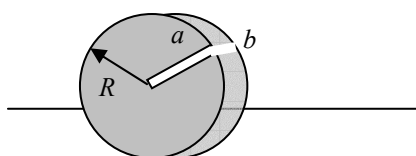


Problemas de Mecánica y Ondas II.

Boletín nº 3. (Sólido)

1. Un cilindro de altura h y radio R_1 tiene una de sus bases pegada tangencialmente, en su centro, a la superficie de una esfera de radio R_2 . Ambos cuerpos tienen la misma masa M y la misma densidad. Se supone que el centro de masas del sistema completo (cilindro y esfera) está en el punto de contacto. Calcular el momento de inercia del sistema respecto a un eje perpendicular al eje de simetría de aquel y que pasa por el centro de masas (expresar el resultado final en términos de h).
2. Sea un disco como el de la figura de radio R y espesor a , cuya masa total m , se distribuye uniformemente, pero que tiene una hendidura desde el centro hasta el borde, que atraviesa todo el espesor a , y de anchura b ($b \ll R$). Calcule:



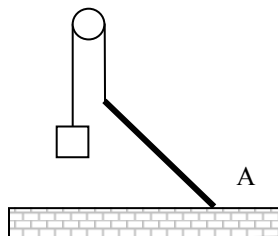
- a) la posición del centro de masas,
- b) los momentos principales de inercia del sólido, indicando las direcciones principales,
- c) la posición de equilibrio del disco cuando se encuentra de canto sobre un plano horizontal (ver figura)

Ayudas: Momento de inercia de un disco respecto a un diámetro: $\frac{1}{4} m R^2$; momento de inercia de una varilla respecto a un eje transversal por el extremo $\frac{1}{3} m l^2$.

3. Probar que la energía cinética de una barra homogénea de masa m es $T = (m/6)(\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2)$, donde \vec{u} y \vec{v} son las velocidades de los extremos.
4. Hallar la energía cinética de un cilindro de masa m , radio r y altura h , que gira con velocidad angular ω constante alrededor de un eje que forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje del cilindro y que pasa por su centro de masas, que es un punto fijo.
5. Se considera un cono homogéneo de masa m , altura h , y radio de la base r , sobre el cual se coloca un sistema de referencia con origen en el vértice y el eje Z coincidiendo con el eje del cono. Los elementos de la matriz de inercia respecto a estos ejes son $I_{xx} = I_{yy} = (3m/5)(r^2/4 + h^2)$, $I_{zz} = (3/10)m r^2$ y los productos de inercia son nulos. Calcular el momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje X que sea tangente a la circunferencia de la base. (Dato: El centro de masas de un cono homogéneo está situado a una distancia $3h/4$ de su vértice). Suponiendo que el vértice es un punto fijo, calcular el momento angular \vec{L} respecto al vértice y la energía cinética de rotación T del cono cuando la velocidad angular es $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ donde \vec{u} es un vector unitario según la generatriz del cono contenida en el plano XZ .
6. Encontrar los momentos principales de inercia de una placa rectangular de masa M y lados a y b . ¿Cuál es el par que se necesita para hacer rotar la placa alrededor de una de las diagonales con velocidad angular constante $\vec{\omega}$?
7. Un disco circular homogéneo de masa m , radio R y espesor despreciable se mueve libremente y sin rozamiento alrededor de su centro que permanece fijo. Estudiar el movimiento del disco sabiendo que en el instante inicial gira con una velocidad $\vec{\omega}$ que forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje del disco. ¿Cuánto vale el módulo del momento angular?
8. Un paralelepípedo homogéneo de masa m , recto, de base cuadrada de lado a y altura h , se mueve en ausencia de fuerzas externas y de modo que el centro O de una de las bases

cuadradas es fijo. Sean \hat{i}, \hat{j} y \hat{k} tres vectores ortonormales solidarios con el sólido y dirigidos según sus aristas, con origen en O , de forma que dicha base está en el plano que forman \hat{i} , y \hat{j} . Los momentos principales de inercia en este sistema de referencia son $I_x = I_y = (m/12)(a^2 + 4h^2)$ y $I_z = (m/6)a^2$ y los productos de inercia son nulos. En dicho sistema de referencia, la velocidad angular inicial es $\omega_0(1,0,1)$. Sabiendo que $a = 2\sqrt{3}h$, calcular la velocidad angular en un instante t tal que $\omega_0 t = \pi$.

9. El sistema de la figura está constituido por una barra homogénea y delgada, de longitud ℓ y masa m . El extremo A de la barra está inicialmente sujeto, de forma que el ángulo entre la barra y el suelo es 60° . El extremo opuesto de la barra se anuda a una cuerda que pasa por una polea y se suspende una pesa de masa m . Determine la aceleración inicial de la pesa si se rompe el enganche A . Dato: $I_c = (1/12)m\ell^2$.



10. Una varilla rígida y homogénea de masa m y longitud ℓ está inicialmente en posición vertical sobre el suelo. Si la barra comienza a caer con velocidad inicial despreciable, determine la velocidad del centro de masas en función del ángulo que forma la barra con la vertical. Desprecie el rozamiento. Dato: $I_c = (1/12)m\ell^2$.
11. Un disco homogéneo, de radio R y masa m , rueda sin deslizar por un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. El disco siempre se mueve en el mismo plano vertical. Determine: a) la aceleración del centro de masas y la aceleración angular, b) fuerza de rozamiento que ejerce el plano, c) valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que el cilindro ruede sin deslizar.
12. La figura representa un cuerpo sólido que está formado por un disco de radio R y masa $2m$ (espesor muy pequeño), una barra de masa despreciable de longitud $L = 4R$, y dos partículas de masa m cada una, en los extremos de la barra. La barra atraviesa, en el punto medio, el disco perpendicularmente por su centro. Calcular el momento de inercia del sistema respecto de un eje que pasa por el centro de masas y forma un ángulo $\varphi = 30^\circ$ con la barra.

