TITULO: Virtual knots. The State of the Art

AUTORES: Vassily Olegovich Manturov and Denis Petrovich Ilyutko.

EDITORIAL: New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

SERIES ON KNOTS AND EVERYTHING: Vol. 51.

AÑO: 2012.

ISBN-13: 978-981-4401-12-8; ISBN 10:9814401129; ISSN 0219-9769

PRECIO: De 91$ a 168$.

URL: www.worldscientific.com

MSC: Principal: 57 Manifolds and cell complexes. Clasificación principal: 57M27, 57M25, 57Q45; Secundarios: 57M15, 08C05.

REVISOR: Francisco José Cano Sevilla. Profesor Universidad Complutense

RESUMEN

El estudio de nudos y sus propiedades se conoce como Teoría de Nudos. La Teoría clásica cuenta con una antigüedad de más de 250 años. Los nudos aparecen en los anudados chinos, en el budismo tibetano, en los trabajos de célticos de nudos enredados, en el Libro de Kells, texto de 1200 años de antigüedad, y así sucesivamente. Como una teoría matemática apareció en 1771 debida al matemático francés Vandermonde, cuando se discute las propiedades de los nudos relacionados con la geometría de la posición. Los estudios matemáticos comenzaron con Gauss en el siglo XIX, que define la integral encadenada. Esta teoría debe su primer impulso a Lord Kelvin, que propone una teoría en la que los átomos fueran vértices enlazados con diferentes configuraciones anudadas; P. G. Tait cataloga posibles lazos con diferentes nudos mediante el método de prueba y error, construyendo las primeras tablas de nudos con hasta diez cruces, conocidas como las conjeturas de Tait, este registro motivó que la teoría de nudos llegase a formar parte de la rama matemática de la Topología. Cerca de seis mil millones de nudos y uniones han sido tabulados desde los comienzos de la Teoría de Nudos en el siglo XIX. Un progreso enorme se realizó en los siguientes años, por ejemplo, Alexander, Dehn, Klein, Reidemeister, y otros famosos matemáticos.

Un nudo se define como una curva cerrada no auto inter-secante que se sumerge en tres dimensiones y no puede ser desenredada para producir un lazo simple (por ejemplo, un nudo).Para un matemático, un objeto es un nudo sólo si sus extremos libres están conectados de forma tal que la estructura resultante consta de un único cabo enlazado. Un nudo puede generalizarse a un eslabón (enlace), que es simplemente, una colección anudada de uno o más cabos cerrados. Un nudo virtual representa una generalización natural combinatoria de un nudo clásico, simplemente, introduciendo un nuevo tipo de cruce, y extendiendo nuevos movimientos a la lista de movimientos de Reidemeister, el nuevo cruce (virtual) debería tratarse como un cuadro diagramático de dos partes de un nudo (un eslabón) en el plano, que están lejos unas de otras, y la intersección de estas partes es un soporte de un tal diseño. En breve, un diagrama virtual (o un diagrama de un eslabón virtual) es la imagen de una inmersión de un grafo construido de 4-valentes (grados) en R2, con un número finito de aristas. Además, cada intersección es un punto doblemente atravesado, que se denomina un cruce virtual y se marca con un pequeño círculo, y cada vértice del grafo está dotado con la estructura clásica de cruces. La Teoría de Nudos en el espacio tridimensional euclideo o en la esfera de tres dimensiones (la teoría clásica), es una parte integral de una Teoría mucho más amplia, nudos en 3-variedades.

Este libro notable es el primer libro sistemático, y de longitud completa, sobre la Teoría virtual de Nudos y Eslabones, dedicado a un fascinante y comprensivo estudio de nudos virtuales y clásicos, como parte íntegra. El texto es auto-suficiente en su contenido. El material matemático está suficientemente cubierto y cerrado, y contiene una exposición actualizada de los aspectos claves en la Teoría de Nudos virtual (y clásica). El libro es completamente accesible a estudiantes no graduados de cursos elementales, por consiguiente puede también usarse como un texto básico sobre la Teoría de Nudos, virtual y clásica. Este libro es útil también a matemáticos profesionales y amateurs, debido a que contiene los desarrollos más novedosos y significativos en la Teoría de Nudos. El texto está escrito usando fuentes nudos.tex, que contienen símbolos especiales para la Teoría de Nudos.

La pretensión del presente libro es describir los conceptos principales de la Teoría moderna de Nudos junto con las demostraciones completas y pertinentes que harían la teoría accesible a los principiantes, y útiles a los profesionales. Una gran parte del presente libro se dedica a las áreas de un vertiginoso desarrollo en la Teoría moderna de Nudos; tales como la Teoría de Nudos virtuales y la Teoría de Nudos de Legendre.

En las últimas décadas, la Teoría de Nudos se ha enriquecido de numerosos métodos e invariantes sutiles, que hoy en día, constituyen una potente herramienta en la Teoría de Nudos y en la Topología de Baja Dimensión. Un camino abierto, en la Teoría de Nudos, se debe a los descubrimientos de Conway, Jones y Vassiliev (polinomios de Conway- Jones, e invariantes de tipo finito de Vassiliev). Por sus impactos en la Teoría de Nudos, al relacionar ésta teoría con varias ramas de las matemáticas y física, Jones, Witten, Drinfeld (1990) y Kontsevich (1998), fueron galardonados con el mayor honor de las matemáticas, las medallas Fields.

Los nudos virtuales fueron descubiertos por Luis H. Kauffman, en 1996, e independientemente por Goussarov, Polyak y Viro en 2000, que introdujeron los invariantes de tipo finito en la Teoría de Nudos, clásica y virtual. El primer artículo sobre la Teoría de Nudos Virtual, debido a Luis H. Kauffman, apareció en 1999, en el European Journal of Combinatory. La Teoría Virtual de Nudos ayuda a comprender mejor algunos aspectos de la Teoría Clásica de Nudos. Por medio de la Teoría de Nudos virtuales, fue resuelto el problema de la existencia de fórmulas combinatorias para invariantes de tipo finito.

Un punto de vista común, permite tratar de manera uniforme, a los nudos clásicos y virtuales.

Un nudo clásico (eslabón) puede expresarse como un diagrama plano. Existen cruces clásicos, y curvas que conectan los cruces, unos con otros. En los nudos clásicos es posible que, las curvas que conectan los cruces, puedan elegirse como no inter-secantes y en algunos casos, es imposible situar o localizar, estas curvas sin intersecciones adicionales. Estas nuevas intersecciones se marcan como virtuales (en círculos) y conseguimos así un diagrama virtual. Los cruces virtuales aparecen cada vez, cuando al definir un grafo 4-valente, mediante cruces clásicos y sus conexiones, éste no es plano, lo que ocurre casi a menudo.

Por consiguiente, los nudos virtuales están relacionados con los clásicos del mismo modo que los grafos están relacionados con los grafos planos. De aquí, la equivalencia (isotopía) de los diagramas de nudos clásicos con los virtuales, al definir por medio de transformaciones combinatorias (movimientos de Reidemeister), aplicadas al cruce, permaneciendo la transformación inactiva frente a todos los demás cruces.

Desde el punto de vista topológico, los nudos virtuales son nudos en superficies delgadas (producidos por las manipulaciones de esferas en un intervalo), consideradas como isotopía y estabilizaciones.

El libro contiene nueve capítulos, bibliografía y un índice, en 520 páginas. Va desde lo básico hasta las fronteras de la investigación. El libro es el volumen 51 de la colección Series sobre Nudos y Cualquier Cosa, polarizada alrededor de la Teoría de Nudos. Las cuestiones tratadas van más allá de la Teoría de Nudos en si, por ejemplo en la física, matemáticas, lógica, lingüística, filosofía, biología y experiencia práctica. El libro está dedicado a la memoria de Oleg Vassilievich Manturov (1936-2011), padre de Vassily Olegovich Manturov, primer autor del libro.

El primer capítulo, titulado básico, definiciones y notaciones, se dedica a las definiciones combinatorias y diagramáticas, y al descubrimiento de los números auto-enlazados de un nudo virtual. Este capítulo es un compendio, notable y fascinante del tratamiento enciclopédico de lo básico.

En el capítulo segundo, el libro se dedica a los nudos virtuales y a la topología en tres dimensiones. Los autores presentan una discusión del teorema de Kuperberger, y al género de la superficie de nudos virtuales. Kuperberger demuestra que si un nudo virtual (eslabón) está representado en su género de superficie mínima, entonces este tipo de inmersión es único. El resultado es interesante, debido a que es rentable para conseguir invariantes más profundos, una versión más fuerte de los polinomios de Jones para nudos virtuales y eslabones. Este capítulo también demuestra, que los nudos virtuales son algorítmicamente reconocibles, generalizando la técnica de Haken y Hemion para nudos clásicos.

El problema del reconocimiento para nudos clásicos era uno de los problemas centrales en la topología de baja dimensión. Su primera solución está relacionada con la teoría de la superficie normal de Haken, y las etapas finales pertenecen a Matveev. El resultado del reconocimiento algorítmico de un cierto objeto en la topología de baja dimensión es importante, debido a que en esta topología, la no realización algorítmica tiene lugar en muchos objetos. Cuando la teoría de nudos virtual aparece, surge el problema de la realización algorítmica de los nudos virtuales. Este problema se resuelve positivamente en este capítulo. Este resultado se apoya no sólo en la teoría de Haken, sino también en el teorema de Kuperberger.

En el capítulo tercero, se consideran quandles (grupoides distributivos, conjuntos automórficos) y sus generalizaciones a nudos virtuales. Conviene observar que un quandle es un conjunto con dos operaciones binarias que satisface unas condiciones parecidas a los movimientos de Reidemeister. El término fue acuñado por David Joyce en 1982. Es un invariante que clasifica a los nudos, que se recogen para mantenerlos activos en una especie de repisa (rack). Se analizan en este capítulo algunas generalizaciones de los invariantes, que emergen desde la teoría de nudos virtual, en particular el uso de biquandle, y sus potentes aplicaciones en la Teoría de Nudos. Biquandle es una generalización del quandle, que a su vez generaliza el grupo fundamental de un nodo (eslabón). Merece la pena destacar, las técnicas algebraicas de Lie para invariantes, nudos virtuales grandes, y la jerarquía de los nudos virtuales, que han sido ordenados por alguna elección de un ordinal, en términos de sus habilidades para moverse, a través unos y otros. Algunos invariantes se encuentran aquí, en este capítulo, por la jerarquía de los nudos virtuales.

En el capítulo cuatro, se analiza lo básico de los polinomios de Jones-Kauffman vía el sumario del estado soporte, e introduciendo el concepto de átomos (superficies orientables o no, soporte del diagrama del nodo virtual). También se tratan aquí los diagramas de cuerda, y el paso de átomos a diagramas de cuerda. El árbol soporte, los principales coeficientes, y los términos más bajos del polinomio soporte de Kauffman, el soporte de Kauffman para los nudos rígidos, y así sucesivamente. Se finaliza con el estudio de diagramas mínimos de grandes nudos virtuales.

En el capítulo quinto, del presente libro, se tratan muchas ideas relacionadas con la Teoría de Nudos virtual, que conducen al estudio de la homología de Khovanov, como la homología de un complejo algebraico, que se construye con un diagrama de un nudo (o eslabón). Esta homología detecta el no nudo, que nos alarga, con seriedad, los horizontes de la Teoría. La Teoría de Khovanov, asocia a cada diagrama de nudo una cadena compleja, cuya homología es un nudo invariante, y la característica de Euler de este complejo, coincide con el polinomio de Jones. Estas cadenas construidas con un diagrama de nudo, corresponden a un suavizado formal de este diagrama en todos los cruces clásicos. Es interesante que las diferenciales del complejo de Khovanov, se definan de forma combinatoria, y la homología es un invariante bajo los movimientos de Reidemeister. Para extender la Teoría de la homología de Khovanov a nudos virtuales, Manturov tiene que revisarla completamente, y construir un complejo, que desde la homotopía es equivalente al usual complejo de Khovanov. El problema, en el caso de nudos virtuales, está relacionado con la buena definición en orden, a que el cuadrado de la diferencial sea igual a cero. Este procedimiento necesita ser calculado, y comparado con la Homología Enlazada Categorizada de Khovanov-Rozansky. Una cuestión clave en esta construcción ha sido la consideración de átomos, y ello ha jugado una función crucial en la demostración de la conjetura de Vassiliev. Tal construcción es muy delicada y adecuada, debido a que requiere un número de ideas nuevas: orientación y enumeración de la localización de las curvas, coeficientes enlazados en la representación del álgebra de Fröbenius, y el uso de productos exteriores en vez de los usuales. Brevemente, los autores dan una primera solución combinatoria a la cuestión de la construcción de la homología integral de Khovanov para los nudos y eslabones virtuales.

El capítulo sexto trata con trenzas (lazos) virtuales, y el trabajo de Kamada (2007), y el de Kauffman y Lambropoulou (2006), y las consideraciones de los invariantes de trenzas virtuales, en los siguientes casos, la construcción del invariante principal, y a continuación la representación del grupo virtual de trenzas. Por otro parte, se realizan estudios sobre la completitud en el caso clásico, y en el caso de trenzas de dos cabos.

El capítulo séptimo trata de los aspectos combinatorios de la teoría invariante de Vassiliev, y el trabajo de Goussarov, Polyak y Viro, que usan nudos virtuales para formar diagramas de Gauss generales, y así construir una teoría de nudos virtuales de fórmulas de diagramas de Gauss. La teoría de nudos virtuales, sus construcciones y los métodos están estrechamente relacionados con varias ramas de la Teoría Clásica de los Nudos, en particular, con los invariantes de Vassiliev. Éstos ocupan una posición especial, en la Teoría Clásica de Nudos, que a su vez justamente, cuando esta teoría aparece, todos los polinomios, y los invariantes cuánticos son expresables en términos de los invariantes de Vassiliev. En el caso de nudos virtuales, la Teoría de Nudos invariantes de Vassiliev es mucho más complicada, aún en el espacio de los invariantes de orden cero, es infinito dimensional. En este capítulo, usando átomos y d-diagramas, se demuestra la conjetura de Vassiliev acerca de la planaridad de los grafos 4-valentes formados (grafos donde cada vértice tiene cuatro semi-aristas que están divididas en dos pares opuestos); esta conjetura resuelta positivamente, juega un papel crucial en el trabajo de Vassiliev sobre la existencia de fórmulas combinatorias, con valores enteros, para los invariantes de orden finito.

El capítulo octavo se dedica a la paridad en la Teoría de Nudos. En la Teoría Virtual de Nudos, existen muchos invariantes inesperados que no aparecen en el caso clásico. Este capítulo incluye el trabajo sobre el soporte de Goldman, y el co-soporte de Turaev y sobre el cobordismo de los nudos libres. Al principio se había pensado (una conjetura de Turaev), que los nudos libres eran triviales, pero el ejemplo más sorprendente de tal teoría es la Teoría de la Paridad concebida por Vassily Olegovich Manturov, donde todos los cruces clásicos son o bien pares o bien impares, y de aquí, la propiedad de ser par, es fundamental para preservar los movimientos de Reidemeister. Por paridad, se entiende cualquier modo natural de etiquetado de todos los cruces clásicos definidos para todos los nudos de esta teoría. Manturov demuestra, usando la paridad, que éste no es el caso, y que existen clases de cobordismo no trivial de nudos libres. Por medio de la paridad, uno puede construir transformaciones functoriales de nudos a nudos, filtraciones sobre el espacio de los nudos, refinamiento de muchos invariantes, y por otra parte demuestra, lo mínimo de muchas series de diagramas de nudos. La Teoría Virtual análoga, consiste en estudiar nudos virtuales hasta cambiar la orientación de los cruces como se describe en los comienzos de la Teoría, para así estudiar nudos virtuales hasta tener la equivalencia en la virtualidad. La existencia de paridades diferentes, y de proyecciones diferentes (de nudos a nudos), permite establecer varias filtraciones en el espacio de los nudos. Excepto que, tales proyecciones nos permitan obtener nuevos invariantes, pasando de los nudos clásicos a los virtuales.

Finalmente el capítulo noveno, trata de la teoría de grafos enlazados, una cuestión combinatoria adicional. El paso de los nudos clásicos a los virtuales puede también estar motivado por la representación de los movimientos de Reidemeister en el lenguaje de los diagramas de Gauss. Todo diagrama de Gauss es un círculo con una colección de pares de puntos (todos los puntos son mutuamente disjuntos); a todo par de puntos se le asocia una flecha de un punto a otro y un signo. Todo diagrama de cuerdas de una tal clase tiene un grafo intersección. Los vértices del grafo intersección corresponden a las cuerdas, y dos vértices son adyacentes siempre que las correspondientes cuerdas estén enlazadas. Para tales grafos, es posible extender los movimientos de Reidemeister. Observar que no todos los grafos simples (sin múltiples aristas y lazos) se originan desde diagramas de cuerdas. Cuando se pasa de la intersección de grafos de diagramas de cuerdas a grafos arbitrarios, y se extienden los movimientos de Reidemeister a tales grafos, se finaliza en la Teoría de grafos enlazados, debida a los autores del presente libro. Una teoría análoga fue construida por Traldi y Zulli. Los grafos enlazados pueden ser considerados como una Teoría de Nudos sin diagrama. Tales enlaces tienen cruces, pero no tienen arcos que conecten estos cruces, ya que los grafos correspondientes no son intersecciones de grafos de cualesquiera diagramas de cuerdas, y por consiguiente no son dibujables en el plano. A su vez, sin embargo, a los grafos enlazados se pueden extender muchos métodos de la Teoría de Nudos, clásica y virtual, en particular la Teoría de la Paridad. Se han construido con ello varios invariantes, demostrando la equivalencia de las dos aproximaciones a los grafos enlazados, uno sugerido por los autores, y el otro sugerido por Traldi y Zulli. Se han construido varios invariantes demostrando la no realización de los grafos enlazados (debido al hecho de que un grafo enlazado no tiene representatividad dibujable). Un logro notable, en la teoría de los grafos enlazados, es el trabajo de Nikonov, que construye la teoría de la homología de Khovanov, para este tipo de grafos, con coeficientes de Z2. Salvo el usual soporte de Kauffman, cuando se tiene que contar el número de estados-círculos no existentes para este problema, se tiene que comprender como estos círculos no existentes pueden interferir en la construcción de la diferencial en el complejo de Khovanov.

Las teorías mencionadas anteriormente, se refieren a diferentes problemas combinatorios, topologías tridimensional, y tetra-dimensional, teoría de la representación para grupos y álgebras de Lie. La teoría de la representación, es el punto de partida para construir invariantes cuánticos de los nudos y las 3-variedades.

El libro es el resultado de la investigación, durante los últimos diez años. Las diferentes cuestiones de la Teoría de Nudos virtual, fueron discutidas en el seminario “Nudos y Teoría de la Representación”, y en el seminario sobre “Análisis Tensorial y Vectorial” (éste último existente desde los años 1920) en la Universidad Estatal de Moscú.

Definitivamente, el libro es altamente recomendado para estudiantes no graduados y graduados, matemáticos profesionales y amateurs e investigadores, debido a que va desde lo básico a las fronteras de la investigación. Finalmente, como Luis H. Kauffman dice: “este texto auto-contenido motiva, para proseguir en profundidad, con la aventura propuesta por este fascinante y notable libro”.