

## FLUJO POTENCIAL

Hipótesis para establecer el flujo potencial:

- Fluido ideal (no viscoso)
- Fluido incompresible (flujo solenoidal)  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
- Flujo irrotacional  $\vec{\omega} = 0$  ;  $\nabla \times \vec{v} = 0$
- Movimiento bidimensional.

Se cumple  $\nabla \times \vec{v} = 0$  se puede decir que la velocidad deriva de un potencial según:  $\vec{v} = \nabla \varphi$

$$\vec{v} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) ; \quad \varphi \text{ potencial de velocidades.}$$

componentes de la velocidad:  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

en el caso bidimensional  $w = 0$  y se cumple  
es decir  $\omega_z = 0$  vorticidad cero.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$$

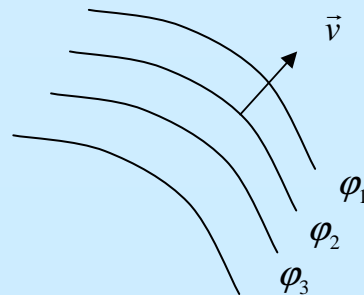
Si además el movimiento es solenoidal

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\nabla \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

(ecuación de Laplace:  $\varphi$  armónica)

Las líneas de potencial de velocidad constante se llaman **líneas de velocidad**: son perpendiculares al vector velocidad en cada punto.

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad \nabla \varphi \perp \varphi = cte$$



## Función de corriente:

En fluidos incompresibles se cumple:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (1)$$

movimiento plano:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  con  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  ó  $w = 0$  (flujo solenoidal).

Las componentes de la velocidad se pueden tener de la derivación de una función escalar según:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{donde se cumple la ecuación (1) porque las derivadas cruzadas son iguales:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{función } \psi \text{ se llama } \mathbf{función \textit{de corriente}} \text{ (Potencial de corriente)}$$

Si además es irrotacional:  $\nabla \times \vec{v} = 0$  se cumple  $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$   
es decir

$$\nabla^2 \psi = 0$$

$\psi$  es función armónica

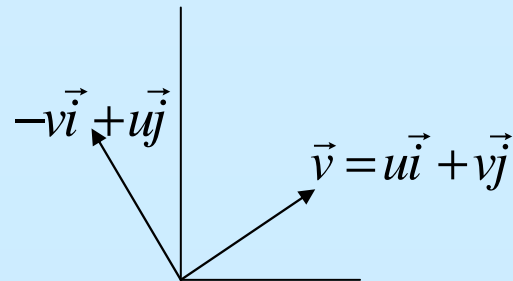
$\psi$  es constante a lo largo de las líneas de corriente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad \rightarrow \quad d\psi = 0$$

El flujo transcurre entre líneas de potencial de corriente constante.

Los valores mayores de  $\psi$  quedan a la izquierda del movimiento.

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} = -v\vec{i} + u\vec{j} \quad \rightarrow \quad \nabla \psi \perp \vec{v}$$

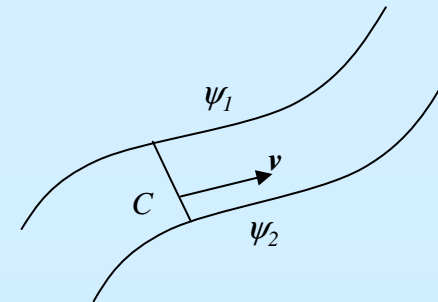


$$\vec{k} \times \vec{v} = \nabla \psi$$

La diferencia de valores de dos líneas de corriente representan la cantidad de fluido que atraviesa una línea transversal (C) en la unidad de tiempo (Flujo de volumen):

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \nabla \psi \cdot d\vec{l} = \int_1^2 |\vec{v} \times d\vec{l}|$$

$$\Phi = \psi_2 - \psi_1$$



La relación entre los dos potenciales se tiene a través de lo que se conoce como **condiciones de Cauchy-Riemann**:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{componentes de la velocidad en función de la derivación} \\ \text{de los potenciales } \phi \text{ y } \psi \end{array}$$

### Ejemplos de flujos potenciales:

- Flujo uniforme:  $\varphi = u_1 x_1 + c_1$        $\psi = u_1 x_2 + c_2$
- Flujo en las proximidades de un rincón:  $\varphi = \frac{c}{2}(x_1^2 - x_2^2)$        $\psi = cx_1 x_2 + A$
- Fuente o sumidero:  $\varphi = c \log r$        $\psi = c \theta$
- Vórtice:  $\varphi = -c \theta$        $\psi = c \log r$

## Ejemplos de flujo potencial

Ejemplos de flujo potencial.

— Dado el potencial de velocidades:

$$\psi = \frac{c}{2} (x_1^2 - x_2^2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = c x_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = (c x_1, -c x_2)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -c x_2$$

es irrotacional  $\nabla \times \vec{u} = 0$

es incompresible  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

— para obtener la función de corriente  $\psi$   
utilizamos las condiciones de Cauchy-Riemann.

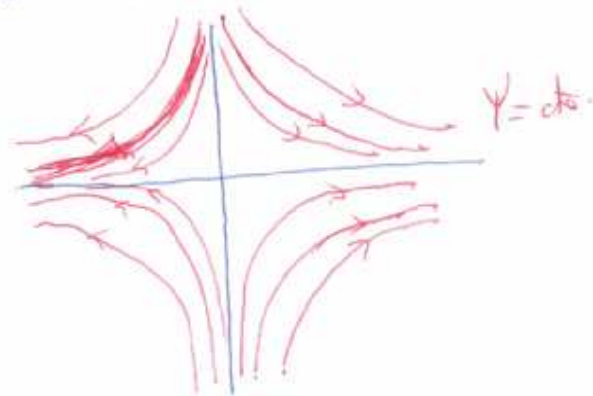
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = C x_1 \rightarrow \psi = C x_1 x_2 + f_1(x_1)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -C x_2 \rightarrow \psi = C x_1 x_2 + f_2(x_2)$$

Se tiene que cumplir  $f_1(x_1) = f_2(x_2) = A = \text{cte.}$

$$\psi = C x_1 x_2 + A.$$

Las líneas de corriente son las de  $\psi = \text{cte.}$

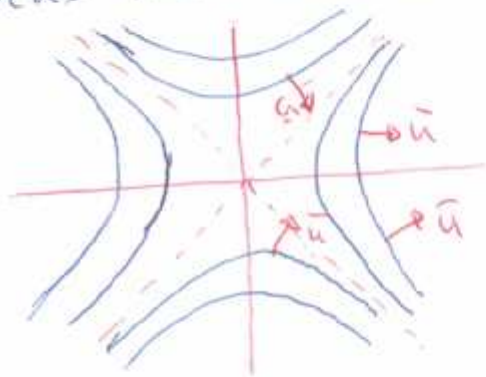


El sentido del movimiento del fluido es arbitrario depende de la constante  $A <$

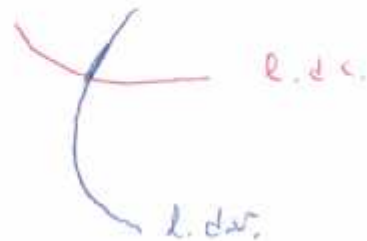


Con el potencial de velocidades se puede obtener  
líneas de velocidad:  $\psi = \text{cte.}$

$$\psi = \frac{c}{2} (x_1^2 - x_2^2)$$



líneas de velocidad  $\psi = \text{cte.}$   
son  $\perp$  a las líneas de  
corriente  $\phi = \text{cte.}$



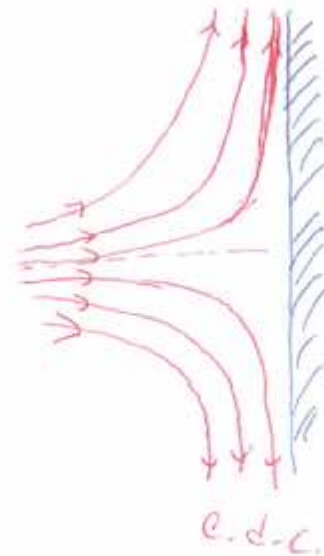
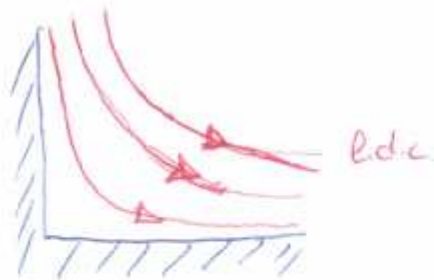
$$\vec{u} = (cx_1, -cx_2)$$

$$|\vec{u}| = c\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

en  $(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow |\vec{u}| = 0$ .  
punto de remanso.

se puede aplicar a:

fluido en un rincón/esquina - contra una pared.



- vórtice

función de velocidad

$$\phi = -c\theta$$

función de corriente

$$\psi = c \ln r$$

An:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

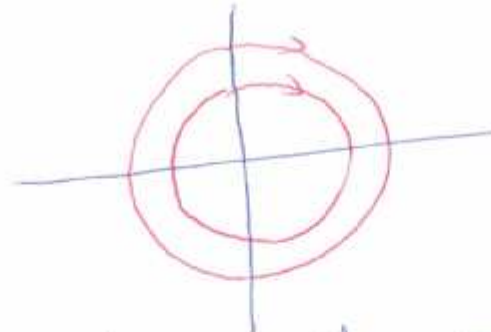
$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(-c\theta)}{\partial \theta} = -\frac{c}{r}$$

también:

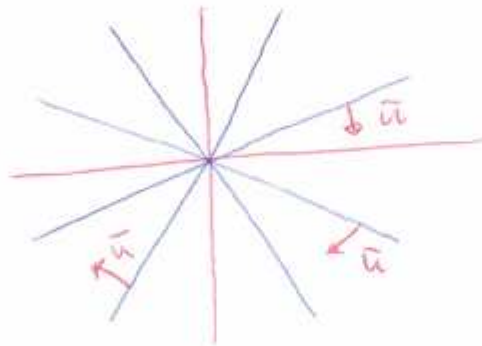
$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{c}{r}$$

l.d. corriente  $\psi = cte \Rightarrow r = cte.$



l.d. velocidad  $\psi = k\theta \Rightarrow \theta = cte.$



En circulación a lo largo de una l.d.c es  $\neq 0$

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{c} = \oint \frac{c}{r} r d\theta = c 2\pi \Rightarrow \Gamma = 2\pi c \neq 0$$

en el origen  $\nabla \times \vec{u} \neq 0$ . (no irrotacional).

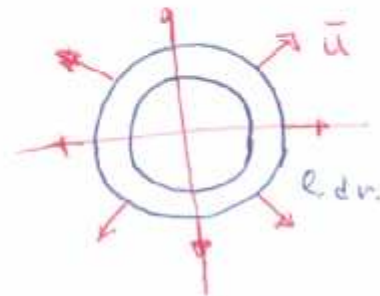
(3)

- fuente o sumidero.

$$\psi = c \ln r \quad \Rightarrow \text{L. d. velocidad } p = cte \Rightarrow r = cte.$$

Como  $\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$



$$\bar{u} = \left( \frac{c}{r}, 0 \right)$$

en coordenadas polares.

$$\nabla \psi = (-u_\theta, u_r) \quad ; \quad \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$$

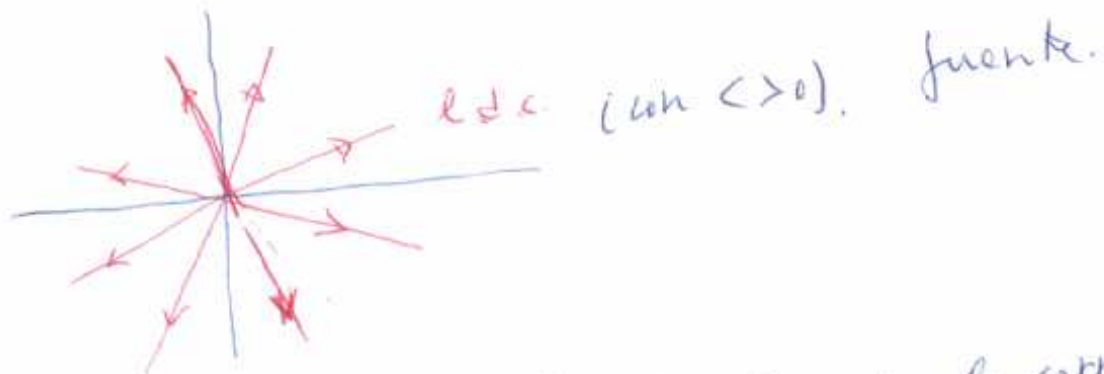
$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{c}{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi = c\theta + f_1(r) \\ \psi = f_2(\theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi = c\theta$$

$$\psi = f_1(\theta)$$

función de corriente.

líneas de corriente  $\Rightarrow \psi = cte = \theta$   
 $\theta = cte$ .



el flujo másico entre dos líneas de corrientes:

$$\phi = c(\psi_2 - \psi_1) = \rho c(\theta_2 - \theta_1)$$

flujo total  $\phi = \underline{\rho c \cdot 2\pi}$