el valor de una medida de volumen es (158.993±9.147) cm^3, es absurdo precisar tres cifras decimales en el valor que uno da por bueno cuando la incertidumbre de esa medida es del orden de una decena. Será necesario redondear tanto el valor aceptado como su incertidumbre. Por ejemplo carece de sentido expresar una incertidumbre como 9.147 cm^3, ya que si hay nueve unidades de error, ¿qué importan las milésimas frente a este número?. Para redondear seguiremos los siguientes criterios.

1. La incertidumbre debe tener una sola cifra significativa. Se denomina cifra significativa de la incertidumbre a la primera cifra distinta de cero, esté antes o después de la coma decimal. Si la primera cifra que se omite es menor que 5, se elimina sin más (**redondeo por defecto**). Si es mayor o igual a 5, se aumenta en una unidad la última cifra significativa (**redondeo por exceso**).

Ejemplos:

0.0053 → 0.005
0.0055 → 0.006
0.0056 → 0.006
24.56 → 20
183 → 200
9.51 → 10
9.49 → 9

2. El valor aceptado (sea el valor medio de las medidas o el valor calculado, según se trate de medidas directas o indirectas), se redondea de forma que su última cifra significativa sea del mismo orden que la cifra significativa de la incertidumbre absoluta.
   Por ejemplo si la incertidumbre es 0.005, el valor aceptado deberá redondearse para tener tres decimales
   1.38342 se redondea a 1.383
   1.38371 se redondea a 1.384
   1.38352 se redondea a 1.384
   1.3 se redondea a 1.300
   Supongamos que tras el proceso de medida y cálculo, se han obtenido los siguientes resultados de velocidad
   $$\bar{v} = 54678.13\ cm/s \quad , \quad \Delta v = 129.76\ cm/s$$
   la expresión correcta del resultado será
   $$v = (54700 \pm 100)\ cm/s$$