Cinemática.

Descripción Lagrangiana

Se realiza en función del movimiento de las partículas que forman el fluido. Necesita identificar dichas partículas utilizando ***coordenadas de numeración.***

$v(x_n, y_n, z_n, t)$ por ejemplo partícula que pasa por (x_1, y_1, z_1) en $t = 0$:

$$v(x_{10}, y_{10}, z_{10}, t)$$

Descripción Euleriana:

Consiste en el estudio del movimiento según las velocidades de los puntos que ocupa el fluido sin importar qué partículas están en cada instante en cada posición. No reconoce a las partículas.

$$v(x, y, z, t)$$

Derivada sustancial de una magnitud (escalar o vectorial) (derivada material)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

Caso de la velocidad $\quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ derivada local

$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ termino advectivo.

Gradiente de la velocidad $\quad \vec{v} \ : \quad \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$

Descripción del flujo (definiciones):

<u>línea fluida:</u> línea formada por una sucesión de partículas adyacentes.
(también: elemento fluido, superficie fluida, volumen o parcela fluida)

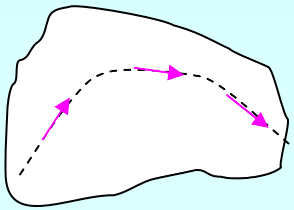
<u>trayectoria:</u> Recorrido de una determinada partícula en el tiempo.

<u>línea de traza:</u> Línea fluida formada por las partículas que han pasado por determinado punto. (p. ej. emitidas desde un foco).

<u>línea de corriente:</u> Línea tangente al vector velocidad en cada punto para un instante dado.

Se cumple que

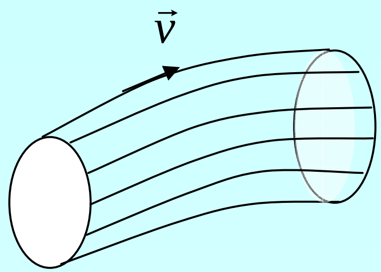
$$\vec{v} \parallel d\vec{l} \quad \text{con} \quad \vec{v} = (u, v, w) \quad \text{y} \quad d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$



por lo que existen proporcionalidad entre componentes

$$\frac{\left|d\vec{l}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

<u>tubo de corriente:</u> volumen encerrado por la superficie engendrada por las líneas de corriente que se apoyan en una línea fluida cerrada.



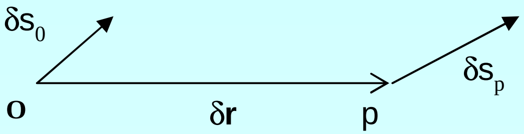
En **flujo estacionario** las líneas de corriente coinciden con las trayectorias.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

DEFORMACIÓN EN UN FLUIDO.

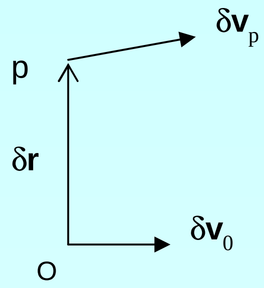
Cuando en un sólido se aplican fuerzas externas se puede producir una deformación: *Desplazamientos relativos entre las partículas que lo forman*.

En los fluidos la deformación que se produce se puede medir según la variación del campo de velocidades.



$\delta \mathbf{s_p} = \delta \mathbf{s_0} + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{s}$

Deformación en el sólido



$\delta \mathbf{v_p} = \delta \mathbf{v_0} + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v}$

Deformación en el fluido

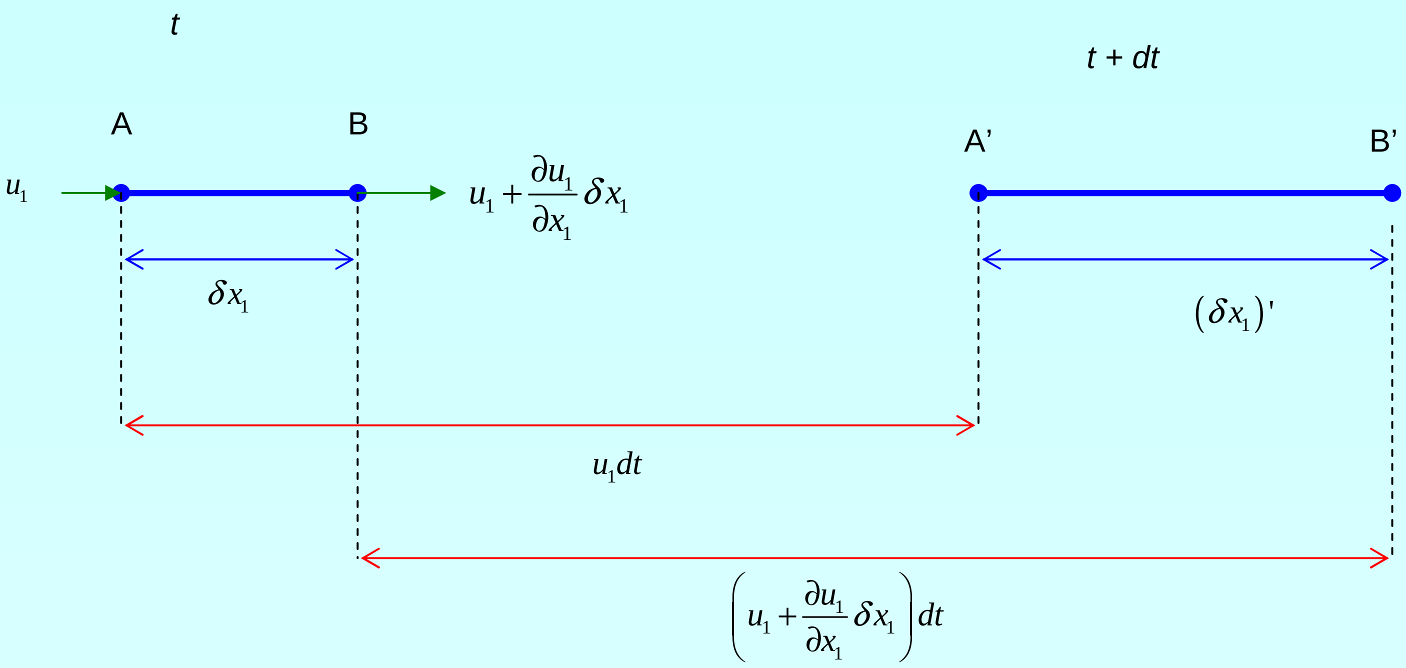
Tensor de deformación

Sea $\mathbf{v}=(u_1,u_2,u_3)$; $\mathbf{r}=(x_1,x_2,x_3)$

Tensor deformación
de velocidad

$$\nabla\mathbf{v}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Deformación lineal.



$$\frac{1}{\delta x_1}\frac{d}{dt}(\delta x_1) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Deformaciones lineales

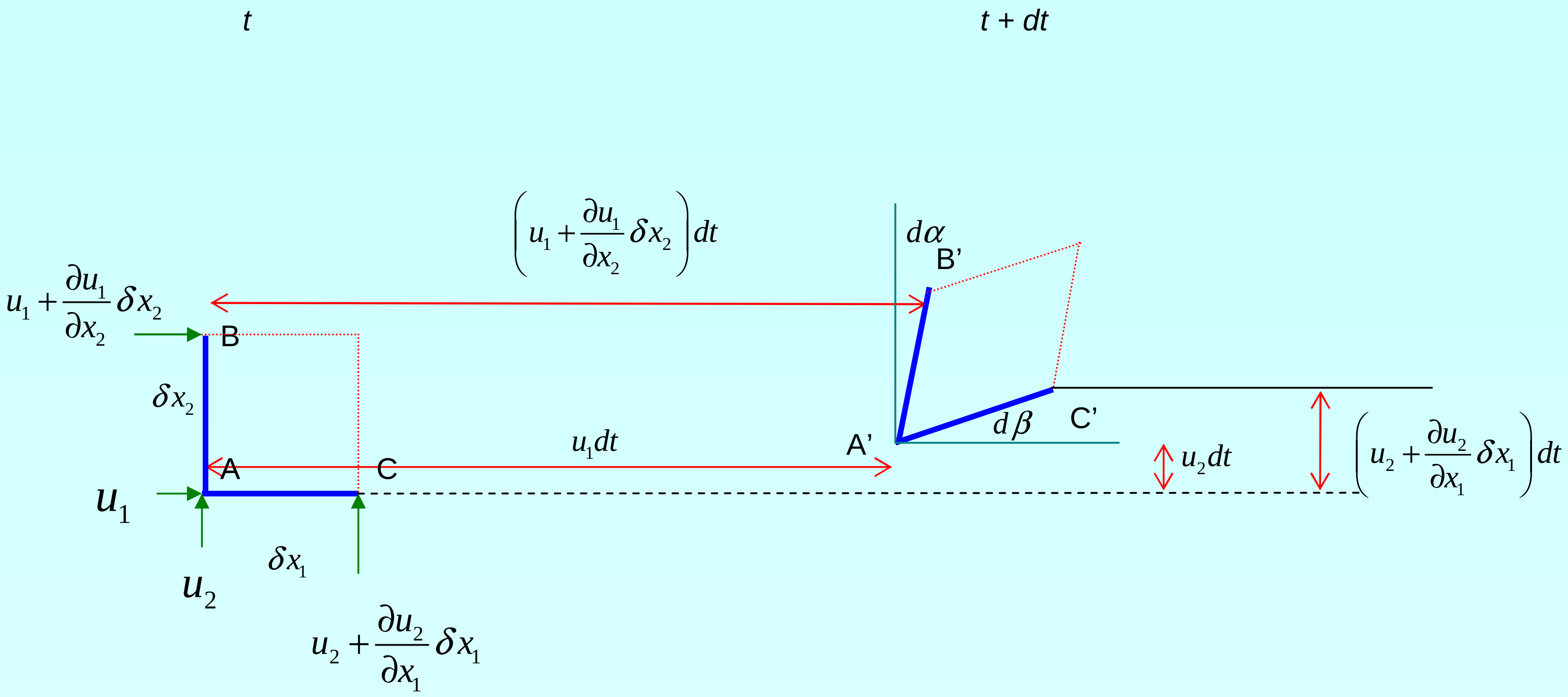
Los términos diagonales del tensor deformación representan las deformaciones lineales. En las tres direcciones:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Conjuntamente es la variación relativa (**deformación**) **volumétrica**

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad ; \qquad \frac{1}{\delta V}\frac{d}{dt}(\delta V) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

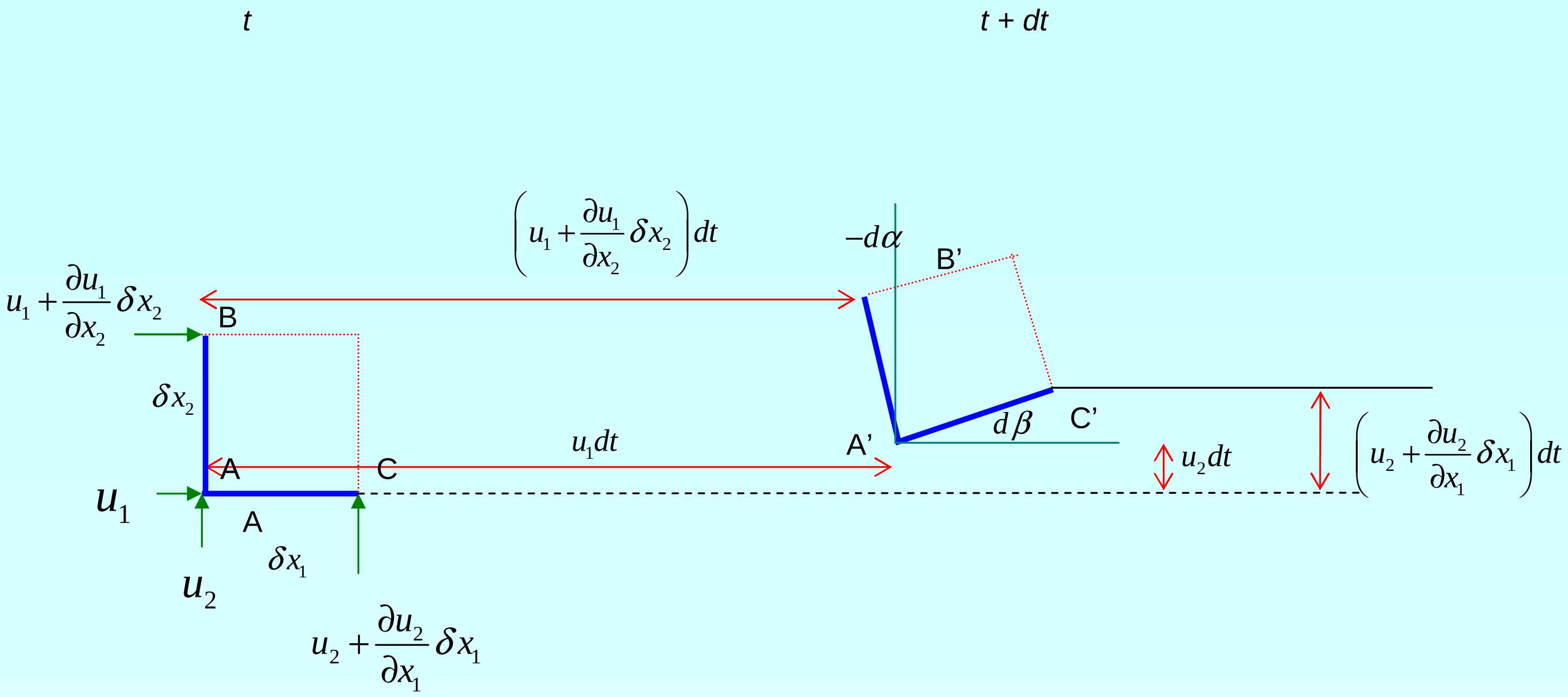
Deformación lateral.



$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\delta x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 dt\right) + \frac{1}{\delta x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 dt\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

Rotación



$$\omega_3=-\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\beta}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\delta x_2}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 dt\right)+\frac{1}{\delta x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 dt\right)\right\}$$

$$\frac{\omega_3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Deformaciones lineales

Los términos diagonales del tensor deformación representan las deformaciones lineales y conjuntamente la variación relativa (**deformación**) **volumétrica.**

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad ; \qquad \frac{1}{\delta V}\frac{d}{dt}(\delta V) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Deformaciones laterales y rotaciones

El resto de términos llevan las variaciones de forma y las rotaciones del fluido.

$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$ $\rightarrow$ Cambios de forma por unidad de tiempo. Variaciones laterales del campo de velocidades (**Cizallas**)

$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$ $\rightarrow$ **Rotación** del fluido en el plano (1,2)

vorticidad

Llamamos vorticidad al vector $\vec{\omega}$ **,** que está relacionada con la velocidad según:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \qquad\qquad \omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Con las componentes:

$$\omega_1 = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad ; \quad \omega_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad ; \quad \omega_3 = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

El tensor gradiente de velocidad es suma de los tres tensores vistos hasta ahora:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Deformación lineal. Volumétrica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

; **Deformación lateral**

Se tiene que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \dfrac{\nabla \mathbf{v} + \overline{\nabla \mathbf{v}}}{2}$ que representa la deformación del fluido

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{pmatrix} = \frac{\nabla \mathbf{v} - \overline{\nabla \mathbf{v}}}{2}$$; **Rotación**

Así, el tensor gradiente de velocidad se puede poner como suma de los tensores **A**, **B** y **C:**

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \nabla \mathbf{v}$$

Tensor rotación también se puede escribir: $\mathbf{C} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

$$2\mathbf{C} \equiv \left(\left(\vec{\omega}\right)\right) = \left(\left(\nabla \times \mathbf{v}\right)\right)$$

Por otra parte se cumple que $\delta\mathbf{r}\cdot\left(\left(\vec{\omega}\right)\right)=\vec{\omega}\times\delta\mathbf{r}$, con lo que el campo de velocidades se puede poner como:

$$\mathbf{v_p}=\mathbf{v_0}+\delta\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{v}=\mathbf{v_0}+\delta\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{v}+\overline{\nabla\mathbf{v}}}{2}\right)+\delta\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{v}-\overline{\nabla\mathbf{v}}}{2}\right)=$$

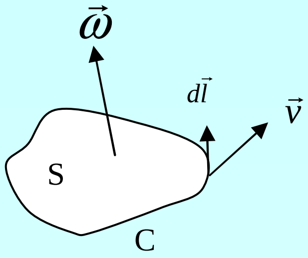
$$\mathbf{v_0}+\delta\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{v}+\overline{\nabla\mathbf{v}}}{2}\right)+\frac{\delta\mathbf{r}\cdot\left(\left(\vec{\omega}\right)\right)}{2}=\mathbf{v_0}+\delta\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{v}+\overline{\nabla\mathbf{v}}}{2}\right)+\frac{\delta\mathbf{r}\cdot\left(\left(\nabla\times\mathbf{v}\right)\right)}{2}$$

$$\mathbf{v_p}=\mathbf{v_0}+\delta\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{v}+\overline{\nabla\mathbf{v}}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{\omega}\times\delta\mathbf{r}\right)$$

donde los tres términos del último miembro representan:

$\mathbf{v_0}$	traslación
$\delta\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{v}+\overline{\nabla\mathbf{v}}}{2}\right)$	deformación
$\frac{1}{2}\left(\vec{\omega}\times\delta\mathbf{r}\right)$	rotación.

Vorticidad: $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \text{rot } \vec{u}$



Definimos circulación según: $\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{l}$

por el teorema de Stokes se tiene: $\oint_c \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_s \text{rot}\, \vec{v} \cdot d\vec{s}$

es decir: $\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{s}$ que representa el flujo de la vorticidad a través de la superficie S

Cuando la vorticidad es cero se dice que el movimiento es **irrotacional** $\vec{\omega} = 0$

Ejemplos:

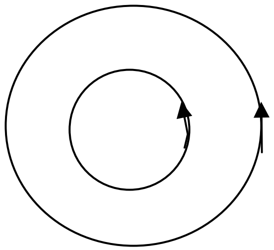
1.<u>vórtice sólido</u>

La velocidad angular es la misma en todo el fluido ω_0. utilizando coordenadas polares:

$$u_\theta = \omega_0 r \qquad u_r = 0 \qquad u_z = 0$$

y la vorticidad:

$$\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 2\,\omega_0$$



2. *vórtice irrotacional*.

La vorticidad en todos los puntos es cero excepto en el origen.

$$u_\theta = \frac{c}{r} \qquad u_r = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_z = \frac{0}{r} = 0$$

la vorticidad en el origen es ∞, ya que la circulación de **v** a lo largo de cualquier línea cerrada que contiene el origen O es finita y representa el flujo de la vorticidad.

$$\Gamma = 2\pi r \cdot \frac{c}{r} = 2\pi c \neq 0 \quad \text{(finito)}$$

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\omega} \cdot d\vec{s} \quad \text{(th. Stokes)}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\omega} \neq 0 \quad \text{en algún punto } (O)$$

$$ds \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \rightarrow \infty$$

Función de corriente

Se dice que un fluido es incompresible cuando se cumple:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{o alternativamente} \quad \frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt} = 0$$

no hay variación relativa de densidad (o volumen específico)

Según se ha visto en las deformaciones del fluido: $\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

con lo que se puede decir que en fluidos incompresibles se cumple:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (1)$$

En movimiento plano: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ con $\frac{\partial w}{\partial z}=0$ ó $w=0$ (flujo solenoidal).

Las componentes de la velocidad se pueden tener de la derivación de una función escalar según:

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

donde se cumple la ecuación (1) porque las derivadas cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}=0$$

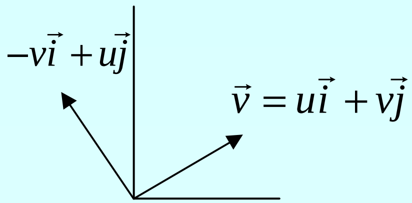
La función ψ se llama ***función de corriente*** *(Potencial de corriente)*

ψ es constante a lo largo de las líneas de corriente $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \quad \rightarrow \quad d\psi = 0$

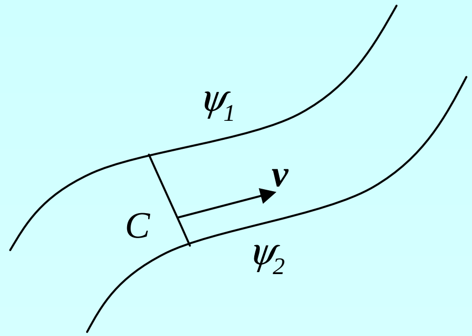
El flujo transcurre entre líneas de potencial de corriente constante.

Los valores mayores de ψ quedan a la izquierda del movimiento.

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{j} = -v\vec{i} + u\vec{j} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \psi \perp \vec{v}$$



La diferencia de valores de dos líneas de corriente representan la cantidad de fluido que atraviesa una línea transversal (*C*) en la unidad de tiempo (Flujo de volumen):



$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \nabla\psi \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \left|\vec{v} \times d\vec{l}\right|$$

$$\Phi = \psi_2 - \psi_1$$