LEYES DE CONSERVACIÓN:

- conservación de masa: *Ec. de continuidad*
- conservación de momento: *Ec. de movimiento*
- conservación de energía: *Ec. de Bernoulli.*

Ecuación de continuidad.

Sea un elemento fluido de masa δm y volumen $\delta x \delta y \delta z$ el principio de conservación de masa implica:

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(\rho \delta x \delta y \delta z) = 0$$

desarrollando

$$\frac{d\rho}{dt}\delta x \delta y \delta z + \rho \frac{d(\delta x)}{dt}\delta y \delta z + \rho \frac{d(\delta y)}{dt}\delta x \delta z + \rho \frac{d(\delta z)}{dt}\delta x \delta y = 0$$

dividiendo por el volumen $\delta x \delta y \delta z$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{\delta x} \frac{d(\delta x)}{dt} + \rho \frac{1}{\delta y} \frac{d(\delta y)}{dt} + \rho \frac{1}{\delta z} \frac{d(\delta z)}{dt} = 0$$

teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \delta u_i$

haciendo las variaciones infinitesimales δ derivadas parciales ∂ , tenemos finalmente:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

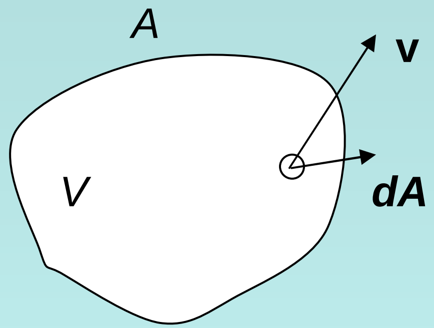
$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\mathrm{div}\,\vec{v} \qquad \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v}}$$

como $\rho = \frac{1}{\mathrm{v}_1}$ $\qquad \boxed{\frac{1}{\mathrm{v}_1} \frac{d\mathrm{v}_1}{dt} = \nabla \cdot \vec{v}}$

Conservación de masa desde la *Descripción Euleriana*:

Sea *V* un volumen de control encerrado en una superficie *A*, la cantidad de fluido que atraviesa una superficie diferencial $d\vec{A}$ es

$\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$ y la que sale de toda la superfie $\oint_A \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$



Aplicado el teorema de Gauss la cantidad de fluido que sale del volumen de control será

$$\oint \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_V div(\rho\vec{v})dV \qquad (1)$$

Por otra parte, la masa encerrada en el volumen de control es $\int_V \rho\, dV$, su variación local (con el tiempo) $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV$, que representa la variación de masa en dicho volumen, por lo que la cantidad anterior (1) será igual a la disminución de masa en el volumen de control.

$$-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = \int_V div(\rho\vec{v})dV$$

refiriéndonos a un volumen elemental *dV* $$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = div(\rho \vec{v}) dV$$

y a la unidad de volumen $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \vec{v})$$ o escribiendo $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})}$$

Ecuación de continuidad.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{v}_1} \frac{d\mathrm{v}_1}{dt} = \nabla \cdot \vec{v}}$$

Compresibilidad e incompresibilidad. Barotropía

Se puede definir un **coeficiente de compresibilidad** según $\Gamma = \dfrac{d\rho}{dp}$.

En **fluidos incompresibles** $\Gamma = 0$, por lo que

$$\frac{d\rho}{dp} = 0 \text{ , con lo que la derivada material } \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = 0$$

Se puede decir que en fluidos incompresibles

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \text{y por la ecuación de continuidad } \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Se define el **coeficiente de piezotropía** $\pi = \dfrac{\partial\rho}{\partial p}$. En **fluidos homogéneos** $\pi = 0$

Si el fluido es **barótropo**: la densidad es función exclusiva de la presión

$$\Gamma = \pi$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dp} = \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho(p)}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS EN FLUIDOS.

Fuerzas másicas:

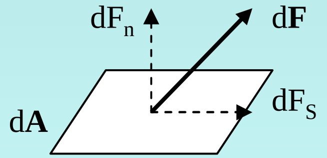
Se aplican sobre la masa de un fluido como consecuencia de la presencia de un campo de fuerza externo. No existe contacto con el fluido. Son proporcionales a la masa donde se aplica.

Ejemplo: gravedad. $\mathbf{g} = -\nabla(gz) = -\mathbf{k}g$ Con gz potencial gravitatorio.

Fuerzas de superficie:

Se ejercen sobre superficies por el resto de partículas de fluido mediante contacto. Son proporcionales al área donde se aplican. En general tienen componentes normal y tangencial a la superficie

Ejemplo: fuerzas de presión, fuerzas viscosas.



$$d\mathbf{F} = \begin{cases} dF_n \\ dF_s \end{cases}$$

A partir de ellas se definen tensiones: $\tau_n \equiv \dfrac{dF_n}{dA}$ $\tau_s \equiv \dfrac{dF_s}{dA}$

Fuerzas de línea:

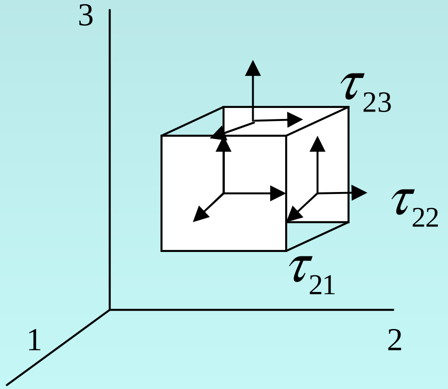
Actúan a lo largo de una línea. Son debidas a la cohesión entre las partículas que constituyen el fluido. Estas no intervienen en las ecuaciones de movimiento, sólo en las condiciones de contorno.

Ejemplo: Fuerzas debidas a la tensión superficial

Tensión en un punto.

A partir de las fuerzas superficiales se puede definir la tensión en un punto. Viene representado por un tensor

Dado un elemento fluido de forma de paralelepípedo, las fuerzas por unidad de superficie que actúan sobre cada cara representan **las tensiones**. Si el volumen del elemento fluido tiende a cero, se puede hablar de la tensión en un punto que se representa por una matriz (tensor)



Tensión

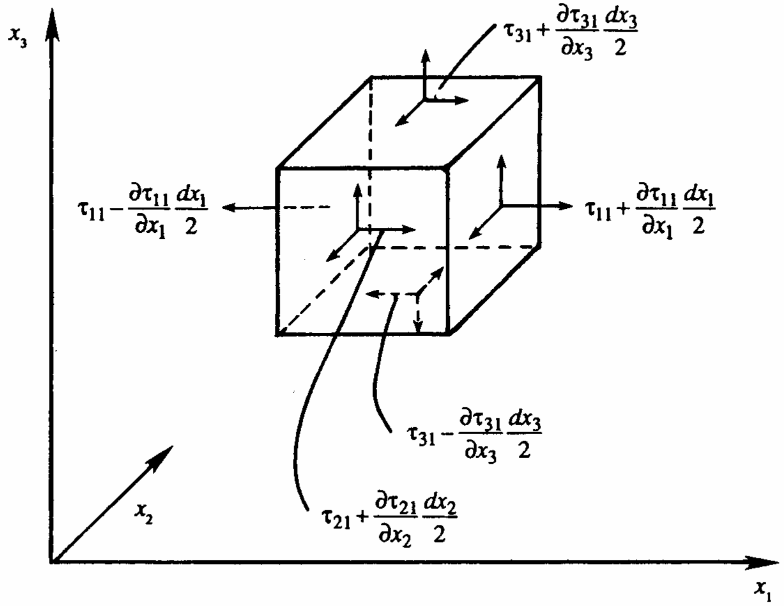
$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

En general el tensor es simétrico ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$). Puede diagonalizarse.

Los elementos de la diagonal principal representan las tensiones normales τ_{ii} (*presión*). El resto de los elementos representan las cizallas (*tensiones tangenciales* o *tensiones cortantes*):

$$\tau_{ij} \quad \text{con} \quad i \neq j, \quad \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$$

$$\left(\tau_{11}+\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2}-\tau_{11}+\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2}\right)dx_2\,dx_3$$
$$+\left(\tau_{21}+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{2}-\tau_{21}+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{2}\right)dx_1\,dx_3$$
$$+\left(\tau_{31}+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{2}-\tau_{31}+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{2}\right)dx_1\,dx_2$$



$$\left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1 dx_2 dx_3=\frac{\partial \tau_{j1}}{\partial x_j}dV$$

Fig. 4.6 Surface stresses on an element moving with the flow. Only the stresses in the x_1 direction are labeled.

Conservación de momento. Ecuación de movimiento.

Según la ley de Newton $\frac{d\vec{u}}{dt} = \sum \vec{F}_i$ fuerzas por unidad de masa.

por unidad de volumen $\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \sum \rho \vec{F}_i$

separando fuerzas másicas (debidas a la gravedad) y las fuerzas debidas a la tensión, y por componentes

$$\frac{du_i}{dt} = g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} \qquad (2)$$

donde $\frac{\partial \tau_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}$ representan las fuerzas superficiales por unidad de volumen.

por unidad de masa la ecuación de movimiento queda: $\frac{du_i}{dt} = g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}$

extendido a un volumen finito:

$$\int_V \rho \frac{du_i}{dt} dV = \int_V \rho g_i dV + \int_V \frac{\partial \tau_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} dV \qquad (3)$$

reordenado

$$\int_V \left[\rho \frac{du_i}{dt} - \rho g_i - \frac{\partial \tau_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} \right] dV = 0$$

también empleando el teorema de Gauss en el último término de la ecuación (3) queda:

$$\frac{d}{dt} \int_t \rho u_i dV = \int_V \rho g_i dV + \oint_A \tau_{ij} dA_j$$

Ecuación constitutiva.

es la relación entre la tensión y la deformación en un medio continuo (Ley de Hook)

- en fluido en reposo: $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ con *p* tensiones normales (presión)

- en fluido en movimiento existen también tensiones tangenciales.

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \qquad (4)$$

ahora *p* la vamos a suponer como la termodinámica (según una ley de estado).

σ_{ij} incluye todas las tensiones como consecuencia del estado de movimiento, por tanto del campo de deformación

$\nabla\vec{v}$; $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ se descompone en : $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

hacemos $e_{ij} \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, término simétrico que representa la deformación.

suponiendo una relación lineal entre la tensión y la deformación, que para el caso de tensiones simétricas y medio isótropo queda según:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm}\delta_{ij}$$

donde $e_{mm} = \nabla \cdot \vec{v}$ y μ, λ son dos coeficientes que dependen del estado termodinámico del medio.

con esto las tensiones quedarán: $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm}\delta_{ij}$ (5)

además λ y μ están relacionadas entres sí. Según la hipótesis de Stokes:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Sustituyendo en (5) queda la ecuación constitutiva:

$$\tau_{ij} = -\left(p + \tfrac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{v}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \qquad (6)$$

Ecuación constitutiva: $\tau_{ij} = -\left(p + \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ (6)

Esta relación es consistente con la relación de Newton $\tau = \mu\left(\dfrac{du}{dy}\right)$

con lo que si se cumple (6) diremos que el fluido es **newtoniano**.

Los términos no diagonales son: $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ con $i \neq j$ términos de cizalla

los términos diagonales (p. ej. (1,1)): $\tau_{11} = -p + 2\mu\left[-\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]$

representan las tensiones normales : **presión** (negativa) + un término proporcional a

la diferencia entre la tasa de expansión en la dirección 1 $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$

y la tasa de expansión promedio para las tres direcciones en un punto $\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$

ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

De la ecuación de movimiento (2) $$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

y de la ecuación constitutiva (6) $$\tau_{ij} = -\left(p + \tfrac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

se obtiene: $$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \tfrac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}\delta_{ij}\right)$$

o mejor $$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \vec{v}) \qquad (7)$$

como $$e_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 2\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

y $$-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \vec{u}) = -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = -\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

con lo que operando con los dos últimos términos de (7) se tiene

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \left[\nabla^2 u_i + \tfrac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nabla \cdot \vec{v} \right) \right] \quad (8)$$

ecuación de Navier-Stokes

ahora $\nabla^2 u_i$ es la Laplaciana de

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3{}^2}$$

Casos particulares:

fluido incompresible $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{v}$

fluido ideal: incompresible y no viscoso $\rho \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho\vec{g}$ **Ecuación de Euler**

esta última ecuación para la unidad de masa: $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$

Se puede poner según la descripción Euleriana $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$

y teniendo en cuenta $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \dfrac{\nabla v^2}{2} - \vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{v}$

(demostración al final de apuntes fluidos_2. Pinche aquí)

la ecuación de Euler queda en términos de aceleraciones locales

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nabla v^2}{2} + \vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{v} + \vec{g}$$

La aceleración local es igual a las fuerzas unitarias:

externas (**g**),

$-\dfrac{\nabla p}{\rho}$ debidas a la presión

y dos términos dependientes del campo de velocidades

$\nabla\left(\dfrac{v^2}{2}\right)$ (gradiente de E_c)

y $\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}$ (rotación)

La **ecuación de Navier-Stokes** quedará también:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\frac{\nabla p}{\rho}-\frac{\nabla v^2}{2}+\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}+\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{v}}$$

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA. ECUACIÓN DE BERNOUILLI.

Se considerarán sólo fluidos incompresibles, es decir: $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

La energía cinética por unidad de volumen es: $E_c = \dfrac{\rho v^2}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\mathrm{div}\left[\vec{v}\cdot\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) - (\tau\cdot\vec{v})\right] + \rho\vec{v}\cdot\vec{g} - \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (1)$$

extendiendo esto a un volumen de control:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \frac{\rho v^2}{2} dV\right) = -\oint_s \frac{\rho v^2}{2}\vec{v}\cdot d\vec{S} - \oint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S} + \oint_S (\tau\cdot\vec{v})\cdot d\vec{S} + \int_V \rho\vec{v}\cdot\vec{g}\,dV - \int_V \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \qquad (2)$$

(a) (b) (c) (d) (e)

<u>Interpretación:</u>

Variaciones locales de energía cinética en un volumen de control:

(a) flujo de energía cinética a través de la superficie de contorno S

(b) trabajo de la presión sobre la superficie S (trabajo de compresión)

(c) trabajo de las fuerzas viscosas sobre S (componentes normales de τ sobre S)

(d) aporte de energía de fuerzas externas (energía potencial)

(e) pérdida de energía por efecto de la viscosidad (componentes tangenciales de τ)

En caso de fluidos ideales, en los que no interviene la viscosidad la ecuación se reduce mucho.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \frac{\rho v^2}{2} dV\right) = -\oint_S \frac{\rho v^2}{2}\vec{v}\cdot d\vec{S} - \oint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S} + \int_V \rho\vec{v}\cdot\vec{g}\,dV$$

Existe conservación de energía.

En el caso de fluidos ideales se puede escribir la ecuación clásica de Bernouillí a partir de la ecuación de Euler. (Ec. Mov) :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nabla v^2}{2} + \vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v} + \vec{g}$$

reordenando y agrupando los gradientes

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = -\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}$$ **Ecuación de Bernouilli**

$$\beta = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$ llamando parámetro de Bernouilli

$$\boxed{\nabla\beta = -\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}}$$

en caso de flujo estacionario $\frac{\partial v}{\partial t}=0 \rightarrow \quad \nabla\beta=\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}$ que dice que β es constante a lo largo de las líneas de corriente ya que $\vec{v}\cdot\nabla\beta=0$

Si además: el movimiento es irrotacional $\mathrm{rot}\,\vec{v}=0$ (la velocidad deriva de un potencial $\vec{v}=\nabla\varphi$), se cumple:

$$\beta=\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz=\mathrm{cte.}$$ Ecuación de Bernouilli (típica).

Representa la conservación de energía: $\frac{p}{\rho}$ energía "potencial" del campo de presiones, $\frac{v^2}{2}$ energía cinética, gz energía potencial campo externo.

También se escribe: $p+\rho\frac{v^2}{2}+\rho gz=\mathrm{cte.}$ conservación de presiones:

p presión hidrostática, $\rho\frac{v^2}{2}$ presión dinámica, ρgz presión potencial

Demostración de la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -div\left[\mathbf{v}\cdot\left(\frac{\rho v^2}{2}+p\right)-(\tau\cdot\mathbf{v})\right]+\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}-\tau_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Recordando la ecuación de movimiento para la unidad de volumen según la componente *i*

$$\rho\frac{du_i}{dt} = \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\rho g_i \qquad (1)$$

donde se ha considerado como fuerza externa sólo la gravedad y donde se ha puesto de forma expresa el gradiente de presiones, dejando el resto de las fuerzas superficiales (gradiente del tensor de esfuerzos) en segundo término del miembro de la derecha.

Por otra parte, sabemos que $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \rho\,u_i\frac{\partial u_i}{\partial t} \qquad (2)$$

Ahora reordenando (1)

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho\, u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, g_i \qquad (3)$$

multiplicando **v** escalarmente por (3) y teniendo en cuenta (2)

$$\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i =$$

$$= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho\, u_i\, g_i$$

lo que en forma de productos escalares entre vectores queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) + div(\tau \cdot \mathbf{v}) - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \qquad (4)$$

Aplicando ahora $div(\alpha\,\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\alpha + \alpha\, div\mathbf{A}$ $\longrightarrow$ $\mathbf{A}\cdot\nabla\alpha = \alpha\, div\mathbf{A} - div(\alpha\,\mathbf{A})$

queda

$$-\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) = \left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) div\,\mathbf{v} - div\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right)\right]$$

y con $div\,\mathbf{v} = 0$ por ser incompresible

$$-\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) = -div\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right)\right]$$

por lo que (4) queda finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = -\,div\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) - \tau\cdot\mathbf{v}\right] + \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} - \tau_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

como queríamos demostrar.

Demostración de:

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \frac{\nabla v^2}{2} - \vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{v} \qquad (1)$$

Sean dos vectores: **A** y **B**

Desarrollando el gradiente del producto escalar $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \nabla\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \nabla\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ (2)

por otra parte se puede escribir (con $\overline{\nabla\mathbf{A}}$ tensor tanspuesto de $\nabla\mathbf{A}$):

$$\nabla\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \overline{\nabla\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B} = (\nabla\mathbf{A} - \overline{\nabla\mathbf{A}})\cdot\mathbf{B} =$$
$$((\mathrm{rot}\,\mathbf{A}))\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \qquad (3)$$

Siendo $((\mathbf{a}))$ el tensor asociado a un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3):$ $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$

Despejando de (3) $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ (4)

Igualamos los dos vectores a $\vec{v}$, es decir: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \vec{v}$

El gradiente del producto escalar de un vector por sí mismo

$$\nabla v^2 = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \nabla\vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\nabla\vec{v} \cdot \vec{v}$$

que reordenando este resultado:

$$\nabla\vec{v} \cdot \vec{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

y sustituyendo en (4):

$$\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = \nabla\vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}$$

obtenemos **lo que queríamos demostrar**:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = \frac{\nabla v^2}{2} - \vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}}$$

volver