MATHEMATICS AND MODERN ART, Claude Bruter (Ed), Springer 2012

Reseña por Capi Corrales Rodrigáñez, Departamento de Álgebra

> "Donde el mundo cesa de ser la escena de nuestras esperanzas y deseos personales, donde nos enfrentamos a él como seres libres admirando, preguntando y observando, ahí entramos en el terreno del Arte y de la Ciencia," (A. Einstein).

Las relaciones entre ciencia y arte a lo largo de los siglos han ido conformando un espacio común de cuya existencia ninguna persona culta ha dudado nunca. Sin embargo, hasta bien entrado el siglo veinte, el mundo académico, especialmente el mundo académico científico, se mantuvo reacio a explorar abiertamente dicho espacio. Salvo algunos casos excepcionales, la comunidad científica siguió recelando de los estudios teóricos sobre dicho espacio común y considerando los proyectos concebidos desde de él como meros divertimentos. La situación cambió cuando, en 1963, Gÿorgy Kepes —pintor y profesor de diseño y teoría del arte en el Massachusetts Institute of Technology (MIT)— llevó a cabo *The New Landscape in Art and Science,* un experimento pionero que sigue siendo uno de los estudios más sólidos y sugerentes que se hayan hecho nunca del terreno compartido por ciencia y arte.

Nacido en Hungría, Kepes (1906-2001) trabajó entre 1930 y 1937 —primero en Berlín y luego en Londres— en el estudio del fotógrafo y profesor de la Bauhaus Laszlo Moholy-Nagy (1895-1946). En 1936 Moholy-Nagy se trasladó a Chicago para dirigir una nueva escuela de arte, la New Bauhaus (hoy Instituto de Diseño del Illinois Institute of Technology). Kepes le acompañó y dió clase en dicha escuela hasta 1946, año en que se incorporó al profesorado de la Escuela de Arquitectura y Urbanismo del MIT. Allí se relacionó, entre otros, con Buckminster Fuller (1895-1983), Norbert Wiener (1894-1964) y Walter Gropius (1883-1969), todos ellos abiertamente ubicados en el terreno común de arte y ciencia. Con los años, la pintura de Kepes se había ido haciendo cada vez más abstracta y el conocer de primera mano la obra e ideas de Fuller, Wiener o Gropius le puso en contacto con el mundo científico. El paralelismo entre las imágenes científicas y las producidas por los pintores abstractos despertó su interés y decidió investigarlo en *The New Landscape in Art and Science*, un proyecto en dos partes: una exposición-experimento y un libro. La exposición-experimento la describe Buckminster Fuller en su ensayo *How little I know*[1]

> To comprehend the integral of art and science
> As an irrepressible, intuitive creative urgency—
> As an artist' s need to articulate–
> Kepes at Massachusetts Institute of Technology
> Made a beautiful demonstration.
>
> He took hundreds of 8" x 10"
> Black-and-white photographs
> of modern paintings and mixed them thoroughly
> Like shuffled cards
> With photographs taken by scientists
> Through microscopes or telescopes
> Of all manner of natural phenomena
> Sound waves, chromosomes and such.
> The only way you can classify
> Photographs with nothing recognizable in them
> Is by your own spontaneous

[1] Richard Buckminster Fullar, *And it came to pass, not to stay,* Macmillan 1976, pág. 51.

Pattern classifications.
Group the mealy, the blotchy, the striped,
The swirly, the polka-dotted, and their sub-combinations.
The pattern classified groups
Of photographs were displayed.
The artists' work and the scientists'
Were indistinguishable.
Checking the back-mounted data, it was found
That the artist had frequently conceived
The imagined pattern before
The scientist found it in nature.
Science began to take
A new view of artists.

El éxito de la exposición-experimento fue enorme, y potenció que el propio Kepes fundase en 1967 el Center for Advanced Visual Studies (CAVS) del MIT, a día de hoy uno de los centros de investigación artística más importantes de nuestra cultura. Desafortunadamente, los prejuicios imperantes entonces (y, en muchos lugares, ahora), hicieron que nadie se animase a escribir una reseña del libro en que, como segunda parte del proyecto, Kepes recogió el material encontrado durante la investigación, y el trabajo de Kepes y su equipo sigue siendo prácticamente desconocido entre la comunidad académica científica.

Sin embargo, gracias a la línea de investigación abierta por ese grupo de pioneros, se pudo empezar a conformar un mapa del terreno común a ciencia y arte. Y así hoy sabemos, por ejemplo, de la existencia y ubicación exacta de multitud de puentes concretos de muy distinta naturaleza que atravesando el espacio común unen los territorios propios de cada disciplina. Unos son más sólidos, otros más livianos; unos más teóricos, otros más prácticos; unos más recientes, otros antiquísimos. Un ejemplo de estos puentes son aquéllos en los que habitan la arquitectura y la ingeniería. El volumen que tenemos entre las manos, *Mathematics and Modern Art*, da constancia de la solidez del nuevo puente que matemátic@s y expert@s en computación están tendiendo en la actualidad.

Durante el mes de julio de 2010 tuvo lugar en el Instituto Henri Poincaré de Paris el primer Congreso de la European Society for Mathematics and the Arts (ESMA). *Mathematics and Modern Art* recoge los textos de catorce de las conferencias impartidas durante el Congreso. Por lo general, los títulos de los libros suelen reflejar su contenido. Este no es el caso *Mathematics and Modern Art*, un libro magnífico en el que hay muchas —y preciosas— matemáticas, muchas —y preciosas— imágenes matemáticas y muchas —y excelentes— explicaciones para uso tanto de matemátic@s como de de artistas. Pero muy poco de lo que se define como *arte moderno*. Un título más adecuado al contenido hubiese sido, en opinión de quien escribe esta reseña, *Mathematical art*.

A lo largo de estas páginas entenderemos por *arte matemático* cosas o procedimientos de producción de cosas —ilustraciones, esculturas, películas, sonidos, etc.—, que, primero, tienen arte —como dicen los flamencos, el arte, o se tiene o no se tiene— y, segundo, están producidas a partir de matemáticas y desarrolladas con herramientas matemáticas. Por visualización matemática, en este contexto, entenderemos producción de imágenes de objetos matemáticos utilizando avanzadas herramientas de ingeniería de la computación. Daremos un ejemplo.

Cuando, al intentar representar una imagen o idea sobre un papel, el grabador M.C. Escher (1898-1972) se enfretaba con algún problema concreto que no sabía resolver, estudiaba las ilustraciones de textos matemáticos —ejemplos de visualización matemática[2]— buscando herramientas con las que resolverlo. Con esas herramientas matemáticas, Escher hizo arte. Cuando H. Lenstra estudió el grabado incompleto de Escher *La galería de grabados*, buscó herramientas matemáticas con las que resolver el problema concreto que había llevado al grabador, al ser incapaz de resolverlo, a dejar una mancha blanca en el centro de la pieza. con el arte de Escher, Lenstra hizo matemáticas preciosas y con las matemáticas de Lenstra, un equipo de alumn@s de matemáticas, computación y bellas artes de la Universidad de Leiden, hizo preciosas visualizaciones matemáticas. La pieza final resultante es uno de los ejemplos más hermosos de arte matemático[3].

El 2003, la National Science Foundation (EEUU) y la revista Science convocaron por primera vez su concurso anual *International Science and Ingeneering Visualization Challenge*. El concurso tiene cinco categorías (Fotografía, Ilustración, Gráficas informativas, Multimedia interactiva y Multimedia nointeractiva) y cada categoría, a su vez, está dotada con un primer premio, un segundo premio y una mención honorífica. El 2006 el primer premio en la categoría de Ilustración se lo llevó una pieza de arte matemático, *Still Life: Five Glass Surfaces on a Tabletop*[4], creado en colaboración por Richard S. Palais (del Departamento de Matemáticas de la Universidad de California en Irvine, experto en la creación de programas que permitan representar objetos matemáticos en una pantalla de ordenador, y formidable topólogo) y Luc Bénard (artista digital de Montréal especialista en visualización matemática). La pieza aparece descrita en la página web del *International Science and Engeneering Visualization Challeng*e con las siguientes palabras:

> Innumerable surfaces that we cannot touch or see or even know can be seen by mathematicians. They have long relied on their powers of imagination to picture abstract surfaces. Richard Palais of the University of California, Irvine, and graphic artist Luc Benard used the magic of computer graphics to recreate these abstract surfaces in familiar yet intriguing settings[5].

Fue la primera vez que una pieza de arte matemático ganaba uno de los quince galardones, pero no la última. Palais y Bénard volvieron a llevarse el primer premio de ilustración en 2009, esta vez con la pieza *Kuen's Surface: A Meditation on Euclid, Lobachevsky and Quantum Fields.*

> Sketch a line and then draw a point off it. How many lines parallel to the first line can you draw through that point? The Greek mathematician Euclid said just one, but for more than 2,000 years after his death, mathematicians struggled to prove that he was right based on his other geometric rules. Then the 19th century Russian mathematician Nikolai Lobachevsky showed that you couldn't: In some circumstances, you can sketch an infinite number of lines through that point and not violate any of Euclid's other axioms. Mathematician Dick Palais of the University of California, Irvine, and digital artist Luc Benard wanted to convey the history of Lobachevsky's solution to this mathematical puzzle with their illustration[6].

En *A Mathematician and an Artist. The Story of a Collaboration*[7], Richard Palais explica a grandes rasgos la historia de las dos piezas galardonadas en el *International Science and Ingeneering Visualization Challenge* y nos presenta una selección de seis piezas creadas por Luc Bénard.

---

[2] Ver el artículo de Douglas Dunham en *Mathematics and Modern Art*, págs. 69-78

[3] Ver www.escherdroste.math.leidenuniv.nl

[4] Reproducida en la portada de *Science* del 22 de septiembre de 2006.

[5] Ver www.nsf.gov/news/special_reports/scivis/index.jsp

[6] Ver www.nsf.gov/news/special_reports/scivis/index.jsp

[7] *Mathematics and Modern Art*, págs. 1-10.

En 2010, la película de animación por ordenador *Dimensiones* de Aurélien Alvarez (entonces estudiante de doctorado en el Departamento de Matemáticas de la École Normal de Lyon), Étienne Ghys (Director de Investigación en el CNRS y profesor en el Departamento de Matemáticas de la École Normal de Lyon) y Jos Leys (Ingeniero de Antwerp, Bélgica, experto en visualización matemática) recibió el Prix D'Alambert que cada dos años otorga la Sociedad Matemática Francesa a un proyecto de divulgación. *Dimensiones* está dirigida a un público no especializado[8], y a lo largo de dos horas y nueve capítulos —de trece minutos cada uno, de forma que puedan ser utilizados independientemente como material de trabajo en el aula durante clases de matemáticas— explica el concepto matemático de dimensión de la mano de distintos ejemplos, problemas y estructuras matemáticas. En *Dimensions, a Math Movie*[9], Aurélien Alvarez y Jos Leys nos cuentan la historia del proyecto: cómo surgió en 2006, cómo se desarrolló y produjo y cómo funciona hoy.

Una de las revistas pioneras en divulgación matemática fue Scripta Mathematica (1933-1973), fundada en 1932 por Jekuthiel Ginsburg (1889–1957), profesor del Departamento de Matemáticas del Yeshiva College de Nueva York. Scripta Mathematica era la única revista de matemáticas de su época en que especialistas escribían para el público general, y algunos de los artículos que se publicaron en ella han pasado a la historia, como el que Percy Williams Bridgman (1882-1961), Premio Nobel de Física en 1946 por su trabajo en la física de altas presiones, publicó en 1934 sobre los efectos en Física de las paradojas de la teoría de conjuntos[10], o el obituario que sobre Emmy Noether (1882-1935) escribió Hermann Weyl (1885-1955) en 1935[11]. Durante sus cuarenta años de existencia, Scripta Mathematica llegó a ser tan popular que la revista Life publicó un artículo en 1949[12] con título *Speaking of pictures... solids and lines show the beauty of mathematics* dedicado a los modelos matemáticos creados por algunas de las plumas regulares de la revista: el propio Jekuthiel Ginsburg, Hermann Baravalle (Departamento de Matemáticas de Adelphi College, NY), Rutherford Boyd (autor de la película matemática Parábola) y Maurice El-Milick (profesor de matemáticas en París). Viendo las espléndidas fotografías en blanco y negro que Nat Farbman hizo de los objetos, apetece tenerlos delante, tocarlos y sentir sus texturas, algo que pudieron hacer los asistentes al Primer Congreso de la ESMA. El Instituto Henri Poincaré cuenta con una deliciosa colección de alrededor de quinientos objetos matemáticos, muchos de los cuales fueron expuestos en el Instituto durante la celebración del congreso, y entre ellos se cuentan, entre otros, los producidos por El-Milick y los fotografiados en los años treinta del siglo pasado por Man Ray. La historia de la colección nos la cuenta François Apéry del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Mulhouse en *Old and New Mathematical Models: Saving the Heritage of the Institut Henri Poincaré*[13], artículo en que también nos presenta una selección de sus objetos.

Al observar la selección de piezas presentada por Ápery, caemos en la cuenta de que todas tienen algo en común: además de ser preciosas, sus formas son realmente interesantes. ¿Qué hace que una forma concreta resulte interesante desde un punto de vista matemático? Sus singularidades y su deformaciones, en otras palabras, su topología. En *An Introduction to the Construction of Some Mathematical Objects*[14], un texto dirigido tanto a matemátic@s como a artistas, Claude Paul Bruter (Departamento de Matemáticas de la Universidad de París XII) nos

[8] La película es de acceso libre en www.dimensions-math.org
[9] *Mathematics and Modern Art*, págs. 11-16.
[10] P.W. Bridgman, *A physicist's second reaction to Mengenlehre*, Scripta Mathematica 2(1934), págs.101–117, 224–234.
[11] H. Weyl, *Emmy Noether*, Scripta Mathematica 3 (1935), págs. 201–220.
[12] Life Magazine, 21 de marzo de 1949, págs. 16-20.
[13] *Mathematics and Modern Art*, págs. 17-27.
[14] Mathematics and Modern Art, págs. 29-46.

introduce a los conceptos topológicos básicos en que l@s matemátic@s se centran a la hora de construir sus formas. Pinchos, burbujas, jaretas y estiramientos, son explicados y definidos con precisión en un lenguaje tan asequible como claro.

Habrá quien plasmará las transformaciones que describe Bruter sobre un lienzo o una pieza de barro, pero la mayor parte de las personas que lean este libro pensarán de inmediato en utilizar un ordenador y llevarlas a cabo sobre una superficie virtual. El enorme desarrollo de las herramientas digitales en los últimos años, ha repercutido muy directamente en el proceso de generación de imágenes y formas matemáticas, transformando completamente el panorama de la generación de tales imágenes. La relación entre ordenador y arte matemático se analiza en los dos siguientes capítulos del libro desde dos puntos de vista complementarios. Primero, Jean-François Colonna (Centro de Matemáticas Aplicadas de la Escuela Politécnica de Palaiseau) lleva a cabo en *Computer, Mathematics and Art*[15] un análisis de la relación, a nivel práctico, entre los ordenadores y el arte matemático.

No sólo el proceso de generación de formas se ha visto afectado por el avance de los ordenadores; también ha tenido que adaptarse nuestro sistema cognitivo como espectadores, uno de los aspectos en que centra sus investigaciones Jean Constant. Experto en el uso de la visualización como herramienta cognitiva, Constant nos recuerda en *Structure of Visualization and Symmetry in Iterated Function Systems*[16] que los estudios del proceso de adaptación del ojo humano a objetos matemáticos como los fractales, tienes sus precursores en los estudios sobre las aberraciones ópticas llevados a cabo en los campos de la psicología y fisilogía a mediados del siglo diecinueve, precisamente en la misma época en que Georg Cantor (1845-1918) desarrollaba su teoría de conjuntos, uno de los marcos matemáticos desde los que tales objetos más adecuadamente se estudian.

La iteración de funciones —para generar fractales— no es la única herramienta de uso común en la creación de imágenes que tiene sus orígenes en las matemáticas del siglo diecinueve. Otra fuente importante de material es el catálogo de modelos de geometrías no euclídeas desarrollado por l@s geómetras de finales del siglo. Uno de los artistas que más fructíferamente hizo uso de tal catálogo fue el grabador holandés M.C. Escher. En su artículo *M.C. Escher's Use of the Poincaré Models of Hyperbolic Geometry*[17], Douglas Dunham, del Departamento de Computación, Universidad de Minnesota, tras hacer una breve descripción de los modelos de Poincaré, analiza los patrones creados por Escher sobre tales modelos.

La música es considerada, entre todas las artes, la más relacionada con la matemática. Sin embargo, debe ser muy complicado describir esta relación, pues los textos o conferencias sobre el tema tienden a ser excesivamente triviales o excesivamente difíciles de entender. El artículo *Mathematics and Music Boxes*[18] de Vi Hart (Matemúsico de la Khan Academy) supone una deliciosa excepción a esta regla casi general. Con elegante simplicidad de medios (una cinta de papel perforada y una caja de música) y un lenguaje claro y directo, Vi Hart empieza por describir algunas transformaciones matemáticas del plano euclídeo y, a continuación, las utiliza para explicar la estructura básica de los distintos tipos de la forma de composición musical conocida como *canon*.

[15] *Mathematics and Modern Art*, págs. 47-52.
[16] *Mathematics and Modern Art*, págs. 53-67.
[17] *Mathematics and Modern Art*, págs. 69-77.
[18] *Mathematics and Modern Art*, págs. 78-84.

Como explica François Apéry en su artículo ya mencionado, parte de la colección de piezas matemáticas del Instituto Henri Poincaré fueron trasladadas al Palais de la Découverte —un museo de ciencias ubicado en el ala oeste del Gran Palais que se construyó en París para albergar la Exposición Universal de 1900— cuando éste fué fundado en 1937 por Jean Baptiste Perrin (Premio Nobel de Física en 1926 por sus investigaciones del movimiento browniano, y considerado el fundador del CNRS). Desde el Palais de la Découverte, los modelos matemáticos de la colección del Instituto Henri Poincaré inspiraron a muchos artistas, por ejemplo Fernand Léger, Man Ray o Marcel Duchamp en la primera mitad del siglo XX, y el grabador Patrice Jeener en la segunda. En *My Mathematical Engravings*[19] Jeener nos habla de sus visitas al Palais cuando de joven se acercaba a París desde su Provenza natal y de cómo el hecho de que el significado de aquellas piezas estuviese en las matemáticas está en el origen de su trabajo. A partir de las fórmulas, Jeener dibuja (antaño a mano, hoy con un ordenador) modelos que luego reproduce en la plancha de grabado. En su artículo nos describe las fórmulas y proceso de ejecución de tres de sus espléndidas series de grabados matemáticos: las superficies mínimas, superficies cerradas sin singularidades y funciones biperiódicas.

Topológicamente, una superfice en el espacio tridimensional consiste en caras, aristas y vértices. Una estrategia para construir modelos de superficies, consiste en partir de una dada, construir una especie de "andamio" o estructura cinética con sus caras, aristas y vértices, y transformar dicho andamio. Los dos tipos de andamios comúnmente utilizados son los construidos a partir de las caras y aristas de la superficie inicial y los construidos a partir de las aristas y los vértices. A partir de las caras y aristas se obtiene una estructura cinética plana y doblable, a partir de los vértices y aristas se obtiene una estructura cinética con forma de red. En *Knots and Links as Form-Generating Structures*[20], Dmitri Kozlov (Departamento de Matemáticas de Universidad de Bremmer) describe un tercer tipo de andamio construido a partir de los vértices —esto es, sólo de puntos— en la superficie inicial. Los puntos se organizan en nudos y cadenas, que a su vez dan lugar a una estructura que tiene la gran ventaja de ser no sólo es cinética, sino taambién sinergética, como las cúpulas geodésicas de Buckminster Fuller (que forjó el término).

Música, escultura, grabado, arquitectura,..., y, finalmente, también pintura. En su artículo *Geometry and Art from the Cordoban Proportion*[21], Antonia Redondo Buitrago (Profesora de Matemáticas en el I.E.S. Bachiller Sabuco de Albacete) y Encarnación Reys Iglesias (Departamento de Matemática Aplicada Fundamental, E.T.S. Arquitectura de la Universidad de Valladolid), nos presentan su investigación de la *proporción cordobesa* a partir de la obra de dos pintores contemporáneos españoles, Hasim Cabrera and Luis Calvo. La primera descripción escrita que se conoce de la relación entre la serie numérica introducida por Fibonacci en *Liber Abaci* (1202) y la proporción divina, denominada por los griegos como *media y extrema razón* (Euclides, *Elementos,* Libro VI) y por los lectores del diplomático Matila Ghyka (1931) como *el número de oro* o *proporción áurea*, la encontramos en un libro de Kepler (1571-1630).

> La estructura de cada uno de estos sólidos, como la del pentágono, no puede ser construida sin la proporción que los geómetras modernos denominan "divina." Está ordenada de tal manera que los dos términos menores en una proporción continua producen el tercero; y, sucesivamente, cualesquiera dos términos adyacentes suman el término siguiente, hasta el infinito, pues la misma proporción se mantiene siempre. Es imposible dar un ejemplo numérico perfecto. Cuanto más nos alejemos de la unidad, más perfecto será nuestro ejemplo. Sean los términos menores 1 y 1, que

[19] *Mathematics and Modern Art*, págs. 85-104.
[20] *Mathematics and Modern Art*, págs. 105-115.
[21] *Mathematics and Modern Art*, págs. 117-129.

> debes pensar como distintos. Súmalos, y hacen 2. Añade el mayor 1 para hacer 3. Suma 2 y hacen 5. Suma 3 y hacen 8. Suma 5 y hacen 13. Suma 8 y hacen 21. Como 5 es a 8, así es, aproximadamente, 8 a 13; como 8 es a 13 así es, aproximadamente, 13 a 21. Y así sucesivamente, hasta la eternidad (J. Kepler[22]).

Desde que Vitrubio (Marcus Vitruvius Pollio, c. 75 aC - c. 15 aC) publicase *De Architectura*, la proporción divina ha reinado sobre la arquitectura. O al menos eso se pensaba. En 1973, una investigación llevada a cabo por el arquitecto español Rafael de la Hoz (Premio Nacional de Arquitectura 1956 y Medalla de Oro de Arquitectura 2000) cuestionó la universalidad del uso de la proporción divina en arquitectura. Lo que había empezado como un estudio del uso de dicha proporción en la ciudad de Córdoba al objeto de validar su vigencia universal, llevó a un descubrimiento inesperado: salvo algún caso aislado, la proporción áurea no aparecía en ningún edificio o plaza pública de Córdoba, pero lo que sí había, y por todas partes, (desde la Mezquita hasta la más humilde fuente) fue otra proporción hasta entonces pasada por alto en las escuelas de arquitectura: la formada por el lado de un octógono regular y el radio de la circunferencia circunscrita, bautizada por el propio de la Hoz como *proporción Cordobesa.* La proporción cordobesa no sólo aparecía por todas partes en la ciudad de Córdoba sino que, una vez identificada, pudo reconocerse en edificios y construcciones a lo largo de todo el planeta. La historia del hallazgo, «como feliz resultado de un esplendoroso fracaso», puede leerse, escrita por el propio de la Hoz, en las actas de las VII Jornadas de Educación Matemática Thales celebrada en Córdoba en 1995.

Llevándonos de vuelta a los ordenadores, en *Dynamic Surfaces*[23] Simon Salamon (Departamento de Matemáticas, King's College London) describe la construcción de superficies relacionadas con curvas en el espacio y campos vectoriales. A través de una selección de imágenes —en la conferencia que el texto recoge, algunas de ellas eran dinámicas— Salamon explica no sólo cómo se generan tales formas sino también qué información queda codificada en los distintos colores.

Los ejemplos más ilustrativos de superficies mínimas los encontramos en las pompas de jabón. Cuando metemos en una disolución jabonosa un alambre en forma de circunferencia sujeto al extremo de un palito, una tensa película de jabón queda atrapada en el alambre formando un círculo. Si soplamos con cuidado, conseguimos una esfera casi perfecta. Desde un punto de vista matemático no hay ningún misterio: la presión atmosférica sobre la solución jabonosa hace que ésta se mantenga inicialmente tensa, pues la circunferencia es la curva más corta que encierra un área dada. Una vez empezamos a soplar, cada pompa toma la forma de aquella superficie con menor área entre todas las superficies capaces de contener la cantidad de aire que hemos soplado. Y la esfera resulta ser la superficie con menor área que encierra un volumen dado. Se trata de lo que en matemáticas se conoce como un *principio isoperimétrico*. Los primeros principios isoperimétricos de los que se tiene constancia aparecen enunciados, sin demostración, en los textos clásicos de geometría. Hacia el año 275, Papus escribió:

> Habiendo tres figuras con las que es posible recubrir exactamente el plano alrededor de un mismo punto, las abejas, debido a su astucia instintiva, eligen para la construcción del panal de miel la figura con el mayor número de ángulos, porque saben que contendrá más miel que cualquiera de las otras dos. Las abejas, pues, conocen este hecho que les resulta muy útil, que el hexágono es mayor que el cuadrado y el triángulo y dará cabida a más miel por el mismo coste de material utilizado en construir las distintas figuras. Nosotros, sin embargo, afirmando como afirmamos

---

[22] Johannes Kepler: *The Six-Cornered Snow Flake. A New year's Gift*. Edición bilingüe inglés/latín, Paul Dry Books, 2010, pág. 67.

[23] *Mathematics and Modern Art*, págs. 131-151.

tener más inteligencia que las abejas, investigaremos un problema aún más profundo, el de que entre todas las figuras planas equiláteras y equiangulares de igual perímetro, la que tiene mayor número de ángulos es siempre la mayor, y la mayor figura plana entre todas las de igual perímetro es el círculo (Pappus[24]).

¿Qué ocurre si no es el área lo que buscamos minimizar, sino otros aspectos, la energía Willmore, por ejemplo? (La energía Willmore mide cuánto se aleja una superficie de ser una esfera; específicamente, es la integral del cuadrado de la curvatura media de la superficie menos la curvatura de gauss, y se conjetura que la forma de las clelulas optimiza la energía Willmore). En tal cao, la superficie que obtenemos es una esfera invertida: tomamos una esfera, recortamos un casquete, hacemos pasar el resto de la esfera por el hueco obtenido y volvemos a pegar el casquete. También podemos trabajar con cuerdas y preguntarnos por los lazos y nudos que minimizarán la cantidad de cuerda necesaria para llevarlos a cabo. En *Pleasing Shapes for Topological Objects*[25], John M. Sullivan (Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica de Berlin) describe algunas de las formas que se obtienen al resolver estos problemas de optimización, explica las dificultades que surgen al intentar plasmar tales formas en objetos tridimensionales y sugiere cómo resolverlas.

Para terminar, François Tard (Ingeniero en París), nos ofrece en *Phombopolyclonic Polygonal Rosettes Theory*[26], un algoritmo para dividir un polígono regular con un número par de lados en una roseta formada por anillos concéntricos hechos por rombos isoperimétricos (con lados iguales).

Capi Corrales Rodrigáñez
Departamento de Álgebra
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
capi_corrales@mat.ucm.es

---

[24] Pappus: «Sobre la astucia de las abejas». Prefacio a su libro *Colección Matemática,* en T.L. Heath (ed.): *A History of Greek Mathematics*, Vol. 2, Dover, 1981.
[25] *Mathematics and Modern Art*, págs. 153-165.
[26] *Mathematics and Modern Art*, págs. 167-176.