HOMOMORFISMOS DE GRAFOS Y SEMIGRUPOS SOBRE REDES DE RELACIONES

DOUGLAS R. WHITE y KARL P. REITZ

1. Redes de relaciones simples

1.1 Los grafos y sus imágenes

Definición 1. Un *grafo* (al que normalmente nos referiremos como digrafo) es un par ordenado $G = (P, R)$ donde P es un conjunto finito de puntos (puntos, objetos, actores) y R es una relación (un tipo de vínculo) definida sobre P, esto es, un subconjunto de pares ordenados de puntos perteneciente a $P \times P$.

Definición 2. Una *función* f: $P \to P'$ es una aplicación de cada elemento a perteneciente al conjunto P en un elemento imagen $f(a)$ perteneciente al conjunto P'. Una función suprayectiva es una aplicación en la que todos los elementos de P' son imágenes de elementos de P.

Definición 3. Una *equivalencia* $\equiv$ definida sobre P es una relación tal que para cualesquiera a, b y c pertenecientes a P, se cumple que

$a \equiv a$
si $a \equiv b$ entonces $b \equiv a$
si $a \equiv b$ y $b \equiv c$ entonces $a \equiv c$

Estas son las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Lema 1. Toda función f: $P \to P'$ produce una relación de equivalencia $\equiv_f$ sobre P, esto es, que para cualesquiera $a, b \in P$,

$a \equiv_f b$ si y solo si $f(a) = f(b)$.

La prueba de este lema puede encontrarse en los textos al uso. Todas las demás pruebas de lemas y teoremas se ofrecen en el Apéndice.

Definición 4. Sea $G = (P, R)$ un grafo y f: $P \to P'$ una aplicación suprayectiva. Sea R' una relación definida en P' tal que $R' = \{(f(a), f(b)) : (a, b) \in R\}$. Decimos que R' es la relación de *P' producida por R y f.*

1.2 Homomorfismos de grafos e imágenes de blockmodel

Los homomorfismos son aplicaciones que preservan la estructura. El mínimo homomorfismo de un grafo es una función que transforma los puntos de un grafo en puntos en una imagen del grafo y preserva las aristas o conexiones como aristas o conexiones imagen. Expresado en forma de diagrama:

Grafo:	Imagen:
Todas las aristas $\xrightarrow{\quad f \quad}$	Arista (Homomorfismo)

Hay diferentes tipos de homomorfismos que preservan rasgos adicionales de la estructura de un grafo. La estructura que se preserva puede definirse de acuerdo con las propiedades de f en términos de su aplicación inversa f^{1} desde la imagen a la preimagen a través de diferentes tipos de homomorfismos.

Más abajo se ofrecen las definiciones formales de los tipos de homomorfismos que resultan más útiles en el análisis reticular de las estructuras de roles. Comenzaremos con el homomorfismo completo en el que cada arista de la imagen está producida por alguna arista en la preimagen. Dado que no hay en la imagen aristas que vengan de fuera, este y todos los homomorfismos que vienen a continuación generan el modelo estructural de una red.

Los homomorfismos regulares y estructurales son modelos de especial importancia en el estudio de los sistemas de roles. En el caso de un homomorfismo regular, los puntos que tienen la misma imagen necesariamente ocupan la misma posición abstracta o "rol" en la red total o grafo. Dos puntos tienen la misma imagen (rol) en un homomorfismo regular si y solo si, cuando uno tiene una relación con un segundo conjunto imagen (o rol), el otro tiene una relación idéntica con un homólogo en ese conjunto. Este es el principio de los paralelos de rol. Dos puntos tiene la misma imagen en un homomorfismo estructural si y solo si están relacionado de manera idéntica a todos los demás puntos.

Definición 5. Sean $G=(P, R)$ y $G'=(P', R')$ dos grafos, $f\ G \rightarrow G'$ es un *homormorfismo del grafo completo* si y solo si f: $P \rightarrow P'$ es una aplicación suprayectiva tal que para cualesquiera $a, b \in P$ y $x, y \in P'$

aRb implica que $f(a)\ R'\ f(b)$, y
$xR'y$ implica que existen $c,d \in P$ tales que cRd, $f(c)=x$, y $f(d)=y$.

A la imagen homomórfica completa de un grafo, BOORMAN, ARABIE y LEAVITT (1978:31-32) la han denominado *blockmodel*.

Proposición A. Sean $G=(P, R)$ un grafo y f: $P \rightarrow P'$ una aplicación suprayectiva en un conjunto P'. Si R' es la relación definida sobre P' que ha sido inducida por f y R, y $G'=(P', R')$, entonces la aplicación $f\ G \rightarrow G'$ es un *homormorfismo del grafo completo*.

Los homomorfismos completos resultan útiles en las comparaciones estructurales de redes o grafos. Un ejemplo de las etapas de este proceso arranca del trabajo de LAUMANN y PAPPI (1976) sobre las relaciones entre los miembros de la élite de dos ciudades, "Altneustadt" en Alemania y "Towertown" en los Estados Unidos (ambos nombre son seudónimos). BREIGER y PATTISON (1978) modelaron bloques de actores estructuralmente equivalentes (ver Definiciones 10 y 25) para obtener grafos resumen de las estructuras de roles en ambas comunidades en términos de tres tipos de relaciones: negocios (B), discusiones sobre asuntos comunitarios (C) y contactos sociales (S), tal como se muestra en la Figura 1. BONACICH (1981) comparó estos dos conjuntos de grafos usando el homomorfismo completo de los grafos de cada ciudad en grafos de "estructuras comunes", que también aparecen en la Figura 1. Estos grafos muestran los aspectos comunes de la estructura de liderazgo en las ciudades. El ejemplo es una prueba de cómo pueden usarse homomorfismos más fuertes en una primera etapa del análisis para poner de manifiesto las características concretas de las redes sociales, mientras que los homomorfismos más débiles se emplean en una etapa posterior para revelar características más generales. La ventaja de tener una familia de herramientas para modelar homomorfismos, de los más fuertes a los más débiles, es obvia desde el punto de vista de los diferentes niveles de generalidad en el análisis.

El homomorfismo completo es útil para el análisis de estructuras comunes (BONACICH 1981), pero es demasiado general para identificar posiciones de rol más concretas. Por ejemplo, dos grafos no vacíos cualesquiera tienen la misma imagen homomórfica completa de un único punto conectado a través de su imagen consigo mismo. Tanto los puntos no conectados como los conectados de todo grafo se corresponden con el mismo punto en la imagen. Sin embargo, está claro que esto no equivale a que los puntos se correspondan con las mismas posiciones o roles en la red.

El homomorfismo regular, por el contrario, puede considerarse como una aplicación de los puntos de un grafo en distintos roles o posiciones, con la particularidad de que si dos roles están conectados a través de su imagen, entonces uno de los roles tiene necesariamente que estar conectado a algún otro que esté en correspondencia con el otro rol. Esto puede formalizarse como sigue.

Definición 6. El homomorfismo completo de un grafo f: $G \rightarrow G'$ es *regular* si y solo si para todo $a, b \in P$,

$f(a)R'f(b)$ implica que existen $c, d \in P$ tales que
$cRb, aRd, f(c) = f(a), f(d) = f(b)$.

No todo homomorfismo completo de un grafo es un homomorfismo regular como puede verse en el siguiente ejemplo. Aquí $\{a, b, c, d\}$ son puntos del grafo origen que establecen una correspondencia a través de la función f con el conjunto $\{x, y\}$ transfiriendo cualquiera de las conexiones entre puntos al grafo imagen.

$$\left\{\begin{matrix} a & & b \\ \downarrow R & & \\ c & & d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{f} \begin{matrix} x & {\scriptstyle f(a)=f(b)=x} \\ \downarrow R' & \\ y & {\scriptstyle f(c)=f(d)=y} \end{matrix}$$

Ejemplo 1

Nótese que $f(b)R'f(d)$ pero que bRx no es cierto para x.

Los homomorfismos regulares tienen como requisito que los ocupantes de un rol estén conectados de idéntica manera a algunos de los ocupantes de un rol "homólogo". En los sistemas de roles, no es de esperar que todos los ocupantes de un rol estén idénticamente conectados a los ocupantes de un rol "homólogo". Este requisito más restrictivo es la base del análisis de sistemas de roles de Harrison White y sus discípulos. Hay algunas circunstancias o algunos tipos de roles para los cuales es de esperar que todos los ocupantes de un rol estén conectados de idéntica manera a los ocupantes de los roles homólogos. Esto puede definirse formalmente en términos de homomorfismos estructurales, que resultan tan familiares para la teoría de grafos (Hedetniemi 1966; Lorrain 1974; Arabie, Boorman y Leavitt 1978) como se muestra a continuación.

Definición 7. Un homomorfismo completo de un grafo f: $G \to G'$ es *estructural* si y solo si para todo a y b de P, dado que $a \neq b$,

$f(a)R'f(b)$ implica que aRb.

No todo homomorfismo regula de un grafo es un homomorfismo estructural, tal como se muestra en la Ejemplo 2.

Nótese que $f(b)R'f(d)$, pero que aRb no se cumple.

En el caso de los homomorfismos estrcuturales, el hecho de que la imagen de un punto esté conectada mediante su imagen a sí misma no implica que su preimagen esté conectada a sí misma también. El más fuerte de los homomorfismos de un grafo sirve para generalizar el concepto de equivalencia estructural hasta el punto de incluir la reflexividad. Si la conexión de un punto consigo mismo es significativa, la conexión mediante su imagen de un punto implica que esté conectado consigo mismo en la preimagen. Esto puede formalizarse como sigue.

Definición 8. El homomorfismo completo de un grafo f: $G \to G'$ será *fuerte* si y solo si para todo a y b de P,

$f(a)R'f(b)$ implica que aRb.

No todo homomorfismo estrcutural de un grafo es fuerte, tal como queda ilustrado en el Ejemplo 3.

Nótese que $f(b)R'f(b)$, pero que bRb es falso.

Los homomorfismos fuetes son la base de ciertos modelos de espacios multidimensionales para grafos o redes. Guttman (1977) demuestra como los grafos simétricos pueden representarse en un espacio multidimensional en el que dos puntos se correspinden conal misma imagen en el espacio si y solo si ambos puntos tienen idénticas conexiones con los otros puntos, entre ellos y consigo mismos (la distancia desde un punto has el mismo, en este espacio, es igual a cero). Guttman también pone de manifiesti cómo estas representaciones espaciales pueden generalizarse a los grafos asimétricos. Estás ideas están desarrolladas con más detalle en Freeman (1983).

Los cuatro homomorfismos de un grafo de las Definiciones 5 a 8 tienen una fuerza creciente en el sentido en que, la definición de más fuerte lleva aparejada la definición del más débil, tal como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1. Si f: $G \to G'$, entonces

(i) el que f sea un homorfismo fuerte de un grafo implica que f sea un homomorfismo estructural.

(ii) el que f sea un homomorfismo estructural implica que f es un homomorfismo regular.

Grätzer (1979:81) define los homomorfismos completos y fuertes mediante algebras parciales. Los homomorfismos regulares y estructurales, tal como se han definido aquí, se usan para el análisis de aspectos específicos de la estructura de roles.

1.3. Equivalencias

Recordemos que cada homomorfismo de un grafo produce una relación de equivalencia en el conjunto origen (de acuerdo con el Lema 1). Los siguientes teoremas demuestran como para cada tipo de homomorfismo se produce una particular relación de equivalencia y, a la inversa, que cada tipo particular de equivalencia deriva de un tipo particular de homorfismo.

Definición 9. Si $G = \langle P, R \rangle$ y ≡ es una relación de equivalencia definida sobre P, ≡ es una *equivalencia fuerte* si y solo si para todo a, b y c ∈ P, a ≡ b implica que

(i) aRb si y solo si bRa

(ii) aRc si y solo si bRc, y

(iii) cRa si y solo si cRb.

Los puntos fuertemente equivalentes están relacionados de manera idéntica consigo mismos, entre ellos, y con los demás.

Definición 10. Si $G = \langle P, R \rangle$ y ≡ es una relación de equivalencia definida sobre P, ≡ es una *equivalencia estrcutural* si y solo si para todo a, b y c ∈ P, tales que a≠c≠b, a ≡ b implica que

(i) aRb si y solo si bRa

(ii) aRc si y solo si bRc

(iii) cRa si y solo si cRb, y

(iv) aRa implica que aRb.

Los puntos estructuralmente equivalentes están relacionados de manera idéntica entre ellos y con todos los demás.

Definición 11. Si $G = \langle P, R \rangle$ y ≡ es una relación de equivalencia definida sobre P, ≡ es una *equivalencia regular* si y solo si para todo a, b y c ∈ P, a ≡ b implica que

(i) aRc implica que existe d ∈ P tal que bRd y d ≡ c, y

(ii) cRa implica que existe d ∈ P tal que dRb y d ≡ c.

Los puntos equivalentes regularmente están conectados de la misma manera a sus homólogos correspondientes.

Teorema 2A. La equivalencia inducida por un homomorfismo fuerte es una equivalencia fuerte y, al contrario, toda equivalencia fuerte está inducida por un homomorfismo fuerte.

Teorema 2B. La equivalencia inducida por el homomorfismo estructural de un grafo será una relación de equivalencia estructural y, a la inversa, toda equivalencia estructural está inducida por algún homomorfismo estructural.

Teorema 2C. La equivalencia inducida por el homomorfismo regular de un grafo es una relación de equivalencia regular y, a la inversa, toda equivalencia regular está inducida por algún homomorfismo regular.

Puede pensarse en las relaciones de equivalencia de un conjunto P como subconjuntos de P x P. Como tales, estas relaciones están parcialmente ordenadas mediante su inclusión en el conjunto. Un conjunto de equivalencias tiene un elemento máximo si existe una relación de equivalencia dentro de esa colección que abarca a todo el resto.

Teorema 3A. El conjunto de todas las relaciones de equivalencia fuertes definidas sobre un grafo tiene un elemento máximo.

Teorema 3B. El conjunto de todas las relaciones estructurales definidas sobre un grafo tiene un elemento máximo.

Teorema 3C. El conjunto de todas las relaciones regulares definidas sobre un grafo tienen un elemento máximo.

1.4. El semigrupo de relaciones compuestas

Sea R una relación y $\circ$ la notación con la que se define la composición de relaciones, es decir, si aRb y bRc entonces $a(R \circ R)c$, de modo que

$R \circ R = \{\langle a,c\rangle$ de modo que existe b $\in$ P tal que $\langle a,b\rangle$ y $\langle b,c\rangle$ $\in$ R}

La operación $\circ$ cumple la propiedad asociativa para el conjunto S de todas la relaciones definidas sobre P que pueda generar R. En otras palabras $\langle S,\circ\rangle$ es un semigrupo. Nótese que los elementos R^n y R^m de S son iguales si contienen el mismo conjunto de pares ordenados de P x P.

Sea f: $G \rightarrow G'$ el homomorfismo completo de un grafo de $\langle P,R\rangle$ en $\langle P',R'\rangle$, y sea, para todo Q $\in$ S, Q' la relación de correspondencia definida sobre P' e inducida por f y Q, entonces,

S' = {Q': Q $\in$ S}, y $\hat{f}$: S $\rightarrow$ S' tales que $\hat{f}$ (Q) = Q'.

Teorema 4. Si f: $G \to G'$ es el homomorfismo regular, estructural o fuerte de un grafo (con respecto a R), f será regular, estructural o fuerte respectivamente para toda relación definida en S. Esto es, f: $\langle P,R\rangle \to \langle P',R'\rangle$ será regular, estructural o fuerte respectivamente para todo Q $\in$ S.

Teorema 5. Si f: $G \to G'$ es un homomorfismo regular de un grafo, entonces $\hat{f}$: S →S' es el homomorfismo de un semigrupo. Es decir,

$$\hat{f}(Q_1 \circ Q_2) = \hat{f}(Q_1) \circ \hat{f}(Q_2) = Q_1' \circ Q_2'$$

Teorema 6. Si f: $G \to G'$ es un homomorfismo fuerte de un grafo, entonces $\hat{f}$: S →S' es el isomorfismo de un semigrupo.

El teorema anterior no se cumpliría si f fuera solamente un homomorfismo estructural. Esta afirmación puede verificarse en el Ejemplo 3 (supra). Nótese que para puntos r ≠ s, f(r)R'f(s) implica que rRs. Sin embargo, f(b)R'f(b) pero no implica que bRb, de manera que f es estructural, pero no fuerte. Nótese también que $\langle b,b\rangle \notin R$, pero que $\langle b,b\rangle \in R^2$, de modo que $R \neq R^2$. Sin embargo, $R' = (R')^2$, de manera que f: S →S' no es un isomorfismo.

Definición 12. Un grafo G es *acíclico* si y solo si se cumple que $\langle a,a\rangle \notin R^n$ para todo $a \in P$ y todo $n \in Z^+$.

Teorema 7. Si f: $G \to G'$ es un homomorfismo estructural de un grafo y G es un grafo acíclico, entonces $\hat{f}$: S →S' es el isomorfismo de un semigrupo.

Los homomorfismos fuertes preservan la estructura exacta del semigrupo de relaciones generado por la relación definida en el grafo. Los homomorfismos estructurales preservan esta estructura solo cuando todas las relaciones son irreflexivas. Sin embargo, los homomorfismos regulares no preservan necesariamente la estructura exacta del semigrupo como puede verse en el siguiente ejemplo.

2. Redes con atributos y relaciones múltiples

Para generalizar completamente el uso de estas definiciones, necesitamos definir las redes como multigrafos (con múltiples relaciones), en los que los nodos de la red tienen también atributos. A partir de aquí, podemos definir un álgebra de redes sobre la cual operen nuestros homomorfismos y equivalencias.

2.1. Los atributos de los nodos: equivalencias e identidades de clase.

Definición 13. Una *equivalencia de atributos* definida sobre un grafo G es la relación ≡A inducida por un subconjunto A de P que tenga un atributo determinado, donde

≡A = $\{\langle i,j\rangle : i,j \in A, i,j \notin A\}$

Lema 2. Si G =$\langle P, \equiv A\rangle$ es el grafo de una relación de equivalencia de atributos ≡A, ≡A es también equivalencia inducida por el mayor de los homomorfismos regulares (estructurales o fuertes) del grafo.

Definición 14. Una *identidad de clase* definida sobre G es un subconjunto I_A de la relación de identidad I =$\{\langle i,i\rangle : i \in P\}$para un conjunto A de nodos de P que tengan un atributo de clase determinado, de modo que

$I_A = \{\langle i,i,\rangle : i \in A \subseteq P\}$.

Lema 3. Si $G = \langle P, I_A\rangle$es el grafo de la identidad de clase I_A definida por el atributo de clase A, entonces la equivalencia de atributo ≡A es también la equivalencia inducida por el más grande de los homomorfismos regulares del grafo.

2.2. Redes de relaciones múltiples

Definición 15. Una *red* es un par ordenado $N = \langle P, \mathfrak{R}\rangle$ en el que P es un conjunto de puntos y $\mathfrak{R}$ un conjunto de relaciones definidas sobre P.

A veces a la red se la denomina multigrafo (orientado) e incluye relaciones definidas sobre P que pueden ser equivalencias de atributos o identidades de clase. También pueden definirse homomorfismos sobre las redes, como en el caso de los grafos definidos por una sola relación. El homomorfismo de una red implica dos la existencia de dos funciones. El número de variaciones posibles para definir la función más fuerte se incrementa notablemente.

Definición 16a. Sean $N = \langle P, \mathfrak{R}\rangle$ y $N' = \langle P', \mathfrak{R}'\rangle$ dos redes, un *homomorfismo completo débil de una red* $f : N \to N'$ es un par ordenado de funciones $f = \langle f_1, f_2\rangle$ tales que $f_1 : P \to P'$ y $f_2 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ están definidas de manera que, para cada a,b ∈ P y R ∈ $\mathfrak{R}$, aRb implica $f_1(a) f_2(R) f_1(b)$, y para todo x,y ∈ P' y R ∈ $\mathfrak{R}$ $x f_2(R) y$ implica que existen c, d ∈ P tales que $f_1(c) = x, f_1(d) = y, cRd$.

Nótese que la para cada relación R ∈ $\mathfrak{R}$, el homomorfismo completo de la red $f : N \to N'$ induce un homomorfismo completo de un grafo definido de $\langle P, R\rangle$ en $\langle P', f_2(R)\rangle$. A continuación se ofrecen ejemplos de dos formas de homomorfismos regulares.

2.5. Modelos de bloque en redes y relaciones entre roles

Las aproximaciones previas a los métodos empíricos de modelado de bloques están basadas en diversas generalizaciones hechas a partir del homomorfismo completo utilizando el criterio de la densidad (Arabie, Boorman y Leavitt 1978:32) o aproximándose al homomorfismo estructural.

La densidad de un homomorfismo puede definirse de la siguiente manera. Sea N la red $\langle P, \Re \rangle$ y $f_1 : P \to P'$ una aplicación suprayectiva. Sea, para los puntos a,b$\in$ P', $f_1^{-1}(a) = \{x_1, \ldots, x_{n_a}\}$ y $f_1^{-1}(b) = \{y_1, \ldots, y_{n_b}\}$. Entonces, para cada par $\langle a, b \rangle \in P' \times P'$ y $R \in \Re$ podemos definir el número

$$r_{ab}^R = \frac{\sum_i^{n_a} \sum_j^{n_b} [x_i R y_j]}{n_a \times n_b} \quad \text{donde } [x_i R y_j] = \begin{cases} 1 si \langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0 si \langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases}$$

Definición 25. Sea $N = \langle P, \Re \rangle$ una red y $f_1 : P \to P'$ una aplicación suprayectiva. Sea R', para todo $R \in \Re$, una relación tal que para todo *a*, *b* de *P'* aR'/b (es decir, que a no está relacionado con b mediante R') si $r_{ab}^R \leq \alpha$, y aR'b si $r_{ab}^R > \beta$.

La aplicación $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ es un *homomorfismo de densidad* con un parámetro de impureza $\alpha \geq 0$ para el "bloque de ceros" y un parámetro de impureza $\beta < 1$ para el "bloque de unos", su y solo si no existen ningún a, b $\in$ P' tales que $\alpha < r_{ab}^R \leq \beta$. Usamos la notación $\beta \to 1$ para indicar que β está lo suficientemente cerca del valor 1 como para cumplir con los requisitos de un perfecto bloque de unos.

Si $\alpha = \beta$ entonces, cualquier partición de puntos puede transformarse mediante el homomorfismo densidad en una imagen. En el caso de los homomorfismos *completos* de redes que estamos manejando $\alpha = \beta = 0$. Breiger, Boorman y Arabie (1965) se refieren al caso en el que $\alpha = \beta \approx 0$ como "ajuste estrecho". En la medida en la que los valores de α y β se alejan entre sí, pasando a considerar densidades de carácter intermedio, habrá menos particiones que satisfagan las condiciones de densidad del homomorfismo. En el caso de que $\alpha = 0$ y $\beta \to 1$ existe solo una partición máxima que satisfaga las condiciones del homomorfismo, y se corresponde con lo que hemos definido como homomorfismo *fuerte* de una red. La modificación del parámetro de densidad r_{ab}^R para excluir las relaciones reflexivas se corresponde con el caso de nuestro homomorfismo *estructural* de una red, donde, de nuevo, $\alpha = 0$ y $\beta \to 1$. Breiger, Boorman y Arabie se refieren al caso en el que $a \approx 0$ y $b \approx 0$ como "ajuste amplio". Nótese que no hay modo de definir homomorfismos regulares por medio de estos parámetros.

Resumiendo las deficiencias del trabajo sobre modelado de bloques revisado previamente podemos decir que:

(1) La equivalencia estructural arroja agrupaciones de puntos que están relacionados entre ellos y con todos los demás de manera idéntica. El modelado de bloques en una red de cuerdo con este tipo de equivalencia preserva la estructura de semigrupo de relaciones de la red, pero es demasiado restrictivo para captar las bases más abstractas de las correspondencias entre roles. Esta restricción aumenta en el caso de la equivalencia fuerte, donde los puntos

considerados equivalentes están relacionados entre ellos, consigo mismos y con todos los demás de manera idéntica. Las restricciones que impone la equivalencia estructural se relajan hasta cierto punto cuando se usan aproximaciones que buscan un "ajuste amplio" (Breiger, Boorman y Arabie 1975), que siguen no obstante sin poder captar la idea de correspondencia de roles, o estar relacionado de igual manera a homólogos equivalentes.

(2) La equivalencia completa, incluso si se generaliza en términos de un "ajuste estrecho" de las excepciones permitidas en los bloques de ceros, es aun un tipo de equivalencia demasiado burdo como para captar la correspondencia entre roles. Si la densidad establecida está por debajo de la densidad del grafo entero, el maximo modelo de bloque completo se reduce a un único punto conectado consigo mismo. Las regularidades estructuradas de los roles en los patrones que siguen las conexiones en la red original deben captarse mediante el uso de criterios distintos.

(3) La equivalencia por agrupamiento (Mandel y Winship 1979) supone un avance, pero está aun lejos de poder captar la equivalencia de roles o de posiciones.

Los dos criterios que introducimos aquí para el modelado de bloques están basados en definiciones de los patrones abstractos que sigue la relación entre roles:

(4) La equivalencia regular arroja agrupamientos de puntos en los cuales, para cada par de personas en posiciones equivalentes, *si una de ellas está relacionada con una persona en una segunda posición, la otra tiene una relación idéntica con su homólogo en ea posición*. Este tipo de equivalencia conlleva dos problemas relacionados. Uno es que en las redes con relaciones múltiples puede haber más de una relación múltiple característica entre posiciones. Por ello el homomorfismo regular no preserva necesariamente la estructura del semigrupo de relaciones definido sobre un multigrafo.

(5) La equivalencia de unión es un tipo de equivalencia regular en la cual (a) no hay más de un grupo de relaciones características entre posiciones y (b) el semirupo de relaciones definidas sobre el multigrafo es preservado isomórficamente en el modelo de bloques que es su imagen.

Las limitaciones de la equivalencia de unión están en que no es necesariamente una equivalencia máxima para una red dada. En consecuencia, si bien es verdad que la equivalencia de unión es la que más se aproxima al concepto abstracto de rol, podemos encontrarnos con que, para una red determinada, existe una multiplicidad de estrcuturas máximas de roles (modelos de bloques) que no son reductibles a un solo sistema de roles.

Esta limitación es simplemente el reconocimiento del hecho, obvio por otra parte, de que los roles pueden solaparse unos con otros de maneras tan complejas que es imposible asignar a casa actor una única posición de rol para después cracterizar las relaciones entre posiciones.

El estudio de los homomorfismos nos impulsa, por tanto, hacia una solución formal de cómo delimitar en una red múltiple las distintas estructuras producidas por el entrecruzamiento de los roles.

BIBLIOGRAFÍA CITADA

Arabie, P., Scott Boorman y Paul R. Leavitt (1978), "Contructing blockmodels: how and why". Journal of Mathematical Psychology 17:21-63.

Bonacich, P. (1981), The Common Strcuture Graph: Common Features of a Set of Graphs. Department of Sociology, UCLA.

— (1982) "What is a homomorphism?", en L.C. Freeman, D.R. White y A.K. Romney (eds.) Research Methods in Social Network Analysis.

Boorman, S. Y Harrison C. White (1976) "Social structure from multiple networks II. Role structures". American Journal of Sociology 81:1384-1446.

Boyd, John C. (1980) "The universal semigroup of relations". Social networks 2:1-27.

— (1982) "Social semigroups an green relations" en L.C. Freeman, D.R. White y A.K. Romney (eds.) Research Methods in Social Network Analysis.

Breiger, R. y Philippa E. Pattison (1978) "The joint role strcuture of two community elites". Sociological Methods and Research 7:213-226.

Breiger, R., Scott Boorman y Phipps Arabie (1975) "An algorithm for clustering relational dara with application to social network analysis and comparison to multidimensional scalling".Journal of Mathematical Psychology 12: 328-383.

Clifford, A.H. y Miller (1970) "Union and symmetry preserving endomorphisms of the semigroup of all binary relations on a set". Czechoslovak Mathematical Journal 20, nº 5. Praha.

Freeman, Linton (1983) "Spheres, cubes and boxes: graph simensionality and network strcuture". Social Neworks 5: 139-156.

Grätzer, G. (1979) Universal Algebra. Nueva York: Springer-Verlag.

Guttman , L. (1977) "A definition of dimensionality and distance for graphs" an J.C. Lingoes (ed) Geometric Representation of Relational Data. Ann Arbor, MI: Mathesis Press.

Hedetniemi, Stephen T. (1966) "Homomorphisms of graphs and Automata". Tesis doctoral. Universidad de Michigan.

Heil, G y Harrison White (1976) “An algorithm for finding simultaneous homomorphic correspondences between graphs and their image graphs”. Behavioral Science 21:26-45.

Laumann, E.O. y F. Pappi (1979) Network of Colective Action. Nueva York Academic Press.

Lorrain, F. (1974) “Social structure, social classification and the logic of analogy” en Paul A. Ballonoff (ed) Mathematical Models of Social and Cognitive Structures. Urbana: University of Illinois Press.

Lorrain, F. y Harrison White (1971) “Strcutural equivalence of individuals in social networks”. Journal of Mathematical Sociology 1:49-80.

Magill, K.D. (1966) “Automorphisms of the semogroup of all relations on a set”. CanadianMathematical Bulletin 9, nº1.

Mandel, M. y Christopher Winship (1979) “Roles, positions and networks”. Ponenecia presentada en la reunión de la American Sociological asociation en Boston, Massachusetts.

Nadel, S.F. (1957) The Theory of Social Structure. Londres, Cohen and West.

Pattison, P. (1980) “An algebraic analysis of multiple social networks”. Tesis doctoral. Universidad de Melburne.

Sailer, L. (1978) “Structural equivalence: meaning and definition, computation and application”. Social Networks 1:73-90.

White, D.R. y Karl P. Reitz (1982) “Rethinking the role concept: homomorphisms and social networks” en en L.C. Freeman, D.R. White y A.K. Romney (eds.) Research Methods in Social Network Analysis.

White, Harrison, Scott Boorman y Ronald Breiger (1976) “Social strcuture from multiple networks I. Blockmodels of roles and positions”. American Journal of Sociology 81: 730-780.