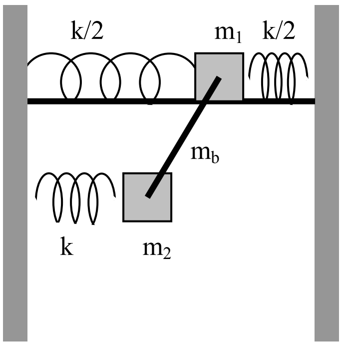
Problemas de Mecánica y Ondas II.
Boletín nº 4. (Oscilaciones)

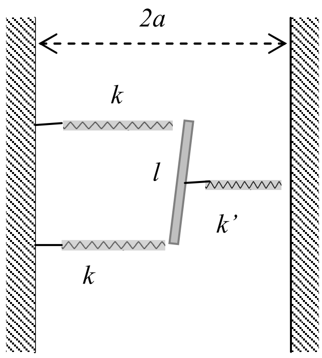
1. Un aro rígido de masa $2m$ y radio R puede rotar sin deslizar sobre una línea recta horizontal. Una partícula P de masa m puede moverse sin rozamiento a lo largo del aro. Determine las frecuencias de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio

2. Hallar las frecuencias normales de oscilación de una cadena circular formada por $N = 3$ masas equidistantes iguales enlazadas mediante muelles idénticos de constante recuperadora k. Generalizar al caso de N arbitrario.

3. Considérese el sistema de la figura moviéndose en un plano horizontal sin rozamiento. La mas $m_1 = m$ se mueve por una guía perpendicular a las paredes. Está conectada al extremo de una barra de masa $m_b = 6m$ y longitud l mediante un pivote. El otro extremo de la barra pivota en la masa $m_2 = m$. La longitud natural de los muelles es l_0 y la separación entre ambas paredes es $2l_0$. Calcular las frecuencias y las coordenadas normales del sistema.

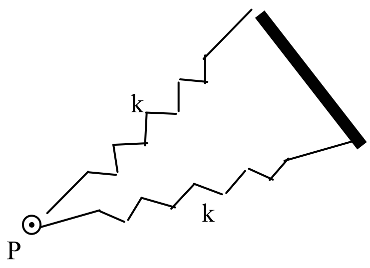


4. El sistema de la figura es una barra homogénea de longitud l que está sometida a la acción de tres muelles en un plano horizontal. Dos de ellos, de constante elástica k, unen cada extremo de la barra con dos puntos de la pared izquierda, separados una distancia l. El otro muelle (de constante k'), une un punto fijo de la otra pared equidistante con los anteriores, y el centro de la barra. Todos los muelles tienen longitud natural a y la distancia entre las paredes es $2a > l$. Determine:



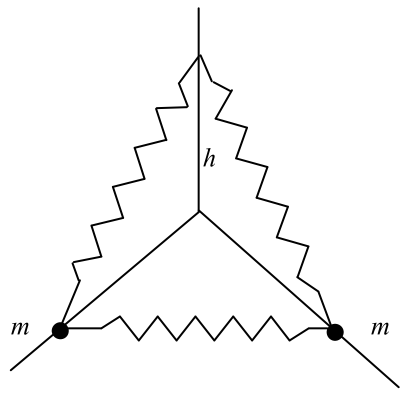
4.1. Posición de equilibrio del sistema
4.2. Lagrangiano del sistema para pequeñas oscilaciones.
4.3. Ecuaciones del movimiento y frecuencias de los modos normales.

5. Una barra homogénea y muy delgada, de longitud l y masa m, está unida a sendos muelles ideales de constante recuperadora k y longitud natural despreciable. El conjunto se mueve sobre un plano horizontal. Se coloca una argolla, de masa despreciable, en el extremo opuesto de cada muelle. Se introduce una pequeña guía P en ambas argollas, y aquella se coloca fija y perpendicular al plano de movimiento, como indica la figura. Desprecie cualquier tipo de rozamiento y determine para este sistema

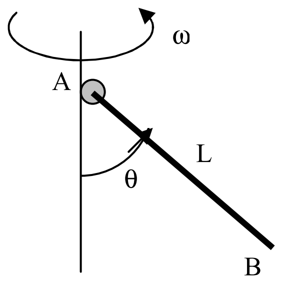


a) Grados de libertad y su posición de equilibrio.
b) Lagrangiano cerca de la posición de equilibrio.
c) Frecuencias normales de vibración.
d) Coordenadas normales.

6. Tres guías fijas y horizontales están unidas en un mismo vértice, formando un ángulo relativo entre ellas de 120º. En dos de ellas se ensartan dos partículas de la misma masa m. Tres muelles iguales de longitud natural l y constante recuperadora k unen a las partículas y a su vez dos de ellos están unidos rígidamente por uno de sus extremos a un punto de la tercera guía que está separado una distancia $h=l/\sqrt{3}$ del vértice. Calcular la posición de equilibrio del sistema así como las frecuencias normales.



7. Una barra homogénea AB muy delgada, de longitud L y masa m, está articulada en el extremo A y unida a un eje vertical, como indica la figura. El eje gira con velocidad angular constante $\omega=\sqrt{3g/L}$. Determine para la barra:



1. Grados de libertad.
2. Energía cinética en función de las coordenadas generalizadas.
3. Ecuación de movimiento.
4. Ángulo θ de equilibrio estable.
5. Frecuencia de las oscilaciones pequeñas en torno a la posición de equilibrio calculada en el apartado anterior.

8. Una molécula diatómica se encuentra confinada en una trampa magnética. Para describir sus modos de vibración longitudinales se propone un modelo donde ambos átomos se consideran partículas clásicas unidas por un muelle de longitud natural l y constante recuperadora k. Además, se admite que los dos átomos se mueven sobre la misma línea recta. El potencial de confinamiento de la molécula se sustituye por otro de la forma $(1/2)k'(x_1^2+x_2^2)$, siendo x_i la posición de cada átomo respecto a centro de la trampa sobre la recta de movimiento y $k' > 0$. Determine:

a) Grados de libertad de la molécula en este modelo.
b) Posición de equilibrio.
c) Lagrangiano cerca de la misma.
d) Frecuencias normales.

9. Un disco uniforme de masa M y radio R, puede girar libremente con respecto a su eje fijo horizontal. En un punto del borde del disco se suspende un péndulo simple de masa $m = M$ y longitud L=3/2 R. Determine:

a) número de grados de libertad y posición de equilibrio del sistema
b) el lagrangiano del sistema cerca de la posición de equilibrio
c) frecuencias de las oscilaciones de pequeña amplitud en torno a la posición de equilibrio